УДК 681.5.013:681.516

СИНТЕЗ УГЛОВОЙ СИСТЕМЫ АВТОПОДСЛЕЖИВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ СОПРОВОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТА

А.А. КУН, А.Н. ЛЕВАДНЫЙ, Д. ТУАН, С.А. ШАБАН

Военная академия Республики Беларусь
ВА РБ, Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 24 мая 2003

Материалы статьи посвящены вопросам синтеза оптимальной системы сопровождения по направлению. В критерии синтеза по минимуму дисперсии ошибки включены интегральные ограничения на скорость и ускорение вращения устройства автоподслеживания. В примере получены передаточные функции разомкнутой системы сопровождения по направлению.

Ключевые слова: подвижный объект, автоподслеживание, передаточные функции.

Рассматривается система автосопровождения подвижного объекта по угловой координате. Устройство автоподслеживания обеспечивает нахождение сопровождаемого подвижного объекта в поле зрения измерителя относительной координаты, отсчитываемой от биссектрисы поля зрения (или сектора сканирования в сканирующих системах). Измеритель может быть неследящим (пеленгатор с фильтром) и следящим. Считается, что динамические свойства измерителя заданы. В работе определяется оптимальная передаточная функция разомкнутой системы сопровождения. В качестве управления принимается угловая координата биссектрисы поля зрения, т.е. выход устройства подслеживания. Основной особенностью синтеза является наличие в фазовых переменных модели задающего воздействия и в интегральных ограничениях критерия качества не только управления, но и его производных.

Модель задающего воздействия описывается уравнением

$$\dot{\varepsilon}_{о} = \frac{V_{о}\sin\left(\theta_{о} - \varepsilon_{o}\right)}{r_{o}}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{о}$ — угол места объекта; $V_{о}$ — скорость перемещения объекта; $r_{о}$ — дальность до объекта; $\theta_{о}$ — угол подъема вектора скорости объекта.

Предполагается малость угла $\left(\theta_{\hat{\imath}} - \varepsilon_{\hat{\imath}}\right)$, т.е. синтез проводится в линейном приближении. Дальность до объекта считается известной функцией времени.

Объект маневрирует с нормальным ускорением. Нормальное ускорение считается экспоненциально-коррелированным случайным процессом.

Введя относительную угловую координату объекта, получим $\varepsilon'_{\hat{\imath}} = \varepsilon_{\hat{\imath}} - \varepsilon_{\grave{a}}$, где $\varepsilon_{\grave{a}}$ — угол места биссектрисы поля зрения измерителя. При этом модель задающего воздействия в векторном виде

$$\dot{x} = Fx + Gu + D\dot{u} + S\xi. \tag{2}$$

Отработкой начальных условий пренебрежем и будем рассматривать установившийся режим работы. Поэтому критерий качества сформируем в виде

$$J = \frac{1}{2} M \int_0^t \left[x^{\text{ò}}(t) A(t) x(t) + \dot{u}^{\text{ò}}(t) B(t) \dot{u}(t) + \ddot{u}^{\text{ò}}(t) C(t) \ddot{u}(t) \right] dt = \min, \qquad (3)$$

где первое слагаемое определяет требование минимума среднего квадрата ошибки сопровождения, второе и третье слагаемые являются интегральными ограничениями скорости и ускорения вращения устройства автоподслеживания соответственно.

Коэффициенты штрафа на управление будем определять соотношениями:

$$b = \frac{x_{1\text{äîï}}^2}{\dot{u}_{\text{äîï}}^2}, \; c = \frac{x_{1\text{äîï}}^2}{\ddot{u}_{\text{äîï}}^2},$$

$x_{1\text{äîï}}$, $\dot{u}_{\text{äîï}}$, $\ddot{u}_{\text{äîï}}$ — допустимые значения ошибки, скорости и ускорения сопровождения.

Будем считать, что измеряется относительная координата, т.е. ошибка сопровождения, а уравнение измерителя имеет вид

$$z = Nx + \vartheta(t), \qquad (4)$$

где $\vartheta(t)$ — белый шум со спектральной интенсивностью R.

Введем расширенный критерий качества:

$$J_1 = \frac{1}{2} M \int_0^t \left[x^{\text{ò}} \text{À} x + \dot{u}^{\text{ò}} B \dot{u} + \ddot{u}^{\text{ò}} C \ddot{u} + \lambda^{\text{ò}} \left(Fx + Gu + D\dot{u} + S\xi - \dot{x} \right) \right] dt = \min, \qquad (5)$$

где λ — вектор неопределенных множителей Лагранжа.

Выражение в квадратных скобках без последнего слагаемого называется гамильтонианом и обозначается *H*. Следуя [1], можно найти требуемые условия оптимальности:

$$\dot{\lambda}^{\text{ò}} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \ddot{u}} \right) = 0. \qquad (7)$$

Если начальная и конечная точки траекторий процессов закреплены, то дополнительно к уравнениям (6) и (7) нужно записать уравнения граничных условий. Начальные условия здесь не учитываются, так как мы не интересуемся вызванными ими переходными процессами. Правые концы траекторий не закреплены, так как рассматриваются процессы на бесконечном интервале времени.

Используя соотношение (5), уравнения (6) и (7) можно переписать в виде

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\text{À}\bar{x} - F^{\text{ò}} \bar{\lambda}, \qquad (8)$$

$$\bar{\lambda}^{\text{ò}} G - B\ddot{u} - \dot{B}\dot{u} - \dot{D}\bar{\lambda}^{\text{ò}} - \dot{\bar{\lambda}}^{\text{ò}} D + u^{(4)T} C + 2\ddot{u}^T \dot{C} + \ddot{u}^T \ddot{C} = 0, \qquad (9)$$

где $\bar{\lambda}, \bar{x}$ — условные математические ожидания, полученные при заданной реализации $z(\tau)$.

Из уравнений (8) и (9) необходимо найти зависимость управления **u** от вектора состояний $\bar{x}$. Если матрицы в этих уравнениях являются функциями времени, то эта задача оказывается достаточно сложной. Для рассматриваемой здесь задачи $\dot{B} = \dot{D} = \dot{C} = \ddot{C} = 0$, а в матрице F "заморозим" на время возможных переходных процессов в системе сопровождения переменный коэффициент $V_o / r_o(t)$.

Применим преобразование Лапласа к (8), подставив это соотношение в уравнение (9), получим:

$$\ddot{u}(p) = B^{-1}\left(G^T + pD^T\right)\overline{x}(p)\left[E + \frac{1}{p}F^T\right]^{-1}. \tag{10}$$

Для определения оценки $\overline{x}_1$ проведем анализ уравнений оптимальной линейной фильтрации [1]. Уравнение оптимального фильтра в векторной форме запишется в виде

$$\dot{\hat{x}} = Fx + Gu + D\ddot{u} + T\left(z - N\hat{x}\right), \tag{11}$$

где матрица оптимальных коэффициентов фильтрации

$$T = PN^{ò}R^{-1}, \tag{12}$$

P — матрица ошибок оценивания вектора состояний, определяемая решением уравнений Риккати:

$$\dot{P} = FP + PF^{ò} - TRT + Q, \quad P(0) = P_0. \tag{13}$$

Из системы уравнений (11) с учетом выражения (10) можно найти оптимальную передаточную функцию фильтра. Раскрыв определители, передаточную функцию разомкнутой системы автоподслеживания можно записать в виде

$$K(p) = \frac{u(p)}{z(p)} = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{k_v\left(a_2p^2 + a_1p + 1\right)}{p\left(c_6p^6 + c_5p^5 + c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + 1\right)}, \tag{14}$$

Корни характеристического уравнения, лежащие в правой полуплоскости, должны быть отброшены, так как рассматривается установившийся режим работы системы [2]. Для этих данных передаточная функция разомкнутой системы может быть получена в виде

$$K(p) = \frac{k_v\left(T_2^2p^2 + 2\xi_2T_2p + 1\right)}{p(1 + pT)(1 + pT_1)\left(1 + 2\xi_3T_3p + T_3^2p^2\right)}, \tag{15}$$

Пример. Зададим следующие исходные данные: $Q = 8000$м^2/с^3; $\tau = 5$ с; $R = 10^{-6}$с; $r_o = 15000$ ì ; $V_o = 300$ ì/ñ .

Решение уравнений Риккати устанавливается через 15 с и установившиеся решения равны:

$p_{11} = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ðàä^2; $p_{12} = 8{,}6 \cdot 10^{-5}$ðàä^2; $p_{13} = 0{,}012$ ì $\cdot$ ñ$^{-2}$ $\cdot$ ðàä;

$p_{22} = 6{,}2 \cdot 10^{-3}$ðàä^2; $p_{23} = 1{,}25$ ì $\cdot$ ñ$^{-2}$ $\cdot$ ðàä; $p_{33} = 432$ ì^2 $\cdot$ ñ$^{-4}$.

Рассмотрим случай, когда ограничения по скорости и ускорению системы автоподслеживания отсутствуют: $c = 0, \ddot{u}_{äîï} \to \infty$ и $b = 0, \dot{u}_{äîï} \to \infty$.

Для этих данных передаточная функция разомкнутой системы может быть получена в виде

$$K(p) = \frac{k_v\left(T_2^2p^2 + 2\xi_2T_2p + 1\right)}{p(1 + pT)(1 + pT_1)}, \tag{16}$$

где $k_v = 286$ 1/с; $T = 50$с; $T_1 = 5$с; $T_2 = 1{,}3$с, $\xi_2 = 0{,}725$.

Пренебрегая единицей в звене с максимальной постоянной времени *T*, полученную передаточную функцию можно свести к виду, определяемому типовой ЛАХ – 3/2:

$$K(p)=\frac{k_w\left(1+2\xi_2T_2p+T_2^2p^2\right)}{p^2\left(1+pT_1\right)}, \tag{17}$$

где $k_w \approx 5{,}7c^{-2}$.

При наличии только ограничения по скорости $c=0, b\neq 0$ передаточная функция разомкнутой системы может быть получена в виде

$$K(p)=\frac{k_v\left(T_2^2p^2+2\xi_2T_2p+1\right)}{p\left(1+pT\right)\left(1+pT_1\right)\left(1+T_3p\right)}, \tag{18}$$

где $k_v=286\,1/c;\ T=41\ \text{с};\ T_1=5{,}8\ \text{с};\ T_2=1{,}3\ \text{с};\ T_3=0{,}15\ \text{с},\ \xi_2=0{,}725$.

Пренебрегая единицей в звене с максимальной постоянной времени *T*, полученную передаточную функцию можно свести к виду, определяемому типовой ЛАХ – 3/2 с $k_w \approx 7\ \text{с}^{-2}$. Если учесть только ограничение по ускорению $b=0, c\neq 0$, то передаточная функция разомкнутой системы может быть получена в виде

$$K(p)=\frac{k_v\left(T_2^2p^2+2\xi_2T_2p+1\right)}{p\left(1+pT\right)\left(1+pT_1\right)\left(1+2\xi_3T_3p+T_3^2p^2\right)}, \tag{19}$$

где $k_v=286\,1/\text{с};\ T=50\ \text{с};\ T_1=4\ \text{с};\ T_2=1{,}3\ \text{с};\ \xi_2=0{,}725;\ T_3=0{,}8\ \text{с};\ \xi_3=0{,}8$.

Пренебрегая единицей в звене с максимальной постоянной времени *T*, полученную передаточную функцию можно свести к виду, определяемому типовой ЛАХ – 3/2 с $k_w \approx 5{,}7\ \text{с}^{-2}$.

При учете ограничений по скорости и ускорению передаточная функция разомкнутой системы может быть получена в виде

$$K(p)=\frac{k_v\left(T_2^2p^2+2\xi_2T_2p+1\right)}{p\left(1+pT\right)\left(1+pT_1\right)\left(1+2\xi_3T_3p+T_3^2p^2\right)}, \tag{20}$$

где $k_v=286\,1/\text{с};\ T=41\ \text{с};\ T_1=4{,}6\ \text{с};\ T_2=1{,}3\ \text{с};\ \xi_2=0{,}725;\ T_3=0{,}8\ \text{с};\ \xi_3=0{,}8$.

Пренебрегая единицей в звене с максимальной постоянной времени Т, полученную передаточную функцию можно свести к виду, определяемому типовой ЛАХ – 3/2 с $k_w \approx 7\ \text{с}^{-2}$.

Как видно из примеров, постоянная времени *T* характеризует движение объекта со скоростью V_o. Постоянная времени T_1 определяется средним временем переключения маневра объекта (≈ 5 с). Дифференцирующее звено второго порядка с постоянной времени T_2 обеспечивает нормальные запасы устойчивости по фазе. В общем случае оптимальная система подслеживания должна быть близкой к астатической системе второго порядка.

Из соотношений (14) и (15) можно получить приближенное значение коэффициента преобразования:

$$k_w \approx \frac{p_{13}T}{Rr_o}.$$

Числитель этого выражения пропорционален интенсивности маневра объекта, а знаменатель — интенсивности шумов измерений и дальности до объекта.

Как видно из (16)–(20), во всех рассматриваемых случаях оптимальная передаточная функция системы автоподслеживания соответствует типовой ЛАХ – 3/2. Параметры передаточной функции зависят от допустимых значений скорости и ускорения системы автоподслеживания. Для принятых в примере значений ограничений эти параметры изменяются незначительно, что свидетельствует о согласованности ограничений по скорости и ускорению.

THE SYNTHESIS OF AUTOMATIC SEARCHING FNGLE SYSTEM OF VELOCITY AND ACCELERATION LIMITATION OF THE OBJECT TRACKING

A.A. KUN, A.N. LEVADNIY, D. TUAN, S.A. SHABAN

Abstract

The materials of this article are devoted to the matters of the optimal tracking system synthesis by its direction. According to the minimum dispersion error the integral limitation of the rotating velocity and acceleration of the autosearching device were included into the criteria of the synthesis. In the current example the transfer functions of the open-loop system of tracking by its direction have been obtained.

Литература

1. *Брайсон А., Хо-ю-ши*. Прикладная теория оптимального управления. М., 1972.
2. *Фельдбаум А.А*. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966.