УДК 621.385.6

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНОК НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МОЩНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРИБОРОВ СВЧ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А.А. КУРАЕВ, А.К. СИНИЦЫН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 1 февраля 2006

Сформулированы самосогласованные уравнения возбуждения нерегулярных волноводов с конечной проводимостью стенки. Приведены результаты тестовых расчетов затухания E_{01} и E_{02} волн в регулярном волноводе, которые иллюстрируют эффект преобразования волн вследствие импеданса границы. Показано, что в релятивистских приборах СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами влияние омических потерь начинает сказываться если рабочая частота превышает 100 ГГц.

Ключевые слова: электровакуумные приборы СВЧ, нелинейная теория, моделирование, нерегулярные волноводы, омические потери.

Введение

В современных математических моделях мощных релятивистских приборов СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами — релятивистских черенковских генераторов типа ЛБВ и ЛОВ [1], гиротронов [2,3], гиро-ЛБВ [3], гиротонов [4] — используются уравнения возбуждения, полученные при граничном условии на металлической стенке нерегулярного волновода в преобразованной системе координат вида

$$\left[\vec{\rho}_0, \dot{\vec{E}}\right]\Big|_{\rho=1} = 0\,, \tag{1}$$

$\vec{\rho}_0$ — нормаль к поверхности регулярного цилиндра.

Условие (1) соответствует бесконечной проводимости стенки, что означает пренебрежение омическими потерями в электродинамической системе. Естественно возникает вопрос об адекватности полученных на основе таких моделей оптимальных вариантов, особенно в диапазоне миллиметровых волн и в квазирезонансных режимах с высокой дифракционной добротностью системы. Ниже этот вопрос решается в отношении релятивистских ЛБВ-ЛОВ на основе общей теории возбуждения нерегулярных волноводов с конечной проводимостью стенки.

Уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного полого волновода с учетом конечной проводимости стенок

Вместо условия (1) используем приближенное граничное условие Щукина–Леонтовича [5]:

$$\left[\vec{\rho}_0 \dot{\vec{E}}\right]\Big|_{\rho=1} = -\vec{G}\left[\vec{\rho}_0\left[\vec{\rho}_0 \dot{\vec{H}}\right]\right]\Big|_{\rho=1}, \tag{2}$$

Здесь $\vec{G} = \dot{W}_{\sigma}^{0}\sqrt{\dfrac{g}{g^{11}}}\begin{pmatrix} \rho\left[g^{11}g^{22}-(g^{12})^2\right] & -g^{12}g^{13} \\ -g^{12}g^{13} & \dfrac{1}{\rho}\left[g^{11}-(g^{13})^2\right] \end{pmatrix}$,

где $\dot{W}_{\sigma}^{0} = (1+j)\sqrt{\dfrac{\pi f \mu_{\sigma}}{\sigma}}$ — волновое сопротивление стенки волновода; μ_{σ} — магнитная проницаемость стенки; σ — ее удельная проводимость; f — рабочая частота; $\rho = r/b(z)$; $b(z)$ — внутренняя граница нерегулярного волновода; компоненты метрического тензора g^{ij} имеют вид

$$\sqrt{g} = b^2\rho, \quad g^{11} = \left(1+\rho^2 b'^2\right)/b^2, \quad g^{22} = 1/(b\rho)^2, \; g^{33} = 1,$$

$$g^{12} = g^{21} = 0, \; g^{13} = -\rho b'/b = g^{31}, \; g^{23} = g^{32} = 0, \; b' = db/dz.$$

Теперь задачу сформулируем так: при граничном условии (2) решить уравнения Максвелла в преобразованной системе координат для полных компонент поля $\vec{E}^{p}, \vec{H}^{p}$ и токов $\vec{\delta}^{p}$, $\vec{\delta}^{pM}$:

$$rot\vec{H}^{p} = \varepsilon_0 \hat{g}\frac{\partial \vec{E}^{p}}{\partial t} + \hat{g}\vec{\delta}^{p}, \quad rot\vec{E}^{p} = -\mu_0 \hat{g}\frac{\partial \vec{H}^{p}}{\partial t} - \hat{g}\vec{\delta}^{pM}, \tag{3}$$

Здесь $\hat{g} = \sqrt{g}\begin{pmatrix} g^{11}/\rho & g^{12} & g^{13}/\rho \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ g^{13}/\rho & g^{32} & g^{33}/\rho \end{pmatrix}$.

Физические компоненты векторов $\vec{H}, \vec{E}, \vec{\delta}$ связаны с расчетными $\vec{H}^{p}$, $\vec{E}^{p}$, $\vec{\delta}^{p}$, $\vec{\delta}^{pM}$ следующим образом (на примере $\vec{H}$):

$$H_r = H_{\rho}^{p}/b, \quad H_{\varphi} = H_{\varphi}^{p}/b, \quad H_z = H_z^{p} - H_{\varphi}^{p}\rho b'/b.$$

Подчеркнем, что в отличие от [1] компоненты $\vec{H}^{p}$, $\vec{E}^{p}$, $\vec{\delta}^{p}$, $\vec{\delta}^{pM}$ содержат как вихревые, так и потенциальные (в общем случае содержащие разрывы) составляющие. В дальнейшем будут использованы процедуры, исключающие почленное дифференцирование (операция rot) рядов, представляющих $\vec{E}^{p}, \vec{H}^{p}$.

Представим решение задачи (2), (3) в следующем виде:

$$\vec{E}_t^{p} = \mathrm{Re}\sum_m \dot{\vec{E}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \vec{E}_z^{p} = \mathrm{Re}\sum_m \dot{\vec{E}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

где $\dot{\vec{E}}_{tm} = \sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{n=-N}^{N}\left(\dot{A}_{mni}^{e}(z)\vec{e}_{ni}^{\,e} + \dot{A}_{mni}^{\grave{I}}(z)\vec{e}_{ni}^{\,\grave{I}}\right), \quad \dot{\vec{E}}_{zm} = \sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{n=-N}^{N}\dot{C}_{mni}(z)\varphi_{ni}\vec{a}^{3}.$

$$\vec{H}_t^{p} = \mathrm{Re}\sum_m \dot{\vec{H}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \vec{H}_z^{p} = \mathrm{Re}\sum_m \dot{\vec{H}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\dot{\vec{H}}_{tm} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=-N}^{N}\left(\dot{B}_{mni}^{e}(z)\vec{h}_{ni}^{e} + \dot{B}_{mni}^{\grave{I}}(z)\vec{h}_{ni}^{\grave{I}}\right), \quad \dot{\vec{H}}_{zm} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=-N}^{N}\dot{H}_{mni}(z)\psi_{ni}\vec{a}^{3}.$$

Здесь $\varphi_{ni} = J_n\left(\nu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi}$, $\psi_{ni} = J_n\left(\mu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi}$,

$$\vec{e}^{\,e}_{ni} = \vec{\rho}_0 \nu_{ni} J'_n\left(\nu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} + \vec{\varphi}_0 j\frac{n}{\rho}J_n\left(\nu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} \ ,$$

$$\vec{e}^{\,\grave{\imath}}_{ni} = \vec{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n\left(\mu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} - \vec{\varphi}_0 \mu_{ni} J'_n\left(\mu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi},$$

$$\vec{h}^{\,e}_{ni} = -\vec{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n\left(\nu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} + \vec{\varphi}_0 \nu_{ni} J'_n\left(\nu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} \ ,$$

$$\vec{h}^{\,\grave{\imath}}_{ni} = \vec{\rho}_0 \mu_{ni} J'_n\left(\mu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} + \vec{\varphi}_0 \frac{jn}{\rho} J_n\left(\mu_{ni}\rho\right)e^{jn\varphi} \ , \quad J_n(\nu_{ni}) = 0, \ \ J'_n(\mu_{ni}) = 0 .$$

Амплитуды $\dot{A}^{e}_{mni}(z), \dot{A}^{\grave{\imath}}_{mni}(z), \dot{B}^{e}_{mni}(z), \dot{B}^{\grave{\imath}}_{mni}(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{mni}(z)$ определим из следующих проекционных равенств, эквивалентных (3):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{ rot\left(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}\right) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}\left(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}\right)\right\} \vec{e}^{\,e}_{-ni}\rho d\rho d\varphi = = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \hat{g}\vec{\delta}^{\,p}\vec{e}^{\,e}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t \ , \qquad (4)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{ rot\left(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}\right) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}\left(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}\right)\right\} \vec{e}^{\,\grave{\imath}}_{-ni}\rho d\rho d\varphi = = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \hat{g}\vec{\delta}^{\,p}\vec{e}^{\,M}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t , \qquad (5)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{ rot\left(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}\right) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}\left(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}\right)\right\} \cdot \varphi_{-ni}\vec{a}^{3}\rho d\rho d\varphi = = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \hat{g}\vec{\delta}^{\,p}\vec{a}^{3}\varphi_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t \ , \qquad (6)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{ rot\left(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}\right) + jm\omega\mu_0 \hat{g}\left(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}\right)\right\} \vec{h}^{\,e}_{-ni}\rho d\rho d\varphi = = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \hat{g}\vec{\delta}^{\,pM}\vec{h}^{\,e}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t , \qquad (7)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{ rot\left(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}\right) + jm\omega\mu_0 \hat{g}\left(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}\right)\right\} \vec{h}^{\,\grave{\imath}}_{-ni}\rho d\rho d\varphi = = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \hat{g}\vec{\delta}^{\,pM}\vec{h}^{\,M}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t , \qquad (8)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{ rot\left(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}\right) + jm\omega\mu_0 \hat{g}\left(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}\right)\right\} \psi_{-ni}\vec{a}^{3}\rho d\rho d\varphi = 0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \hat{g}\vec{\delta}^{\,pM}\vec{a}^{3}\psi_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t . \qquad (9)$$

Правые части уравнений возбуждения (4)–(9) (интегралы возбуждения) записаны в общем случае, когда координаты источников могут меняться во времени, т.е. $\rho=\rho(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $z=z(t)$. Причем эти зависимости могут содержать и негармонические составляющие.

Левые части уравнений возбуждения (4)–(9), однако, должны быть преобразованы с целью исключения операций дифференцирования $rot(\dot{\vec{H}}_{tm} + \dot{\vec{H}}_{zm}) = rot\dot{\vec{H}}_m$ и $rot(\dot{\vec{E}}_{tm} + \dot{\vec{E}}_{zm}) = rot\dot{\vec{E}}_m$, поскольку $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ содержат разрывные в общем случае потенциальные составляющие и, кроме того, ряды, представляющие эти функции имеют разрыв на границе $\rho = 1$, поскольку базисные функции удовлетворяют граничному условию (1) а не (2). Преобразования выполним с использованием следующих векторных тождеств:

$$rot\left(\dot{\vec{H}}_m\right)\vec{e}^{\,e}_{-ni} = \dot{\vec{H}}_m rot\vec{e}^{\,e}_{-ni} + div\left[\vec{H}_m, \vec{e}^{\,e}_{-ni}\right],$$

$$rot\left(\dot{\vec{H}}_m\right)\vec{e}^{\,M}_{-ni} = \dot{\vec{H}}_m rot\vec{e}^{\,M}_{-ni} + div\left[\vec{H}_m, \vec{e}^{\,M}_{-ni}\right],$$

$$rot\left(\dot{\vec{H}}_m\right)\vec{z}_0\varphi_{-ni} = \dot{\vec{H}}_m rot\left(\vec{z}_0\varphi_{-ni}\right) + div\left[\vec{H}_m, \vec{z}_0\varphi_{-ni}\right],$$

$$rot\left(\dot{\vec{E}}_m\right)\vec{h}^e_{-ni} = \dot{\vec{E}}_m rot\left(\vec{h}^e_{-ni}\right) + div\left[\vec{E}_m, \vec{h}^e_{-ni}\right],$$

$$rot\left(\vec{E}_m\right)\vec{h}^M_{-ni} = \dot{\vec{E}}_m rot\left(\vec{h}^M_{-ni}\right) + div\left[\dot{\vec{E}}_m, \vec{h}^M_{-ni}\right],$$

$$rot\left(\vec{E}_m\right)\vec{z}_0\varphi_{-ni} = \dot{\vec{E}}_m rot\left(\vec{z}_0\varphi_{-ni}\right) + div\left[\dot{\vec{E}}_m, \vec{z}_0\varphi_{-ni}\right].$$

Воспользуемся также следующим интегральным тождеством (доказательство опустим):

$$\int\limits_{S_\perp} div\vec{A}dS_\perp = \int\limits_{S_\perp} \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\vec{z}_0 dS_\perp + \oint\limits_l \vec{A}\vec{n}dl \tag{10}$$

Тождество (10) специализировано для нашей задачи, в которой $S_\perp = const\,(\rho = 1 = const)$.

Учтем также выражения базисных функций с индексами $(-ni)$ и векторные тождества для них.

$$\varphi_{-ni} = (-1)^n J_n(\nu_{ni}\rho)e^{-jn\varphi}, \quad \psi_{-ni} = (-1)^n J_n(\mu_{ni}\rho)e^{-jn\varphi},$$

$$\vec{e}^e_{-ni} = (-1)^n\left\{\vec{\rho}_0\nu_{ni}J'_n(\nu_{ni}\rho) - \vec{\varphi}_0 j\frac{n}{\rho}J_n(\nu_{ni}\rho)\right\}e^{-jn\varphi},$$

$$\vec{e}^M_{-ni} = (-1)^{n+1}\left\{\vec{\rho}_0\frac{jn}{\rho}J_n(\mu_{ni}\rho) + \vec{\varphi}_0\mu_{ni}J'_n(\mu_{ni}\rho)\right\}e^{-jn\varphi},$$

$$\vec{h}^e_{-ni} = (-1)^n\left\{\vec{\rho}_0\frac{jn}{\rho}J_n(\nu_{ni}\rho) + \vec{\varphi}_0\nu_{ni}J'_n(\nu_{ni}\rho)\right\}e^{-jn\varphi},$$

$$\vec{h}^M_{-ni} = (-1)^n\left\{\vec{\rho}_0\mu_{ni}J'_n(\mu_{ni}\rho) - \vec{\varphi}_0 j\frac{n}{\rho}J_n(\mu_{ni}\rho)\right\}e^{-jn\varphi},$$

$$J_n(\nu_{ni}) = 0, \quad J_n(\mu_{ni}) = 0.$$

Для перечисленных функций имеют место тождества

$$rot\vec{e}^e_{-ni} = 0,$$

$$rot\vec{h}^M_{-ni} = 0,$$

$$rot\left(\vec{z}_0\psi_{-ni}\right) = \vec{e}^M_{-ni},$$

$$rot\vec{e}^M_{-ni} = \vec{z}_0(-1)^n\mu^2_{ni}\psi_{-ni},$$

$$rot\vec{h}^e_{-ni} = -\vec{z}_0(-1)^n\nu^2_{ni}\varphi_{-ni}.$$

При $\rho = 1$ с учетом (2) имеем:

$$[\dot{\vec{E}}_m, \vec{z}_0\psi_{-ni}]\vec{\rho}_0 = \vec{G}\left(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz}\right)\vec{z}_0\psi_{-ni},$$

$$[\dot{\vec{E}}_m, \vec{h}^e_{-ni}]\vec{\rho}_0 = \vec{G}\left(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz}\right)\vec{h}^e_{-ni},$$

$$[\dot{\vec{E}}_m, \vec{h}^M_{-ni}]\vec{\rho}_0 = \vec{G}\left(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz}\right)\vec{h}^M_{-ni},$$

$$[\vec{\rho}_0, \vec{e}^e_{-ni}] = 0,$$

$$[\vec{\rho}_0, \vec{e}^M_{-ni}] = 0,$$

$$[\vec{\rho}_0, \vec{z}_0\varphi_{-ni}] = 0.$$

С использованием (10) и перечисленных тождеств получаем систему уравнений возбуждения в следующей математически корректной форме:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z}\dot{\vec{H}}_{tm},\vec{e}^{\,e}_{-ni}\right]\vec{z}_0-jm\omega\varepsilon_0\hat{g}\left(\dot{\vec{E}}_{tm}+\dot{\vec{E}}_{zm}\right)\vec{e}^{\,e}_{-ni}\right\}\rho d\rho d\varphi==\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\hat{g}\vec{\delta}^{\,p}\vec{e}^{\,e}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{(-1)^n\mu^2_{ni}\dot{H}_{mz}\psi_{-ni}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\dot{\vec{H}}_{tm},\vec{e}^{\,M}_{-ni}\right]\vec{z}_0-j\omega\varepsilon_0\hat{g}\left(\dot{\vec{E}}_{tm}+\dot{\vec{E}}_{zm}\right)\vec{e}^{\,M}_{-ni}\right\}\rho d\rho d\varphi==\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\hat{g}\vec{\delta}^{\,p}\vec{e}^{\,M}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{12}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{-\dot{\vec{H}}_{tm}\vec{h}^{\,e}_{-ni}-j\omega\varepsilon_0\hat{g}\left(\dot{\vec{E}}_{tm}+\dot{\vec{E}}_{zm}\right)\vec{z}_0\varphi_{-ni}\right\}\rho d\rho d\varphi==\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\hat{g}\vec{\delta}^{\,p}\vec{z}_0\varphi_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{13}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{-\dot{E}_{zm}(-1)^n\nu^2_{ni}\varphi_{-ni}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\dot{\vec{E}}_{tm},\vec{h}^{\,e}_{-ni}\right]\vec{z}_0+\right.$$
$$\left.+jm\omega\mu_0\hat{g}\left(\dot{\vec{H}}_{tm}+\dot{\vec{H}}_{zm}\right)\vec{h}^{\,e}_{-ni}\right\}\rho d\rho d\varphi+\int_0^{2\pi}\vec{G}\left(\vec{H}_{m\varphi}+\vec{H}_{mz}\right)\vec{h}^{\,e}_{-ni}\Big|_{\rho=1}d\varphi==-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\hat{g}\vec{\delta}^{\,pM}\vec{h}^{\,e}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{14}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z}\dot{\vec{E}}_{tm},\vec{h}^{\,M}_{-ni}\right]\vec{z}_0+jm\omega\mu_0\hat{g}\left(\dot{\vec{H}}_{tm}+\dot{\vec{H}}_{zm}\right)\vec{h}^{\,M}_{-ni}\rho d\rho d\varphi\right\}+$$
$$+\int_0^{2\pi}\vec{G}\left(\vec{H}_{m\varphi}+\vec{H}_{mz}\right)\vec{h}^{\,M}_{-ni}\Big|_{\rho=1}d\varphi=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\hat{g}\vec{\delta}^{\,pM}\vec{h}^{\,M}_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t, \tag{15}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left\{\dot{\vec{E}}_{tm}\vec{e}^{\,M}_{-ni}+jm\omega\mu_0\hat{g}\left(\dot{\vec{H}}_{tm}+\dot{\vec{H}}_{zm}\right)\vec{z}_0\psi_{-ni}\right\}\rho d\rho d\varphi++\int_0^{2\pi}\vec{G}\left(\vec{H}_{m\varphi}+\vec{H}_{mz}\right)\vec{z}_0\psi_{-ni}\Big|_{\rho=1}d\varphi=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\hat{g}\vec{\delta}^{\,pM}\vec{z}_0\psi_{-ni}e^{-jm\omega t}\rho d\rho d\varphi d\omega t. \tag{16}$$

Система уравнений возбуждения (11)–(16) отличается от системы (4.36)–(4.41) из [1] не только тем, что в ней учтены потери в стенках волновода, но и своей математически корректной структурой, позволившей представить полное поле, возбуждаемое в нерегулярном волноводе заданной системой источников $\vec{\delta}(t)$ и $\vec{\delta}^M(t)$ и включающее как динамические, так и квазистатические составляющие. Поэтому даже при игнорировании потерь в стенках $\left(\dot{W}_\sigma=0\right)$ система (11) – (16) предпочтительнее системы уравнений возбуждения (4.36)–(4.41) из [1].

Преобразования, выполненные здесь в отношении уравнений возбуждения нерегулярного полого волновода, легко осуществимы и для случая нерегулярного коаксиального волновода и нерегулярного волновода с прямоугольным сечением. Схема таких преобразований идентична приведенной выше.

Самосогласованные нелинейные уравнения для релятивистских черенковских генераторов на E_{0i}-модах

Рассмотрим случай $n=0$. Теперь

$$\dot{E}_{\rho m}=-\sum_{i=1}^{I}\dot{A}_{mi}(z)J_1(\nu_{0i}\rho),$$

$$\dot{E}_{zm}=-\sum_{i=1}^{I}\dot{C}_{mi}(z)J_0(\nu_{0i}\rho),$$

$$\dot{B}_{\varphi m}=-j\sum_{i=1}^{I}\dot{V}_{mi}(z)J_1(\nu_{0i}\rho).$$

Используя (11)–(16) и законы сохранения заряда, приходим к следующим безразмерным уравнениям возбуждения:

$$\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz}=\left(m\cdot W\cdot\dot{V}_{mi}+\nu_{0i}\cdot\dot{C}_{mi}\right)+(1-j)2S_{\sigma}\frac{\sqrt{1+b'^2}}{b}\sum_{k}\dot{V}_{mk}\frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})},\tag{17}$$

$$\dot{C}_{mi}=-\frac{\nu_{0i}\dot{V}_{mi}}{m\cdot W\cdot b^2}+\frac{b'}{b}\times\left(-\frac{\dot{A}_{mi}}{\nu_{0i}}+\sum_{k\neq i}\frac{2\cdot\nu_{0i}}{\nu_{0k}^2-\nu_{0i}^2}\cdot\frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})}\dot{A}_{mk}\right)-$$
$$-\frac{jG_0}{m\cdot W\cdot e_{0i}\cdot b^2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}J_0\left(\nu_{0i}\frac{r_l}{b}\right)e^{-jmW\theta_l}$$

$$\frac{d\dot{V}_{mi}}{dz}=-m\cdot W\left\{\dot{A}_{mi}+b'^2\cdot\left[\dot{A}_{mi}\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{\nu_{0i}^2}\right)+\sum_{k\neq i}\frac{4\cdot\left(\nu_{0i}^2+\nu_{0k}^2\right)}{\left(\nu_{0i}^2-\nu_{0k}^2\right)^2}\cdot\frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})}\dot{A}_{mk}\right]-\right.$$
$$\left.-bb'\cdot\left(-\frac{\dot{C}_{mi}}{\nu_{0i}}+\sum_{k\neq i}\frac{2\cdot\nu_{0k}}{\nu_{0i}^2-\nu_{0k}^2}\cdot\frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})}\dot{C}_{mk}\right)\right\}+\frac{G_0}{e_{0i}b}\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}J_1\left(\nu_{0i}\frac{r_l}{b}\right)\left(\frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}}-\frac{r_l b'}{b}\right)\right)je^{-jmW\theta_l};$$

Уравнения движения крупных частиц:

$$\begin{cases}\dfrac{dP_{rl}}{dz}=\dfrac{1}{\beta_{zl}}\left(\dfrac{\gamma_l\beta_{\varphi l}^2}{r_l}-E_{rl}-\beta_{\varphi l}F_z+\beta_z B_{\varphi}\right);\\[2ex]\dfrac{dP_{\varphi l}}{dz}=\dfrac{1}{\beta_{zl}}\left(-\dfrac{\gamma_l\beta_{rl}\beta_{\varphi l}}{r_l}-E_{\varphi}-\beta_z F_r+\beta_r F_z\right);\\[2ex]\dfrac{dP_{zl}}{dz}=\dfrac{1}{\beta_{zl}}\left(-E_z-\beta_r B_{\varphi}+\beta_{\varphi}F_r\right);\\[2ex]\dfrac{dr_l}{dz}=\dfrac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}};\quad\dfrac{d\theta_l}{dz}=\dfrac{1}{\beta_{zl}};\ \vec{P}_l=\gamma_l\vec{\beta}_l;\quad\gamma_l=\dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}_l^2}}=\sqrt{1-P_{rl}{}^2-P_{\varphi l}^2-P_{zl}^2}\end{cases}\tag{18}$$

$W\theta_l(0)=\frac{2\pi}{N}(l-0.5);\ l=1...N;\ \beta_l(0)=\beta_0;\ r_l(0)=r_0.$

Выражение физических ВЧ-полей через расчетные амплитуды с учетом полей пространственного заряда:

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{1}{b}\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{I} J_1\left(\nu_{oi}\dfrac{r}{b}\right)\mathrm{Re}\left(\dot{A}_{mi}e^{jmW\theta}\right) - S_{qr}; \quad E_\varphi = 0; \\ E_z = \mathrm{Re}\left[\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{I} J_0(\nu_{0i}\dfrac{r}{b})\dot{C}_{mi}\cdot e^{jmW\theta} + \dfrac{r\,b'}{b^2}\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{I} J_1(\nu_{0i}\dfrac{r}{b})\dot{A}_{mi}\cdot e^{jmW\theta}\right] - S_{qz}F_q; \\ B_\varphi = \dfrac{1}{b}\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{I} J_1\left(\nu_{oi}\dfrac{r}{b}\right)\mathrm{Re}\left(-j\dot{V}_{mi}e^{jmW\theta}\right) \end{cases}$$

Магнитостатическое фокусирующее поле:

$$\begin{cases} F_r = -\dfrac{1}{2}rF_0'(z) + \dfrac{1}{16}r^3F_0'''(z); \\ F_z = F_0(z) - \dfrac{1}{4}r^2F_0''(z); \;\; F_0 = \dfrac{B_0^r(z)e}{m_0\omega_0}; \;\; B_0^r(z) - \textit{поле вдоль оси} \end{cases}$$

Безразмерные параметры:

$$e_{0i} = 0{,}5J_1^2(\nu_{oi}), \;\; G_0 = \frac{eI_0}{\pi\varepsilon_0 m_0 c^3}; \;\; S_\sigma = \frac{W_\sigma^0}{(1+j)\mu_a c} = \sqrt{\frac{\pi W}{\sigma\lambda_0\mu_a c}}$$

$$S_{qz} = \frac{G_0 W}{\beta_0^2}; \; F_{ql} = \frac{1}{N}\sum_k E_{qlk}\left(\frac{z_l - z_k}{\lambda_0\beta_0/2}\right) sign(z_l - z_k); \; S_{qr} = \frac{G_0}{2r}\left(\frac{1}{\beta_{z0}} - \beta_{z0}\right).$$

Приняты следующие основные соотношения между безразмерными и размерными переменными:

$$\left(r, z, b, L\right) = \left(r^r, z^r, b^r, L^r\right)\omega_0/c; \quad W = \omega/\omega_0; \quad \theta = \omega_0 t; \quad \vec{\beta}_l = \vec{v}_{el}/c;$$

$$\vec{E} = \vec{E}^r/E_m; \quad \vec{B} = \vec{B}^r c/E_m; \;\; E_m = m_0\omega_0 c/e.$$

Система (17), (18) получила название — "уравнения возбуждения".

Сформулируем граничные условия для амплитуд $\dot{A}(z)$, $\dot{V}(z)$ в (17). Предполагаем, что при $z \le 0$ и $z \ge L$ волновод регулярный. Обозначим амплитуды прямой и встречной E_{0m} — волн регулярного волновода как

$\dot{e}_{0mi}^{\pm}$ для $z \le 0$, $\dot{e}_{Lmi}^{\pm}$ для $z \ge L$.

Тогда общие условия для амплитуд распространяющихся E_{0i}-волн на границах отрезка нерегулярного волновода запишем в виде

$$\dot{A}_{mi}(0) = \left(\dot{e}_{0mi}^{+} - \dot{e}_{0mi}^{-}\right)\cdot jk_{0i}^{e}, \quad \dot{V}_{mi}(0) = \left(\dot{e}_{0mi}^{+} + \dot{e}_{0mi}^{-}\right)\cdot W; \tag{19}$$

$$\dot{A}_{mi}(L) = \left(\dot{e}_{Lmi}^{+} - \dot{e}_{Lmi}^{-}\right)\cdot jk_{0i}^{e}, \quad \dot{V}_{mi}(L) = \left(\dot{e}_{0mi}^{+} + \dot{e}_{0mi}^{-}\right)\cdot W$$

$$k_{0i}^{e} = \sqrt{1 - (\nu_{0i}/b)^2}$$

Заметим, что для корректной постановки задачи для (17) достаточно выбрать только два из четырех уравнений (19).

При моделировании приборов, обычно на входе ЭДС контролируется (задается) амплитуда набегающей волны $\dot{e}_{0mi}^{+}$, а на выходе контролируется величина амплитуды встречной волны $\dot{e}_{Lmi}^{-}$ (при условии согласования $\dot{e}_{Lmi}^{-} = 0$). Если из (19) исключить $\dot{e}_{Lmi}^{-}$ или $\dot{e}_{0mi}^{+}$ то granичные условия **для амплитуд распространяющихся $\boldsymbol{E_{0i}}$ - волн** можно записать в следующем более удобном при моделировании приборов виде:

$$\begin{aligned} &W\cdot \dot{A}_{mi}(0)+jk_{0i}^{e}\cdot \dot{V}_{mi}(0)=jk_{0i}^{e}W\cdot 2\dot{e}_{0mi}^{+},\\ &-W\cdot \dot{A}_{mi}(L)+jk_{0i}^{e}\cdot \dot{V}_{mi}(L)=jk_{0i}^{e}W\cdot 2\dot{e}_{Lmi}^{-} \end{aligned} \qquad (20)$$

Эти соотношения также могут быть использованы для определения амплитуд прямой и встречной волн на регулярных участках волновода.

Граничные условия **для амплитуд закритических $\boldsymbol{E_{0i}}$-волн** имеют вид

$$W\dot{A}_{mi}(0)+k_{0i}^{e}\cdot \dot{V}_{mi}(0)=0\,;\ -W\dot{A}_{mi}(L)+k_{0i}^{e}\cdot \dot{V}_{mi}(L)=0. \qquad (21)$$

Физически условия (21) соответствуют затуханию закритических волн при удалении от границ отрезка нерегулярного волновода.

Безразмерная мощность, переносимая волновым полем через поперечное сечение волновода в выбранных переменных, имеет вид

$$P(z)=\sum_{mi} e_{0i}\cdot \mathrm{Im}\left[\dot{A}_{mi}(z)\cdot \dot{V}_{mi}^{*}(z)\right].$$

На регулярных участках, а также в точках волновода, где $b'=0$, мощности прямой и обратной волн в выбранных безразмерных переменных выражаются следующим образом:

$$P^{\pm}=\sum_{i} e_{0i}\cdot \mathrm{Im}\left[\left(\dot{A}_{mi}\pm \frac{j}{k_{0i}^{e}}\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz}\right)\left(\dot{V}_{mi}\pm \frac{j}{k_{0i}^{e}}\frac{d\dot{V}_{mi}}{dz}\right)^{*}\right].$$

Эффективность взаимодействия оценивается величиной волнового КПД, представляющего отношение мощности переносимой электромагнитной волной через поперечные z-сечения отрезка [0z] волновода к мощности электронного пучка:

$$\eta_{vmi}=\frac{\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}\left(\dot{A}_{mi}(z)\dot{V}_{mi}^{*}(z)\right)-\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}\left(\dot{A}_{mi}(0)\dot{V}_{mi}^{*}(0)\right)}{(\gamma_0-1)G_0/e_{0i}}. \qquad (22)$$

Электронный КПД используется для контроля точности и рассчитывается следующим образом:

$$\eta_e=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\gamma_0-\gamma_l(z)}{\gamma_0-1};\qquad \gamma_0=1/\sqrt{1-\vec{\beta}_0^{2}}\ .$$

Особенности взаимодействия отражает функция группировки, которая пропорциональна величине амплитуды *s*-гармоники тока в модулированном пучке электронов:

$$G_r=\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}[\sin(mW\theta_l)+\cos(mW\theta_l)]\right)^{1/2}.$$

Профиль нерегулярного гофрированного волновода задавался как

$$b(T)=b_0+h_v(T)\cdot \sin^2[n_v\pi(T+D_v(T))]\,; \qquad (23)$$

$T=(z-z_0)/L_v$, z_0, L_v — начало и длина нерегулярного участка; n_v — количество периодов; $h_v(T)$ — глубина гофра; $D_v(T)$ — функция задающая изменение периода; $D_v(0)=0$, $D_v(1)=0$, при $D_v(T)=0$ — период постоянный и равен в принятых единицах $d=k_0L_v/n_v$.

Функции $h_v(T)$ и $D_v(T)$ аппроксимировались разложениями по сдвигам стандартной финитной функции $\varphi_3(x)$, представляющей *B*-сплайн третьей степени:

$$h_v(T)=\sum_{k=1}^{K} h_k^v \varphi_3[T\cdot(K-3)-k+2]$$

$$\varphi_3(x)=\begin{cases} 0, \quad |x|\ge 2; \quad \dfrac{(2-x)^3}{6}, \quad 1\le x\le 2; \\ \dfrac{1}{6}\left[1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3\right], \; 0\le x\le 1; \\ \varphi_3(-x), \qquad x\le 0. \end{cases} \tag{24}$$

$$D_v(T)=\sum_{k=1}^{K} d_k^v \varphi_3[T\cdot(K+3)-k-1]$$

Заметим, что при такой аппроксимации значения коэффициентов h_k и d_k совпадают со значениями функций $h_v((k-2)/(K-3)),\;\; D_v((k+1)/(K+3))$ соответственно.

Тестовые расчеты

Прежде чем переходить к проверке оптимальных вариантов релятивистских ЛБВ-ЛОВ, полученных ранее без учета потерь в стенках электродинамической системы, необходимо протестировать полученную систему уравнений возбуждения. Это можно сделать, используя классическую теорию затухания E_{0i}-волн в регулярных волноводах [6]. При этом уместно обратить внимание на следующее. Следует различать понятия "собственные волны" и "нормальные волны" регулярного волновода. Собственные волны — это частные решения уравнений Максвелла вне источников, удовлетворяющие приближенным граничным условиям Щукина–Леонтовича на стенках волновода. Нормальные волны — частные решения, полученные при условии (1) на стенках волновода. Последние и представлены в полученной здесь системе уравнений возбуждения. Нормальные волны также используются при расчете затухания в классической литературе. Собственные волны энергетически независимы, как показано в [7, 8]. Нормальные же волны в волноводе с конечной проводимостью стенок оказываются связанными, что следует как из общей системы (11)–(16), так и специализированной для E_{0i}-волн (17). В классической же литературе по электродинамике затухание нормальных волн рассматривается как затухание изолированных волн, что, вообще говоря, некорректно. Но для доминантной E_{01}-волны при радиусе волновода и рабочей частоте, соответствующих условиям закритичности E_{0i}-волн ($i\ge 2$), это приближение может считаться приемлемым. Поэтому рассчитанный в таком приближении коэффициент затухания нормальной E_{01} волны может служить ориентиром для проверки системы (17) при $G_0=0$ и b=b_0=const.

На рис. 1 приведены результаты расчета затухания E_{01}-волны при b_0=3,5; λ=3,2 см (для усиления эффекта импеданса границы в приведенных расчетах σ по сравнению со значением для меди σ=5,6×10^7сим/м уменьшена до σ=30 сим/м). Волновод согласован на правом конце; на левом конце $e_{01}^{+}=0{,}39$; $e_{0i>1}^{+}=0$.

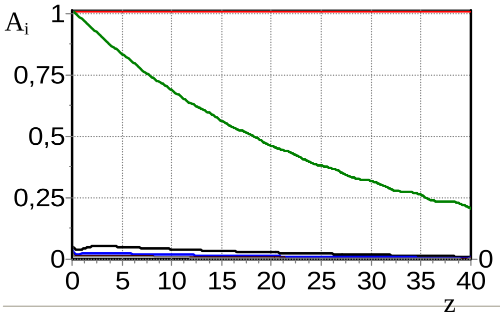

Рис. 1. b=3,5; e_{01}=0,39

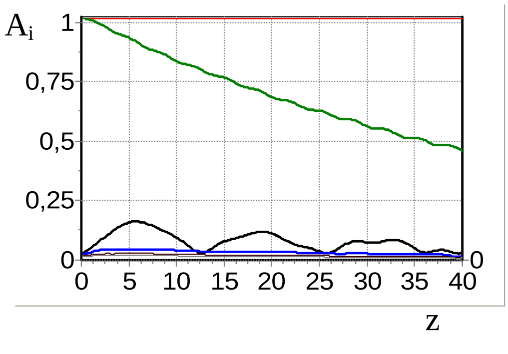

Рис. 2. b=6; e_{01}=0,185

Как видно из рис. 1, амплитуды закритических E_{02}, E_{03} волн, возбуждаемых в волноводе, пренебрежительно малы. Поэтому коэффициент затухания, рассчитанный по (17), практически совпадает по величине с тем, что приведен в литературе [6] для рассматриваемых параметров, $\alpha_{01} = S_\sigma / b_0^r k_{01}^e$ =0,079 см$^{-1}$.

На рис. 2 приведены характеристики варианта с $b = 6; e_{01}^+ = 0{,}185; e_{0i>1}^+ = 0$ и тех же значениях λ, σ . Теперь волна E_{02} распространяющаяся. Как видно из рис. 2, волна E_{02} периодически возбуждается из-за связи с волной E_{01} . Периодичность возбуждения E_{02} связана с разностью фазовых скоростей волн E_{01} и E_{02} .

На рис. 3 приведены результаты расчета для варианта с $b = 6; e_{01}^+ = 0; e_{0i>1}^+ = 0{,}42$, остальные параметры — те же. Теперь на левом конце отрезка волновода E_{02} возбуждает основную волну E_{01} . Возбуждение ее также имеет периодический характер, связанный с периодичностью преобразования энергии из E_{02} в E_{01} и обратно за счет разности их фазовых скоростей.

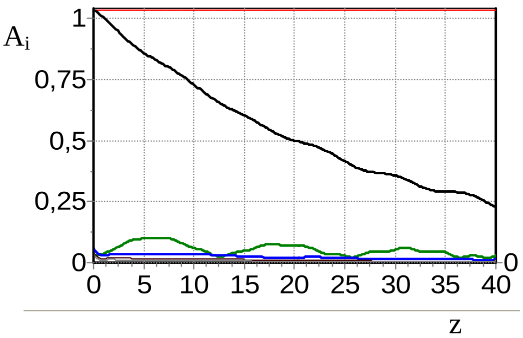

Рис. 3. b=6; e_{02}=0,42

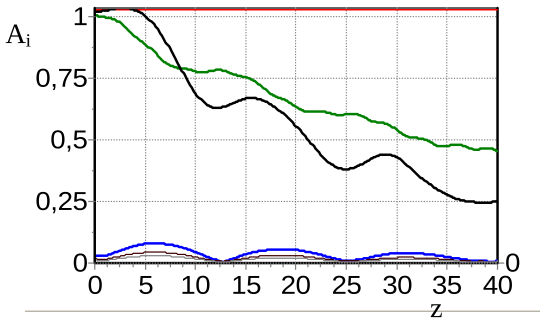

Рис. 4. b=6; e_{01}=0,185; e_{02}=0,42

На рис. 4 приведены результаты для варианта с $b = 6$ и одинаковыми входными мощностями волн E_{01} и E_{02}: $e_{01}^+ = 0{,}185; e_{0i>1}^+ = 0{,}42$. Теперь эффект преобразования выражен значительно сильнее (следует также принять во внимание и возбуждение закритических нормальных мод E_{03}, E_{04}, E_{05}, E_{06}).

Влияние конечной проводимости стенок электродинамической системы на характеристики оптимизированных вариантов релятивистских ЛБВ-ЛОВ

Для выяснения влияния конечной проводимости стенок были выполнены расчеты вариантов генераторов и усилителей [1] с учетом потерь. Оказалось, что при использовании электродинамической системы в виде отрезка гофрированного волновода, стенки которого выполнены из меди (σ=5,6×10^7 сим/м) для приборов с рабочей частотой f<10 ГГц, омические потери не превосходят 1 % от генерируемой мощности и их влияние оказывается в пределах погрешности расчетов. При f=100 ГГц омические потери достигают 3–4 % . На рис. 5. приведены характеристики варианта "длинной" ЛБВ с нерегулярным гофром:

$\beta = 0.9,\ I_0 = 510A,\ r_0 = 3.8,\ \lambda_0 = 2mm(f = 150\tilde{A}\tilde{A}\ddot{o})$,

$L_v = 39.26,\ n_v = 40,\ b_0 = 3.49,\ \eta_e = 56.5,\ \eta_v = 51.6$,

$D_v = 0,\ h_1^v = 1.386,\ h_2^v = 1.547,\ h_3^v = 1.724,\ h_4^v = 1.337,\ h_5^v = 0.575.$

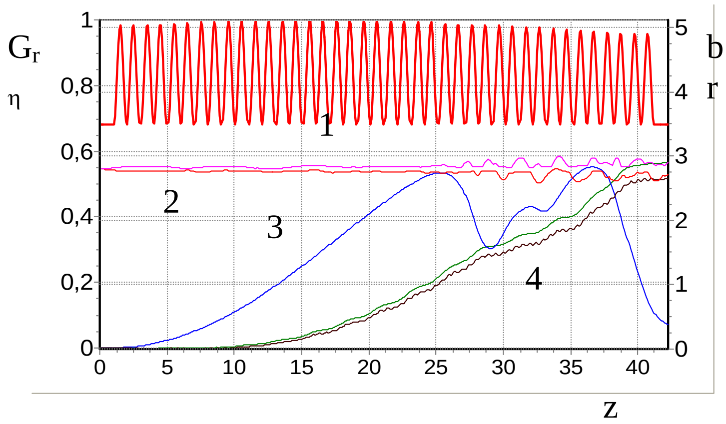

Рис. 5. *1* — *b*; *2* — r_{0min}, r_{0max}; *3* — Gr, *4* — η_e,η_v

Влияние омических потерь выражается в раздвоении кривых волнового и электронного КПД. Разность $\eta_e - \eta_v$ соответствует относительной величине мощности потерь.

INFLUENCE OF METALLIC WALLS FINITE CONDUCTIVITY ON CHARACTERISTICS OF POWERFUL RELATIVISTIC SHF DEVICES WITH NON-REGULAR ELECTRODYNAMIC SYSTEMS

A.A. KURAEV, A.K. SINITSYN

Abstract

Self-consistent equations of non-regular waveguides with finite conductivity agitation are formulated. Results of test calculations of E_{01} and E_{02} waves attenuation in regular waveguide which illustrate the effect of waves transformation due to boards impedance are given. It is shown that in relativistic SHF devices with non-regular electrodynamic systems the influence of omic losses affects if the operating frequency is higher than 100 GHz.

Литература

1. *Батура М.П., Кураев А.А., Синицын А.К.* Моделирование и оптимизация электронных приборов СВЧ. Мн., 2006, 260 с.
2. *Кураев А.А.* Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986, 208 с.
3. *Kurayev A.A., Kolosov S.V., Stekolnikov A.F., et al.* // International Journal of Electronics. 1988. Vol. 65, № 3. P. 437–462.
4. *Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Кураев А.А.* // УФН. 2004. Т. 174, № 6. С. 639–655.
5. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М., 1983.
6. *Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р., Смирнов В.П.* Справочник по элементам волноводной техники. М., 1967, 651 с.
7. *Кураев А.А.* Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. Мн., 1971, 312 с.
8. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М., 1988, 440 с.