

УДК 621.865

**АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
ПАРАМЕТРОВ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ**

А.П. ПАШКЕВИЧ, Р.И. ГОМОЛИЦКИЙ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 16 января 2007*

Проводится анализ точности идентификации параметров параллельных манипуляторов квазиортогональной структуры, калибровка которых осуществляется новым оригинальным методом, основанным на оценке параллельности несущих звеньев по отношению к базовым плоскостям при тестовых движениях. Получены аналитические выражения для ковариационной матрицы, приводится численный пример.

*Ключевые слова:* параллельные манипуляторы, калибровка, точность.

**Введение**

На современном этапе развития робототехники последовательные манипуляторы достигли предела своих динамических возможностей. В качестве альтернативы им рассматриваются параллельные кинематические машины (ПКМ), которые отличаются лучшими динамическими свойствами [1, 2]. Кроме того, по сравнению с последовательными манипуляторами ПКМ обычно характеризуются более высокой точностью, поскольку часть звеньев параллельных манипуляторов крепится к рабочей платформе отдельно друг от друга, поэтому их погрешности не суммируются [3]. Однако из-за большого количества звеньев и пассивных суставов количество параметров математической модели увеличивается, а точность параллельных структур в связи с ошибками сборки и изготовления может значительно уменьшаться [4, 5].

Из-за значительно более сложной математической модели параллельных манипуляторов требуются новые методы их калибровки. На данный момент существуют методы, связанные с установкой дополнительных датчиков в пассивных суставах [6, 7], методы автокалибровки [8] и комбинированные методы, в основе которых лежит использование особых геометрических свойств конкретной параллельной машины [9, 10].

Целью настоящей работы является анализ точности идентификации параметров параллельных манипуляторов квазиортогональной структуры, найденных новым, оригинальным методом калибровки, основанным на оценке параллельности несущих звеньев по отношению к базовым плоскостям при тестовых движениях, которые выбираются так, что характерная точка манипулятора и указанные звенья движутся параллельно осям декартовой системы координат. Этот метод позволяет с высокой точностью за короткий промежуток времени провести калибровку манипулятора в условиях производства.

## Кинематическая модель и алгоритм идентификации параметров

В данной работе анализ точности идентификации параметров проводится для манипуляторов квазиортогональной структуры типа Orthoglide [11]. Каждую кинематическую цепь рассматриваемого манипулятора представим в виде стержня длины  $L_i$ . Тогда в упрощенной форме кинематическая схема манипулятора будет иметь вид трех стержней, соединенных с одной стороны сферическими суставами и крепящихся к призматическим суставам, которые их перемещают, с другой. В этом случае геометрия манипулятора полностью описывается тремя уравнениями

$$(p_i - (\rho_i + \Delta\rho_i))^2 + p_j^2 + p_k^2 = L_i^2, \quad (1)$$

где  $i, j, k \in \{x, y, z\}, i \neq j \neq k$ . При этом переменные, которые являются обобщенными координатами суставов  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ , могут находиться в пределах  $\rho_{\min} < \rho_i < \rho_{\max}; i \in \{x, y, z\}$ . Они выбираются таким образом, чтобы гарантировать отсутствие сингулярностей в рабочей зоне манипулятора.

Чтобы получить решение обратной задачи кинематики, систему уравнений (1) решим относительно входных обобщенных координат, что дает выражение вида

$$\rho_i = p_i + s_i \sqrt{L_i^2 - p_j^2 - p_k^2} - \Delta\rho_i, \quad (2)$$

где  $s_i \in \{\pm 1\}$  являются индексами конфигурации, определяемые как знаки  $\rho_i - p_i$ . Для данной кинематической структуры существует восемь решений обратной задачи кинематики, однако экспериментальная модель манипулятора собрана таким образом, что  $s_x = s_y = s_z = 1$ .

Для решения прямой задачи кинематики вычтем попарно уравнения (2), затем, поскольку  $p_x, p_y, p_z$  являются линейно зависимыми, введем их параметрическое представление  $p_i = a_i + b_i t$ , где  $t$  — дополнительная скалярная переменная. После чего получим решение прямой задачи кинематики в виде

$$p_i = \frac{\rho_i + \Delta\rho_i}{2} + \frac{t}{\rho_i + \Delta\rho_i} - \frac{L_i^2}{2(\rho_i + \Delta\rho_i)}. \quad (3)$$

После подстановки этих уравнений в (1) мы получим квадратное уравнение  $At^2 + Bt + C = 0$  относительно переменной  $t$ , в котором

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i \neq j} (\rho_i + \Delta\rho_i)^2 (\rho_j + \Delta\rho_j)^2, \\ B &= \prod_i (\rho_i + \Delta\rho_i)^2 - \sum_{i \neq j \neq k} L_i^2 (\rho_j + \Delta\rho_j)^2 (\rho_k + \Delta\rho_k)^2, \\ C &= \prod_i (\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \times \left( \sum_i (\rho_i + \Delta\rho_i)^2 / 4 - \sum_i L_i^2 / 2 \right) + \sum_{i \neq j \neq k} L_i^4 (\rho_j + \Delta\rho_j)^2 (\rho_k + \Delta\rho_k)^2 / 4, \end{aligned}$$

где  $i, j, k \in \{x, y, z\}$ . Квадратное уравнение дает два решения  $t = (-B + m\sqrt{B^2 - 4ABC}) / (2A)$ , где  $m = \pm 1$  — индекс конфигурации прямой задачи кинематики, который не должен меняться в процессе движения, так как это приведет к возникновению параллельного типа сингулярности.

Таким образом, кинематическая модель манипулятора описывается системой уравнений (1), которая может быть разрешена как относительно декартовых координат  $p_x, p_y, p_z$ , так и относительно обобщенных координат  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ .

В кинематическую модель манипулятора входит ряд параметров (длины звеньев  $L = (L_x, L_y, L_z)$  и смещения датчиков приводов суставов относительно нулевого значения  $\Delta\rho = (\Delta\rho_x, \Delta\rho_y, \Delta\rho_z)$ ), которые для каждого конкретного случая должны определяться в процессе калибровки. Данная работа продолжает предыдущие исследования, в которых было показано,

что якобиан  $\mathbf{J}$ , связывающий приращение выходных координат переменных  $\Delta \mathbf{p}$  со смещениями датчиков исполнительных приводов  $\Delta \mathbf{p}$  и отклонениями длин звеньев от номинальных значений  $\Delta \mathbf{L}$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

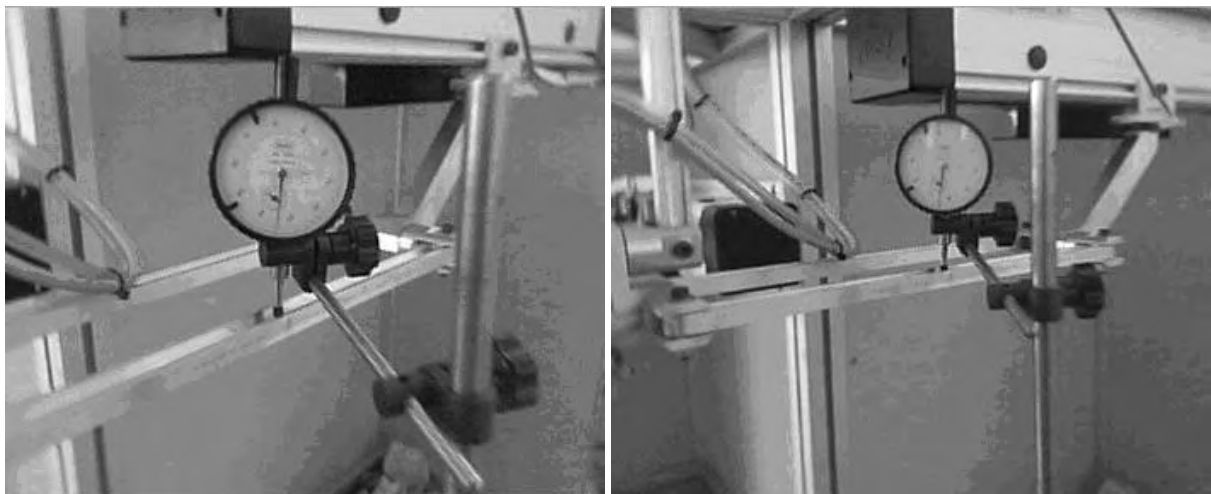
имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{p_y}{p_x - \rho_x} & \frac{p_z}{p_x - \rho_x} & \frac{p_x - \rho_x}{L_x} & \frac{p_y}{L_x} & \frac{p_z}{L_x} \\ \frac{p_x}{p_y - \rho_y} & 1 & \frac{p_z}{p_y - \rho_y} & \frac{p_x}{L_y} & \frac{p_y - \rho_y}{L_y} & \frac{p_z}{L_y} \\ \frac{p_x}{p_z - \rho_z} & \frac{p_y}{p_z - \rho_z} & 1 & \frac{p_x}{L_z} & \frac{p_y}{L_z} & \frac{p_z - \rho_z}{L_z} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Эта матрица позволяет получить дифференциальные соотношения, описывающие зависимость декартовых координат рабочего органа манипулятора от смещения датчиков исполнительных приводов и отклонений длин звеньев от номинальных значений для всех положений манипулятора.

Особенностью манипуляторов квазиортогональной структуры является то, что в номинальном случае при движении звена манипулятора вдоль направляющей оси это звено должно оставаться параллельным базовой плоскости, соответствующей данной оси. Однако для реального робота, имеющего погрешности изготовления и сборки звеньев, это условие нарушается. Поэтому в качестве исходной информации для калибровки можно использовать углы наклона звеньев в тестовых конфигурациях либо эквивалентные им численные значения — разности показаний неподвижных датчиков, касающихся звеньев в двух конфигурациях [9]. Для этого необходимо определить координаты измерительной головки (рисунок) для каждой из тестовых конфигураций:

1) положение "механический нуль"  $\Pi^0$ , в котором при номинальном значении координат манипулятор находится в нулевом положении, а все звенья манипулятора ориентированы параллельно соответствующим плоскостям;



Положение измерительной головки

2) положение "максимального перемещения"  $\Pi_i^+$  для направлений  $x, y, z$ , в котором  $i$ -е звено ориентировано параллельно соответствующей плоскости манипулятора при максимальном значении обобщенной координаты  $\rho_i = \rho_{max}$ ;

3) положение "минимального перемещения"  $\Pi_i^-$  для направлений  $x, y, z$ , в котором  $i$ -е звено ориентировано параллельно соответствующей плоскости манипулятора при минимальном значении обобщенной координаты  $\rho_i = \rho_{min}$ .

Для каждого тестового положения находятся показания измерительных головок  $Si_j^+$ , которые устанавливаются таким образом, чтобы датчики касались звена во всех положениях манипулятора (рисунок), а в положении  $\Pi^0$  касание осуществлялось в середине звена.

По измерениям  $Si_j^+$   $i, j \in \{x, y, z\}$ , для всех положений  $\Pi^0, \Pi_i^+, \Pi_i^-$  вычисляются соответствующие разности  $\Delta i_j^+ = Si_j^+ - Si_j^0$  и  $\Delta i_j^- = Si_j^- - Si_j^0$ , определяющие углы наклона звеньев в тестовых конфигурациях. Используя дифференциальную кинематическую модель (4), (5), можно получить систему линейных уравнений, связывающих искомые отклонения параметров модели ( $\Delta \rho_x, \Delta \rho_y, \Delta \rho_z, L_x, L_y, L_z$ ) с результатами измерений в тестовых конфигурациях

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & -c_1 & -b_1 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & -b_1 & -c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & -c_2 & -b_2 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & -b_2 & -c_2 & 0 \\ \hline 0 & a_1 & b_1 & 0 & -c_1 & -b_1 \\ 0 & b_1 & a_1 & 0 & -b_1 & -c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & -c_2 & -b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & -b_2 & -c_2 \\ \hline a_1 & 0 & b_1 & -c_1 & 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 & a_1 & -b_1 & 0 & -c_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & -c_2 & 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 & a_2 & -b_2 & 0 & -c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \rho_x \\ \Delta \rho_y \\ \Delta \rho_z \\ \Delta L_x \\ \Delta L_y \\ \Delta L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_y^+ \\ \Delta y_x^+ \\ \Delta x_y^- \\ \Delta y_x^- \\ \Delta y_z^+ \\ \Delta z_y^+ \\ \Delta y_z^- \\ \Delta z_y^- \\ \Delta x_z^+ \\ \Delta z_x^+ \\ \Delta x_z^- \\ \Delta z_x^- \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $a_i = \sin \alpha_i$ ,  $b_i = (0,5 + \sin \alpha_i) \operatorname{tg} \alpha_i$ ,  $c_i = (0,5 + \sin \alpha_i) \cdot 1/\cos \alpha_i - 0,5$  и  $a_1 = a \sin(\rho_{max}/L) > 0$ ,  $a_2 = a \sin(\rho_{min}/L) < 0$ , где  $\alpha$  — угол между звеньями  $y, z$  и соответствующими декартовыми осями, равный  $\alpha = a \sin(\rho_{max}/L)$  для  $\Pi_i^+$  и  $\alpha = a \sin(\rho_{min}/L)$  для  $\Pi_i^-$ . Эта система является переопределенной, поскольку число уравнений превышает число неизвестных.

### Анализ точности параметров модели

На практике при проведении эксперимента величины  $Si_j^+$  измеряются с некоторой погрешностью, что приводит к ошибкам в оценке разностей  $\Delta i_j^+ = Si_j^+ - Si_j^0$  и соответственно к ошибкам идентификации параметров модели. Чтобы оценить чувствительность разработанного алгоритма к погрешностям измерений, вычислим статистические характеристики соответствующих ошибок оценки параметров. При этом будем считать, что погрешности измерений  $Si_j^+$  являются независимыми одинаково распределенными гауссовскими случайными величинами  $\xi_{ij}^+$ ,  $\xi_{ij}^-$  и  $\xi_{ij}^0$ ,  $i, j \in \{x, y, z\}$ , с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Очевидно, что в случае, когда шум измерений отсутствует, система (6) записывается в матричном виде как

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Pi}^0 = \Delta \mathbf{P}, \quad (7)$$

а ее решение определяется выражением

$$\mathbf{\Pi}^0 = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \Delta \mathbf{P}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{J}$  — якобиан (см. (6)),  $\mathbf{\Pi}^0 = (\Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{L})^T$  — вектор параметров модели,  $\Delta \mathbf{P}$  — вектор измерений.

Если измерения производятся с погрешностями, то в правой части системы (6) присутствуют разности случайных величин  $\Delta \xi_{yx}^+ = \xi_{yx}^+ - \xi_{yx}^0$ ,  $\Delta \xi_{yx}^- = \xi_{yx}^- - \xi_{yx}^0$ , ..., которые можно представить как вектор  $\Delta \zeta$ . При этом уравнение (7) принимает вид

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Pi} = \Delta \mathbf{P} + \Delta \zeta, \quad (9)$$

а его решение методом наименьших квадратов записывается как

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot (\Delta \mathbf{P} + \Delta \zeta), \quad (10)$$

где  $\mathbf{\Pi}$  — вектор параметров модели с учетом ошибки. Поэтому ошибка оценки параметров  $\Delta \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}^0$  равна

$$\Delta \mathbf{\Pi} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \Delta \zeta, \quad (11)$$

а соответствующая матрица ковариации находится из выражения

$$\text{cov}(\mathbf{\Pi}) = E(\text{pinv}(\mathbf{J}) \cdot \Delta \zeta \cdot \Delta \zeta^T \cdot \text{pinv}(\mathbf{J})^T), \quad (12)$$

где  $E(.)$  — математическое ожидание, а  $\text{pinv}(\cdot)$  обозначает операцию псевдоинверсии  $\text{pinv}(\mathbf{J}) = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T$ . Поскольку матрица  $\mathbf{J}$  является неслучайной величиной, то выражение (12) можно преобразовать к виду

$$\text{cov}(\mathbf{\Pi}) = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot E(\Delta \zeta \cdot \Delta \zeta^T) \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1}, \quad (13)$$

и задача сводится к вычислению ковариации вектора  $\Delta \zeta$ , некоторые компоненты которого являются статистически зависимыми. Произведение векторов  $\Delta \zeta \cdot \Delta \zeta^T$  является матрицей размерности  $12 \times 12$ , диагональные элементы которой состоят из квадратов разностей  $(\xi_{ij}^+ - \xi_{ij}^0)^2$ , для которых  $E[(\xi_{ij}^+)^2 - 2\xi_{ij}^+ \xi_{ij}^0 + (\xi_{ij}^0)^2] = 2\sigma^2$ . Кроме того, один из элементов каждой строки этой матрицы, соответствующий произведениям с одинаковым  $\xi_{ij}^0$ , равен  $\sigma^2$ . Все остальные элементы состоят из произведения статистически независимых величин, а их математическое ожидание равно нулю. Поэтому искомую матрицу  $E(\Delta \zeta \cdot \Delta \zeta^T)$  можно представить в виде  $\mathbf{G} \cdot \sigma^2$ , где

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{zx} \end{bmatrix}, \text{ где } \mathbf{G}_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; i, j \in \{x, y, z\}. \quad (14)$$

Следовательно, искомая матрица может быть записана в виде

$$\text{cov}(\mathbf{\Pi}) = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \sigma^2, \quad (15)$$

что позволяет найти среднеквадратичные отклонения каждого из параметров модели ( $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z, L_x, L_y, L_z$ ) при известном шуме измерений. Например, для манипулятора типа Orthoglide при шуме измерений с параметром  $\sigma = 0,01$  мм среднеквадратичные погрешности оценки  $\Delta p_i$  и  $\Delta L_i$  составляют 0,073 и 0,072 мм соответственно.

## Выводы

В работе проведен анализ точности идентификации параметров ПКМ квазиортогональной структуры, полученных новым методом калибровки, основанном на измерении параллельности звеньев манипулятора по отношению к базовым плоскостям для специфических тестовых конфигураций. Анализ проводится на примере манипулятора типа Orthoglide, для которого получена матрица ковариации и выражения для оценки точности оценивания параметров модели. Показано, что такие параметры как длины звеньев и смещения датчиков приводов суставов относительно нулевого значения идентифицируемы и при помощи типовых измерительных средств, обладающих точностью 0,01 мм, их можно оценить с точностью около 0,07 мм.

## ACCURACY ANALYSIS FOR PARAMETERS IDENTIFICATION OF THE PARALLEL MANIPULATORS

A.P. PASHKEVICH, R.I. GOMOLITSKY

### Abstract

The paper focuses on accuracy analysis of parameters identification for the parallel manipulators of quasiorthogonal structure obtained from observations of the manipulator leg parallelism during motions between the prespecified test postures. Analytical expression for covariation matrix is found, numerical example for the Orthoglide manipulator is given.

### Литература

1. Merlet J.-P. Parallel Robots, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
2. Tlustý J., Ziegert J.C., Ridgeway S. Fundamental Comparison of the Use of Serial and Parallel Kinematics for Machine Tools, CIRP Annals 48 (1). 1999. P. 351–356.
3. Wenger P., Gosselin C., Maille B. // Proceedings of PKM'99, Milan, Italy. 1999. P. 23–32.
4. Wang J., Masory O. On the accuracy of a Stewart platform. Part I: The effect of manufacturing tolerances, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'93), Atlanta, Georgia, 1993. P. 114–120.
5. Renaud P., Andreff N., Pierrot F., Martinet P. // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'2004), April 2004, New-Orleans, USA. P. 4116–4121.
6. Zhuang H., Yan J., Masory O. // J. of Rob. Systems. 1998. Vol. 15, N. 7. P. 395–405.
7. Vischer P., Clavel R. // Robotica. 1998. Vol. 16. P. 207–218.
8. Yiu Y.K., Meng J., Li Z.X. // Proceedings of the 2003 IEEE, International Conference on Robotics & Automation, Taipei, Taiwan. September 14–19, 2003. P. 3660–3665.
9. Pashkevich A., Chablat D., Wenger P. // Proceedings of the 12th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM'06, St Etienne, France, May 2006. P. 151–156.
10. Renaud P., Andre N., Marquet F., Martinet P. // Proceedings of the 2003 IEEE, International Conference on Robotics & Automation, Taipei, Taiwan, September 14–19, 2003. P. 1191–1196.
11. Pashkevich A., Wenger P., Chablat D. // Journal of Mechanism and Machine Theory. 2005. Vol. 40 (8). P. 907–930.