УДК 621.396.96

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ РАСПОЗНАВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

С.Н. ЯРМОЛИК, С.В. ШАЛЯПИН

Военная академия Республики Беларусь
ВА РБ, Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 29 апреля 2003

Материалы статьи посвящены вопросам статистического анализа характеристик систем радиолокационного распознавания. Предложена методика аналитического расчета вероятностных показателей качества систем распознавания, основу которой составляет эффективная аппроксимация закона распределения межканальных разностей с помощью усеченного ряда по ортогональным полиномам Поллачека. В качестве весовой функции предложено использовать функцию Поллачека, адаптированную к искомому закону распределения, что позволило получить высокую точность при использовании небольшого числа членов ряда.

Ключевые слова: распознавание, плотность вероятности, ортогональные полиномы.

Введение

Согласно теории статистических решений, результат классификации объектов принимается с некоторой вероятностью ошибки, которая характеризует качество работы устройства. Работоспособность систем распознавания принято характеризовать с помощью набора вероятностей принятия правильных и ложных решений [1]:

$$F_{k/g} = P(A_k^*/A_g), \quad k, g=1,\dots,M,$$

где $P(A_k^*/A_g)$ — условная вероятность принятия решения в пользу k-го класса, если на входе устройства распознавания присутствует объект g-го класса.

При построении байесовских систем радиолокационного распознавания, обычно, используют следующее решающее правило [1]:

если $Z_{kl} = a_{kl} + \xi \mathbf{B}^{kl} \xi^{*T} > 0$ для всех $l = 1,\dots,M$, $l \neq k \to A_k^*$, (1)

где Z_{kl} — межканальные разности результатов обработки реализации портрета; $\mathbf{B}^{kl}$ — матрицы обработки входной гауссовской реализации портрета ξ; a_{kl} — межканальные смещения.

Такой вариант представления алгоритма работы устройства распознавания позволяет определять условные вероятности принятия решения $F_{k/g}$ путем (M–1)-кратного интегрирования в пределах от 0 до +∞ совместной плотности вероятностей M–1 межканальных разностей Z_{kl}:

$$F_{k/g} = \int\limits_0^{+\infty}\cdots\int\limits_0^{+\infty} p_{k/g}(\mathbf{Z}_{kl})d\mathbf{Z}_{kl} = \int\limits_0^{+\infty}\cdots\int\limits_0^{+\infty} p_{k/g}(Z_{k1},\ldots,Z_{k,k-1},Z_{k,k+1},\ldots,Z_{kM})dZ_{k1}\ldots dZ_{k,k-1}dZ_{k,k+1}\ldots dZ_{kM}$$

$$(k=\overline{1,\ldots,M},\ g=\overline{1,\ldots,M},\ l=\overline{1,\ldots,M},\ l\neq k), \qquad (2)$$

где $p_{k/g}(\mathbf{Z}_{kl}) = p_{k/g}(Z_{k1},\ldots,Z_{k,k-1},Z_{k,k+1},\ldots,Z_{kM})$ — закон распределения случайных межканальных разностей Z_{kl} при наличии сигнала отраженного от объекта g-го класса.

Таким образом, в основе нахождения вероятностных характеристик распознавания лежит вычисление многомерного интеграла от закона распределения случайных межканальных разностей. Очевидна сложность самого процесса интегрирования; кроме того, часто не удается аналитически выразить подынтегральную функцию.

Аппроксимация плотности вероятности выходных сигналов каналов обработки системы распознавания

Совместная плотность вероятности $p_{k/g}(Z_{k1/g}\ldots Z_{kM/g})$ может быть представлена с помощью системы ортогональных полиномов:

$$p_{k/g}(\mathbf{Z}) = \varphi_1(Z_{k1/g})\ldots\varphi_M(Z_{kM/g})\sum_{q1=0}^{\infty}\ldots\sum_{qM=0}^{\infty} c_{q1\ldots qM}Q_{q1}(Z_{k1/g})\ldots Q_{qM}(Z_{kM/g}), \qquad (3)$$

где $\varphi_l(Z_{kl/g})$ — весовая функция используемого полинома ($l=1,\ldots,M,\quad l\neq k$); $Q_{ql}(Z_{kl/g}) = \sum_{p=0}^{ql} r_{ql/p}Z_{kl/g}^{p}$ — ортогональный полином ql-й степени; r_{q_l/p_l} — коэффициенты ортогонального полинома; $c_{q1\ldots qM}$ — коэффициенты разложения в ряд.

Коэффициенты разложения могут быть представлены в виде

$$c_{q1\ldots qM} = \sum_{s1=0}^{q1}\ldots\sum_{sM=0}^{qM} r_{q1/s1}\ldots r_{qM/sM}m\{Z_{k1/g}^{s1}\ldots Z_{kM/g}^{sM}\},$$

где $m\{Z_{k1/g}^{s1}\ldots Z_{kM/g}^{sM}\}$ — математическое ожидание системы величин ($Z_{k1/g}^{s1}\ldots Z_{kM/g}^{sM}$); sl — показатель степени $Z_{kl/g}$.

Выражение для плотности вероятности (3) может быть преобразовано как

$$p_{k/g}(Z_{k1/g}\ldots Z_{kM/g}) =$$
$$= \sum_{q1=0}^{\infty}\ldots\sum_{qM=0}^{\infty}\sum_{s1=0}^{q1}\ldots\sum_{sM=0}^{qM}\sum_{p1=0}^{q1}\ldots\sum_{pM=0}^{qM} m\{Z_{k1/g}^{s1}\ldots Z_{kM/g}^{sM}\}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{M} r_{ql/sl}\, r_{ql/pl}\varphi_l(Z_{kl/g})Z_{kl/g}^{pl}. \qquad (4)$$

Исходя из гауссовости закона распределения элементов обрабатываемого портрета ξ, зная его функциональное преобразование, можно определить значения моментов искомого закона распределения:

$$m\{Z_{k1/g}^{s1},\cdots,Z_{kM/g}^{sM}\} = (-i)^{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M} si}\left.\frac{\partial^{s1+\cdots+sM}}{\partial\nu_1^{s1}\ldots\partial\nu_M^{sM}}\Theta_z(\nu)\right|_{\nu_i=0},$$

где $\Theta_z(\nu) = \exp(-i\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{M} \nu_l a_{kl}) \Big/ (2\pi)^N \det[\mathbf{I} - i\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{M} \nu_l \chi_{kl}]$ — многомерная характеристическая функция величин $\mathbf{Z}$; $\chi_{kl} = \mathbf{R}^{g+0}\mathbf{B}^{kl}$ — определяющая матрица; $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \nu_{k+1}, \dots, \nu_M\}$ — совокупность вещественных переменных.

Математические ожидания центрированных случайных величин $\tilde{Z}_k = \dfrac{\xi\hat{\mathbf{A}}^{ko}\xi^{*\grave{o}} - m\{\xi\hat{\mathbf{A}}^{ko}\xi^{*\grave{o}}\}}{\sigma\{\xi\hat{\mathbf{A}}^{ko}\xi^{*\grave{o}}\}}$ имеют вид

$$m\{\tilde{Z}_1\} = 0,\ m\{\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2\} = tr(\chi_1\chi_2),\ m\{\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3\} = 2tr(\chi_1\chi_2\chi_3),$$

$$m\{\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_4\} = 6tr(\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4) + tr(\chi_1\chi_2)tr(\chi_3\chi_4) + tr(\chi_1\chi_3)tr(\chi_2\chi_4) + tr(\chi_1\chi_4)tr(\chi_2\chi_3),$$

где $tr(\chi)$ — след матрицы χ.

Учитывая ортогональность полиномов, выражения для условных вероятностей принятия решений (4) примут вид

$$F_{k/g} = \sum_{q1=0}^{N} \dots \sum_{qM=0}^{N} \sum_{s1=0}^{q1} \dots \sum_{sM=0}^{qM} \sum_{p1=0}^{q1} \dots \sum_{pM=0}^{qM} m\{Z_{k1/g}^{s1} \dots Z_{kM/g}^{sM}\} \prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{M} r_{ql/sl}\, r_{ql/pl} \int_{\frac{-m\{Z_{kl/g}\}}{\sigma\{Z_{kl/g}\}}}^{\infty} \varphi_l(\tilde{Z}_{kl/g}) \tilde{Z}_{kl/g}^{pl} d\tilde{Z}_{kl/g}\,. \qquad (5)$$

Выбор семейства ортогональных полиномов

Для качественной аппроксимации важно правильно выбрать семейство ортогональных полиномов, что позволит использовать при расчетах небольшое число членов усеченного ряда N [2].

При разложении было использовано семейство ортонормированных полиномов Поллачека [4], представленных через степенные моменты своей весовой функции:

$$Q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \cdot \Delta_n}} \cdot \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n-1} & h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix},$$

где $\Delta_n = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n} \end{vmatrix}$ — определитель Грама; $h_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot x^n dx$ — n-й момент весовой функции полинома.

Весовая функция Поллачека имеет вид (рис. 1)

$$\varphi(x) = h(x, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\pi}(2\sin(\alpha))^{(2\cdot\lambda-1)} e^{-(\pi-2\cdot\alpha)\cdot x} \left|\tilde{A}(\lambda + ix)\right|^2,$$

где α, λ — параметры весовой функции (0<α<π, λ>0).

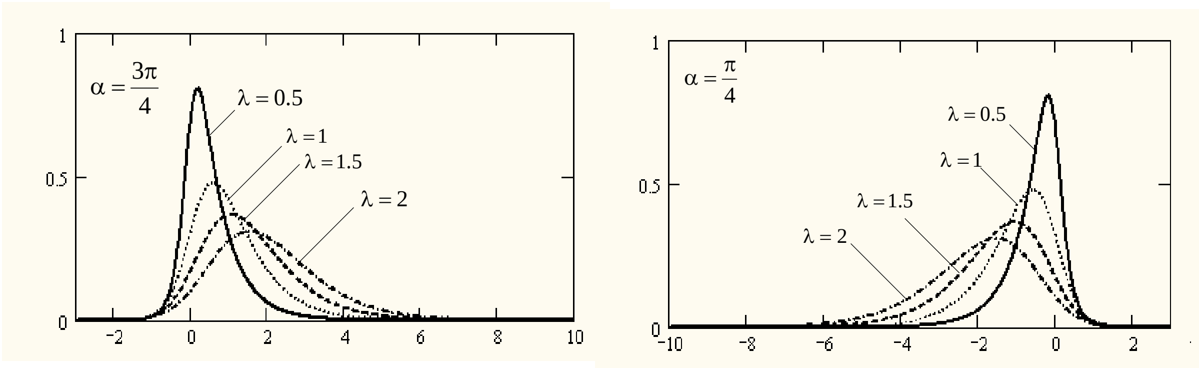

Рис. 1. График функции Поллачека

Для аппроксимации используется адаптированная к параметрам аппроксимируемого закона распределения функция Поллачека с оптимально подобранными параметрами α_{opt} и λ_{opt}, которые определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(h_i(x,\alpha,\lambda)(x-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h_i(x,\alpha,\lambda)xdx)^2)dx = m^{(2)}\{Z_{k1/g}^{s_1},\ldots,Z_{kM/g}^{s_M}\}, \quad \text{ãäå} \sum\limits_{i=1}^{M} s_i = 2, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(h_i(x,\alpha,\lambda)(x-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h_i(x,\alpha,\lambda)xdx)^3)dx = m^{(3)}\{Z_{k1/g}^{s_1},\ldots,Z_{kM/g}^{s_M}\}, \quad \text{ãäå} \sum\limits_{i=1}^{M} s_i = 3. \end{cases}$$

В этом случае качественная аппроксимация плотности вероятности обеспечивается минимальным числом членов ряда. На рис. 2 в качестве примера приведены рассчитанные по предложенной методике вероятности принятия решений при обнаружении-распознавании объектов по 10-элементному частотно-коррелированному портрету от отношения сигнал/шум γ ($\Delta f = 1$ МГц).

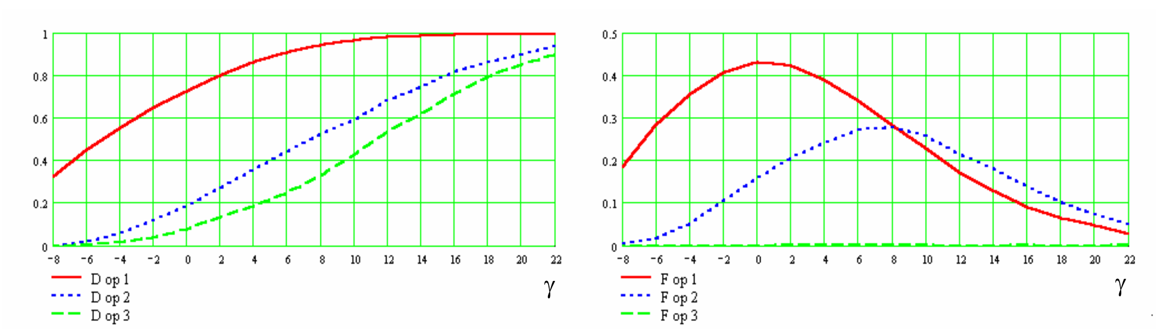

Рис. 2. Характеристики обнаружения-распознавания объектов трех классов

Заключение

Использование ортонормированных полиномов Поллачека с весовой функцией, адаптированной к параметрам аппроксимируемого закона распределения, позволяет обеспечить качественную аппроксимацию при использовании небольшого числа членов ряда. Такой подход позволяет учесть корреляцию межканальных разностей и обеспечивает высокую точность получения вероятностных показателей качества.

Предлагаемая методика анализа может использоваться разработчиками радиотехнических систем, работающими в области обнаружения и (или) распознавания.

TECHNIQUE OF THE RECOGNITION SYSTEMS CHARACTERISTICS ANALYSIS ON THE BASIS OF MULTIVARIANT PROBABILITY DENSITY OF OUTPUT SIGNALS POLYNOMIAL APPROXIMATION

S.N. YARMOLIK, S.V. SHALIAPIN

Abstract

The materials of this article are devoted to questions of the statistical analysis of recognition radar systems. The technique of analytical calculation of recognition systems probabilistic characteristic based on interchannel differences distribution law effective approximation by using truncated line on Pollachek orthogonal polynoms is developed. As weight function it is offered to use Pollachek function adapted to the required law of distribution that has allowed receiving of high accuracy by using low term of series count.

Литература

1. *Охрименко А.Е.* Основы радиолокации и РЭБ. Ч. 1. Основы радиолокации. М., 1983.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М., 1962.
3. *Pollaczek F.* // Comptes Rendus de L’Acad. des Sc. Paris, Vol. 230. 1950. P. 1563–1565.