УДК 517.972

К ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА СЛАБО РАВНОМЕРНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Л.И. МИНЧЕНКО, А.Н. ТАРАКАНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь,

Поступила в редакцию 12 июля 2005

Представлены результаты по вычислению производных по направлениям функции максимума, определенной на значениях многозначных отображений. Получены новые достаточные условия дифференцируемости по направлениям функции максимума.

Ключевые слова: функция максимума, многозначные отображения, дифференцируемость по направлениям.

Для решения многих задач оптимизации представляет интерес вычисление производных по направлениям функции максимума, определенной на значениях многозначного отображения. Знание такого рода производных позволяет, в частности, строить декомпозиционные методы решения задач высокой размерности со связанными переменными и алгоритмы решения минимаксных задач, исследовать параметрические задачи оптимизации. Производные по направлениям функции максимума играют также важную роль в построении квазидифференциального исчисления В.Ф. Демьянова и А.М. Рубинова, в развитии других разделов негладкого анализа. В работе представлены результаты по вычислению производных по направлениям функции максимума, определенной на значениях многозначных отображений.

Пусть $X = R^n$, $Y = R^m$ и $F : X \to 2^Y$ — замкнутое выпуклозначное многозначное отображение. Дополнительно будем предполагать, что многозначное отображение F равномерно ограничено в точке $x_0 \in \operatorname{dom} F$, т.е. существуют компактное множество $Y_0 \subset Y$ и окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такие, что $F(x) \subset Y_0$ при всех $x \in V(x_0)$.

Рассмотрим функцию максимума

$$\varphi(x) = \sup\left\{ f(x, y) \mid y \in F(x)\right\},$$

где $f : X \times Y \to R$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Положим

$$\omega(x) = \left\{ y \in F(x) \mid f(x, y) = \varphi(x)\right\},$$

и обозначим через $S_F(x, p)$ опорную функцию множества $F(x)$, т.е.

$$S_F(x, p) = \sup\left\{\langle p, y\rangle \mid y \in F(x)\right\},\ p \in R^m.$$

Вычислению производных по направлениям функции максимума, определенной на значениях многозначного отображения F уделено большое внимание в исследованиях [1–4]. В работах [1–4] выделены отдельные классы многозначных отображений, для которых функция максимума φ дифференцируема по направлениям при дополнительном условии выпуклости или вогнутости целевой функции по переменной y. Один из подобных классов, так называемые слабо равномерно дифференцируемые многозначные отображения, которые являются частным случаем слабо равномерно дифференцируемых снизу многозначных отображений [3], рассматривался также в [5].

Определение 1. Будем говорить, что многозначное отображение F слабо равномерно дифференцируемо снизу (сверху) в точке x_0 по направлению $\overline{x}$, если его опорная функция $S_F\left(x, p\right)$ дифференцируема (относительно x) по направлению $\overline{x}$ при всех p, причем

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0,\ \tilde{p}\to p} \varepsilon^{-1}\left[S_F\left(x_0+\varepsilon\overline{x}, \tilde{p}\right)-S_F\left(x_0, \tilde{p}\right)\right]\geq S'_F\left(x_0, p; \overline{x}\right),$$

$$\left(\liminf_{\varepsilon\downarrow 0,\ \tilde{p}\to p} \varepsilon^{-1}\left[S_F\left(x_0+\varepsilon\overline{x}, \tilde{p}\right)-S_F\left(x_0, \tilde{p}\right)\right]\leq S'_F\left(x_0, p; \overline{x}\right)\right).$$

Многозначное отображение F будем называть слабо равномерно дифференцируемым в точке x_0 по направлению $\overline{x}$, если оно слабо равномерно дифференцируемо в точке x_0 сверху и снизу.

Слабо равномерно дифференцируемые многозначные отображения включают в себя сильно дифференцируемые отображения, описанные в [3, 6–9].

Пусть

$$D^+\varphi(x_0;\overline{x})=\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}\left[\varphi(x_0+\varepsilon\overline{x})-\varphi(x_0)\right],$$

$$D_+\varphi(x_0;\overline{x})=\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}\left[\varphi(x_0+\varepsilon\overline{x})-\varphi(x_0)\right].$$

Лемма 1 [3]. *Пусть многозначное отображение F слабо равномерно дифференцируемо снизу в точке x_0 по направлению $\overline{x}$. Тогда*

$$D_+\varphi(x_0;\overline{x})\geq\left\langle\nabla_x f\left(x_0, y_0\right), \overline{x}\right\rangle+S'_F\left(x_0, \nabla_y f\left(x_0, y_0\right); \overline{x}\right)$$

для всех $y_0\in\omega(x_0)$.

Пусть

$$\Omega(p)=\left\{y\in F(x_0)\,|\,\left\langle p, y\right\rangle=S_F(x_0, p)\right\},$$

$[a,b]$ *— отрезок, соединяющий точки $a,b\in R^m$.*

Лемма 2. *Пусть многозначное отображение F слабо равномерно дифференцируемо сверху в точке x_0 по направлению $\overline{x}$. Тогда для некоторых y_0 и y^* из множества $\omega(x_0)$ найдется точка $\xi\in\left[y_0, y^*\right]$ такая, что*

$$D^+\varphi\left(x_0;\overline{x}\right)\leq\left\langle\nabla_x f(x_0,\xi), \overline{x}\right\rangle+S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0,\xi); \overline{x}\right) \qquad (1)$$

и $y_0, y^*\in\Omega\left(\nabla_y f\left(x_0,\xi\right)\right)$.

Доказательство. Пусть

$$D^{+}\varphi(x_0;\overline{x})=\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\left[\varphi(x_0+\varepsilon\overline{x})-\varphi(x_0)\right]$$

достигается на последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$.

Возьмем любую последовательность $y_k \in \omega(x_0+\varepsilon_k\overline{x})$ $k=1,2,\ldots$ Ввиду ограниченности последовательности $\{y_k\}$ можно, не убавив общности, считать ее сходящейся, т.е. $y_k \to y_0$ при $k\to\infty$. Поскольку многозначное отображение $\omega(\cdot)$ при сделанных предположениях замкнуто, то в силу [3] получаем, что $y_0 \in \omega(x_0)$.

Положим $x_k = x_0+\varepsilon_k\overline{x}$, и пусть $y_{0k} \in \Omega\left(\nabla_y f\left(x_0, y_k\right)\right)$.

Тогда, понимая под $[a,b]$ отрезок, соединяющий точки a и b, получим

$$f\left(x_k,y_k\right)-f\left(x_0,y_{0k}\right)=\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_{0k},\xi_{0k}\right),\overline{x}\right\rangle+\left\langle\nabla_y f\left(x_{0k},\xi_{0k}\right),y_k-y_{0k}\right\rangle,$$

где $x_{0k}\in\left[x_0,x_k\right]$, $\xi_{0k}\in\left[y_{0k},y_k\right]$.

Возьмем

$$y_{1k}\in\Omega\left(\nabla_y f\left(x_{0k},\xi_{0k}\right)\right).$$

Тогда существуют x_{1k} и ξ_{1k} такие, что

$$f\left(x_k,y_k\right)-f\left(x_0,y_{1k}\right)=\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_{1k},\xi_{1k}\right),\overline{x}\right\rangle+\left\langle\nabla_y f\left(x_{1k},\xi_{1k}\right),y_k-y_{1k}\right\rangle$$

и $x_{1k}\in\left[x_0,x_k\right]$, $\xi_{1k}\in\left[y_{1k},y_k\right]$.

Продолжая процесс, получим, что при $i=1,2,\ldots$ найдутся $x_{ik}\in\left[x_0,x_k\right]$, $y_{ik}\in\Omega\left(\nabla_y f\left(x_{i-1\,k},\xi_{i-1\,k}\right)\right)$, $\xi_{ik}\in\left[y_{ik},y_k\right]$ такие, что

$$f\left(x_k,y_k\right)-f\left(x_0,y_{ik}\right)=\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_{ik},\xi_{ik}\right),\overline{x}\right\rangle+\left\langle\nabla_y f\left(x_{ik},\xi_{ik}\right),y_k-y_{ik}\right\rangle.$$

При этом последовательности $\{y_{ik}\}$, $\{x_{ik}\}$, $\{\xi_{ik}\}$ ограничены при любом фиксированном k, и, следовательно, не убавив общности, можно считать их сходящимися при $i\to\infty$, т.е.

$$y_{ik}\to y_k^*,\ x_{ik}\to x_k^*,\ \xi_{ik}\to\xi_k,$$

причем $x_k^*\in\left[x_0,x_k\right]$, $\xi_k\in\left[y_k^*,y_k\right]$.

Кроме того, в силу замкнутости многозначного отображения $\Omega(\cdot)$ (см. [3]) и непрерывности $\nabla f(x,y)$ получим

$$y_k^*\in\Omega\left(\nabla_y f\left(x_k^*,\xi\right)\right), \tag{2}$$

и

$$f\left(x_k,y_k\right)-f\left(x_0,y_k^*\right)=\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_k^*,\xi_k\right),\overline{x}\right\rangle+\left\langle\nabla_y f\left(x_k^*,\xi_k\right),y_k-y_k^*\right\rangle \tag{3}$$

для всех $k=1,2,\ldots$

С учетом (1), (2) получаем

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_0)=f(x_k,y_k)-f(x_0,y_0)\le f(x_k,y_k)-f(x_0,y_k^*)=$$
$$=\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_k^*,\xi_k\right),\overline{x}\right\rangle+\left\langle\nabla_y f\left(x_k^*,\xi_k\right),y_k-y_k^*\right\rangle\le$$
$$\le\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_k^*,\xi_k\right),\overline{x}\right\rangle+\max_{y\in F(x_k)}\left\langle\nabla_y f(x_k^*,\xi_k),y\right\rangle-S_F\left(x_0,\nabla_y f(x_k^*,\xi_k)\right)=$$
$$=\varepsilon_k\left\langle\nabla_x f\left(x_k^*,\xi_k\right),\overline{x}\right\rangle+S_F\left(x_k,\nabla_y f(x_k^*,\xi_k)\right)-S_F\left(x_0,\nabla_y f(x_k^*,\xi_k)\right).$$

Поскольку последовательности $\{\xi_k\}$ и $\{y_k^*\}$ ограничены, можно считать, что $\xi_k\to\xi$, $y_k^*\to y^*$.

Разделив обе части последнего неравенства на ξ_k и переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем с учетом слабой равномерной дифференцируемости отображения F

$$D^+\xi(x_0;\overline{x})\le\left\langle\nabla_x f\left(x_0,\xi\right),\overline{x}\right\rangle+S_F'\left(x_0,\nabla_y f\left(x_0,\xi\right);\overline{x}\right), \tag{4}$$

где $\xi\in\left[y^*,y_0\right]$.

Кроме того, из (2), (3) получаем с учетом замкнутости многозначного отображения $\Omega(\cdot)$, что

$$y^*\in\Omega\left(\nabla_y f\left(x_0,\xi\right)\right),$$

$$f(x_0,y_0)-f(x_0,y^*)=\left\langle\nabla_y f\left(x_0,\xi\right),y_0-y^*\right\rangle.$$

Поскольку $y^*\in F(x_0)$, то

$$f\left(x_0,y_0\right)-f\left(x_0,y^*\right)\ge 0,$$

и, следовательно,

$$\left\langle\nabla_y f(x_0,\xi),y_0\right\rangle\ge\left\langle\nabla_y f(x_0,\xi),y^*\right\rangle=S_F\left(x_0,\nabla_y f(x_0,\xi)\right).$$

Последнее означает, что

$$\left\langle\nabla_y f(x_0,\xi),y_0\right\rangle=\left\langle\nabla_y f(x_0,\xi),y^*\right\rangle=S_F\left(x_0,\nabla_y f(x_0,\xi)\right) \tag{5}$$

и, значит,

$$f\left(x_0,y_0\right)=f\left(x_0,y^*\right),$$

т.е. $y^*\in\omega(x_0)$.

Таким образом, y^* — это точка из множества $\omega(x_0)$ такая, что $y^*\in\Omega\left(\nabla_y f(x_0,\xi)\right)$, где $\xi\in\left[y_0,y^*\right]$.

С учетом (5) получаем утверждение леммы.

Пусть $M\left(x,y\right)=\left\{p\in R^m \mid \left\langle p,y\right\rangle=S_F\left(x,p\right)\right\}$.

Известно [3], что $M\left(x,y\right)$ — замкнутый выпуклый конус.

Следствие. *При выполнении условий леммы 2*

$$\nabla_y f(x_0,y_0),\ \nabla_y f(x_0,y^*)\in M(x_0,\xi).$$

Доказательство. Данное утверждение прямо следует из равенства (5).

Лемма 3 [3]. *Пусть* $y \in F(x_0)$. *Если производная* $S'_F(x_0, p; \overline{x})$ *существует, то она положительна однородна и выпукла по* p *на* $M\left(x_0, y\right)$.

Теорема 1. *Пусть для многозначного отображения* F *слабо равномерно дифференцируемого в точке* x_0 *по направлению* $\overline{x}$ *выполнено одно из следующих условий:*

1) $co\, \omega(x_0) = \omega(x_0)$;

2) пересечение границы множества $F(x_0)$ *с* $\omega(x_0)$ *не содержит отрезков.*

Тогда функция максимума φ *дифференцируема в точке* x_0 *по направлению* $\overline{x}$, *причем*

$$\varphi'(x_0;\overline{x}) = \max_{y_0 \in \omega(x_0)} \left\{ \left\langle \nabla_x f(x_0, y_0), \overline{x} \right\rangle + S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, y_0); \overline{x}\right) \right\}. \tag{6}$$

Доказательство. Очевидно, что при выполнении условия $co\, \omega(x_0) = \omega(x_0)$ точка ξ в утверждении леммы 2 лежит в множестве $\omega(x_0)$.

При выполнении второго условия теоремы из леммы 2 следует, что $y^* = y_0$ и, следовательно, $\xi = y_0 \in \omega(x_0)$.

Таким образом, из леммы 2 получаем оценку

$$D^+\varphi(x_0;\overline{x}) \le \sup_{y_0 \in \omega(x_0)} \left\{ \left\langle \nabla_x f(x_0, y_0), \overline{x} \right\rangle + S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, y_0); \overline{x}\right) \right\}.$$

Отсюда с учетом леммы 1 получаем равенство (5).

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение* F *слабо равномерно дифференцируемо в точке* x_0 *по направлению* $\overline{x}$ *и пусть функция* f *квадратична по* x, y.

Тогда функция максимума φ *дифференцируема в точке* x_0 *по направлению* $\overline{x}$, *причем*

$$\varphi'(x_0;\overline{x}) = \left\langle \nabla_x f(x_0, \xi), \overline{x} \right\rangle + S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, \xi); \overline{x}\right),$$

где ξ *— вектор из леммы 2.*

Доказательство. Представим вектор ξ из леммы 2 в виде $\xi = \lambda y_0 + (1-\lambda) y^*$, где $\lambda \in [0,1]$.

В силу леммы 1 имеем

$$D_+\varphi(x_0;\overline{x}) \ge \left\langle \nabla_x f(x_0, y_0), \overline{x} \right\rangle + S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, y_0); \overline{x}\right)$$

и соответственно

$$D_+\varphi(x_0;\overline{x}) \ge \left\langle \nabla_x f(x_0, y^*), \overline{x} \right\rangle + S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, y^*); \overline{x}\right).$$

Умножим первое неравенство на λ, второе на $(1-\lambda)$, а затем сложим их. Получим с учетом афинности $\nabla f(x_0, y_0)$ по y, что

$$\nabla_x f(x_0, \xi) = \nabla_x f(x_0, \lambda y_0 + (1-\lambda) y^*) = \lambda \nabla_x f(x_0, y_0) + (1-\lambda) \nabla_x f(x_0, y^*),$$

и, следовательно,

$$D_+\varphi(x_0;\overline{x}) \ge \left\langle \nabla_x f(x_0, \xi), \overline{x} \right\rangle + \lambda S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, y_0); \overline{x}\right) + (1-\lambda) S'_F\left(x_0, \nabla_y f(x_0, y^*); \overline{x}\right).$$

Отсюда в силу следствия 1 и леммы 3 получаем

$$D_+\varphi(x_0;\overline{x}) \geq \left\langle \nabla_x f(x_0,\xi),\overline{x}\right\rangle + S'_F\left(x_0,\lambda\nabla_y f(x_0,y_0)+(1-\lambda)\nabla_y f(x_0,y^*);\overline{x}\right) =$$
$$= \left\langle \nabla_x f(x_0,\xi),\overline{x}\right\rangle + S'_F\left(x_0,\nabla_y f(x_0,\xi);\overline{x}\right).$$

Принимая во внимание данное неравенство и лемму 2, получаем утверждение теоремы.

ON DIRECTIONAL DIFFERENTIABILITY OF MAXIMUM FUNCTION DEFINED ON WEAKLY UNIFORMLY DIFFERENTIABLE MULTIVALUED MAPPINGS

L.I. MINCHENKO, A.N. TARAKANOV

Abstract

We present some results concerning evaluation of directional derivatives of maximum function, defined on values of multivalued mappings. We also obtain new sufficient conditions of directional differentiability of maximum function.

Литература

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление, М., 1990.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.
3. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht; Boston; London. 2002.
4. *Minchenko L., Tarakanov A.* // Optimization. 2005. Vol. 54, N 4. P. 1–10.
5. *Минченко Л.И., Волосевич А.А.* // Тезисы Междунар. конф. "Проблемы управления и приложения". Минск, 16–20 мая 2005. Минск, 2005.
6. *Тюрин Ю.Н.* // Экономика и матем. методы. 1965. Т. 1, №3. С. 391–410.
7. *Banks H.T., Jacobs M.Q.* // J. of Math. Analys. and Appl. 1970. Vol. 29. P. 246–272.
8. *Печерская Н.А.* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1981. № 7. С. 115–117.
9. *Минченко Л.И., Волосевич А.А.* //Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 3. С. 28–32.