ДОКЛАДЫ БГУИР
2007 АПРЕЛЬ–ИЮНЬ № 2 (18)

УДК 621.391.832.42 + 517.968.22-74:621

# МГНОВЕННАЯ КВАДРАТУРНАЯ МОДЕЛЬ УСТРОЙСТВ С АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ КОНВЕРСИЕЙ: ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

Е.В. СИНЬКЕВИЧ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
*П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 22 ноября 2006*

Найдено общее аналитическое решение задачи синтеза квадратурного канала мгновенной квадратурной модели — обратное преобразование Чебышева второго рода. Исследованы свойства преобразования Чебышева второго рода, в т.ч. взаимосвязь амплитудных характеристик различных порядков для квадратурного канала мгновенной квадратурной модели. Получены формулы взаимосвязи преобразований Чебышева первого и второго рода.

*Ключевые слова:* амплитудно-фазовая конверсия, мгновенная квадратурная модель, преобразования Чебышева, интегральные уравнения Вольтерра.

## Введение

В [1] предложена мгновенная квадратурная модель (МКМ) устройств с амплитудно-фазовой конверсией (АФК) — рис. 1. Она предназначена для моделирования указанных устройств по внешним характеристикам — амплитудным (АХ) и фазоамплитудным (ФАХ). Способ моделирования устройств по их внешним характеристикам называется также поведенческим (англ. behavioral simulation) и широко используется при составлении моделей уровня радиосистемы [2–4]. Согласно приведенной в [5] классификации, метод моделирования устройств с АФК по односигнальным АХ и ФАХ называется квазистатическим, а условия его применимости изложены, например, в [2, 6–8].

Термин "мгновенная" в названии МКМ подчеркивает, что в качестве входного воздействия для МКМ используется модель радиосигнала, а не его комплексной огибающей. Такое широкополосное моделирование радиотехнических устройств оправдано, например, в задачах анализа и прогнозирования электромагнитной совместимости радиосистем [9].

Преимущество представленной разновидности МКМ (рис. 1) перед предложенным ранее вариантом ее структуры [10, 11] (рис. 2) — возможность воспроизведения ФАХ четных порядков.

Конкретизируем понятия задач анализа и синтеза применительно к МКМ. Задача анализа МКМ состоит в определении ее АХ и ФАХ всех порядков по мгновенным передаточным характеристикам (МПХ) безынерционных нелинейных преобразователей (БНП) в синфазном и квадратурном каналах ($y(x)$ и $g(x)$ соответственно — см. рис. 1). Задача синтеза МКМ: найти МПХ $y(x)$ и $g(x)$ по известным АХ и ФАХ; последние обычно получают экспериментально или в результате схемотехнического моделирования, существенно реже — теоретически (например, в [6]).

В работе [1] предложены численные методы синтеза МКМ по АХ и ФАХ первого и второго порядков. Аналитические решения задач анализа и синтеза синфазного канала МКМ (фактически — БНП, см. рис. 1) получены в [12]. Цель настоящей работы — разработать соответствующие аналитические методы для квадратурного канала МКМ.

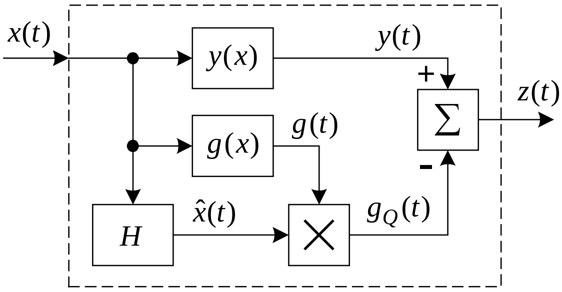


Рис. 1. Мгновенная квадратурная модель (МКМ-Л) [1]. $H$ — преобразование Гильберта

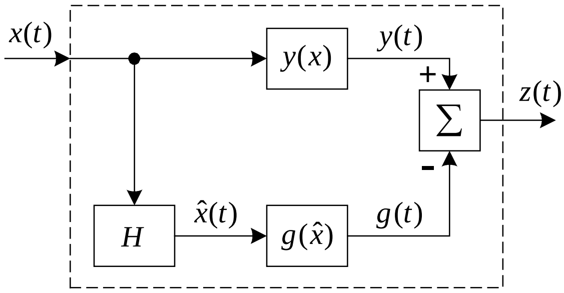


Рис. 2. Мгновенная квадратурная модель (МКМ-К) [10, 11]

## Анализ и синтез синфазного канала мгновенной квадратурной модели: преобразования Чебышева

Комплексной амплитудной характеристикой порядка $i$ называется зависимость комплексной амплитуды $\vec{Y}_i$ $i$-й гармоники сигнала на выходе устройства от амплитуды $X_1$ входного гармонического сигнала [7, 6, 13]:

$$\vec{Y}_i(X_1) = Y_i(X_1)\, e^{j\Psi_i(X_1)}, \quad X_1 \ge 0,$$
$$Y_i(X_1) = |\vec{Y}_i(X_1)| \ge 0, \quad \Psi_i(X_1) = \arg[\vec{Y}_i(X_1)], \quad j = \sqrt{-1}, \quad i = 0, 1, 2 \dots \,, \tag{1}$$

где $Y_i(X_1)$ и $\Psi_i(X_1)$ – АХ [1] и ФАХ $i$-го порядка соответственно.

Для БНП комплексные АХ $\vec{Y}_{I,i}(X_1)$ являются действительными [2], и их можно вычислить по МПХ $y(x)$ с помощью формулы [12]

$$\vec{Y}_{I,i}(X_1) = Y_{I,i}(X_1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y\left(X_1\cos\theta\right)\cos(i\cdot\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi\cdot\mathrm{sgn}(X_1)}\int_{-X_1}^{X_1} y(x)\,\frac{T_i\left(x/X_1\right)}{\sqrt{X_1^2 - x^2}}\, dx = ChT_i\left[\, y(x)\right], \tag{2}$$

где $\theta$ — полная фаза входного гармонического сигнала $(\theta = 2\pi f_1 t + \varphi)$; $\mathrm{sgn}(X_1)$ — знаковая функция с неопределенностью в нуле: $\mathrm{sgn}(X_1) = X_1/|X_1|$; $T_i(x)$ — полином Чебышева первого рода порядка $i$ [14, 15]: $T_i(\cos\theta) = \cos(i\cdot\theta)$; $ChT_i[\cdot]$ — оператор преобразования Чебышева порядка $i$ (см. ниже).

Выражение (2) совпадает с формулой для расчета $i$-го коэффициента разложения МПХ БНП $y(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева $T_i(x)$ на интервале $x \in [-X_1; X_1]$ (см. [14, 16])

$$y(x) = \frac{1}{2}Y_{I,0}(X_1) + \sum_{i=1}^{\infty} Y_{I,i}(X_1)\, T_i\left(x/X_1\right) \tag{3}$$

и названо в [12] (прямым) преобразованием Чебышева порядка $i$ для МПХ $y(x)$.

---

[1] Здесь и далее через $Y_0(X_1)$ обозначена удвоенная АХ нулевого порядка. Условимся считать $\Psi_0(X_1) \in \{0; -\pi\}$.

[2] Действительная АХ $Y_{I,i}(X_1)$, в отличие от физической АХ $Y_i(X_1)$, может принимать отрицательные значения, что соответствует $\Psi_i(X_1) = -\pi$ (см. формулу (1)).

В работе [12] получены формулы обратного преобразования Чебышева, позволяющие:

1) вычислить четную часть $y_{even}(x)$ МПХ БНП $y(x)$ по АХ $Y_{I,i}(X_1)$ четного порядка $i$;

2) вычислить нечетную часть $y_{odd}(x)$ МПХ БНП $y(x)$ по АХ $Y_{I,i}(X_1)$ нечетного порядка $i$.

Обратное преобразование Чебышева $i$-го порядка имеет вид [1] [12]

$$\begin{Bmatrix} y_{even}(x) \\ y_{odd}(x) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left[ Y_{I,i}(x\cos\phi)\,\pi_i(\sec\phi) + x\,Y'_{I,i}(x\cos\phi)\begin{Bmatrix} 1 \\ \cos\phi \end{Bmatrix}\right] d\phi + \begin{Bmatrix} Y_{I,i}(0)/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad i = \begin{Bmatrix} 0, 2, 4... \\ 1, 3, 5... \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $Y'_{I,i}(X_1) = dY_{I,i}(X_1)/dX_1$; $\pi_i(x)$ — полиномы, определяемые по правилу

$$\pi_0(x) = 0; \quad \pi_1(x) = 1; \quad \pi_i(x) = 2(i-1)T_{i-1}(x) + \pi_{i-2}(x), \quad i \ge 2. \quad (5)$$

При $i \ge 2$ левую часть (4) можно вычислить лишь с точностью до полинома порядка $i-2$ (см. [12]). Кроме того, из (26) следует необходимое условие сходимости интеграла в (4): $Y_{I,i}(0) = 0$ для $i \ge 2$. Поэтому рассматривать постоянное слагаемое $Y_{I,i}(0)/2$ в (4) имеет смысл только для $i = 0$.

Обратное преобразование Чебышева (4) можно представить в операторной форме

$$\bar{y}(x) = ChT_i^{-1}\left[\, Y_{I,i}(X_1)\,\right], \quad \bar{y}(x) = \begin{Bmatrix} y_{even}(x) \\ y_{odd}(x) \end{Bmatrix}, \quad i = \begin{Bmatrix} 0, 2, 4... \\ 1, 3, 5... \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Поскольку синфазный канал МКМ представляет собой БНП (см. рис. 1), то для его анализа следует воспользоваться формулой (2), а для синтеза — формулой (4).

## Анализ квадратурного канала мгновенной квадратурной модели: преобразование Чебышева второго рода

Для определения комплексных АХ квадратурного канала МКМ рассмотрим его реакцию

$$g_Q(t) = \hat{x}(t)\, g(t) \quad (7)$$

(см. рис. 1) на гармонический входной сигнал

$$x(t) = X_1\cos(2\pi f_1 t + \varphi) = X_1\cos\theta. \quad (8)$$

В этом случае [2, 17]

$$\hat{x}(t) = X_1\sin(2\pi f_1 t + \varphi) = X_1\sin\theta, \quad (9)$$

а выходной сигнал $g(t)$ БНП $g(x)$ можно разложить в ряд Фурье по косинусам [12, 17]

$$g(t) = \frac{1}{2}G_{I,0}(X_1) + \sum_{i=1}^{\infty} G_{I,i}(X_1)\cos(i\,\theta), \quad \theta = 2\pi f_1 t + \varphi, \quad (10)$$

где $G_{I,i}(X_1)$ — действительная АХ порядка $i$ БНП $g(x)$, определяемая по формуле (2).

Подставив (9) и (10) в (7) и учтя равенство

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \left[\,\sin(\beta+\alpha) - \sin(\beta-\alpha)\,\right]/2, \quad (11)$$

получим

[1] Формула (4) представляет собой сокращенную запись двух формул: для получения первой формулы следует взять верхние выражения в фигурных скобках, а для второй формулы – нижние.

$$g_Q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_{Q,i}(X_1)\sin(i\,\theta)\,,\quad \theta = 2\pi f_1 t + \varphi\,, \tag{12}$$

$$G_{Q,i}(X_1) = [G_{I,i-1}(X_1) - G_{I,i+1}(X_1)]\cdot X_1/2\,,\quad i = 1,2,3\ldots,\quad G_{Q,0}(X_1) \equiv 0\,, \tag{13}$$

где $G_{Q,i}(X_1)$ — действительная АХ порядка $i$ квадратурного канала МКМ.

Поскольку $\sin(i\,\theta) = \cos(i\,\theta - \pi/2)$, то комплексные АХ квадратурного канала МКМ $\vec{G}_{Q,i}(X_1)$ являются мнимыми:

$$\vec{G}_{Q,i}(X_1) = -j\,G_{Q,i}(X_1)\,,\quad i = 0,1,2\ldots,\quad j = \sqrt{-1}\,, \tag{14}$$

а комплексные АХ МКМ в целом определяются формулой (см. рис. 1)

$$\vec{Z}_i(X_1) = \vec{Y}_{I,i}(X_1) - \vec{G}_{Q,i}(X_1) = Y_{I,i}(X_1) + j\cdot G_{Q,i}(X_1)\,,\quad i = 0,1,2\ldots \tag{15}$$

Из разложения сигнала $g_Q(t)$ в ряд Фурье по синусам (12) следует формула для расчета действительных АХ квадратурного канала $G_{Q,i}(X_1)$ по МПХ БНП $g(x)$

$$\begin{aligned} G_{Q,i}(X_1) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[g\left(X_1\cos\theta\right)X_1\sin\theta\right]\sin(i\,\theta)\,d\theta = \frac{2}{|X_1|\,\pi}\int_{-X_1}^{X_1} g(x)\sqrt{X_1^2 - x^2}\,U_{i-1}\left(x/X_1\right)dx = \\ &= X_1\,ChU_{i-1}\left[g(x)\right] = \overline{ChU}_i\left[g(x)\right],\quad i = 1,2,3\ldots \qquad G_{Q,0}(X_1) \equiv 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $U_{i-1}(x)$ — полином Чебышева второго рода порядка $i-1$ [14, 15]: $U_{i-1}(\cos\theta) = \sin(i\,\theta)/\sin(\theta)$; $ChU_i[\cdot]$ — оператор преобразования Чебышева второго рода порядка $i$ (см. ниже); $\overline{ChU}_i[\cdot]$ — модифицированное преобразование Чебышева второго рода (см. ниже).

Формула (16) обобщает известные выражения для $G_{Q,1}(X_1)$ и $G_{Q,2}(X_1)$ [1].

Как следует из (16), значение коэффициента передачи квадратурного канала МКМ по амплитуде в $i$-й гармонической зоне $K_{Q,i}(X_1) = G_{Q,i}(X_1)/X_1$ совпадает с коэффициентом $C_{i-1}$ разложения МПХ БНП $g(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода на интервале $x \in [-X_1;\, X_1]$ (см. [14, 16]):

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\,U_i\left(x/X_1\right) = \sum_{i=0}^{\infty} K_{Q,i+1}(X_1)\,U_i\left(x/X_1\right)\,. \tag{17}$$

Поэтому отображение $ChU_i : g(x) \to K_{Q,i+1}(X_1)$ назовем преобразованием Чебышева второго рода порядка $i$ для МПХ $g(x)$. Вместе с тем для практики (анализа и синтеза МКМ) непосредственный интерес представляет отображение $\overline{ChU}_i : g(x) \to G_{Q,i}(X_1)$, которое назовем модифицированным преобразованием Чебышева второго рода порядка $i$ для МПХ $g(x)$.

В таблице представлены основные свойства преобразования $\overline{ChU}_i$; для сравнения приведены также аналогичные свойства преобразования первого рода $ChT_i$ [12]. Свойство линейности (Т2) и теорема о масштабировании аргумента (Т4) следуют непосредственно из определения (16). Свойства (Т6) ("четная часть $g_{even}(x)$ МПХ $g(x)$ формирует АХ $G_{Q,i}(X_1)$ нечетных порядков $i$") и (Т8) ("нечетная часть $g_{odd}(x)$ МПХ $g(x)$ формирует АХ $G_{Q,i}(X_1)$

четных порядков") можно получить также на базе определения (16), если разложить МПХ $g(x)$ на четную и нечетную составляющие

$$g(x) = g_{even}(x) + g_{odd}(x)\,, \qquad g_{even}(x) = [g(x) + g(-x)]/2\,, \qquad g_{odd}(x) = [g(x) - g(-x)]/2 \qquad (18)$$

и учесть свойство полиномов Чебышева $U_n(-x) = (-1)^n\, U_n(x)$. Для доказательства теоремы об аналитическом продолжении АХ на область отрицательных аргументов (Т10) следует воспользоваться (16) и свойством $U_n(-x) = (-1)^n\, U_n(x)$. И хотя физически $X_1 \geq 0$, теоремы (Т9), (Т10) полезны при выборе аппроксимирующих функций для АХ $G_{I,i}(X_1)$ и $G_{Q,i}(X_1)$. Свойство (Т12) следует из тригонометрического представления в (16) и формулы (11).

**Основные свойства преобразований Чебышева**

| $g(x)$ | $G_{I,i}(X_1) = ChT_i[g(x)], \quad i = 0,1,2...$ | | $G_{Q,i}(X_1) = \overline{ChU}_i[g(x)], \quad i = 1,2,3...$ | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1 g1(x) + a_2 g2(x)$ | $a_1 G1_{I,i}(X_1) + a_2 G2_{I,i}(X_1)$ | (Т1) | $a_1 G1_{Q,i}(X_1) + a_2 G2_{Q,i}(X_1)$ | (Т2) |
| $g(bx)$ | $G_{I,i}(bX_1)$ | (Т3) | $G_{Q,i}(bX_1)/b$ | (Т4) |
| $g_{even}(x) = g_{even}(-x)$ | $G_{I,i}(X_1)[1 + (-1)^i\,]/2$ | (Т5) | $G_{Q,i}(X_1)[1 - (-1)^i\,]/2$ | (Т6) |
| $g_{odd}(x) = -g_{odd}(-x)$ | $G_{I,i}(X_1)[1 - (-1)^i\,]/2$ | (Т7) | $G_{Q,i}(X_1)[1 + (-1)^i\,]/2$ | (Т8) |
| $\forall\, g(x)$ | $G_{I,i}(-X_1) = (-1)^i\, G_{I,i}(X_1)$ | (Т9) | $G_{Q,i}(-X_1) = (-1)^i\, G_{Q,i}(X_1)$ | (Т10) |
| $x \cdot g(x)$ | $\frac{X_1}{2}\left[G_{I,\lvert i-1\rvert}(X_1) + G_{I,i+1}(X_1)\right]$ | (Т11) | $\frac{X_1}{2}\left[G_{Q,i-1}(X_1) + G_{Q,i+1}(X_1)\right]$ | (Т12) |

## Синтез квадратурного канала мгновенной квадратурной модели: обратное преобразование Чебышева второго рода

Модифицированное преобразование Чебышева второго рода (16) позволяет выполнить анализ квадратурного канала МКМ, а для решения задачи синтеза следует рассматривать (16) как интегральное уравнение относительно неизвестной МПХ $g(x)$ при заданных АХ $G_{Q,i}(X_1)$.

Воспользуемся свойствами (Т6), (Т8) и приведем уравнение (16) к каноническому виду (считаем $X_1 > 0$)

$$\int_0^{X_1} \bar{g}(x)\,\sqrt{X_1^2 - x^2}\; U_{i-1}\!\left(x / X_1\right) dx = \frac{\pi X_1}{4} G_{Q,i}(X_1), \quad \bar{g}(x) = \begin{Bmatrix} g_{even}(x) \\ g_{odd}(x) \end{Bmatrix}, \quad i = \begin{Bmatrix} 1, 3, 5... \\ 2, 4, 6... \end{Bmatrix}. \qquad (19)$$

Уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода. С помощью формулы

$$U_i(x) = (i+1)\sqrt{\pi/2}\,\left(\lvert x^2 - 1\rvert\right)^{-1/4} \cdot P_{i+1/2}^{-1/2}(x)\,, \qquad x > -1\,, \qquad x \neq 1\,, \qquad (20)$$

которая следует из [18, формулы 3.15(4), 10.11(6) и 3.4(5)], уравнение (19) можно свести к более общему уравнению с присоединенной функцией Лежандра первого рода $P_\nu^\mu(x)$ в ядре:

$$\int_a^{X_1} \left(X_1^2 - x^2\right)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\!\left(x/X_1\right) \bar{g}(x)\, dx = \bar{f}(X_1), \qquad a < X_1 < \infty\,, \qquad (21)$$

где

$$a = 0; \qquad \mu = -1/2; \qquad \nu = i - 1/2; \qquad \bar{f}(X_1) = \sqrt{\pi X_1 / 2}\; G_{Q,i}(X_1)\,/\,(2i)\,. \qquad (22)$$

Решение уравнения (21) имеет вид [19, с.510]

$$\bar{g}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\left(x^2-X_1^2\right)^{-(2-n-\mu)/2}P_\nu^{2-n-\mu}\left(x/X_1\right)\bar{f}(X_1)\,dX_1\,,\quad \mu<1,\quad \nu\geq -1/2,\quad n>1-\mu\,. \qquad (23)$$

Основываясь на ограничении $n>1-\mu$, примем в (23) $n=2$. Тогда, используя соотношение

$$T_i(x)=\sqrt{\pi/2}\,\left(|\,x^2-1|\right)^{1/4}\cdot P_{i-1/2}^{1/2}(x)\,,\quad x>-1,\quad x\neq 1, \qquad (24)$$

которое можно получить из [15, формулы (8.6.12), (22.3.15), (8.6.8)] и [14, формула (1.49)], представим (23) в виде

$$\bar{g}(x)=\frac{1}{2i}\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x\frac{X_1\,G_{Q,i}(X_1)}{\sqrt{x^2-X_1^2}}T_i\left(x/X_1\right)dX_1\equiv\overline{ChU}_i^{-1}\left[G_{Q,i}(X_1)\right],\quad \begin{array}{l}a=0,\\ x>a.\end{array} \qquad (25)$$

Решение (23) получено в [19] для случая $a>0$. Если же $a=0$, то подынтегральная функция в (25) может иметь разрыв второго рода в точке $X_1=a=0$, так как $T_i(x/X_1)\to\infty$ при $X_1\to 0^+$. Поэтому на АХ $G_{Q,i}(X_1)$ необходимо наложить дополнительное ограничение

$$\lim_{X_1\to 0}\left[\,X_1^{2-i}\,G_{Q,i}(X_1)\right]=0\,, \qquad (26)$$

обеспечивающее сходимость интеграла в (25). Как следует из [19, с. 543, теорема 37.9], ограничение (26) накладывается и на АХ $Y_{I,i}(X_1)$ синфазного канала МКМ (2).

В известных автору практических ситуациях АХ порядка $i$ в окрестности точки $X_1=0$ возрастает как степенная функция с показателем не меньше $i$:

$$\begin{aligned}&\lim_{X_1\to 0}\left[Y_{I,i}(X_1)/X_1^{\,i+m_I}\right]=C_I\,,\quad 0<|C_I|<\infty,\quad m_I\geq 0;\\ &\lim_{X_1\to 0}\left[G_{Q,i}(X_1)/X_1^{\,i+m_Q}\right]=C_Q\,,\quad 0<|C_Q|<\infty,\quad m_Q\geq 0,\end{aligned} \qquad (27)$$

поэтому условие (26) выполняется с запасом. Например, для модели Saleh [20] в (27) следует принять $i=1$, $m_I=0$, $m_Q=2$. Если поведенческие модели АХ и ФАХ [4, формулы (4.4) и (4.14)] выразить через амплитуды напряжений и перевести в квадратурную форму с помощью (44), то формула (27) справедлива при следующих значениях параметров: $i=1$, $m_I=0$, $m_Q=20/K$ (где $K$ — параметр модели ФАХ, определяющий "остроту колена", см. [4], $0<K<\infty$). С результатами экспериментальных исследований АХ и ФАХ можно ознакомиться, например, в [21, 22] для транзисторных усилителей, в [20, 23] — для усилителей на лампе бегущей волны, в [24] — для умножителей частоты. Ссылки на другие источники можно найти в [2, 25, 26].

Модифицированное обратное преобразование Чебышева второго рода в форме (25) справедливо при $x>0$. Для $x<0$ необходимо доопределить (25), основываясь на четности $g_{even}(x)$ и нечетности $g_{odd}(x)$, следующим образом: $\bar{g}(-x)=(-1)^{i-1}\bar{g}(x)$, где $i$ — порядок преобразования (25). МПХ $\bar{g}(x)$ в точке $x=0$ можно найти как правосторонний предел $(x\to 0^+)$ от (25), а можно воспользоваться тригонометрическим представлением из (16) и получить

$$K_{Q,i}(0)=\left[G_{Q,i}(X_1)/X_1\right]\Big|_{X_1=0}=\left\{\,g(0),\ i=1;\quad 0,\ i=2,3,4...\right\}. \qquad (28)$$

Поскольку для любой реализуемой на практике МПХ ($|g(x)|<\infty$, $|x|<\infty$) из тригонометрического представления (16) следует $G_{Q,i}(0)\equiv 0$, то, применив к (28) правило Лопиталя, найдем

$$g(0)=\left[dG_{Q,1}(X_1)/dX_1\right]\Big|_{X_1=0} \equiv G'_{Q,1}(0) \ . \tag{29}$$

Принимая во внимание рассмотренные особенности, представим (25) в тригонометрической форме ($X_1 = x\cos\phi$):

$$\overline{g}(x)=\overline{ChU}_i^{-1}\left[\, G_{Q,i}(X_1)\,\right]=\frac{1}{2i}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^{\pi/2} G_{Q,i}(x\cos\phi)\; x\cos\phi\; T_i(\sec\phi)\, d\phi . \tag{30}$$

Формула (30) справедлива при $-\infty<x<\infty$, если учесть свойство (Т10).

Еще одну форму записи модифицированного обратного преобразования Чебышева второго рода можно получить, выполнив дифференцирование под интегралом в (30)

$$\begin{Bmatrix} g_{even}(x) \\ g_{odd}(x) \end{Bmatrix}=\frac{1}{2i}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\, 2G'_{Q,i}(x\cos\phi)+G''_{Q,i}(x\cos\phi)\cdot x\cos\phi\right]\cos^2\phi\cdot T_i(\sec\phi)\, d\phi, \quad i=\begin{Bmatrix}1,3,5\ldots \\ 2,4,6\ldots\end{Bmatrix}, \tag{31}$$

где $G'_{Q,i}(X_1)=dG_{Q,i}(X_1)/dX_1$ ; $G''_{Q,i}(X_1)=d^2G_{Q,i}(X_1)/dX_1^2$ .

Некоторые поведенческие модели ФАХ [27, 28] постулируют отсутствие АФК в малосигнальном режиме, т.е. принимают $\Psi_i(X_1)\equiv 0$ для $0\le X_1\le A_0$ (где $A_0$ – параметр модели ФАХ). В соответствии с (44) это означает $G_{Q,i}(X_1)\equiv 0$ для $0\le X_1\le A_0$. Тогда из (19) следует, что МПХ $\overline{g}(x)\equiv 0$ при $|x|\le A_0$, а для расчета $\overline{g}(x)$ при $x>A_0$ следует воспользоваться формулой (25) с параметром $a=A_0$ или формулой (30) с верхним пределом интегрирования $\phi_{up}(x)=\arccos(A_0/x)$. В данном случае ограничение (26) на АХ $G_{Q,i}(X_1)$ не накладывается.

Таким образом, модифицированное обратное преобразование Чебышева второго рода порядка $i$ (25), (30), (31) позволяет решить задачу синтеза квадратурного канала МКМ:

1) вычислить четную часть $g_{\mathrm{even}}(x)$ МПХ БНП $g(x)$ по АХ $G_{Q,i}(X_1)$ нечетного порядка $i$;

2) вычислить нечетную часть $g_{\mathrm{odd}}(x)$ МПХ БНП $g(x)$ по АХ $G_{Q,i}(X_1)$ четного порядка $i$.

### Взаимосвязь преобразований Чебышева первого и второго рода

Между модифицированным преобразованием Чебышева второго рода порядка $i$, $i\ge 1$, и преобразованием Чебышева первого рода порядка $i-1$ существует взаимно однозначное соответствие. Поскольку для БНП АХ высших порядков однозначно определяются амплитудными характеристиками низших порядков [12]

$$G_{I,m+2}(X_1)=G_{I,m}(X_1)-2(m+1)\int\limits_0^1 G_{I,m}(X_1 t)\, t^{m+1}\, dt+\begin{Bmatrix} 0 \\ B\, X_1^{|m|-2}\end{Bmatrix}, \qquad m=\begin{Bmatrix}0,1,2\ldots \\ -2,-3\ldots\end{Bmatrix}, \tag{32}$$
$$B=\mathrm{const}, \qquad G_{I,-m}(\cdot)=G_{I,m}(\cdot),$$

то, подставив (32) в (13) (при $m=i-1$), получим

$$G_{Q,i}(X_1)=i\, X_1\int\limits_0^1 G_{I,i-1}(X_1\cdot t)\, t^i\, dt\,, \qquad i=1,2,3\ldots \tag{33}$$

Или, в каноническом виде ($\xi = X_1 t$),

$$\int_0^{X_1} G_{I,i-1}(\xi)\,\xi^i\,d\xi = \frac{X_1^i}{i} G_{Q,i}(X_1), \quad G_{I,i-1}(X_1) = ChT_{i-1}[g(x)], \quad G_{Q,i}(X_1) = \overline{ChU}_i[g(x)]\,. \tag{34}$$

Относительно АХ $G_{I,i-1}(X_1)$ БНП $g(x)$ формула (34) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода с вырожденным ядром, которое можно решить, дифференцируя обе части (34) по переменной $X_1$. Решение имеет вид

$$G_{I,i-1}(X_1) = \frac{G_{Q,i}(X_1)}{X_1} + \frac{1}{i}\frac{d\,G_{Q,i}(X_1)}{d\,X_1}, \quad i = 1,2,3... \tag{35}$$

Во взаимной однозначности преобразований (33) и (35) можно убедиться, подставив (35) в (34), разбив интеграл на 2 слагаемых и применив во втором слагаемом формулу интегрирования по частям.

Найденная взаимосвязь позволяет представить модифицированное обратное преобразование Чебышева второго рода порядка $i$ (25), (30), (31) в форме обратного преобразования Чебышева первого рода порядка $i-1$ от АХ (35) БНП $g(x)$:

$$\begin{Bmatrix} g_{even}(x) \\ g_{odd}(x) \end{Bmatrix} = \overline{ChU}_i^{-1}\left[\, G_{Q,i}(X_1)\,\right] = ChU_{i-1}^{-1}\left[\, G_{Q,i}(X_1)/X_1\,\right] = ChT_{i-1}^{-1}\left[\, G_{I,i-1}(X_1)\,\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[ G_{I,i-1}(x\cos\phi)\,\pi_{i-1}(\sec\phi) + x\,G'_{I,i-1}(x\cos\phi)\begin{Bmatrix} 1 \\ \cos\phi \end{Bmatrix}\right] d\phi + \begin{Bmatrix} G_{I,i-1}(0)/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad i = \begin{Bmatrix} 1,3,5... \\ 2,4,6... \end{Bmatrix}, \tag{36}$$

где $G_{I,i-1}(X_1)$ определяется по формуле (35), а $G'_{I,i-1}(X_1) = dG_{I,i-1}(X_1)/dX_1$.

Поскольку вычислить МПХ $\bar{g}(x)$ по АХ $G_{Q,i}(X_1)$ при $i \ge 3$ можно лишь с точностью до полинома порядка $i-3$, то учитывать последнее слагаемое в (36) необходимо только для $i=1$. Кроме того, на практике $G_{Q,1}(0)=0$, поэтому из (35) следует $G_{I,0}(0)/2 = G'_{Q,1}(0)$, что совпадает с (29).

Наибольшее практическое значение имеют преобразования (16) первого и второго порядков [1]. Получим формулы их обращения с помощью (36):

$$g_{even}(x) = \overline{ChU}_1^{-1}\left[\, G_{Q,1}(X_1)\,\right] = \frac{x}{2}\int_0^{\pi/2} G'_{I,0}(x\cos\phi)\,d\phi + \left.\frac{dG_{Q,1}(X_1)}{d\,X_1}\right|_{X_1=0}; \tag{37}$$

$$g_{odd}(x) = \overline{ChU}_2^{-1}\left[\, G_{Q,2}(X_1)\,\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} F_{Q,2}(x\cos\phi)\,d\phi, \quad F_{Q,2}(X_1) = \frac{3}{2}\frac{dG_{Q,2}}{d\,X_1} + \frac{X_1}{2}\frac{d^2G_{Q,2}}{d\,X_1^2}. \tag{38}$$

Другую форму взаимосвязи преобразований Чебышева первого и второго рода можно получить, если свести (2) к уравнению (21) с помощью (Т5), (Т7) и (24). Тогда, приняв в решении (23) $n=1$, снова воспользовавшись (24) и перейдя к тригонометрической форме записи, получим обратное преобразование Чебышева (4), (6) в виде

$$\bar{y}(x) = ChT_i^{-1}\left[\, Y_{I,i}(X_1)\,\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{\pi/2} Y_{I,i}(x\cos\phi)\;x\cos\phi\;T_i(\sec\phi)\,d\phi\,. \tag{39}$$

Сравнив (39) с (30), найдем

$$\bar{g}(x) = \overline{ChU}_i^{-1}\left[G_{Q,i}(X_1)\right] = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}ChT_i^{-1}\left[G_{Q,i}(X_1)\right] = \frac{1}{i}\left.\frac{d\,\bar{y}(x)}{dx}\right|_{G_{Q,i}(X_1)\equiv Y_{I,i}(X_1)}, \quad i = 1,2,3... \tag{40}$$

Соотношению (40) можно дать следующую интерпретацию. Пусть БНП с МПХ $\bar{y}(x)$ в синфазном канале МКМ формирует АХ $i$-го порядка $Y_{I,i}(X_1) = ChT_i[\bar{y}(x)]$. Чтобы получить такую же АХ в квадратурном канале МКМ $G_{Q,i}(X_1) \equiv Y_{I,i}(X_1)$, БНП в квадратурном канале должен иметь МПХ $\bar{g}(x) = (1/i)\, d\,\bar{y}(x)/dx$.

Справедливо и обратное к (40) соотношение

$$\left\{\begin{matrix} y_{odd}(x) \\ y_{even}(x) \end{matrix}\right\}\Bigg|_{Y_{I,i}(X_1)\equiv G_{Q,i}(X_1)} = i\int_0^x \left\{\begin{matrix} g_{even}(\xi) \\ g_{odd}(\xi) \end{matrix}\right\} d\xi + \left\{\begin{matrix} 0 \\ B \end{matrix}\right\}, \quad -\infty < B < \infty, \quad i = \left\{\begin{matrix} 1,3,5\ldots \\ 2,4,6\ldots \end{matrix}\right\}. \tag{41}$$

Для $i = 1,3,5\ldots$ постоянная интегрирования в (41) принята равной нулю, чтобы вычисленная по формуле (41) МПХ $y_{odd}(x)$ была нечетной. В случае $i = 2,4,6\ldots$ постоянная интегрирования $B$ может принимать любые значения, поскольку ее выбор влияет только на АХ нулевого порядка $Y_{I,0}(X_1)$.

## Взаимосвязь комплексных амплитудных характеристик различных порядков для мгновенной квадратурной модели

В результате ряда преобразований (рис. 3) можно получить формулу взаимосвязи АХ различных порядков квадратурного канала МКМ

$$G_{Q,i+2}(X_1) = \frac{i+2}{i}\left[G_{Q,i}(X_1) - 2(i+1)\int_0^1 G_{Q,i}(X_1 t)\, t^{i+1} dt\right] + \left\{\begin{matrix} 0 \\ B\, X_1^{|i|-2} \end{matrix}\right\}, \quad i = \left\{\begin{matrix} 1,2,3\ldots \\ -3,-4\ldots \end{matrix}\right\}, \tag{42}$$
$$B = \mathrm{const}, \qquad G_{Q,-i}(\cdot) = -G_{Q,i}(\cdot),$$

которая отличается от аналогичной формулы (32) для БНП (синфазного канала МКМ) только коэффициентом $(i+2)/i$.

Следовательно, как и для БНП, комплексная АХ МКМ порядка $i$ (15) полностью определяет комплексные АХ высших порядков $\vec{Z}_{i+2n}(X_1)$, $n = 1,2,3\ldots$ и частично (с точностью до полинома

$$\vec{P}_{i,n}(X_1) = \sum_{m=1}^{n} \vec{B}_{i-2m} X_1^{i-2m}, \quad \vec{B}_{i-2m} = B_{I,\,i-2m} + jB_{Q,\,i-2m} = \mathrm{const}, \quad B_{Q,\,0} = 0, \quad j = \sqrt{-1} \tag{43}$$

порядка $i-2$) определяет комплексные АХ низших порядков $\vec{Z}_{i-2n}(X_1)$, $n = 1,2,3\ldots$, $i - 2n \geq 0$.

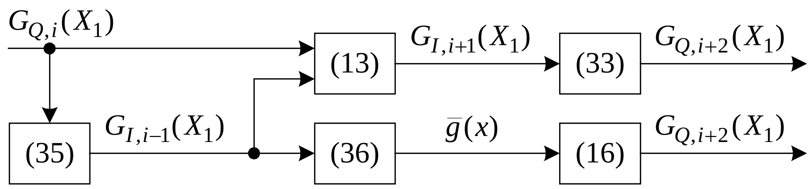


Рис. 3. Алгоритм вывода формулы (42)

## Заключение

Объединение аналитических решений из [12] для синфазного канала МКМ с полученными в настоящей работе решениями для квадратурного канала позволило разработать общие теоретические методы анализа и синтеза МКМ в целом.

Для анализа МКМ следует применить к МПХ $y(x)$ и $g(x)$ прямые преобразования Чебышева первого (2) и второго (16) рода соответственно, затем по формуле (15) найти комплексные АХ МКМ $\vec{Z}_i(X_1)$, которые можно разложить на физические АХ и ФАХ с помощью (1).

Задача синтеза МКМ решается в обратном порядке: сначала по физическим АХ $Z_i(X_1)$ и ФАХ $\Psi_i(X_1)$ моделируемого устройства необходимо вычислить действительные АХ синфазного и квадратурного каналов МКМ:

$$Y_{I,i}(X_1) = \operatorname{Re}\vec{Z}_i(X_1) = Z_i(X_1)\cos\Psi_i(X_1)\,; \qquad G_{Q,i}(X_1) = \operatorname{Im}\vec{Z}_i(X_1) = Z_i(X_1)\sin\Psi_i(X_1)\,, \qquad (44)$$

а затем применить к АХ (44) обратные преобразования Чебышева первого (4) и второго (36) рода.

## INSTANTANEOUS QUADRATURE MODEL OF NONLINEAR DEVICES EXHIBITING AMPLITUDE-DEPENDENT PHASE SHIFT: INVERSION OF THE SECOND-KIND CHEBYSHEV TRANSFORM

E.V. SINKEVICH

### Abstract

A general analytical solution (inverse Chebyshev transform of the second kind) of the synthesis problem is found for the quadrature channel of the instantaneous quadrature model. Properties of the second-kind Chebyshev transform are investigated – including the interrelationship between envelope (amplitude-to-amplitude) transfer characteristics of different orders for the quadrature channel of the instantaneous quadrature model. Interrelationships between Chebyshev transforms of the first and second kinds are established.

### Литература

1. *Loyka S.L., Mosig J.R.* // Int. J. RF and Microwave CAE. 2000. Vol. 10, No. 4. P. 221–237.
2. *Jeruchim M.C., Balaban P., Shanmugan K.S.* Simulation of communication systems: modeling, methodology and techniques. 2nd ed. New York, 2000.
3. *Tranter W.H. et al.* Principles of communication systems simulation with wireless applications. Upper Saddle River, 2004.
4. *Turlington T.R.* Behavioral modeling of nonlinear RF and microwave devices. Norwood, 2000.
5. *Касымов А.Ш., Касымов Ш.И.* // Успехи современной радиоэлектроники. 2005. № 6. С. 42–57.
6. Амплитудно-фазовая конверсия / Под ред. Г.М. Крылова. М., 1979.
7. *Гольдин С.М.* // Радиотехника. 1971. Т. 26, № 11. С. 42–51.
8. *Репинский В.Н.* // Радиотехника. 1977. Т. 32, № 10. С. 87–89.
9. *Мордачев В.И.* // Докл. БГУИР. 2004. № 2. С. 154–163.
10. *Kaye A.R., George D.A., Eric M.J.* // IEEE Trans. on Communications. 1972. Vol. 20, No. 5. P. 965–972.
11. *Сидоров В.М., Кудашов В.Н.* // Радиотехника. 1976. Т. 31, № 4. С. 10–17.
12. *Blachman N.M.* // IEEE Trans. on Information Theory. 1971. Vol. 17, No. 4. P. 398–404.
13. *Blachman N.M.* // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc. 1981. Vol. 29, No. 6. P. 1202–1205.
14. *Mason J.C., Handscomb D.C.* Chebyshev polynomials. Boca Raton, 2003.
15. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
16. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. 2-е изд. М., 1972.
17. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. 3-е изд. М., 2000.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. М., 1973, 1974, 1967. Т. 1, 2.
19. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
20. *Saleh A.A.M.* // IEEE Trans. on Communications. 1981. Vol. 29, No. 11. P. 1715–1720.
21. *Katz A.* // Microwave J. 1999. Vol. 42, No. 4. P. 22–44.
22. *Asbeck P.M. et al.* // 2002 IEEE MTT-S Int. Microwave Symposium Digest. 2002. Vol. 1, P. 135–138.
23. *Clark C.J. et al.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. 1998. Vol. 46, No. 12. P. 2531–2540.
24. *Park Y., Kenney J.S.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. 2003. Vol. 51, No. 12. P. 2516–2522.
25. *Pedro J.C., Maas S.A.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. 2005. Vol. 53, No. 4. P. 1150–1163.
26. *Isaksson M., Wisell D., Ronnow D.* // IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech. 2006. Vol. 54, No. 1. P. 348–359.
27. *Тепляков И.М.* // Радиотехника. 1997. № 12. С. 84–87.
28. *Ichikawa M. et al.* // 2005 IEEE Int. Conference on Personal Wireless Communications. 2005. P. 533–536.