УДК 681.325.36

ЦИФРОВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ШУМОПОДОБНЫХ СИГНАЛОВ И ОЦЕНКА ИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

А.И. ШЕМАРОВ, А.Б. ДАВЫДОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 февраля 2006

Предложен метод оценки относительной погрешности спектра амплитуд сигнала генератора псевдослучайной двоичной последовательности в зависимости от его разрядности, предназначенный для оценки возможности использования генератора в качестве калибратора каналов цифровых анализаторов спектра тестеров кабельных сетей.

Ключевые слова: генератор широкополосного равномерного случайного процесса, тестер кабельных сетей, оценка погрешности генерируемого спектра.

Введение

Для проведения измерений и калибровки аналогового канала цифровых анализаторов спектра, являющихся составной частью универсальных тестеров, применяемых для проверки кабельных сетей, возможно применение в качестве источника тестового сигнала – цифрового источника шумоподобного сигнала. Этот источник является автономным устройством, подключаемым к концу тестируемой кабельной линии, к началу которой подключается тестер. В отличие от универсального тестера, генераторы должны быть простыми и дешевыми устройствами [1]. "Цифровой” шумоподобный сигнал, генерируемый таким источником, представляет собой временной случайный процесс, близкий по своим свойствам к физическим шумам. Такой сигнал называется "псевдослучайным сигналом”. Преимуществом использования таких сигналов является воспроизводимость результатов измерений. Это позволяет использовать подобные устройства для оценки динамических параметров контролируемого объекта.

Постановка задачи

Период повторения всей последовательности должен превышать интервал, на котором производятся измерения. Наиболее часто для достижения этой цели применяют М-последовательности с максимальным периодом [2], которые при заданной разрядности формирующего регистра имеют максимальный период повторения.

Псевдослучайная последовательность формируется сдвиговыми регистрами, охваченными в общем случае "многопетлевой” обратной связью. Для получения сигнала обратной связи в каждой петле используется элемент "исключающее ИЛИ”.

Сформированная таким образом псевдослучайная двоичная последовательность, пропущенная через низкочастотный фильтр, используется для формирования шума с равномерной спектральной плотностью в рабочем диапазоне частот, то есть "белого шума" в заданном частотном диапазоне. Неравномерность спектральной плотности *М*-последовательности определяется формулой [2]:

$$\Delta = 20\lg[\sin(\pi_{\Delta} f / f_T)/(\pi_{\Delta} f / f_T)], \qquad (1)$$

где Δ — неравномерность спектральной плотности, дБ; ${}_{\Delta} f$ — полоса пропускания, Гц; f_T — тактовая частота генератора, Гц.

Формула (1) может быть использована для выбора тактовой частоты сдвигающего регистра и оценки неравномерности спектральной плотности в заданном частотном диапазоне.

Формируемая с помощью *n*-разрядного сдвигающего регистра *M*-последовательность является периодической. Период невырожденной последовательности, имеющий максимальную длительность равен

$$T_Г = (2^n - 1)_{\Delta} t, \qquad (2)$$

где *n* — разрядность сдвигающего регистра; ${}_{\Delta} t = 1/ f_T$ — период следования тактовых импульсов.

Особенность периодичности *M*-последовательности заключается в том, что ее спектр является дискретным, а не непрерывным, как у реальных шумовых процессов. Отсюда следует, что изменение разрядности генератора, построенного на сдвиговом регистре, влияет на спектральные характеристики генерируемой псевдослучайной последовательности. При этом нецелесообразно использовать максимально возможные значения $T_Г$, так как промежуток интегрирования может оказаться значительно меньшим, чем период псевдослучайной последовательности, что приводит к появлению погрешностей при проведении измерений.

Спектральные характеристики отдельных тестовых последовательностей могут значительно отличаться друг от друга, а это потребует применения усреднения характеристик в том или ином виде для получения требуемой точности измерений. Число разрядов генератора *n* должно определяться соотношением [3]

$$n > \ln(\tau_M f_T)/\ln 2, \qquad (3)$$

где τ_M — импульсная характеристика тестируемой системы.

Формируемая с помощью *n*-разрядного сдвигающего регистра *M*-последовательность является периодической, длительность которой в невырожденном случае определяется по формуле

$$T_Г = (2^n - 1)T_T, \qquad (4)$$

где $T_T = 1/ f_T$ — период следования тактовых импульсов генератора.

Длительность регистрируемой цифровым анализатором спектра периодограммы равна

$$T_P = 2^m T_d, \qquad (5)$$

где *m* — целое число отсчетов в одной периодограмме; $N = 2^m$ — размер регистрируемой выборки; $T_d = 1/f_d$ — период частоты дискретизации приемника.

При выполнении отношений $m = n,\quad T_T = T_d$ спектральные составляющие генератора псевдослучайной двоичной последовательности будут совпадать по частоте со спектральными отсчетами цифрового анализатора, на которых производится калибровка, но при этом длительность периодограммы не будет совпадать с длительностью псевдослучайного сигнала. Таким образом, в общем случае не удается выбрать промежуток интегрирования, длина которого равна целому числу периодов псевдослучайного сигнала, что в конечном итоге приводит к ошибке оценивания спектральной плотности анализируемого сигнала на заданном временном отрезке.

При технической реализации системы тестирования возникает проблема синхронизации тестера и генератора, что делает практически невозможным проведение спектрального анализа на целом числе периодов анализируемой периодограммы.

Поэтому для задач проектирования анализаторов требуется оценить погрешность изменения спектра амплитуд, вызванную несоответствием периодов генерируемого и анализируемого сигналов.

Теоретический анализ

Для оценивания перераспределения мощности по частотным полосам, можно воспользоваться выражением для определения погрешности ε_k :

$$\varepsilon_k = A_k^{'\,2} - A_k^{\,2}, \tag{6}$$

где $A_k^{'}$ — амплитуда *k*-й гармоники измеренной на интервале T_P ; A_k — амплитуда *k*-й гармоники измеренной на интервале $T_Г$.

Оценим амплитудный спектр регистрируемой периодограммы через коэффициенты Фурье и длительность периода, определяемого по формуле для определения периода невырожденной *M*-последовательности (4) и длительности регистрируемой периодограммы (5).

Коэффициенты Фурье, вычисляемые на интервале $T_Р$ можно представить в виде

$$a_k^{'} = \frac{2}{T_Г + {}_\Delta T} \int_0^{T_Г + {}_\Delta T} f(t) \cos\left[\frac{2\pi k}{T_Г}\left(1 - \frac{{}_\Delta T}{T_Г}\right)\right] t dt, \tag{7}$$

$$b_k^{'} = \frac{2}{T_Г + {}_\Delta T} \int_0^{T_Г + {}_\Delta T} f(t) \sin\left[\frac{2\pi k}{T_Г}\left(1 - \frac{{}_\Delta T}{T_Г}\right)\right] t dt, \tag{8}$$

где $f(t)$ — временная последовательность псевдослучайного сигнала, принимающая два значения (0 или амплитуда импульса — A); ${}_\Delta T = T_P - T_Г$ — разность периодов генерируемого и анализируемого периодов; *k* — номер гармонической составляющей псевдослучайного сигнала.

Преобразуя функции cos и sin в ряд Тейлора и опуская промежуточные преобразования, коэффициенты Фурье $a_k^{'}$ и $b_k^{'}$ спектра анализируемого сигнала, определенного на временном интервале $T_Р$, выражаются через коэффициенты Фурье a_k и b_k генерируемого псевдослучайного сигнала на интервале $T_Г$, следующим образом:

$$a_k^{'} = a_k + \frac{2\pi k}{2^n - 1} b_k + \Delta_1, \tag{9}$$

$$b_k^{'} = b_k - \frac{2\pi k}{2^n - 1} a_k + \Delta_2, \tag{10}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{2}{T_Г} \int_{T_Г}^{T_Г + {}_\Delta T} f(t) \cos\left[\frac{2\pi k}{T_Г}\left(1 - \frac{{}_\Delta T}{T_Г}\right)\right] t dt = \frac{1}{\pi k} f(t) \left[\sin\frac{2\pi k}{2^n - 1} - \sin\frac{2\pi k}{(2^n - 1)^2}\right], \tag{11}$$

$$\Delta_2 = \frac{2}{T_Г} \int_{T_Г}^{T_Г + {}_\Delta T} f(t) \sin\left[\frac{2\pi k}{T_Г}\left(1 - \frac{{}_\Delta T}{T_Г}\right)\right] t dt = -\frac{2}{\pi k} f(t) \left[\sin^2 \frac{2\pi k}{2^n - 1}\right]. \tag{12}$$

Максимальное значение ошибки получается при $f(t) = A$, так как при нулевом значении $f(t)$ — Δ_1 и Δ_2 равны нулю.

$$\Delta_1 = \frac{1}{\pi k} A\left[\sin\frac{2\pi k}{2^n - 1} - \sin\frac{2\pi k}{(2^n - 1)^2}\right], \tag{13}$$

$$\Delta_2 = -\frac{2}{\pi k} A\left[\sin^2\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right]. \tag{14}$$

Квадрат амплитуды псевдослучайного сигнала, анализируемого на интервале T_p равен

$$\begin{aligned}(A_k^{'})^2 = (a_k^{'})^2 + (b_k^{'})^2 = A_k^2 + \left(\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right)^2 A_k^2 + \\ + 2\left[a_k\left(\Delta_1 - \frac{2\pi k}{2^n - 1}\Delta_2\right) + b_k\left(\Delta_2 + \frac{2\pi k}{2^n - 1}\Delta_1\right)\right] + \Delta_1^2 + \Delta_2^2.\end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая, что $\varepsilon_k = A_k^{'2} - A_k^2$; $a_k = A_k \cos\varphi_k$; $b_k = A_k \sin\varphi_k$, выражение (15) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_k = \left(\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right)^2 A_k^2 + 2A_k\left[\left(\Delta_1 - \frac{2\pi k}{2^n - 1}\Delta_2\right)\cos\varphi_k + \left(\Delta_2 + \frac{2\pi k}{2^n - 1}\Delta_1\right)\right]\sin\varphi_k + \Delta_1^2 + \Delta_2^2. \tag{16}$$

В реальных технических системах отношение анализируемой гармоники k и разрядности генератора псевдослучайных чисел таково, что можно использовать приведение $\sin\alpha \approx \alpha$ без сколько либо существенного снижения точности. Отсюда

$$\Delta_1 = \frac{1}{\pi k} A\left[\sin\frac{2\pi k}{2^n - 1} - \sin\frac{2\pi k}{(2^n - 1)^2}\right] \approx \frac{2A}{2^n - 1} - \frac{2A}{(2^n - 1)^2} \approx \frac{2}{2^n - 1} A, \tag{17}$$

$$\Delta_2 = -\frac{2}{\pi k} A\left[\sin^2\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right] \approx -\frac{2\pi k}{(2^n - 1)^2} A. \tag{18}$$

Подставив значения Δ_1, полученное в выражении (17), и Δ_2, полученное в выражении (18), в выражение (16) и пренебрегая незначительными величинами квадратов Δ_1 и Δ_2, получаем ошибку оценивания спектра, обусловленную несовпадением длительности анализируемой периодограммы с длительностью псевдослучайной последовательности:

$$\varepsilon_k = \left(\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right)^2 A_k^2 + 2A_k A\left[\left(\frac{2(2^n - 1)^2 + (2\pi k)^2}{(2^n - 1)^3}\right)\cos\varphi_k + \left(\frac{2\pi k}{(2^n - 1)^2}\right)\sin\varphi_k\right]. \tag{19}$$

Относительная погрешность измерения квадрата амплитуды будет равна

$$\delta_A = \varepsilon_k / A_k^2. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\delta_A = \left(\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right)^2 + \frac{2A}{A_k}\left[\frac{2(2^n - 1)^2 + (2\pi k)^2}{(2^n - 1)^3}\cos\varphi_k + \frac{2\pi k}{(2^n - 1)^2}\sin\varphi_k\right]. \tag{21}$$

Определяя экстремум функции $y = r(\cos\varphi_k) + i(\sin\varphi_k)$, представляющий второе слагаемое выражения (21), а также учитывая, что в точке экстремума $\varphi_k = \mathrm{arctg}(i/r)$, получаем

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi k\left(2^n - 1\right)}{\left(2^n - 1\right)^2 + 2\left(\pi k\right)^2} \right). \qquad (22)$$

Выражения (21) и (22) позволяют оценить возможную относительную погрешность k-й гармоники анализируемого сигнала в зависимости от разрядности генератора псевдослучайной двоичной последовательности. Также, исходя из требуемой ошибки анализа и количества анализируемых гармоник, можно определить требуемую разрядность генератора псевдослучайной двоичной последовательности.

Заключение

Предложенный метод позволяет провести оценку относительной погрешности спектра амплитуд сигнала генератора псевдослучайной двоичной последовательности в зависимости от его разрядности. Метод может быть использован для оценки возможности использования генератора *M*-последовательности в качестве калибратора каналов цифровых анализаторов спектра тестеров кабельных сетей.

DIGITAL GENERATION OF NOISE BURST SIGNALS AND THE ESTIMATION OF THEIR STATISTICAL PROPERTIES

A.I. SHEMAROV, A.B. DAVYDOV

Abstract

The estimation method of a relative error of an amplitudes spectrum of the pseudo – random binary sequence generator signals depending on its number of digits is given here. This method is assigned to an estimation of the opportunity of the generator use as the digital spectrum analyzers channels calibrator of cable network testers.

Литература

1. *Яковлев В.В., Федоров Р.Ф.* Стохастические вычислительные машины. Л., 1974.
2. *Сикарев А., Лебедев О* Микроэлектронные устройства формирования и обработки сложных сигналов. М., 1983.
3. *Мак Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х т. / Пер. с франц. М., 1983. Т. 1
4. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники: В 2-х т. / Пер. с англ. М., 1983 г. Т. 2.