УДК 681.325

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В РЕКУРРЕНТНОМ УПРАВЛЯЕМОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

УСАМА САЛИМ АЛЬ-СИД, Э.А. БАКАНОВИЧ, Т.М. КРИВОНОСОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 февраля 2007

Показана возможность использования математической модели программно-управляемого вероятностного преобразователя рекуррентного типа для получения оценки точности его работы. Исследованы различные виды погрешностей: краевая погрешность, максимальная относительная погрешность аппроксимации, погрешность, возникающая при замене функции стягивающей ее хордой для различных видов функций.

Ключевые слова: функция распределения, вероятностный преобразователь, краевая погрешность, интервальная погрешность.

Математические модели, рассмотренные в [1–3], устанавливают аналитические зависимости между воспроизводимыми функциями распределения случайных величин и основными параметрами рекуррентных УВП — числом разрядов n циклического регистра сдвига (числом состояний эквивалентного автомата), длительностью шага квантования по времени Δt для определенного класса аппроксимирующих функций $G(t)$, или $P_{\geq 1}(\Delta t)_k$, множеством значений интенсивностей λ_k, $k=\overline{1,n}$, первичных случайных потоков сигналов с учетом допустимых величин методических погрешностей преобразований. Эти зависимости определяют инженерную методику выбора таких параметров рекуррентного УВП, которые обеспечат заданную точность воспроизведения функции $F(t)$ для финальных значений вероятностей.

Связь между оригиналом $F(t)$ и изображением $\theta(t)$ воспроизводимой функции распределения определяется формулой

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\int_0^t \frac{F'(t)}{1-F(\tau)}d\tau=\frac{F(t)}{1-F(t)} ,$$

а приращения изображения и оригинала связаны так:

$$\Delta\theta(t)\approx\frac{d\theta(t)}{dF(t)}\Delta F(t) \tag{1}$$

Поскольку

$$\frac{d\theta(t)}{dF(t)}=\frac{d\theta(t)}{dt}\frac{dt}{dF(t)}. \tag{2}$$

и

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \int_0^t \frac{F'(t)}{1-F(\tau)} d\tau = \frac{F(t)}{1-F(t)}, \qquad (3)$$

$$\frac{dt}{dF(t)} = \frac{1}{F(t)}, \qquad (4)$$

то

$$\Delta\theta(t) = \Delta F(t) / \left[1 - F(t)\right]. \qquad (5)$$

Учитывая, что функция $F(t)$ монотонно возрастает с ростом значений аргумента t и множитель при $\Delta F(t)$ в (5) изменяется в пределах от единицы до бесконечности при изменении времени t в пределах от нуля до бесконечности, можно сделать вывод, что неравенство

$$\Delta\theta(t) = \Delta F(t) \qquad (6)$$

усиливается при увеличении t, например, при $F(t)$=0,9 $\Delta\theta\ (t)$=10$\Delta F(t)$.

Так как в рассматриваемом УВП задаются изображения воспроизводимых функций распределения, то соотношение (5) и неравенство (6) означают, что при установке требуемых вероятностей r_k, $k=\overline{1,n}$, появления сигналов на выходах управляемых вероятностных конъюнкторов $\&_k$ ($k=\overline{1,n}$) УВП допустимы большие значения ошибок, чем погрешности, которые могут быть допущены в функции распределения случайных временных интервалов формируемого потока случайных событий. Поскольку связь между приращениями изображения и оригинала известна, все рассуждения можно вести относительно изображения $\theta(t)$ воспроизводимой функции.

Рассмотрим другие методические погрешности, характерные для исследуемого УВП.

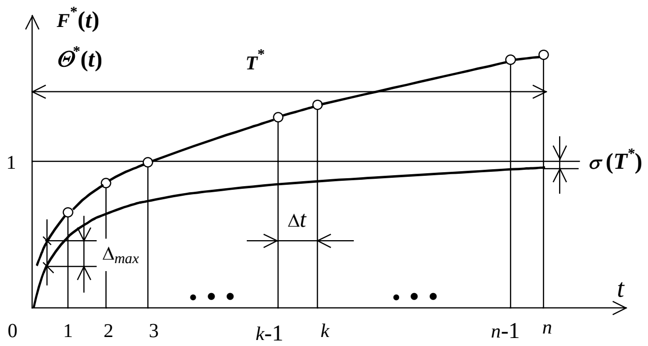

Рис. 1. Иллюстрация к определению краевой погрешности рекуррентного УВП

Ограниченность временного детерминированного интервала T, внутри которого в соответствии с $F(t)$ распределены формируемые случайные временные интервалы, не позволяет воспроизводить значения функции $F(t)$, соответствующие значениям времени $t>T$. Вследствие этого появляется погрешность, которая на рис. 1 обозначена символом $\sigma(T)$. Назовем эту погрешность краевой. Конечная длительность шага квантования по времени Δt не позволяет точно воспроизвести изображение заданной функции, поскольку внутри каждого интервала квантования участок изображения аппроксимируется функцией $P_{\geq 1}(\Delta t)_k$, $k=\overline{1,n}$. В частном случае это может быть функция распределения интервалов между соседними сигналами в соответствующем потоке $\varphi_k(z)$. Важно отметить, что при задании требуемых функций распределения $F(t)$ интенсивности потоков $\varphi_k(z)$ устанавливаются такими, что

$$\Delta P_{\geq 1}\left(\Delta t\right)_k = \theta\left(k\Delta t\right) - \left[\left(k-1\right)\Delta t\right], \qquad (7)$$

т.е. в начальных и конечных точках интервалов квантования (рис. 2,*а*) значения этих функций совпадают. Таким образом, появляется погрешность внутри каждого из интервалов квантования, которая на рис. 2,*а* обозначена символом $\delta_k(\tau)$.

Задача выбора параметров рекуррентного УВП сводится к тому, чтобы по заданным величинам методических погрешностей — относительной краевой погрешности $\sigma(T)$ и максимально допустимой погрешности аппроксимации $\delta_k(\tau)$ — выбрать такие параметры преобразователя n, Δt, λ_k, $k=\overline{1,n}$, чтобы ошибки при воспроизведении известного множества функций $F(t)$ не превышали предельно допустимых значений. Краевая погрешность записывается в виде

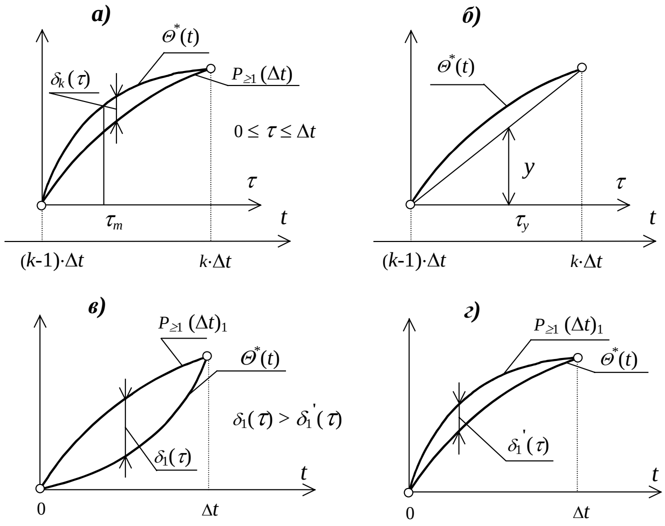

Рис. 2. Величина интервальной погрешности: *а* — в общем случае; *б* — при замене функции стягивающей ее хордой; *в* — для вогнутых функций; *г* — для выпуклых функций

$$\sigma\left(T\right)=1-F\left(T\right), \tag{8}$$

а максимально возможное значение временного интервала, формируемого базовой структурой рекуррентного УВП, равно $T=n\Delta t$. Очевидно также, что

$$\theta(k\Delta t)-\theta\left[(k-1)\Delta t\right]=1-e^{-\lambda k\Delta t}. \tag{9}$$

Пусть внутри k-го интервала квантования максимальная относительная погрешность аппроксимации $\delta_{\max}(\Delta t)k$ соответствует некоторому значению $\tau_m(0<\tau_m<\Delta t)$ (рис. 2,*а*). Тогда

$$\delta_{\max}(\Delta t)_k=\left(\theta(\tau_m)_k-\theta\left[(k-1)\Delta t\right]-\Delta P_{\geq 1}(\tau_m)_k\left(/\theta(t_m),\right.\right. \tag{10}$$

где $\theta(\tau_m)_k$ — значение изображения воспроизводимой функции, соответствующее точке τ_m k-го интервала квантования. Соотношения (9), (10) и

$$T=n\Delta t \tag{11}$$

не дают однозначного решения для нахождения параметров n, Δt, λ_k, $k=\overline{1,n}$, так как число неизвестных в этих выражениях превышает число уравнений: кроме параметров преобразователя неизвестными также являются значения изображения $\theta(t)$ в точках $k\Delta t$ и $(k–1)\,\Delta t$ и значение аппроксимирующей функции $P_{\geq 1}(\Delta t)_k$ в точке τ_m. Поэтому можно задаться одним из параметров рассматриваемого УВП.

Предположим, например, что предварительно выбрано число разрядов n циклического регистра сдвигов. Если известен масштаб времени — максимально возможная длительность временного интервала в формируемом случайном выходном потоке — то из (11) находится длительность шага квантования по времени воспроизводимой функции $F(t)$. Это, в свою очередь, позволяет найти значения изображения $\theta(t)$ в точках квантования по времени $k\Delta t$ и $(k–1)\Delta t$. В этом случае равенство (10) может быть использовано как контрольное; внутри каждого интервала $[(k–1)\Delta t;\ k\Delta t]$ значение времени τ_m, соответствующее максимальной ошибке аппроксимации, определяется из условия

$$\left\{\delta_{\max}(\Delta t)_k\,\theta(\tau_m)_k-\theta\left[(k-1)\Delta t\right]+\Delta P_{\geq 1}(\tau_m)_k\right\}=0. \tag{12}$$

Таким образом, при заданном числе разрядов n для проверки возможности воспроизведения функции $F(t)$ с заданной степенью точности необходимо проверить n равенств (10); это, естественно, связано с трудностями вычислительного характера. Поэтому проведем некоторые упрощения: заменим в каждом интервале квантования участок аппроксимирующей функции $P_{\geq 1}(\Delta t)$ стягивающей его хордой и оценим вносимую при этом погрешность $b_{\max}(\Delta t)$ — рис. 2,*б*. Уравнение хорды имеет вид

$$y = \frac{1-e^{-\lambda_k \Delta t}}{\Delta t}\tau_k; \quad 0 \leq \tau_k \leq \Delta t, \tag{13}$$

поэтому

$$b(\Delta t)_k = \left(1-e^{-\lambda_k \Delta t}\right) - \tau_k \left(1-e^{-\lambda_k \Delta t}\right) \Big/ \Delta t. \tag{14}$$

Дифференцируя это выражение и приравнивая производную нулю, находим

$$\ln \frac{\lambda_k \Delta t}{1-e^{-\lambda_k \Delta t}} = \lambda \tau_k, \tag{15}$$

откуда для k-го интервала

$$\tau_m = \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{\lambda_k \Delta t}{1-e^{-\lambda_k \Delta t}}. \tag{16}$$

Последнее выражение позволяет определить максимальное значение погрешности $b_{\max}(\Delta t)_k$.

Оценим значение τ_m, соответствующее погрешности $b_{\max}(\Delta t)_k$. Разложив в ряд $e^{-\lambda_k \Delta t}$ в (16) и учитывая, что при малых x ln(1+x)"x, после ряда преобразований для малых значений $\lambda \Delta t$ получаем

$$\tau_m \approx \Delta t / 2. \tag{17}$$

Подставляя найденное значение τ_m в (14) и вновь разлагая в ряд $e^{-\lambda_k \Delta t}$, находим

$$b_{\max}(\Delta t)_k = 1 - e^{-\lambda \Delta t/2} - 1\big/2\left(1-e^{-\lambda_k \Delta t}\right) \approx \lambda (\Delta t)^2 \Big/ 4. \tag{18}$$

В этом случае величина максимальной относительной погрешности

$$\frac{b_{\max}(\Delta t)_k}{\Delta P_{\geq 1}(\tau_m)} = \frac{2\lambda \Delta t}{4 - \lambda \Delta t} \leq 0{,}05 \tag{19}$$

при $\lambda_k \Delta t$<0,1. Поэтому замена внутри каждого интервала квантования Δt аппроксимирующей функции $P_{\geq 1}(\Delta t)$ стягивающей ее хордой вполне допустима. Кроме этого, учитывая (4) и монотонный рост значений оригинала $F(t)$ и изображения $\theta(t)$ с ростом t, можно сделать вывод о том, что одна и та же величина погрешности $b_{\max}(\Delta t)_k$ с увеличением номера интервала квантования будет приводить ко все более малым погрешностям в воспроизводимой функции распределения.

Незначительная величина погрешности, вызываемой заменой участка изображения стягивающей его хордой, позволяет использовать простой графический метод выбора числа разрядов n ЦРС. Выбрав некоторое число разрядов n_1 ЦРС, по (7) определяем длительность шага квантования по времени Δt. Изображение воспроизводимой функции разбивается на n_1 интервалов длительностью Δt каждый, а соседние точки квантования $\theta(k\Delta t)$, $k=\overline{0, n_1}$, стягиваются хордами. Графически определяются вносимые при этом погрешности $\Delta k_{\max}$, соответствующие точкам τ_m, а затем находятся относительные погрешности $\Delta k_{\max}/\theta\ (\tau_m)_k$. Если для всех интервалов квантования выполняется условие

$$\Delta k_{\max} / \theta\left(\tau_m\right)_k \leq \delta_k\left(\tau\right), \tag{20}$$

то можно попытаться уменьшить число n_1. Если условие (20) не выполняется, то выбирается число $n_2>n_1$, и процедура определения погрешности $\Delta k_{\max}$ повторяется. Определив таким образом число разрядов n ЦРС, с учетом (9) и (10) находим остальные параметры рекуррентного УВП.

Формулы (9) и (10) можно упростить, если учесть некоторые обстоятельства. Во-первых, на начальном интервале квантования имеет место максимальная относительная погрешность от замены участка изображения $\theta(t)$ хордой, поскольку одни и те же значения погрешности $\Delta k_{\max}$ на начальных интервалах квантования вызывают большие относительные погрешности $\Delta k_{\max}/\theta(\tau_m)_k$, так как $\theta(\tau_m)_1 < \theta(\tau_m)_2 < \ldots < \theta(\tau_m)_n$. Во-вторых, некоторые функции распределения на начальных участках имеют вогнутый характер, что, естественно, увеличивает погрешности от замены участков изображения хордами (рис. 2,*в*,*г*). В третьих, одни и те же величины погрешностей при задании изображения $\theta(t)$ в соответствии с (5) приводят к большим ошибкам в воспроизводимых функциях распределения $F(t)$ именно на начальных участках. Поэтому от системы равенств (9)–(11) можно перейти к соотношениям:

$$\theta\left(\Delta t\right) = 1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}, \tag{21}$$

$$\left[\delta_{1отн}\left(\tau\right)\right]_{\max} = \left|\theta\left(\tau_m\right)_1 - \Delta P_{\geq 1}\left(\tau_m\right)_1\right| / \theta\left(\tau_m\right)_1. \tag{22}$$

Дифференцируя (22), можно определить значение времени $(\tau_m)_1$ для первого интервала квантования. Подставив $(\tau_m)_1$ в (22), определяем интенсивность λ_1 первичного потока $\varphi_1(z)$, которая обеспечила бы заданную величину относительной погрешности $\delta_1(\tau)$. По известной интенсивности λ_1 из (21), учитывая (7), определяется длительность шага квантования по времени Δt, а затем из (11) можно найти число n разрядов ЦРС.

STUDY OF THE DATA REPRESENTATION ACCURACY IN A RECURRENT CONTROLLABLE PROBABILISTIC CONVERTER

USAMA SALEM AL SAID, E.A. BAKANOVICH, T.M. KRIVONOSOVA

Abstract

The possibility to apply the mathematical model of a program-driven recurrent converter is demonstrated for the purposes of assessing it performance accuracy. Divergent error types are investigated, such as a boundary error, maximal relative approximation error, an error that emerges if a function is replaced with its subtense, for various functions.

Литература

1. *Баканович Э.А., Аль-Сид Усама Салем, Кривоносова Т.М.* Рекуррентные управляемые вероятностные преобразователи (вариант детерминированного квантования). Часть I. Деп. в БелИСА 25.01.2005 г. № Д20052.

2. *Баканович Э.А., Аль-Сид Усама Салем, Кривоносова Т.М.* Алгоритм имитационного моделирования рекуррентного вероятностного преобразователя. Часть 2. Деп. в БелИСА 07.04.2006 г. № Д00619.

3. Аль-Сид Усама Салем, Баканович Э.А., Кривоносова Т.М. // Докл. БГУИР. 2006. Т. 4, № 4. С. 64.