## ИНФОРМАТИКА

УДК 681.325

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГРАММНО-УПРАВЛЯЕМОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

АЛЬ-СИД УСАМА САЛЕМ, Э.А. БАКАНОВИЧ, Т.М. КРИВОНОСОВА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
*П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 28 сентября 2006*

Рассмотрены функциональная схема и математическая модель программно-управляемого вероятностного преобразователя. Преобразователь позволяет формировать с достаточно высокой точностью произвольно требуемые функции распределения вероятностей случайных временных интервалов, пространственно распределенных случайных событий и предназначен для построения аппаратурных стохастических моделей сложных систем.

*Ключевые слова:* функция распределения, вероятностный преобразователь, случайный поток сигналов, вероятностный конъюнктор.

### Введение

Широкое распространение сложных систем, необходимость сокращения трудозатрат на их проектирование, исследования, испытания и внедрение требуют создания специальных методов и средств, ориентированных на использование при разработке этих систем. К числу таких средств можно отнести многофункциональные комплексы автоматизации моделирования и испытаний сложных радиотехнических и других систем, которые используют стохастические принципы представления информации.

Основным компонентом любой стохастической вычислительной или моделирующей аппаратуры являются вероятностные преобразователи (ВП) — устройства, в которых входной первичный поток (или потоки) случайных сигналов с известными свойствами преобразуется в выходной случайный процесс с требуемыми вероятностными характеристиками.

Вероятностный преобразователь назовем управляемым (УВП), если за счет изменения структуры преобразователя, параметров его элементов либо отдельных параметров входных потоков случайных сигналов можно получать на выходе преобразователя случайные процессы с различными требуемыми вероятностными характеристиками.

В программно-управляемых вероятностных преобразователях (ПУВП) воспроизведение требуемой функции распределения случайных величин, формируемых на выходе преобразователя, обеспечивается введением в его память кодированных значений настроечных параметров.

Вероятностные преобразователи используются в стохастической вычислительной и моделирующей аппаратуре для формирования основного носителя информации – потоков случайных величин (чисел, временных интервалов, амплитуд, фаз сигналов и т.д.), обладающих требуемыми вероятностными и корреляционными свойствами.

Рассматриваемые в [1–4] УВП обладают рядом особенностей, делающих предпочтительным их использование в аппаратурных моделях сложных систем (систем массового обслуживания, сетевых систем и т.п.). Основное назначение таких преобразователей – формирование случайных импульсных потоков, в которых временные интервалы между стандартными по амплитуде и длительности сигналами (например, типа δ-функции) распределены в соответствии с заданным вероятностным законом $F(t)$, регулируемым в широких пределах. Кроме того, преобразователи данного типа позволяют формировать потоки пространственно распределенных случайных величин и потоки случайных чисел. Функциональная схема программно-управляемого вероятностного преобразователя рекуррентного типа [1,2] представлена на рис. 1.

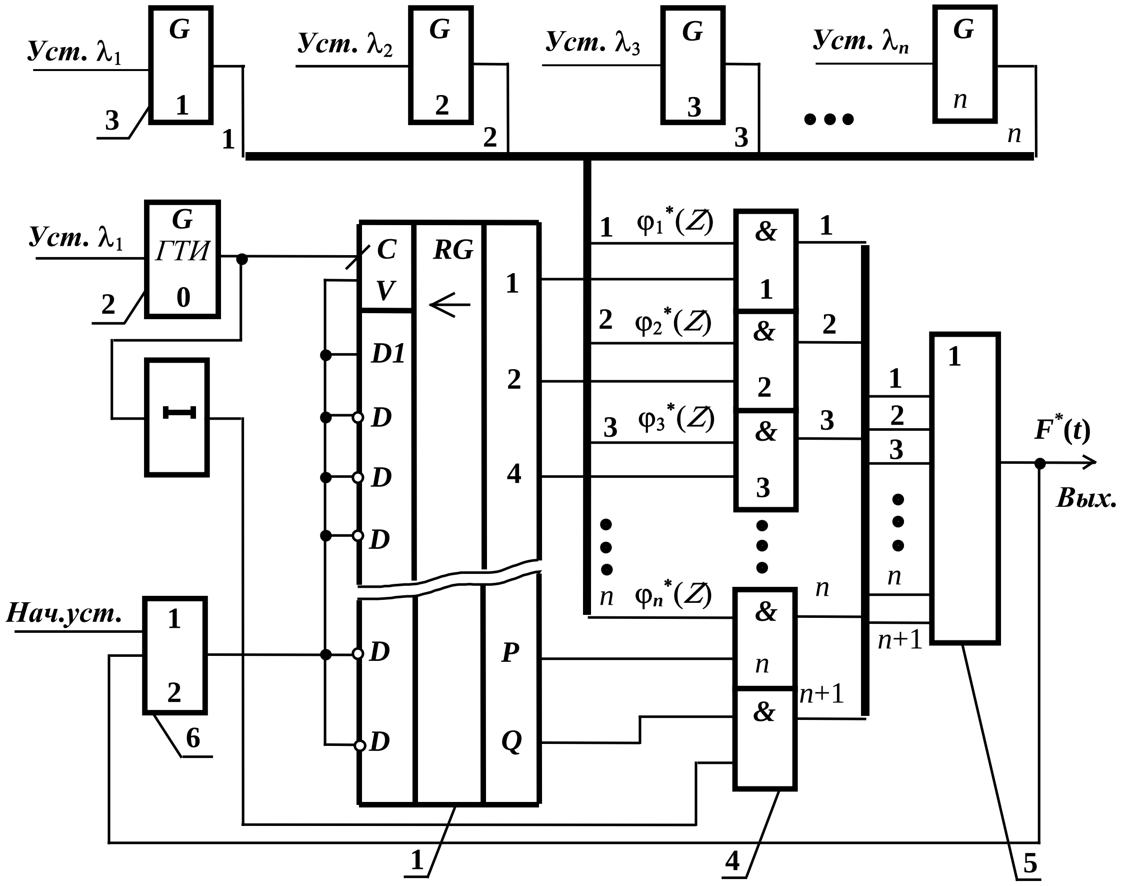


Рис. 1. Функциональная схема рекуррентного УВП

Для формирования случайного импульсного потока с требуемыми вероятностными характеристиками использован принцип преобразования первичных случайных импульсных потоков $\varphi(z)$ (или потока случайных чисел) с известными вероятностными свойствами.

При проектировании УВП для аппаратурных моделей сложных систем наибольший интерес представляет разработка макрооператора (математической модели) функционирования УВП, которая связывает воспроизводимую функцию распределения вероятностей и ее числовые характеристики с параметрами УВП и управляемыми характеристиками первичных потоков (рис. 2). Макрооператоры программно-управляемых вероятностных преобразователей отражают различные уровни детализации описания преобразователей и те цели, которые ставятся при разработке моделей УВП.

*Макрооператоры первого уровня* (*обобщенные модели*) соответствуют цифровой форме преобразования первичных случайных потоков, иллюстрируют процесс функционирования УВП и устанавливают связи воспроизводимой функции распределения с управляемыми параметрами.

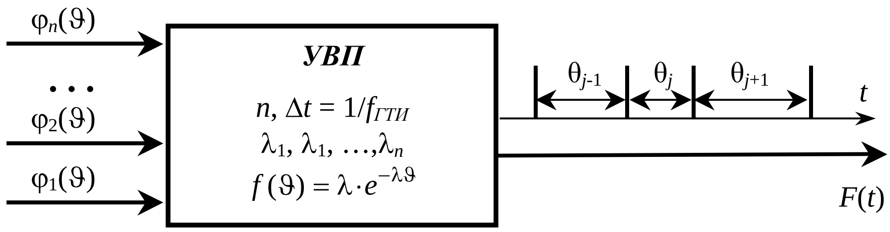


Рис. 2. Укрупненная структура УВП и его основные параметры

*Макрооператоры второго уровня* (*строящиеся на базе обобщенных моделей*) соответствуют аналого-цифровому принципу построения УВП и учитывают аппроксимацию воспроизводимых функций распределения. Использование макрооператоров второго уровня позволяет:

разработать алгоритмы управления первичными потоками для настройки УВП на воспроизведение требуемых функций распределения;

осуществлять управление числовыми характеристиками воспроизводимой функции распределения без изменения ее вида;

исследовать точность воспроизведения функций распределения случайных величин, оценить степень соответствия заданных и воспроизводимых функций распределения, оценить возможность воспроизведения произвольных функций распределения вероятностей либо определенного класса функций;

разработать инженерные методики выбора параметров УВП различного назначения.

При формировании случайных временных интервалов $\vartheta(t)$, подчиняющихся заданной функции распределения, выполняются следующие две рекуррентные процедуры.

1. Моделирование последовательностей полных групп из двух несовместных событий $H_{k,1}$ и $H_{k,k+1}$, $k=\overline{1,n}$, где $H_{k,1}$ — событие, заключающееся в положительном исходе $k$-го случайного испытания и в переходе эквивалентного абстрактного вероятностного автомата в исходное состояние $S_1$; $H_{k,k+1}$ — событие, заключающееся в переходе эквивалентного автомата из состояния $S_k$ в состояние $S_{k+1}$, т.е. в реализации случайного испытания с номером $k$+1. Процесс формирования потока случайных величин реализуется в виде последовательности испытаний

$$...;\underbrace{H_{5,6}}_{\vartheta_{i-1}(t)};\underbrace{H_{6,1};H_{1,2};H_{2,3};H_{3,4}}_{\vartheta_i(t)};\underbrace{H_{4,1};H_{1,2};H_{2,3};H_{3,1}}_{\vartheta_{i+1}(t)};... \qquad (1)$$

2. При положительном исходе $k$-го случайного испытания в интервале $(\Delta t)_k = t_k - t_{k-1}$ осуществляется замена случайной величины $(k-1)\Delta t$ случайным временным интервалом

$$\vartheta_i(t) = (k-1)\Delta t + \tau_k(t)\delta(t-t_k), \qquad (2)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта функция; $\tau_k$ — случайный временной интервал, подчиняющийся функции распределения вероятностей $F_k(\vartheta)$, определяемой свойствами первичного (преобразуемого) импульсного потока $\varphi_k(z)$; функция распределения $F_k(\vartheta)$ аппроксимирует воспроизводимую функцию $F(t)$ на $k$-м интервале квантования. Формирование потока случайных величин в этом случае реализуется в виде последовательности испытаний:

$$\begin{gathered}
...;\underbrace{H_{7,1};\ H_{1,2};\ H_{2,3};\ H_{3,1}}_{\vartheta_j(t)\,=\,2\Delta t+\tau_3^*}\{2\Delta t \to 2\Delta t + \tau_3[t, F_3(\vartheta)]\delta(t-t_2)\};\\
\underbrace{H_{3,1};\ H_{1,2};\ ...;\ H_{5,1}}_{\vartheta_{j+1}(t)\,=\,4\Delta t+\tau_5^*}\{4\Delta t \to 4\Delta t + \tau_5[t, F_5(\vartheta)]\delta(t-t_4)\};\\
\underbrace{H_{5,1};\ H_{1,1}}_{\vartheta_{j+2}(t)\,=\,\tau_1^*}\{0 \to \tau_1[t, F_1(\vartheta)]\delta(t-t_0)\};\ ...
\end{gathered} \qquad (3)$$

Реализация событий $H_{k,1}$ имеет особенности, связанные со свойствами потоков $\varphi(z)$ и учитываемые при построении модели второго уровня [1,2].

Обобщенной модели рекуррентного УВП ставится в соответствие автомат, реализующий последовательность переходов (испытаний) вида (1), возможных только в фиксированные моменты времени $t_i$, причем $t_i - t_{i-1}=\Delta t$. Формируемые в этом случае временные интервалы $\vartheta_D(t)$ являются дискретными случайными величинами, функция распределения которых $F_D(t)$ имеет вид

$$F_D(t) = P\{\vartheta_D(t) \le \vartheta_k(t)\} = \sum_{k-1}^{n} p_i \delta(t - t_i),$$

где $p_k$ — вероятность появления в выходном потоке временного интервала длительностью $\vartheta_{Dk}(t) = k\Delta t$.

На основе орграфа абстрактного вероятностного автомата, реализующего рекуррентную последовательность случайных испытаний (1), (2), можно записать

$$r_{k,1} = \mathrm{P}\{\vartheta_D(t) = k\Delta t \mid \vartheta_D(t) > (k-1)\Delta t\} = \frac{P\{\vartheta_D(t) = k\Delta t\}}{P\{\vartheta_D(t) > (k-1)\Delta t\}}. \qquad (4)$$

Безусловные вероятности определяются следующим образом:

$$P\{\vartheta_D(t) = k\Delta t\} = F(k\Delta t) - F[(k-1)\Delta t],\ P\{\vartheta_D(t) > (k-1)\Delta t\} = 1 - F[(k-1)\Delta t]. \qquad (5)$$

С учетом (4), (5) связь между значениями воспроизводимой функции распределения $F(t)$ с управляемыми вероятностями переходов $r_{k,1}$ может быть представлена выражением

$$r_{k,1} = \frac{F(k\Delta t) - F[(k-1)\Delta t]}{1 - F[(k-1)\Delta t]}. \qquad (6)$$

Выражение (6) позволяет для каждого испытания в последовательности (1) определить значение управляемого параметра преобразуемого входного потока, обеспечивающего требуемые вероятности наступления событий $H_{k,1}$ и $H_{k,k+1}$, $k=\overline{1,n}$.

Макрооператор преобразования первичных случайных импульсных потоков $\varphi_i(z)$ с известными характеристиками в поток случайных временных интервалов $t$, подчиняющихся требуемой функции распределения $F(t)$, может быть представлен следующим образом.

Пусть задана функция распределения вероятностей $F(t)$ случайных временных интервалов $t$, которую требуется воспроизвести. Исходя из требуемых скорости формирования интервалов $t$ и точности воспроизведения функции $F(t)$, выбирается интервал времени $T$, на котором строится эта функция (рис. 3). Разобьем интервал $T$ точками $t_0$, $t_1$, ..., $t_n$ на $n$ непересекающихся подынтервалов длительностью $\Delta t$ каждый так, что $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$. Потребуем, чтобы в рассматриваемом рекуррентном УВП обеспечивались такие же вероятности попадания формируемых случайных временных интервалов $t$ в подынтервалы $\Delta t_k$, как и для функции $F(t)$.

В данном случае при работе УВП реализуется последовательность случайных испытаний $H_{k,k+1}$, $H_{k,1}$, $k=\overline{1,n}$, определяемых выражениями вида (1) – (3). Для управления этой последовательностью используются управляемые вероятностные конъюнкторы (УВК) первого вида [3,4]. Первичные потоки $\varphi_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, определяют вероятности событий $H_{k,k+1}$, $H_{k,1}$, $k=\overline{1,n}$, в последовательности (3) и параметры функций распределения $F_k(\vartheta)$ случайных временных интервалов $\tau_k(t)$ в (2). Параметры первичных случайных потоков $\varphi_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, определяют вероятности появления в формируемом выходном потоке временных интервалов определенной длительности.

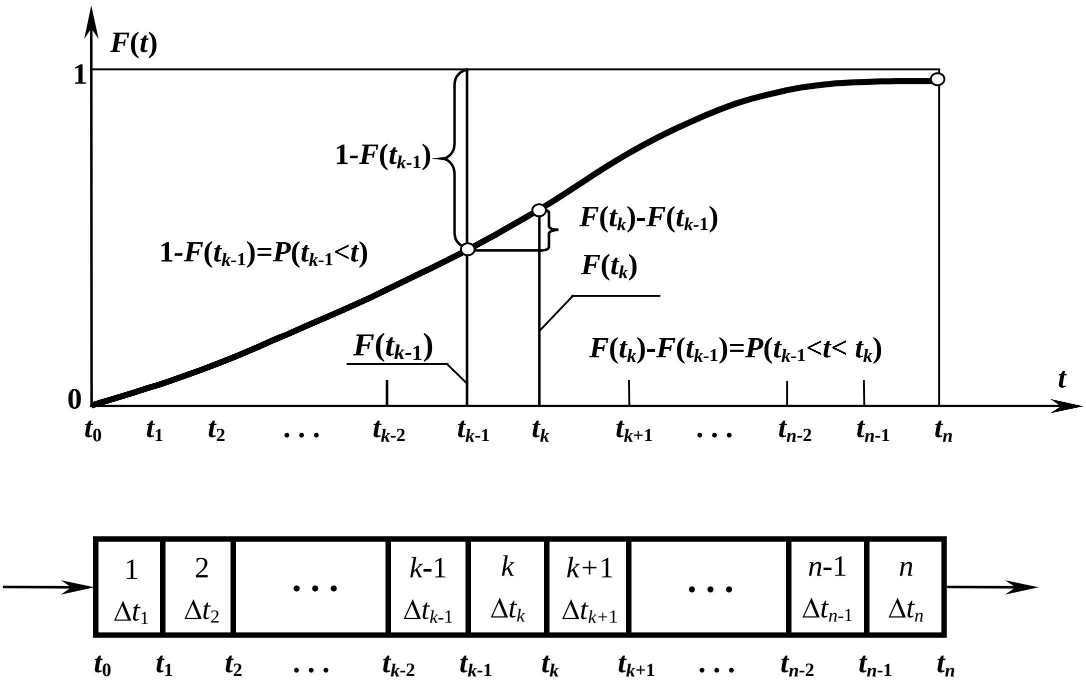


Рис. 3. Иллюстрация к процессу квантования воспроизводимой функции распределения

Для каждого из поступающих в УВП первичных потоков $\varphi_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, при фиксированном значении $\Delta t$ определяется параметр – безусловная вероятность $P_{\geq 1}(\Delta t)_i$ появления в соответствующем интервале квантования по крайней мере одного сигнала этого потока. Каждое испытание в последовательности (3) длится в течение времени $\Delta t$, а вероятности $P\{H_{k,1}\}$, $k=\overline{1,n}$, определяются параметрами $P \geq 1(\Delta t)i$, $i=\overline{1,n}$, первичных потоков, вычисленными в предположении, что ни в одном из предыдущих случайных испытаний не было зафиксировано положительного исхода, т.е.

$$P_{\geq 1}\left\{1,(\Delta t)_k \,\middle|\, 0,\sum_{i=1}^{k-1}(\Delta t)_i\right\}.$$

При положительном исходе $k$-го испытания на выходе УВП появляется сигнал формируемого потока, а вся рекуррентная последовательность испытаний строится заново. При известных вероятностных характеристиках потоков $\varphi_i(z)$ задание требуемых значений параметров $P_{\geq 1}(\Delta t)_i$, $i=\overline{1,n}$, и, следовательно, задание функций распределения $F(t)$ осуществляется путем программного регулирования интенсивностей этих потоков [3,4], которое может быть основано на свойстве инвариантности стационарного пуассоновского потока к операции вероятностного прореживания.

Введем следующие обозначения: $r_i$ – параметр $i$-го первичного потока случайных импульсов; $\varphi_i(z)$ — вероятность появления по крайней мере одного сигнала этого потока в течение интервала времени $\Delta t$: $r_i = P_{\geq 1}(\Delta t)_i$; $f_i(\vartheta)$ – плотность распределения вероятностей длительностей интервалов $\vartheta$ между соседними сигналами в первичном потоке $\varphi_i(z)$; $\lambda_i$ – интенсивность потока $\varphi_i(z)$; $f(t)$ – плотность распределения вероятностей длительностей интервалов между соседними сигналами в формируемом (выходном) случайном импульсном потоке; $P_i$ – вероятность появления сигнала потока $\varphi_i(z)$ на выходе УВК $\&_i$ в $i$-м такте $(\Delta t)_i$, $i=\overline{1,n}$, формирования очередного случайного временного интервала: $\overline{P_i} = 1 - P_i$; $n$ – число интервалов квантования по времени воспроизводимой функции распределения вероятностей $F(t)$; $T$ – величина, соответствующая максимально возможному временному интервалу между соседними сигналами в формируемом случайном импульсном потоке:

$$T = n\Delta t,\ 1 - \int_{0}^{T} f(t)dt \le \delta,$$

где $\delta$ — малая положительная величина, характеризующая в некотором смысле точность воспроизведения функции распределения $F(t)$.

Учитывая принятые обозначения, для первого такта $(\Delta t)_1$ работы УВП можно записать:

$$P_1 = r_1 = 1 - \lambda_1 \int_{\Delta t}^{\infty} (\vartheta - \Delta t) f_1(\vartheta) d\vartheta,\ \overline{P_1} = \overline{r_1} = \lambda_1 \int_{\Delta t}^{\infty} (\vartheta - \Delta t) f_1(\vartheta) d\vartheta.$$

Для второго такта формирования $(\Delta t)_2$: $P_2 = r_2 \mid \overline{P_1}, \quad \overline{P_2} = 1 - P_2 = 1 - r_2 \mid \overline{P_1}.$

Для $n$-го такта формирования $(\Delta t)_n$: $P_n = r_n \mid \overline{P_{n-1}} = r_n \mid (1 - r_{n-1} \mid \overline{P_{n-1}}),\ \overline{P_n} = 1 - P_n = 1 - r_n \mid \overline{P_{n-1}}.$

Будем предполагать, что при переходе эквивалентного вероятностного автомата из состояния $S_i$ в состояние $S_{i+1}$ потери сигналов соответствующих первичных потоков из-за конечного времени включения ($i$+1)-го конъюнктора не происходит. Условная вероятность окончания формирования очередного случайного временного интервала в $k$-м такте формирования $(\Delta t)_k$ может быть представлена следующим образом:

$$P\left\{1, (\Delta t)_k \,\middle|\, 0, \sum_{i=1}^{k-1} (\Delta t)_i \right\} = \left\{ F\left[t_0 + \sum_{i=1}^{k} (\Delta t)_i\right] - F\left[t_0 + \sum_{i=1}^{k-1} (\Delta t)_i\right] \right\} \times$$
$$\times \left\{ 1 - F\left[t_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\Delta t)_i\right] \right\} = \left[F(t_{k)} - F(t_{k-1})\right]\left[1 - F(t_{k-1})\right].$$

В этом выражении $t_0$ соответствует моменту перехода эквивалентного автомата в состояние $S_1$ и началу формирования нового случайного временного интервала. Очевидно, разность $F(t_k) - F(t_{k-1})$ определяет вероятность попадания формируемой случайной величины в интервал $(\Delta t)_k$ (рис. 3). Следовательно, для правильного воспроизведения функции распределения $F(t)$ параметры первичных случайных импульсных потоков $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, должны определяться из условия

$$r_k = P_k = P_{\ge 1}(\Delta t)_k = \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{1 - F(t_{k-1})}. \tag{7}$$

Таким образом, система уравнений, связывающих параметры потоков $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, со значениями функции $F(t)$ в точках квантования, имеет вид [5]

$$r_i = \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-1})} = 1 - \lambda_i \int_{\Delta t}^{\infty} (\vartheta - \Delta t) f_i(\vartheta) d\vartheta,\ i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Решив систему уравнений (8) относительно $\lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, определяем значения интенсивностей первичных потоков $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, которые должны быть установлены при воспроизведении функции распределения $F(t)$.

Для стационарных пуассоновских потоков с плотностью распределения интервалов времени между соседними сигналами $f(\vartheta) = \lambda e^{-\lambda\vartheta}$ система уравнений (8) существенно упрощается:

$$r_i = \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-1})} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i \Delta t}, \ i = \overline{1, n}.$$

В рассматриваемом рекуррентном УВП воспроизводимая функция распределения $F(t)$ в каждом интервале квантования $(\Delta t)_i$, $i = \overline{1, n}$, аппроксимируется в соответствии с (2) некоторой функцией, зависящей от интенсивности соответствующего первичного потока и характера функции распределения интервалов между соседними сигналами этого потока. В частности, при использовании в качестве первичных пуассоновских потоков сигналов аппроксимирующая функция для $k$-го интервала квантования определяется выражением

$$F_k(\vartheta) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_k t}.$$

Используя (7), перейдем к изображению $\theta(t)$ воспроизводимой функции распределения $F(t)$:

$$\Delta\theta(t) = \Delta F(t) / \left[1 - F(t)\right]. \qquad (9)$$

Тогда $\dfrac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta F(t)}{\Delta t}\dfrac{1}{1 - F(t)}$ или $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} = \dfrac{1}{1 - F(t)}\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta F(t)}{\Delta t}$, $\theta'(t) = \dfrac{F'(t)}{1 - F(t)}$.

Окончательно

$$\theta(t) = \int_0^T \frac{F'(t)}{1 - F(t)}\,dt. \qquad (10)$$

Таким образом, для воспроизведения функции $F(t)$ в рассматриваемом УВП должно быть задано ее изображение, определяемое (9) и (10). Изображения некоторых функций распределения приведены на рис. 4.

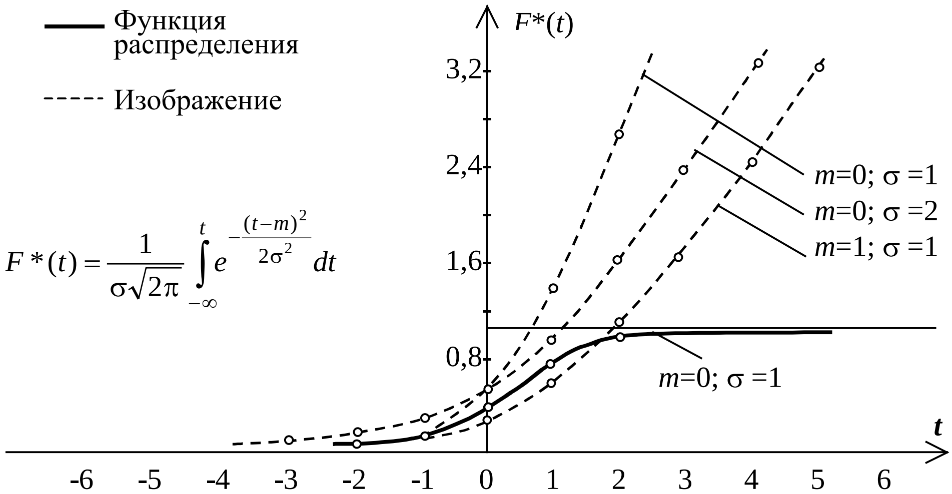


Рис. 4. Изображения функций распределения Гаусса

Рассмотренный программно-управляемый вероятностный преобразователь рекуррентного типа хорошо приспособлен к агрегатированию, поэтому может быть использован при создании аппаратурных моделей систем массового обслуживания самых различных типов, моделей сетевых систем, имитаторов видеосигналов в моделях радиотехнических систем.

# MATHEMATICAL MODEL OF A PROGRAM-DRIVEN PROBABILISTIC CONVERTER

USAMA SALEM ALSAID, E.A.BAKANOVICH, T.M.KRIVONOSOVA

**Abstract**

The paper addresses the functional layout and considers the mathematical model of the program-driven probabilistic converter. The converter enables to generate with high-accuracy the required random probability distribution functions of random time intervals, of space-scattered random events, etc. It is intended to create hardware stochastic models of complex systems.

**Литература**

1. *Баканович Э.А., Аль-Сид Усама Салем, Кривоносова Т.М.* Рекуррентные управляемые вероятностные преобразователи (вариант детерминированного квантования). Ч. I. Минск, 2005. Деп. в БелИСА 25.01.2005, № Д20052.

2. *Баканович Э.А., Аль-Сид Усама Салем, Кривоносова Т.М.* Алгоритм имитационного моделирования рекуррентного вероятностного преобразователя. Ч. 2. Минск, 2006. Деп. в БелИСА 07.04.2006, № Д00619.

3. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В.* Вычислительная техника для статистического моделирования. М., 1978.

4. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А.* Стохастические вычислительные устройства систем моделирования. М., 1989.

5. *Седякин Н.М.* Элементы теории случайных импульсных потоков. М., 1965.