

УДК 621.385.6.01

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОФИЛЯ ВОЛНОВОДА ТРАНСФОРМАТОРА МОД
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА T -ФУНКЦИЙ**

А.А. КУРАЕВ, И.В. ЛУЩИЦКАЯ, Т.Л. ПОПКОВА, С.И. ЯРОМЕНОК

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 19 апреля 2003*

В статье предложены дискретно определенные на интервале интегрирования T -функции, обладающие специальными свойствами, позволяющими решать задачи расчета нерегулярных волноводов при большом числе узловых точек. Приведены примеры расчета и оптимизации профиля трансформатора мод H_{01} в H_{02} на основе аппарата T -функций.

Ключевые слова: T -функции, нерегулярный волновод, оптимизация профиля волновода, трансформатор мод.

Введение

Наиболее эффективной процедурой при расчете нерегулярных волноводов как с вычислительной стороны, так и в отношении физической интерпретации представляется метод, основанный на отображении произвольно-нерегулярной внутренней поверхности волновода на регулярный цилиндр, коаксиал и т. д. с круговым или прямоугольным сечением [1]. Решение этой задачи традиционными методами не является затруднительным, если рассматриваются только распространяющиеся волны. Но для закритических волн численное решение граничной (двухточечной) задачи с использованием пошаговых методов типа Рунге–Кутты или Хемминга невозможно из-за их быстрой расходимости. В этом случае необходимо строить аналитические решения на системе заданных узловых точек, удовлетворяющие граничным условиям краевой задачи и представляющие собой разложение искомых функций в базисе специальных функций, обеспечивающих разрешимость получающейся системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Такие специальные дискретно определенные T -функции введены и описаны ниже.

 T -функции

Будем предполагать, что эти функции определены на системе N равноотстоящих точек t_m : t_0, t_1, \dots, t_{N-1} интервала L_N . Интервал L_N определим следующим образом:

$$L_N = 2\pi \frac{\sin(\pi/N)}{(\pi/N)} = 2N \sin(\pi/N). \quad (1)$$

$$\text{Кроме того, } t_m = mh, \quad h = L_N / N = 2 \sin(\pi/N). \quad (2)$$

Определим системы базисных функций k -го порядка первого рода $tc_{Nk}(kt_m)$ и второго рода $ts_{Nk}(kt_m)$ следующим образом:

$$tc_{Nk}(kt_m) = \cos\left(\frac{2\pi k}{L_N}t_m\right), \quad ts_{Nk}(kt_m) = \sin\left(\frac{2\pi k}{L_N}t_m\right), \quad k=-2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad k \text{ — целое число} \quad (3)$$

Введем также комплексную te_{Nk} -функцию:

$$te_{Nk}(kt_m) = tc_{Nk}(kt_m) + jts_{Nk}(kt_m). \quad (4)$$

В пределе $N \rightarrow \infty, \Delta t_N \rightarrow 0, t_m \rightarrow t$, имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} tc_{Nk}(kt_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{(\pi/N)}{\sin(\pi/N)}kt_m\right) = \cos kt, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} ts_{Nk}(kt_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{(\pi/N)}{\sin(\pi/N)}kt_m\right) = \sin kt,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} te_{Nk}(kt_m) = \cos(kt) + jsinkt = e^{jkt}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_N = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/N)}{(\pi/N)} = 2\pi.$$

Таким образом, в пределе для непрерывного аргумента t T_{Nk} -функции переходят в обычные тригонометрические функции. Однако аргументы в T -функциях и тригонометрических функциях k -го порядка различны. Это различие и реализует основное свойство T -функций на дискретном множестве точек t_m , приводящее к аналитическим решениям: производные от этих функций на множестве t_m с точностью до коэффициента равны самим функциям. Действительно:

$$tc'_{Nk}(kt_m) = -R_k ts_{Nk}(kt_m), \quad ts'_{Nk}(kt_m) = R_k tc_{Nk}(kt_m), \quad te'_{Nk}(kt_m) = jR_k te_{Nk}(kt_m),$$

$$tc''_{Nk}(kt_m) = -R_k^2 tc_{Nk}(kt_m), \quad ts''_{Nk}(kt_m) = -R_k^2 ts_{Nk}(kt_m), \quad te''_{Nk}(kt_m) = -R_k^2 te_{Nk}(kt_m), \quad (5)$$

$$R_k = \sin(\pi k/N) / \sin(\pi/N).$$

Заметим, что тригонометрические функции на дискретной сетке аргумента такими свойствами не обладают.

Взаимодействие H_{0i} волн в гофрированном волноводе с круговым сечением

Воспользуемся общей теорией нерегулярных волноводов, развитой в [1]. В рассматриваемом случае система дифференциальных уравнений для амплитуд связанных волн $H_{01}(\dot{A}_1), \dots, H_{0i}(\dot{A}_i)$ имеет вид (источники внутри отрезка волновода отсутствуют)

$$\frac{d^2 \dot{A}_i}{dT^2} + \left(1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2 \frac{1}{g^2} - \frac{1}{3} \mu_i^2 \left(\frac{1}{g} \frac{dg}{dT}\right)^2\right) \dot{A}_i -$$

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^I \left[\frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \gamma_{ij}^{(4)} \frac{d\dot{A}_j}{dT} + \left[\left(\frac{1}{g} \frac{dg}{dT}\right)^2 \gamma_{ij}^{(5)} - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dT^2} \gamma_{ij}^{(6)} \right] \dot{A}_j \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь $\dot{O} = (2\pi/\lambda)z$, z — расстояние вдоль оси волновода, $0 \leq T \leq L_0$, λ — длина волны в свободном пространстве; $g(T) = b(z)/b_{1kp}$, $b(z)$ — радиус внутренней поверхности нерегулярного волновода, b_{1kp} — критический радиус для волны H_{01} , $b_{1\epsilon\delta} = \lambda \cdot \mu_1 / 2\pi$, μ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) — корни производной функции Бесселя 1-го рода нулевого порядка ($J'_0(\mu_i) = 0$);

$$\gamma_{ij}^{(4)} = \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \frac{2J_0(\mu_i)}{J_0(\mu_j)}, \gamma_{ij}^{(5)} = \left[\frac{\mu_i \mu_j (\mu_i^2 + 3\mu_j^2)}{(\mu_i^2 - \mu_j^2)^2} \right] \frac{2J_0(\mu_i)}{J_0(\mu_j)}, \gamma_{ij}^{(6)} = -\frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \frac{2J_0(\mu_i)}{J_0(\mu_j)}.$$

В случае, когда а) вход и выход отрезка нерегулярного волновода согласованы; б) на входе и выходе выполняются условия $\frac{dg}{dT}(0) = \frac{dg}{dT}(L_0) = 0$; в) сигнал подается только с левого конца и только на волне H_{01} , граничные условия в системе (6) имеют вид [1]

$$\frac{d\dot{A}_i}{dT}(0) = j \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2} / g_0^2 \dot{A}_i(0), \frac{d\dot{A}_i}{dT}(L_0) = -j \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2} / g_L^2 \dot{A}_i(L_0), \quad (7)$$

причем при $\left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2 / g^2 > 1$ $\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2} / g^2 = -j \sqrt{\left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2 / g^2 - 1}$. Здесь $g_0 = g(0)$, $g_L = g(L_0)$.

Исходный профиль волновода зададим следующим образом:

$$g(T) = 1 + \Delta + H \cdot \sin^2 \left(a_1(T/L_0) + a_3(T/L_0)^3 + a_5(T/L_0)^5 \right). \quad (8)$$

Далее представим $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dots, \dot{A}_i$ в виде разложения в ряды по T -функциям:

$$\dot{A}_i(t_m) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_{ik} t e_{Nk} \left(\frac{kt_m}{r} \right), \quad N = N_1 + N_2 + 1, \quad i = 1, 2, \dots \text{ (обычно } N_1 = N_2 \text{)}. \quad (9)$$

Здесь N – число точек на интервале $[0; L_0]$; $r = L_0 / L_N$, где L_N — период T -функций.

Подставляя (9) в (6) с учетом (5) (для всех точек t_m , исключая первую t_1 и последнюю t_N), переходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которой множество $\{c_{ik}\}$ представляет собой вектор неизвестных, а стоящие в квадратных скобках выражения – матричные элементы СЛАУ. В крайних точках (t_1 и t_N) используется уравнение (7), выражающее граничные условия задачи.

После решения СЛАУ искомые распределения комплексных амплитуд волн $\dot{A}_1(t_m), \dots, \dot{A}_i(t_m)$ определяются по формулам (9).

Результаты расчета

Точность расчетов по уровню относительной погрешности баланса мощностей волн $\delta = 1,5\%$ во всех нижеприведенных вариантах обеспечивалась при числе узловых точек N в пределах 101–121. Расчет проводился для трансформатора моды H_{01} в моду H_{02} на нерегулярном волноводе. Трансформирующий участок представляет собой нерегулярный волновод с оптимизированным профилем. На рисунке *a* приведен оптимизированный профиль $g(T)$. Трансформация мод в этом варианте практически полная. Существенную роль в преобразовании H_{01} в H_{02} волну играет закритическая волна H_{03} , как это видно из рисунка *б*, где приведены распределения "парциальных" потоков мощностей волн $H_{01}, H_{02}, H_{03}, \dots, H_{0i}$ через поперечные сечения трансформатора в положительном направлении T (или z), $P_i = \frac{\pi}{2} J_0^2(\mu_i) Jm \left(\dot{A}_i \frac{d\dot{A}_i^*}{dt} \right)$. Отрицательные значения P_i соответствуют обратным (по T)

"парциальным" потокам мощности. В сечениях T , где $\frac{dg}{dT} = 0$ и волны энергетически не

связаны, P_i приобретают смысл реальных потоков мощностей волн H_{0i} и $P_\Sigma = \sum_{i=1}^5 P_i$ представляют собой полную мощность, переносимую через эти сечения (т. е. разность потоков мощности, идущих вправо и влево через это сечение). Контроль точности расчетов осуществлялся по сохранению суммарного потока мощности P_Σ вдоль интервала T в точках, где $\frac{dg}{dT} = 0$.

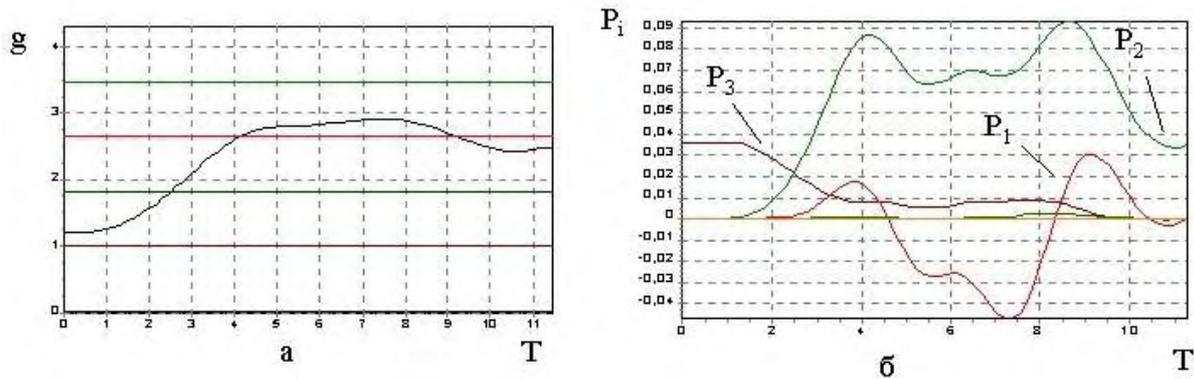


Рис. 1. Результаты полной оптимизации профиля волновода: а — оптимизированный профиль $g(T)$; б — распределение "парцильных" потоков мощностей волн

Наконец, следует указать и на эффективность использования аппарата T -функций. Прямое интегрирование системы ДУ (6) при граничных условиях (7) пошаговыми методами Рунге–Кутты и Хемминга оказалось невозможным при учете закритических волн из-за расходимости этих методов (из-за малых ошибок появляются быстро возрастающие решения). Использование же в качестве базисов представления искомого решения традиционных систем функций — тригонометрических, ортогональных полиномов, атомарных функций, не обладающих свойствами T -функций, приводит к плохо обусловленным СЛАУ и при числе узловых точек порядка 100 их решение из-за накопления ошибок не дает нужного результата.

OPTIMIZATION WAVEGUIDE PROFILE OF MODES TRANSFORMER WITH USE T-FUNCTIONS TOOLS

A.A. KURAYEV, I.V. LUSHCHYTSKAYA, T.L. POPKOVA, S.I. YAROMENOK

Abstract

Discretely defined on the integration interval the T -functions, which permit to solution irregular waveguide problems at most the nodal points, are proposed. The examples of calculation and optimization of the profile of transformer of mode H_{01} to mode H_{02} on the base of T -functions tools are presented in this paper.

Литература

1. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986.