

УДК 681.511.4

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.П. КУЗНЕЦОВ, АЛЪКАТАУНА ХИКМАТ АХМЕД, Н.А. КАПАНОВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 20 октября 2006

Материалы данной статьи посвящены вопросам статистического анализа нелинейных импульсных систем. За основу авторами взят метод Галеркина приближенного расчета апостериорной функции распределения вероятностей. Рассматриваются вопросы вычисления статистических характеристик для системы, работающей на кратных частотах, а также приведены результаты численного расчета коэффициентов разложения в ряд функции ПРВ. Данные результаты могут также характеризовать скорость сходимости ряда.

Ключевые слова: системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты, плотность распределения вероятностей, математическая модель.

Приближенный расчет функции распределения вероятностей

Рассмотрим приближенный способ вычисления функции плотности распределения вероятностей (ПРВ) $W(x)$ на основе метода Галеркина. Пусть $W(x) \approx W_N(x)$. Функция $W_N(x)$ определяется в следующем виде:

$$W_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n(N) \varphi_n(x), \quad (1)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$, $n=0, 1, \dots$, — полная система ортогональных на интервале $(-\pi, \pi)$ функций.

Функция $W_N(x)$ должна удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма, поэтому должно быть справедливо равенство:

$$W_N(x) - \int_{-\pi}^{\pi} q_1(x/z) W_N(x) dz = 0. \quad (2)$$

Здесь $x \in (-\pi, \pi)$, $q_1(x/z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(x + 2\pi n/z)$ — переходная ПРВ, приведенная к интервалу $(-\pi, \pi)$.

Для произвольной функции $f(x)$ на этом основании можно записать соотношение:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[W_N(x) - \int_{-\pi}^{\pi} q(x/z) W_N(x) dz \right] dx = 0. \quad (3)$$

По условию система $\{\varphi_n(x)\}$ — полная, поэтому справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \varphi_m(x). \quad (4)$$

Подставив этот ряд в (3), получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x) \left[W_N(x) - \int_{-\pi}^{\pi} q(x/z) W_N(x) dz \right] dx = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[W_N(x) - \int_{-\pi}^{\pi} q(x/z) W_N(x) dz \right] \varphi_m(x) dx = 0, \quad m=0,1,\dots \quad (6)$$

Выберем коэффициенты $c_n(N)$ так, чтобы были равны нулю первые из интегралов (6). Запишем (6) в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_N(z) \int_{-\pi}^{\pi} q(x/z) \varphi_m(x) dx dz = \int_{-\pi}^{\pi} w_N(x) \varphi_m(x) dx, \quad m=0,1,\dots \quad (7)$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_N(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^N c_n(N) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \gamma_m c_m(N). \quad (8)$$

Здесь $\gamma_m = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m^2(x) dx$.

Обозначим интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z) \varphi_m(x) dx = l_m(z) = (q(z), \varphi_m)$, где (q, φ_m) — скалярное произведение функций $q(x/z)$ и $\varphi_m(x)$. В результате слева в (7) получаем сумму $\sum_{m=0}^N \alpha_{mn} c_n(N)$, где $\alpha_{mn} = (l_m(z), \varphi_m(z))$.

Таким образом, коэффициенты $c_m(N)$, $m=1,2,\dots,N$ должны определяться из системы линейных алгебраических уравнений:

С учетом ортогональности функций $\varphi_m(x)$ в правой части (8) получаем:

$$\sum_{n=0}^N \begin{pmatrix} \alpha_{mn} \\ \gamma_m \end{pmatrix} c_n(N) = c_m(N), \quad m = 0,1,\dots,N. \quad (9)$$

Математическая модель системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты, работающая на кратных частотах

Системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты относятся к классу систем импульсно-фазового регулирования, обобщенная структурная схема которых приведена на рис. 1.

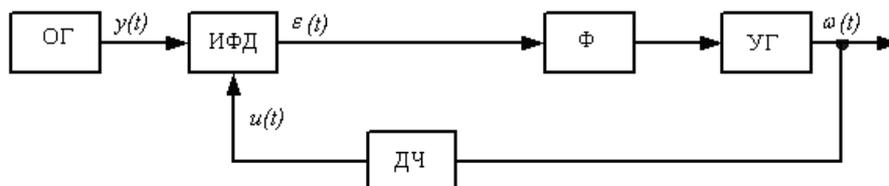


Рис. 1. Структурная схема системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты: ФНЧ — фильтр нижних частот; УГ — управляемый генератор; ДЧ — делитель частоты (характеризуется коэффициентом передачи K_2)

Рассмотрим систему импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ) при $K_2=1$. Синхронизация системы производится на частотах, кратных входной, причем коэффициент кратности выбирается либо внешними устройствами, либо в силу собственных характеристик системы.

На рис. 2 представлены временные диаграммы работы такой системы.

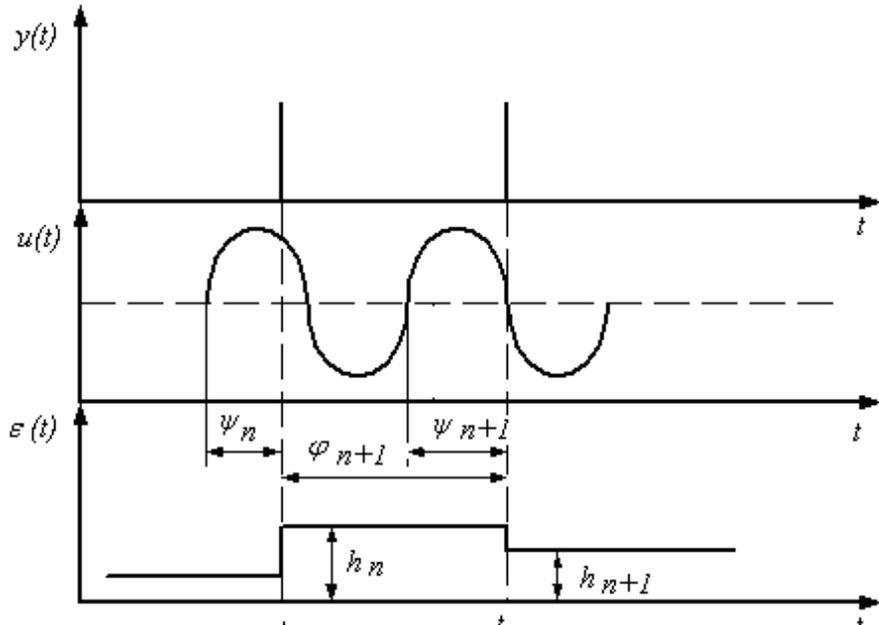


Рис. 2. Временные диаграммы работы системы ИФАПЧ: t_n — момент появления n -го импульса сигнала $y(t)$ опорного генератора; h_n — амплитуда выборки на n -м периоде дискретизации; U_m — амплитуда синусоиды; Ψ_n — начальный сдвиг фаз для n -го периода

Если непрерывная линейная часть системы (НЛЧ) описывается уравнениями состояния, то изменение вектора состояния $x(t)$ на интервале времени $t \in [t_n, t_{n+1}]$ имеет вид

$$x(t) = \Phi(t-t_n) x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t-u) B h_n du. \quad (10)$$

Здесь $x_n = x(t_n)$ — вектор состояния в момент времени t_n .

Полагая в (10) $t=t_{n+1}$ и проведя операцию интегрирования, получаем разностное уравнение непрерывной линейной части системы:

$$x_{n+1} = \Phi(T) x_n + A^{-1} (\Phi(T) - E) B h_n, \quad (11)$$

где E — единичная диагональная матрица; A^{-1} — обратная матрица.

Набег фазы выходного сигнала $\omega(t) = z(t) + g(t)$, где $g(t)$ — частота расстройки управляемого генератора, на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ будет определяться следующим выражением:

$$\varphi_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega(t) dt. \quad (12)$$

С учетом (10) и (11) выражение (12) принимает следующий вид:

$$\varphi_n = CA^{-1} (\Phi(T) - E) - CA^{-1} TB h_n + CA^{-2} (\Phi(T) - E) B h_n + Dh_n T + g_n T. \quad (13)$$

Определим сдвиг фаз Ψ_{n+1} как

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \varphi_n - 2\pi j, \quad (14)$$

где j — отношение выходной частоты к входной в установившемся режиме.

Уравнение импульсного модулятора имеет вид

$$h_{n+1} = U_m (\sin \Psi_{n+1} + 1) . \quad (15)$$

Здесь U_m — амплитуда синусоиды. Предположим, что подстраиваемый генератор представляет собой линейный безынерционный элемент с коэффициентом передачи K . Тогда значения выходной частоты для бесфильтровой ИФАПЧ в дискретные моменты времени определяются следующим выражением:

$$z_n = Kh_n + g_n . \quad (16)$$

Набег фазы выходного сигнала $\omega(t)$ на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ будет определяться как $\varphi_n = Kh_n T + gT$. Тогда математическая модель, описывающая динамику системы при $g = \text{const}$, с учетом действия шума, учитывая (14), имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - T_0 \sin x_n + T_0 \beta + n_n , \quad (17)$$

где $T_0 = -KTU_m$; $\beta = -\frac{2\pi j}{KTU_m} + \frac{g}{KU_m} + 1$; $x_n = \Psi_n$, n_n — центрированный дискретный гауссовский шум с дисперсией $D = \sigma^2$.

Вычисление статистических характеристик систем фазового управления приближенным методом

Рассмотрим импульсную систему с фазовым управлением, работающую на кратных частотах. Математическая модель такой системы получена выше и для бесфильтровой системы с учетом действия шума имеет вид (16).

Определим ПРВ сигнала рассогласования x_n . Из выражения (16) следует, что сигнал рассогласования x_n является марковским случайным процессом. Следовательно, его ПРВ удовлетворяет уравнению (2) и определяется выражением

$$q_1(z) = q(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - z + T_0 \sin z - T_0 \beta)^2}{2\sigma^2}} , \quad (18)$$

для $z \in [-\pi, \pi]$ в случае гауссова шума.

Возьмем в качестве системы ортогональных функций $\{\varphi_m(x)\}$ систему тригонометрических функций $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$. В этом случае

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \cos mx, & i = 2k, k = \overline{1, \infty}, \\ \sin mx, & i = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}; \end{cases} \quad m = \begin{cases} \frac{i}{2}, & i = 2k, k = \overline{1, \infty}, \\ \frac{(i+1)}{2}, & i = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}; \end{cases} \quad (19)$$

$$\gamma_m = \begin{cases} 2\pi, & m = 0, \\ \pi, & m \neq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Вычислим скалярное произведение $l_m(z) = (q(z), \Psi_m)$ на всей числовой оси значений $x \in (-\infty, \infty)$, тогда получим

$$l_m = \begin{cases} e^{\frac{-m^2\sigma^2}{2}} \cos m \left[z - T_0 (\sin z - \beta) \right], i = 2k, k = \overline{1, \infty}, \\ e^{\frac{-m^2\sigma^2}{2}} \sin m \left[z - T_0 (\sin z - \beta) \right], i = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (21)$$

Преобразовав (21), вычислим коэффициенты α_{ij} :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \pi A \left[J_{m-n}(mT_0) + J_{m+n}(mT_0) \right], i = 2k + 1, j = 2k, k = \overline{1, \infty}, \\ \pi A \left[J_{m-n}(mT_0) - J_{m+n}(mT_0) \right], i, j = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}, \\ \pi B \left[J_{m-n}(mT_0) + J_{m+n}(mT_0) \right], i, j = 2k, k = \overline{1, \infty}, \\ -\pi B \left[J_{m-n}(mT_0) - J_{m+n}(mT_0) \right], i = 2k, j = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $A = e^{-m^2\sigma^2/2} \cos mT_0\beta$; $B = e^{-m^2\sigma^2/2} \sin mT_0\beta$; J_k — функция Бесселя первого рода порядка k .

Очевидно, что

$$\alpha_{0n} = \begin{cases} 0, n \neq 0, \\ 2\pi, n = 0, \end{cases} \quad \alpha_{m0} = \begin{cases} 2\pi A J_m(mT_0), i = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}, \\ 2\pi A J_m(mT_0), i = 2k, k = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (23)$$

Из условия нормировки ПРВ определяем

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_N(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0(N) dx = 2\pi c_0(N) = 1. \quad (24)$$

Отсюда следует $c_0(N) = 1/2\pi$.

Запишем m -ю строку системы (9) в форме

$$c_m(N) - \left[(\alpha_{m1}/\gamma_m) c_1(N) + \dots + (\alpha_{mN}/\gamma_m) c_N(N) \right] = (\alpha_{0m}/\gamma_m) c_0(N),$$

где $m=0, 1, \dots, N$.

Система уравнений содержит N строк ($m=1, 2, \dots, N$) и может быть представлена в матричном виде:

$$[E - A] c_N^* = \beta_N^*, \quad (25)$$

где E — единичная матрица размером $N \times N$; A — матрица с элементами

$$\alpha_{mn}/\gamma_m = \alpha_{mn}/\pi, m, n = \overline{1, N}; c_N^* = [c_1(N), \dots, c_N(N)]^T,$$

$$\beta_N^* = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T,$$

$$\beta_m = (\alpha_{m0}/\gamma_m) c_0(N) = \alpha_{m0}/2\pi^2.$$

Тогда ПРВ сигнала рассогласования представима посредством выражения

$$W(x) = \sum_{n=0}^N c_n \Psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx, \quad (26)$$

где $c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} c_n(N)$.

Быстрота сходимости характеризуется табл. 1, 2. Расчет A_n выполнялся при $\beta=0$ ($B=0$), $A = e^{-m^2\sigma^2/2}$, $\sigma^2=T_0(2-T_0)/\rho$, $\rho=1$, $T_0=0$, $c_n=A_n$ (табл. 1) и $T_0=\text{var}$ (табл. 2).

Таблица 1. Расчетные значения коэффициентов разложения

Число слагаемых n	Коэффициенты A_n						
	$10A_1$	10^2A_2	10^3A_3	10^4A_4	10^5A_5	10^6A_6	10^7A_7
1	1,5753	–	–	–	–	–	–
2	1,4113	3,3144	–	–	–	–	–
3	1,4163	3,2246	4,7645	–	–	–	–
4	1,4163	3,2246	4,7131	4,8976	–	–	–
5	1,4163	3,2260	4,7136	4,8773	3,7758	–	–
6	1,4163	3,2260	4,7136	4,8775	3,7703	2,2486	–
7	1,4163	3,2260	4,7136	4,8775	3,7703	2,2476–	1,0545

Таблица 2. Рассчитанные коэффициенты при $T_0=\text{var}$

Интервал дискретизации T_0	Коэффициенты A_n				
	$10A_1$	10^2A_2	10^3A_3	10^4A_4	10^5A_5
0,5	1,4527	2,7539	2,4445	1,0351	0,2092
0,1	1,4163	3,2260	4,7136	4,8775	3,7703
0,05	1,4179	3,3173	5,1368	5,8433	5,1787
0,01	1,4202	3,3935	5,4855	6,6699	6,4807
0,001	1,4208	3,4410	5,5647	6,8603	6,7903
0,0001	1,4209	3,4127	5,5726	6,8795	6,8216

На рис. 3 представлены зависимости ПРВ, рассчитанные посредством пакета MATLAB по методу Галеркина, коэффициенты разложения представлены в табл. 1.

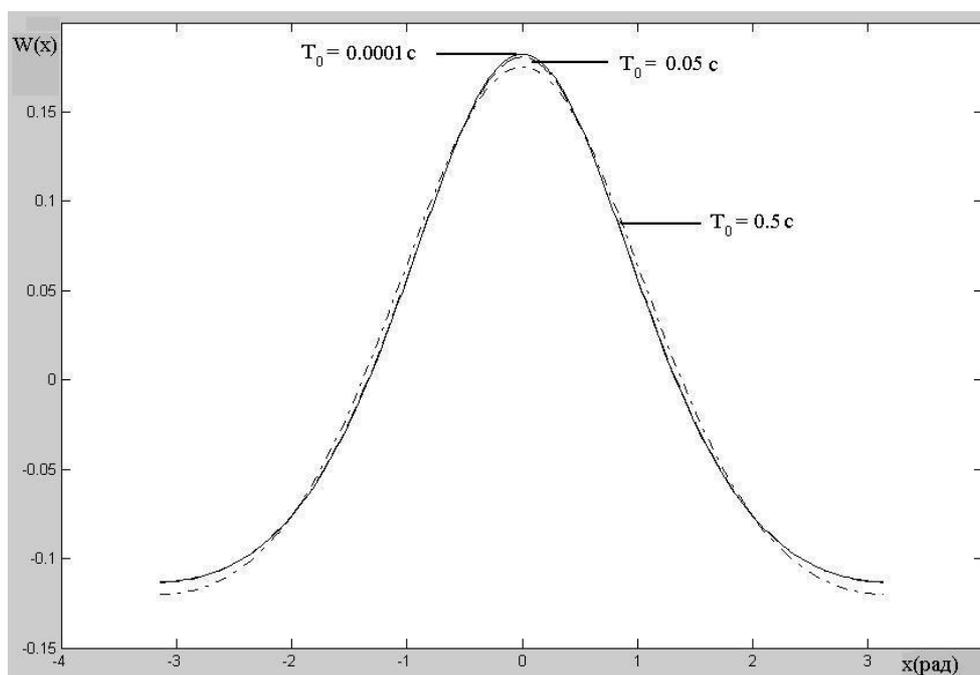


Рис. 3. ПРВ сигнала рассогласования дискретной системы фазового управления, диапазон фазового рассогласования: $(-\pi, \pi)$. Характеристика, представленная пунктиром — для разложения с одной гармонической составляющей ряда разложения, непрерывная — для трех составляющих ряда

На рис. 4 приведены зависимости ПРВ с фиксированным числом составляющих (коэффициенты разложения представлены в табл. 2) и различными значениями параметра T_0 (расчеты проводились с помощью программного пакета MATLAB).

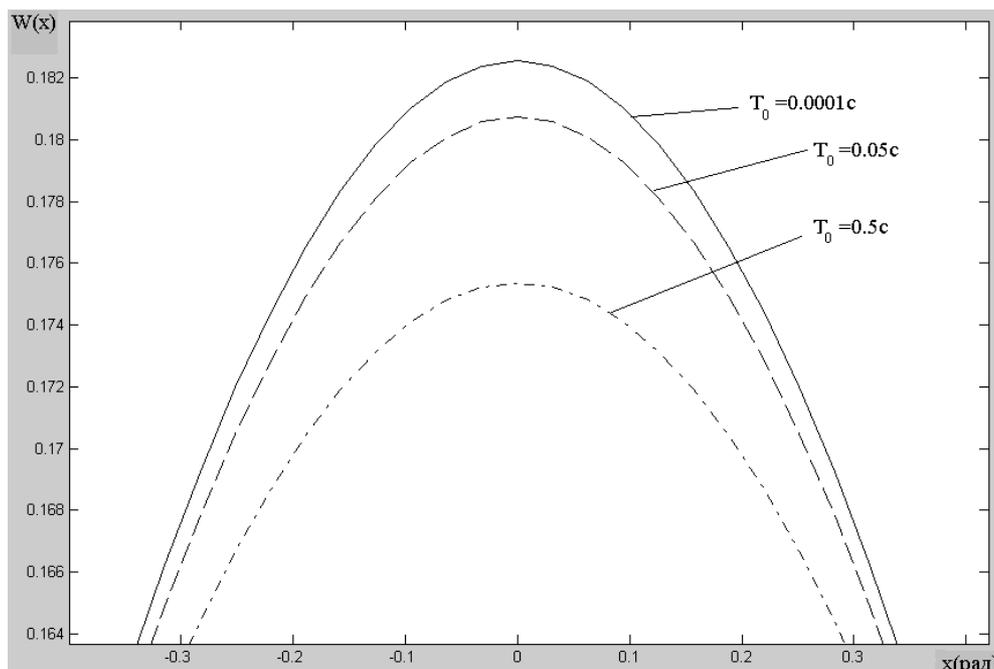


Рис. 4. ПРВ сигнала рассогласования дискретной системы фазовой подстройки частоты: диапазон фазового рассогласования $(-\pi/3, \pi/3)$.

STOCHASTIC ANALYSIS OF THE DISCRETE PHASE-LOCK LOOPS SYSTEMS

A.P. KUZNETSOV, HEKMAT AHMAD ALQATAWNEH, N.A. KAPANOV

Abstract

The materials of given paper are devoted to questions of the statistical analysis of nonlinear pulse systems. For a basis authors take a Galerkin's method of approached account of distribution-function of probabilities. In paper are considered questions of calculation of the statistical characteristics of phase-impulse system of auto tuning of frequency working on multiple frequencies and also the results of numerical account of factors of series expansion of distribution-function of probabilities. The results can also characterize speed of convergence of series.

Литература

1. Кузнецов А. П., Батура М.П., Шилин Л.Ю. Анализ и параметрический синтез импульсных систем с фазовым управлением. Минск, 1993.
2. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М., 1972.