УДК 621.372.512

ПОКАСКАДНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ РЕАКТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНОМ СОГЛАСОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ СРЕДНЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Ю.П. ВОРОПАЕВ, И.М. МЕЩЕРЯКОВ

Военная академия Республики Беларусь,
Минск, 220056, Беларусь

Поступила в редакцию 25 октября 2005

Рассматривается простой метод покаскадного расчета реактивного четырехполюсника для согласования произвольных комплексных сопротивлений в произвольной полосе частот по критерию максимума среднего гармонического значения коэффициента полезного действия. Согласующий четырехполюсник состоит из элементов L, C и идеального трансформатора сопротивлений, как правило, схемно замещаемого с сохранением амплитудно-частотной характеристики. В расчетные соотношения информация о комплексных сопротивлениях входит без погрешности аппроксимации.

Ключевые слова: согласующий четырехполюсник, максимум среднегармонического значения КПД, компенсация реактивной составляющей, идеальный трансформатор.

Постановка задачи

Согласующее устройство (СУ) в целом является четырехполюсником, состоящим из каскадного соединения чередующихся последовательно и параллельно включенных реактивных двухполюсников. Один из вариантов m-каскадного СУ представлен на рис. 1, где последовательные двухполюсники описываются реактивными сопротивлениями $f(\omega)$, а параллельные — проводимостями $\varphi(\omega)$.

Другой вариант СУ можно представить в виде схемы, дуальной к схеме рис. 1. Идеальный трансформатор (ИТ) имеет коэффициент трансформации сопротивлений n и не обязательно является оконечным каскадом СУ. На рис. 2 показаны все три варианта каскадов СУ. Сопротивления (проводимости) нагрузок A и B составляют соответственно

$$Z_A = R_A(\omega) + iX_A(\omega)\,,\; Z_B = R_B(\omega) + iX_B(\omega)\,,$$
$$Y_A = G_A(\omega) + iB_A(\omega)\,,\; Y_B = G_B(\omega) + iB_B(\omega)$$

и известны в полосе частот $\omega_{\min} = \omega_1 \le \omega_j \le \omega_N = \omega_{\max}$, $j = \overline{1, N}$, в дискретной или непрерывной (аналитической) форме.

В качестве парциального критерия качества согласования на частоте $\omega = \omega_j$ примем коэффициент полезного действия (КПД) схем (рис. 2), известные выражения для которых имеют вид

$$\eta_j = \frac{4R_{Aj}R_{Bj}}{(R_{Aj}+R_{Bj})^2 + (X_{Aj}+X_{Bj}+f_j)^2}, \qquad (1)$$

$$\eta_j = \frac{4G_{Aj}G_{Bj}}{(G_{Aj}+G_{Bj})^2 + (B_{Aj}+B_{Bj}+\varphi_j)^2}, \qquad (2)$$

$$\eta_j = \frac{4nR_{Aj}R_{Bj}}{(nR_{Aj}+R_{Bj})^2 + (nX_{Aj}+X_{Bj})^2} = \frac{4nG_{Aj}G_{Bj}}{(G_{Aj}+nG_{Bj})^2 + (B_{Aj}+nB_{Bj})^2}. \qquad (3)$$

Используем реактивные двухполюсники, у которых сопротивления $f(\omega_j) = f_j$ и проводимости $\varphi(\omega_j) = \varphi_j$ описываются простейшими физически реализуемыми функциями:

$$f_j = \omega_j L - \omega_j^{-1} C^{-1}, \qquad (4)$$

$$\varphi_j = \omega_j C - \omega_j^{-1} L^{-1}. \qquad (5)$$

В качестве интегрального значения КПД, усредненного в полосе частот согласования, возьмем выражение:

$$\overline{\eta_\Gamma} = N \Big/ \sum_{j=1}^{N} \eta_j^{-1}, \qquad (6)$$

известное как среднее гармоническое значение [1] парциальных КПД η_j, $j = \overline{1, N}.$ Тогда интегральное значение критерия качества согласования Q естественно представить [2] как величину, обратную (6):

$$Q = 1 \big/ \overline{\eta_\Gamma} = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \eta_j^{-1}. \qquad (7)$$

При этом оптимальные значения параметров L, C и n из (1)–(5) находятся из условия минимума Q, т.е. максимума гармонического среднего КПД из (6). Два фактора определяют такой выбор Q: формулы для расчета L, C и n получаются простыми и одновременно строгими; оптимизация согласования по среднему гармоническому КПД $\overline{\eta_\Gamma}$ гарантирует оптимизацию СУ по более высокому значению среднего арифметического $\overline{\eta_A}$, так как справедливо неравенство $\overline{\eta_A} \geq \overline{\eta_\Gamma}$.

Основные расчетные соотношения

Подставим (4) в (1) и далее в (7), найдем частные производные $\partial Q / \partial L$ и $\partial Q / \partial C^{-1}$, приравняем их к нулю и получим систему из двух линейных уравнений

$$\sum \frac{\omega_j}{R_{Aj}R_{Bj}} (X_{Aj} + X_{Bj} + \omega_j L - \omega_j^{-1} C^{-1}) = 0, \qquad (8)$$

$$\sum \frac{\omega_j^{-1}}{R_{Aj}R_{Bj}} (X_{Aj} + X_{Bj} + \omega_j L - \omega_j^{-1} C^{-1}) = 0, \qquad (9)$$

здесь и в дальнейшем пределы суммирования опускаем.

Решения (8), (9) имеют вид

$$L_0 = (be - ad)/\Delta, \quad C_0^{-1} = (bc - ae)/\Delta, \tag{10}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned} a = a_A + a_B = \sum \frac{X_{Aj}\omega_j}{R_{Aj}R_{Bj}} + \sum \frac{X_{Bj}\omega_j}{R_{Aj}R_{Bj}} \\ b = b_A + b_B = \sum \frac{X_{Aj}\omega_j^{-1}}{R_{Aj}R_{Bj}} + \sum \frac{X_{Bj}\omega_j^{-1}}{R_{Aj}R_{Bj}} \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} c = \sum \frac{\omega_j^2}{R_{Aj}R_{Bj}}, d = \sum \frac{\omega_j^{-2}}{R_{Aj}R_{Bj}} \\ e = \sum R_{Aj}^{-1}R_{Bj}^{-1}, \Delta = cd - e^2 > 0 \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Запишем для L и C^{-1} также частные решения, когда последовательный двухполюсник содержит либо только L, либо только C^{-1}. Считая сначала в (4) и (8) $L \neq 0, C^{-1} = 0,$ а затем в (4) и (9) $L = 0, C^{-1} \neq 0,$ находим соответственно:

$$L_0 = -a/c, \quad C_0^{-1} = b/d. \tag{13}$$

Далее запишем выражение для оптимального коэффициента трансформации n. Для этого подставим (3) в (7) и из равенства $\partial Q/\partial n = 0$ найдем, что

$$n_0 = \sqrt{\sum \frac{|Z_{Bj}|^2}{R_{Aj}R_{Bj}} \Big/ \sum \frac{|Z_{Aj}|^2}{R_{Aj}R_{Bj}}} = \sqrt{\sum \frac{|Y_{Aj}|^2}{G_{Aj}G_{Bj}} \Big/ \sum \frac{|Y_{Bj}|^2}{G_{Aj}G_{Bj}}}. \tag{14}$$

Очевидно, что при $n_0 > 1$ имеем повышающий ИТ, а при $n_0 < 1$ — понижающий.

Значения произведений активных составляющих $R_{Aj}\,R_{Bj}$ в соотношениях (8), (9), (11), (12), (14) играют роль весовых коэффициентов у слагаемых сумм. Численные исследования, проведенные при расчете СУ для различных конкретных сопротивлений, показали, что эти формулы допускают обобщение вида

$$R_{Aj}\,R_{Bj} \to R_{Aj}^{\mu}\,R_{Bj}^{\nu}, \tag{15}$$

где μ и ν — некоторые вещественные числа, включая $\mu = 0, \nu = 0$ [2].

Такая модификация расчетных соотношений является существенной и позволяет практически всегда получать более высокие значения КПД, более приемлемые формы амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) как в полосе частот согласования, так и вне ее, а также обеспечивать схемное замещение ИТ. Поэтому коэффициенты μ и ν являются дополнительными степенями свободы и расширяют возможности синтеза СУ. Заметим, что при $\mu \neq 1, \quad \nu \neq 1$ критерий качества согласования будет отличаться от (7). Таким образом, решения (8) и (9) с учетом обобщения (15) реализуют один из методов компенсации реактивных составляющих с целью увеличения КПД согласования.

Расчетные формулы для определения оптимальных значений C и L^{-1} проводимости (5) параллельно включаемого двухполюсника получаются из приведенных соотношений после очевидных замен:

$$L \leftrightarrow C, \quad R_j \to G_j, \quad X_j \to B_j. \tag{16}$$

Естественно, что после замен (16), т.е. при переходе к расчету следующего каскада СУ, могут использоваться как прежние, так и новые значения параметров μ и ν, но подробнее многовариантность μ и ν в статье не рассматривается.

Физическая реализуемость элементов СУ

В задачах из области естественных наук, техники и других, где отыскиваются параметры, обеспечивающие экстремальные значения критериев качества задачи, на эти параметры накладываются определенные ограничения (условия) в виде дополнительных соотношений. В нашем случае ограничения для решений (8) и (9) очевидны:

$$L_0 \geq 0, \quad C_0 \geq 0 \tag{17}$$

и известны как условия физической реализуемости элементов схемы СУ. Анализ показывает, что решения (10) определяют абсолютный минимум критерия $Q(L_0, C_0^{-1}) > 0$ из (7), однако значения L_0 и C_0^{-1} порознь или оба вместе могут оказаться отрицательными и тем самым утратить физический смысл. Тем не менее, и при нарушении (17) существуют положительные решения (8), (9) либо для L_0, либо для C_0^{-1} из (13), минимизирующие критерий (7), но достигаемые при этом минимальные значения Q не будут абсолютными и называются условными.

Таким образом, при выполнении условий (17) используются решения (10), а если одно из них или оба вместе оказываются отрицательными, то используется положительное решение (13). Заметим, что при согласовании физически реализуемых комплексных сопротивлений всегда находятся положительные решения либо (10), либо (13). Геометрическая интерпретация изложенного выше представлена в работе [3].

Решения (13) обычно определяют параметры первых каскадов СУ: если нагрузка в среднем является емкостной, то из (13) находим L_0 или, учитывая (16), — L_0^{-1}; если нагрузка в среднем индуктивная, то из (13) находим C_0^{-1} или с учетом (16) — C_0. Если же нагрузка в среднем имеет индуктивно-емкостной характер, то обычно реализуются и используются решения (10).

Методика расчета одностороннего согласования

Согласование двух комплексных частотно зависимых сопротивлений условно назовем двусторонним, а одного комплексного со вторым постоянным резистивным сопротивлением — односторонним. Полагая $R_{Bj} = R_0$, $X_{Bj} = 0$ во всех выше полученных соотношениях, получим формулы одностороннего согласования. Здесь можно предложить два основных этапа:

расчет каскадов СУ, содержащих элементы L, C и ИТ;

в рассчитанном на первом этапе СУ выделение и расчет схем замещения ИТ.

Изложим первый этап на примере схемы на рис. 1:

по формулам (10)–(12) находим параметры элементов первого каскада $L_1 = L_0$, $C_1^{-1} = C_0^{-1}$ или, при нарушении (17), только $L_1 = L_0$, или только $C_1^{-1} = C_0^{-1}$ из (13);

учитываем влияние первого каскада на параметры комплексного сопротивления Z_A: $\hat{X}_{Aj} = X_{Aj} + \omega_j L_1 - \omega_j^{-1} C_1^{-1}$;

от сопротивлений переходим к проводимостям по известным формулам:

$$G_{Aj} = \frac{R_{Aj}}{R_{Aj}^2 + \hat{X}_{Aj}^2}, \quad B_{Aj} = \frac{-\hat{X}_{Aj}}{R_{Aj}^2 + \hat{X}_{Aj}^2}; \tag{18}$$

используем замены (16) и по тем же формулам (10)–(12) находим элементы второго каскада $C_2 = C_0$, $L_2^{-1} = L_0^{-1}$ либо только $C_2 = C_0$, либо только $L_2^{-1} = L_0^{-1}$ из (13);

учитываем влияние второго каскада на проводимость B_{Aj} (18), от проводимостей переходим к сопротивлениям и т. д.

Отметим особенности использования параметра μ из (15): при $\mu = 1$ число каскадов не превышает двух, так как для следующего каскада значения $a = a_A = 0$ и $b = b_A = 0$ из (11); при $\mu \neq 1$ число каскадов СУ увеличивается и их количество определяется конкретными требованиями к конечным результатам согласования, а также к значениям параметров элементов *L* и *C* каскадов.

В качестве одного из каскадов целесообразно использовать ИТ с коэффициентом трансформации из (14). Как правило, ИТ трудно реализуем технически и поэтому следует схему СУ с ИТ преобразовать в бестрансформаторную с сохранением АЧХ [4].

Схемное замещение ИТ

На рис.3 и 4 представлены частные случаи схем замещения (замены) ИТ, имеющих экстремальные коэффициенты трансформации n_m. Для этих схем имеем соответственно такие соотношения:

$$n_m = \left(1 + L_1 L_2^{-1}\right)^2, \; L'_{1,2} = L_{1,2}\sqrt{n_m}, \tag{19}$$

$$n_m = \left(1 + L_1 L_2^{-1}\right)^{-2}, \; L'_{1,2} = L_{1,2}\sqrt{n_m}, \tag{20}$$

где n_m — максимально(минимально) возможный коэффициент трансформации ИТ, который вместе со схемой из элементов $L_{1,2}$ может быть замещен схемой только из элементов $L'_{1,2}$ другой структуры с сохранением АЧХ.

Схемы с емкостными элементами получаем из схем с индуктивными элементами заменами $L_{1,2} \to C_{1,2}^{-1}$ на рис.3 и 4 и в формулах (19), (20). Очевидно, что для преобразования рассчитанной на первом этапе схемы СУ в бестрансформаторную в ней должны быть, во-первых, $\urcorner$ - или Γ -образные цепи из пар элементов *L* или *C* с подходящими параметрами и, во-вторых, необходимо обеспечить соотношение $n_m = n_0$, где n_0 находится по формуле (14).

Подходящим механизмом здесь оказывается влияние на все элементы схемы СУ параметра μ из (15), необходимое значение которого находится численными методами из уравнения

$$n_m(\mu) = n_0(\mu). \tag{21}$$

Покажем это на примерах расчета СУ для согласования комплексного сопротивления $Z_{Aj} = \left(1 + i4\omega_j\right)^{-1}$ с единичным резистивным.

Пример 1

Исходная и конечная схемы СУ представлены на рис. 5. При полосе согласования $\omega_{\min} = 0{,}5$ и $\omega_{\max} = 1{,}5$ с дискретом частоты 0,1 и $\mu = 1$ находим, что $L_1 = 0{,}163,\ L_2 = 0{,}246,\ C_2 = 5{,}433,\ n_0 = 7{,}206,\ n_m = 2{,}764$ и средний КПД $\overline{\eta}_A = 0{,}671$; АЧХ показана на рис. 6 — кривая *1*. Но так как $n_m < n_0$, то возможно лишь частичное замещение ИТ, что будем считать недостатком схемы

Далее можно убедиться, что если уменьшать μ при расчете каскадов СУ из L , C и сохранять $\mu = 1$ при расчете n_0, то при $\mu \approx -0{,}17$ значение $n_m \approx n_0 = 5{,}21$. При этом структура схемы СУ сохраняется — см. рис. 5,*а*, а значения всех ее параметров изменяются: $L_1 = 0{,}221,\ L_2 = 0{,}172,\ C_2 = 7{,}894$, КПД $\overline{\eta}_A = 0{,}726$ и АЧХ — кривая 2 на рис. *6*. Здесь же кривая *3* — АЧХ схемы без СУ. Тогда в соответствии с (19) для бестрансформаторной схемы получаем: $L_2' = 0{,}393,\ L_1' = 0{,}504,\ C_2' = C_2/n_0 = 1{,}515$ (см. рис. 5,*б*). Сравнение с результатами расчета этой схемы, полученными другими методами, показало, что данное трехэлементное СУ (L_1', L_2', C_2') по критерию $\overline{\eta}_A = \max$ в заданной полосе частот является практически оптимальным.

Пример 2

При условиях примера 1 параметры исходной схемы пятиэлементного СУ (рис. 7) при $\mu = 0{,}05$ составляют: $L_1 = 0{,}356,\ L_2 = 0{,}427,\ C_2 = 3{,}328,\ C_3 = 2{,}713,\ L_3 = 0{,}497$ и при $\mu = 1$, $n_0 = 3{,}336$. С учетом (19) имеем следующее значение экстремальных коэффициентов трансформации: $n_m^C = (1 + C_3C_2^{-1})^2 = 3{,}295$; $n_m^L = (1 + L_2L_3^{-1})^2 = 3{,}456$. Так как оба значения n_m близки к значению n_0, то ИТ в исходной схеме замещается двумя способами и поэтому получаем две схемы СУ, представленные на рис. 8 и 9

Соответственно имеем: $L_1 = 0{,}356,\ L_2 = 0{,}427,\ C_3' = 1{,}495,\ C_2' = 1{,}833,\ L_3' = 1{,}638$; $L_1 = 0{,}356,\ C_2 = 3{,}328, L_3' = 0{,}924,\ L_2' = 0{,}794, C_3' = 0{,}785$. Обе схемы почти эквивалентны и обеспечивают более равномерную в полосе частот АЧХ и незначительное увеличение $\overline{\eta}_A$ по сравнению с полученным в примере 1. Отметим, что приводимые примеры содержат необходимые составляющие структурно-параметрического синтеза — параметр μ, влияющий на все элементы и характеристики СУ, а схемы замещения ИТ изменяют структуру СУ.

Двустороннее согласование

Его методика по сравнению с односторонним согласованием является более сложной, поскольку определяемый по формулам (10) или (13) каскад является общим для обеих нагрузок и, перед тем как находить следующий общий каскад, возникает задача оптимального разбиения предыдущего каскада между нагрузками A и B. Один из вариантов этого следует непосредственно из подстановки (11) в (10) и (13):

$$L_0 = L_A + L_B, \quad C_0^{-1} = C_A^{-1} + C_B^{-1}, \tag{22}$$

что позволяет L_A и C_A^{-1} отнести к нагрузке A, а составляющие L_B и C_B^{-1} — к нагрузке B. Тем самым общий каскад разделяется на два подкаскада — один входит в СУ при нагрузке A, а другой — в СУ при нагрузке B. Точно так же следующий общий каскад разделяется на два подкаскада и т. д. Для исключения ошибок при соблюдении (17) положительные решения L_0 и C_0^{-1} из (22) следует получать через положительные решения их слагаемых, например: либо

$L_A = (b_A e - a_A d)/\Delta$, либо $L_A = -a_A/c$; либо $C_A^{-1} = (b_A c - a_A e)/\Delta$, либо $C_A^{-1} = b_A/d$ и аналогично для L_B и C_B^{-1}. Вполне возможно и частичное предварительное одностороннее согласование нагрузок A и B с последующим их объединением через общие каскады.

Последним общим каскадом естественно взять ИТ, выбирая для него такое сечение схемы СУ, где ИТ обеспечивает, например, максимум среднего значения КПД. Использование параметров μ и ν из (15) и подходящих ┐ - или Γ-образных цепей, которые, учитывая структуру СУ (рис. 1), имеются практически всегда, позволяет рассчитывать схемы полного замещения ИТ, численно решая несколько более сложное уравнение $n_m(\mu, \nu) = n_0(\mu, \nu)$, аналогичное (21).

Заключение

1. Представляется существенным присутствие параметров μ и ν из (15) во всех расчетных соотношениях, что позволяет оптимизировать схему согласующего устройства — частичное изменение ее структуры и числовых значений элементов после замещения идеального трансформатора.

2. В статье не ставилась задача всестороннего рассмотрения предложенного метода и определения границ области его применения. Решение по изложенной в статье методике различных тестовых задач, выбиравшихся как преднамеренно, так и случайно, а также сравнение с результатами решения аналогичных задач известными методами показали достаточно высокую эффективность рассмотренного в статье подхода.

3. Во всех соотношениях используются безразмерные нормированные значения $\omega, L, C, Z, Y, f, \varphi$. Переход к абсолютным значениям ω_a, L_a, C_a и т.д. определяется известными выражениями: $\omega_a = \omega\omega_0, L_a = L\rho_0/\omega_0, C_a = C/\rho_0\omega_0, Z_a = Z\rho_0$ и т. д., где ω_0, ρ_0 — абсолютные значения частоты и резистивного сопротивления, входящие в условие задачи, выбираемые и фиксируемые из удобства ее решения.

CASCADE COMPENSATION OF REACTIVE COMPONENTS AT WIDE-BAND MATCHING OF COMPLEX RESISTANCES WITH OPTIMIZATION OF MEAN HARMONIOUS VALUE OF EFFICIENCY.

Y.P. VOROPAEV, I.M. MESHERJAKOV

Abstract

The topic deals with a simple method of the cascade calculation of the reactive quadruple to match random complex resistances in a random frequency band according to the maximum criterion of the mean harmonious value of efficiency. The matched quadruple consists of *L*, *C* elements and an ideal transformer that can be substituted preserving an amplitude-frequency characteristic. In the calculation the information about complex resistances is without approximation error.

Литература

1. Математическая энциклопедия. М., 1977. Т. 1. С. 1152; 1985. Т. 5. С. 1246.
2. *Воропаев Ю.П., Мещеряков И.М.* // Сб. научн. статей Военной академии Республики Беларусь. 2005. № 9. С. 21-25
3. *Воропаев Ю.П., Мещеряков И.М.* // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2005. № 2 (7). С. 48–54.
4. *Шварц Н.З.* // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16, № 11. С. 2110–2119.