

УДК 621.316.726.078

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СРЫВА СИНХРОНИЗМА СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

В.Л. БУСЬКО, А.А. ЛОБАТЫЙ, АЛЬКАТАУНА ХИКМАТ АХМЕД

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 22 марта 2007

На основе теории марковских случайных процессов рассматривается задача оценки вероятности срыва синхронизма системы фазовой автоподстройки частоты при учете инерционности системы.

Ключевые слова: разность фаз, срыв синхронизма, плотность вероятности, временной интервал.

Введение

Широкое распространение в радиоэлектронике получили системы автоматической автоподстройки частоты, представляющие собой разновидность систем синхронизации. Задачей таких систем является автоматическая регулировка скорости квазипериодических процессов с целью достижения определенных фазовых соотношений между ними. [1, 2] Такие системы используются в телевидении, радиолокации, радионавигации, а также в различных следящих системах. Среди таких систем следует выделить системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), у которых сигнал ошибки связан не с разностью частот, а с разностью фаз φ подстраиваемого и эталонного генераторов, что в стационарном режиме обеспечивает остаточную разность фаз, а не частот, как в системах частотной автоподстройки.

Задачи вероятностного анализа таких систем решаются в ряде работ, исходя из условия рассмотрения вероятности первого достижения фазовой координатой φ границ срыва синхронизма (области работоспособности). В реальных ФАПЧ срыв синхронизма не может произойти мгновенно. Инерционность перехода системы из одного состояния в другое может быть приближенно охарактеризована минимальным интервалом времени τ_c пребывания разности фаз за пределами границ области работоспособности системы, необходимым для перехода ее в другое (неработоспособное) состояние. Учет инерционности системы при вероятностном анализе смены режима ее работы позволяет более полно учесть реальные физические свойства.

Постановка задачи

Основное дифференциальное уравнение системы ФАПЧ имеет вид [3]

$$p\varphi + \Omega_y K(p)F(\varphi) = \Omega_n, \quad (1)$$

где Ω_n — начальная расстройка подстраиваемого генератора относительно эталонного; $K(p)$ — коэффициент передачи фильтра в операторной форме; символ p означает дифференцирование по времени; φ — мгновенное значение разности фаз генераторов; $F(\varphi)$ — нормированная ха-

рактеристика фазового детектора; Ω_y — полоса удержания, т.е. максимально возможная расстройка, которую может компенсировать цепь управления.

Для системы ФАПЧ, находящейся под воздействием флуктуационных возмущений для случая, когда $\Omega_y = \text{const}$ и $K(p)=1$, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega_n - \Omega_y \cos \varphi + n(t), \quad (2)$$

где $n(t)$ — флуктуационное воздействие:

$$n(t) = \frac{d\varphi_{\text{ЭГ}}}{dt} - \frac{\Omega_y}{U_{\text{ЭГ}}} \left[A(t) \cos(\varphi - \varphi_{\text{ЭГ}}) + C(t) \sin(\varphi - \varphi_{\text{ЭГ}}) \right], \quad (3)$$

$U_{\text{ЭГ}}$ и $\varphi_{\text{ЭГ}}$ — случайные функции времени, характеризующие законы модуляции амплитуды и фазы эталонного сигнала; $A(t) = E_{N_I}(t) \cos(\theta)$, $C(t) = E_{N_I}(t) \sin(\theta)$ — косинусоидальная и синусоидальная составляющие огибающей $E_{N_I}(t)$ входного шума N_I ; θ — его фаза.

Известно, что устойчивая работа системы ФАПЧ возможна в условиях, когда разность фаз φ не выходит из окрестности точки устойчивого равновесия φ_{0p} за границы области срыва синхронизма $U_\varphi = [\varphi_- = \varphi_{0p} - 2\pi, \varphi_+ = \varphi_{0p} + 2\pi]$.

Определение вероятности срыва синхронизма

В реальных системах ФАПЧ время корреляции τ_k случайных воздействий значительно меньше времени установления τ_y координаты φ ($\tau_y \approx 1/\Omega_y$). В этом случае, как показано в [3], исходный процесс близок по распределению к марковскому и для плотности вероятности $f(\varphi, t)$ координаты φ справедливо уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), которое для функции $f(\varphi, t)$ имеет вид [2]

$$\frac{\partial f(\varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \pi(\varphi, t), \quad f(\varphi, t_0) = f_0(\varphi_0), \quad (4)$$

где $\pi(\varphi, t)$ — плотность потока вероятности вида

$$\pi(\varphi, t) = A(\varphi, t) f(\varphi, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} B(\varphi, t) f(\varphi, t). \quad (5)$$

Как видно из уравнения (4), оно полностью определяется своими локальными характеристиками — коэффициентом сноса $A(\varphi, t)$ и коэффициентом диффузии $B(\varphi, t)$, которые в соответствии с выражениями (2) и (3) вычисляются по формулам

$$A(\varphi, t) = \Omega_n - \Omega_y \cos \varphi, \quad (6)$$

$$B(\varphi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega_y^2}{U_{\text{ЭГ}}^2} \sigma_{N_I}^2 R_{N_I}(\tau) + \sigma_1^2 R_1(\tau) \right] d\tau, \quad (7)$$

где $\sigma_{N_I}^2$, σ_1^2 — дисперсии входного шума N_I и процесса $p\varphi$ соответственно; $R_{N_I}(\tau)$ и $R_1(\tau)$ — коэффициенты корреляции входного шума, смещенного на нулевую частоту и процесса $p\varphi$ соответственно.

Учитывая, что срыв синхронизма происходит при условии выхода $\varphi(t)$ из области U и невозвращения его в область U_φ в течение заданного времени τ_c , формулу для определения вероятности срыва P_C получим по аналогии с [5] разбиением всего времени функционирования системы $t_k - t_0$ на $k = (t_k - t_0)/\tau_c$ интервалов. При этом рассматривается последовательность интервалов $\tau_c = t_{i+1} - t_i$ ($i=0, 1, \dots, k-1$), и для каждого момента времени t_i и интервала τ_c определяется вероятность срыва.

Так как срывы синхронизма на каждой из границ области U_φ являются событиями несовместными, то вероятность срыва синхронизма на каждом временном интервале τ_c определяется по формуле

$$P(t_{i+1} - t_i) = P_1(t_i)P_2(t_i + \tau_c | \varphi(t_i) \notin U_\varphi), \quad (8)$$

где $P_1(t_i)$ — вероятность нахождения $\varphi(t)$ вне области U_φ в момент времени t_i :

$$P_1(t_i) = 1 - \int_{U_\varphi} f(\varphi, t_i) d\varphi, \quad (9)$$

$f(\varphi, t_i)$ — плотность вероятности распределения случайного процесса $\varphi(t)$ в открытой области без ограничений. В общем случае $\varphi(t)$ — решение уравнения (4); $P_2(t_i + \tau_c | \varphi(t_i) \notin U_\varphi)$ — вероятность невозвращения $\varphi(t)$ в область U_φ (недостижения процессом $\varphi(t)$ границ области U_φ) за время τ_c при условии нахождения $\varphi(t)$ в момент времени t_i вне области U_φ .

Для определения вероятности P_2 следует проинтегрировать уравнение ФПК для плотности вероятности распределения непоглощенных реализаций $f^{(1)}(\varphi, t)$ с учетом полного поглощения на границе области U_φ или уравнение Понтрягина. Воспользуемся методикой, изложенной в [4], для определения $f^{(1)}(\varphi, t)$ из обобщенного уравнения ФПК с введением функций поглощения вместо границ:

$$\frac{\partial f^{(1)}(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \pi^{(1)}(\varphi, t) - \frac{\dot{P}_2}{P_2} f^{(1)}(\varphi, t) - \mathfrak{G}(X, t), \quad (10)$$

где $\mathfrak{G}(\varphi, t)$ — нормированная функция поглощения; $f^{(1)}(\pm\infty, t) = 0$, $\pi^{(1)}(\varphi, t)$ — вектор плотности потока вероятности вида

$$\pi^{(1)}(\varphi, t) = A(\varphi, t) f^{(1)}(\varphi, t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} B(\varphi, t) f^{(1)}(\varphi, t) \right]. \quad (11)$$

Функция поглощения реализаций процесса на границе R_u области U_φ имеет вид

$$\mathfrak{G}(\varphi, t) = \delta(R_u - \varphi) \pi^{(1)}(\varphi, t). \quad (12)$$

Уравнение (10) следует интегрировать при начальном условии на каждом интервале:

$$f^{(1)}(X, t_i) = \frac{1}{P_1} f(\varphi, t). \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (10) по φ в бесконечной области, получим уравнение для P_2 :

$$\dot{P}_2 = -q(t)P_2, \quad (14)$$

где $q(t)$ имеет вид

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{G}(\varphi, t) d\varphi, \quad (15)$$

$q(t)$ — интенсивность поглощения реализаций процесса $\varphi(t)$, численно равная значению плотности потока вероятности непоглощенных реализаций, вычисленной на границе поглощающей области $q(t) = \pi^{(1)}(R_u, t)$.

Решение уравнения (14) на интервале $[t_i, t_i + \tau_c]$ при начальном условии $P_2(t_i) = 1$ следующее:

$$P_2(t_i + \tau_c | \varphi(t_i) \in U_\varphi) = \exp\left[-\int_{t_i}^{t_i + \tau_c} q(t) dt\right]. \quad (16)$$

Таким образом, в каждый текущий момент времени t_i рассматриваются две плотности вероятности $f(\varphi, t_i)$ и $f^{(1)}(\varphi, t_i)$.

Для приближенного вычисления $f(\varphi, t)$ и $f^{(1)}(\varphi, t)$ используется гауссова и усеченная гауссова аппроксимация $f(\varphi, t)$ и $f^{(1)}(\varphi, t)$ с решением соответствующих дифференциальных уравнений для математических ожиданий и дисперсий.

При времени функционирования системы $t_k - t_0 > \tau_c$ следует рассматривать r временных интервалов, на каждом из которых события срыва синхронизации (смены структуры ФАПЧ) являются независимыми, а вероятность их определяется формулой (8). В этом случае вероятность срыва управления $P_C(t_r)$ к моменту времени t_r , определяется по формуле [5]

$$P_C(t_r) = 1 - \prod_{i=1}^r \{1 - [\sum_{j=1}^2 \{P_1^{(j)}(t_i) P_2^{(j)}(t_i + \tau_c | \varphi(t_i) \notin U_\varphi)\}]\}. \quad (17)$$

В соответствии с формулой (17) вероятность $P_C(t_r)$ является дискретной неубывающей функцией моментов времени t_r . Определение значений $P_C(t)$ в моменты времени, не совпадающие с t_r , производится путем интерполяции (экстраполяции) значений $P_C(t_r)$.

Заметим, что при вычислении $P_2(t_i + \tau_c | \varphi(t_i) \notin U_\varphi)$ рассматривается эволюция марковского процесса вблизи поглощающих границ и вновь возникает практически не существующая в технических системах задача мгновенного поглощения реализаций. Для приближения соответствия математической модели реальному физическому процессу можно повторно воспользоваться изложенной выше методикой, введя интервал времени τ_1 , характеризующий запаздывание в возврате системы в прежнее состояние (структуру):

$$P_2(t_i + \tau_c | \varphi(t_i) \notin U_\varphi) = 1 - \prod_{p=1}^{\tau_c/\tau_1} \{1 - [P_3(t_p) P_4(t_p + \tau_1 | \varphi(t_p) \in U_\varphi)]\}, \quad (18)$$

где $P_3(t_p) = 1 - P_1(t_p)$. Продолжая данный подход, получим

$$P_4(t_p + \tau_1 | X(t_p) \in U_x) = 1 - \prod_{j=1}^2 \prod_{p=1}^{\tau_c/\tau_1} \{1 - [P_5^{(j)}(t_q) P_6^{(j)}(t_q + \tau_1 | \varphi(t_q) \notin U_\varphi)]\}, \quad (19)$$

где $P_5(t_q) = 1 - P_3(t_q) = P_1(t_q)$, и т.д.

На практике достаточно первого приближения для определения P_2 , так как $\tau_1 \ll \tau_c$ (соответственно $\tau_2 \ll \tau_1$). Допущение о том, что $\tau_2 = \tau_1 = \dots = 0$, приведет лишь к некоторому занижению P_2 и еще менее значительному занижению $P_C(t_r)$.

Следует также заметить, что при рассмотрении безынерционной системы при $\tau_c \rightarrow 0$ в пределе получается известное выражение для вероятности мгновенного срыва управления, которое приведено в [4].

Характеристики времени срыва синхронизма

В ряде практических задач возникает необходимость определения функции плотности вероятности распределения или в частном случае — вероятностных моментов распределения времени срыва управления. По определению [4] функция распределения моментов времени окончания работы системы {срыва синхронизма} равна

$$S_T(t) = P(T < t) = P_C(t), \quad (20)$$

где T — случайное время окончания работы системы (срыва синхронизма). Дифференцируя $S_T(t)$ по t , получим выражение для плотности вероятности: $f_T(t) = \partial P_C(t) / \partial t$.

Вероятностные моменты времени срыва управления могут использоваться в качестве весовых коэффициентов при аппроксимации искомой плотности вероятности $f_T(t)$ рядом по ортогональным многочленам. Например, система уравнений для моментов h_i до N -го порядка включительно имеет вид

$$h_i = \int_0^{\infty} z_k(t) f_T(t) dt, \quad z_k(t) = t^1, t^2, \dots, t^N. \quad (21)$$

Для определения математического ожидания времени срыва управления m_T следует положить $z_k(t)=t$. Дисперсия времени срыва определяется соотношением

$$D_T = g_T - m_T^2, \quad (22)$$

где g_T получается подстановкой в (21) $z_k(t)=t^2$.

В связи с тем что в соответствии с формулой (17) вероятность срыва синхронизма определена в дискретные моменты времени t_r , функцию $f_T(t)$ удобно вычислять, приблизив $P_C(t_i)$ на сегменте $[t_0, t_k]$ многочленом $I_r(t_i)$, причем $P_C(t_i)=I_r(t_i)$, ($i=0, 1, \dots$), следовательно, $f_T(t)=\partial I_r(t)/\partial t$. В частности, если интерполяционный многочлен представлен в форме Лагранжа, то

$$I_r(t_i) = \sum_{i=1}^r P_C(i) L_i(t), \quad (23)$$

$$\text{где } L_i(t) = \frac{(t-t_0)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_r)}{(t_i-t_0)\dots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\dots(t_i-t_r)}.$$

Степень многочлена Q зависит от инерционности системы τ_c . $Q=(t_k-t_0)/\tau_c-1$.

Если стоит задача приближенного определения только математического ожидания m_T и дисперсии D_T времени срыва, то кроме выражений (17), (22) используются формулы

$$m_T = \sum_{i=1}^r t_i [P_C(t_i) - P_C(t_{i-1})], \quad (24)$$

$$g_T = \sum_{i=1}^r t_i^2 [P_C(t_i) - P_C(t_{i-1})], \quad (25)$$

что соответствует предположению о том, что время срыва T_i является дискретной случайной величиной. Следует заметить, что точность решения задачи тем выше, чем меньше время запаздывания τ_c по сравнению с временем функционирования системы t_k-t_0 .

Использование машинных алгоритмов вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа позволяет с высокой степенью точности сделать достаточно простой процедуру вычисления плотности вероятности распределения времени срыва синхронизма для многочленов достаточно высокой степени.

Пример

В качестве примера рассмотрим систему, описываемую уравнением (2). Область U_φ определим следующим образом: $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Расчеты были выполнены при следующих условиях: $A=-3$, $B=2$, $t_0=0$, $t_k=1$ с, $\beta=-\alpha=0,5$.

Плотность вероятности распределения фазовой координаты φ при гауссовском начальном условии также гауссовская $f(\varphi, t)$ с параметрами $m_\varphi(t)$, $D_\varphi(t)$. Тогда вероятность $P_1(t_i)$ в соответствии с (9) будет найдена по формуле

$$P_1(t_i) = \Phi \left[\frac{\beta - m_\varphi(t_i)}{\sqrt{D_\varphi(t_i)}} \right] - \Phi \left[\frac{\alpha - m_\varphi(t_i)}{\sqrt{D_\varphi(t_i)}} \right], \quad (26)$$

где $\Phi(\dots)$ — функция Лапласа, а $m_\varphi(t)$ и $D_\varphi(t)$ определяются из уравнений

$$\dot{m}_\varphi = A m_\varphi, \quad m_\varphi(t_0) = m_{\varphi 0}, \quad (27)$$

$$\dot{D}_\varphi = 2AD_\varphi + B, \quad D_\varphi(t_0) = D_{\varphi 0}. \quad (28)$$

Плотность вероятности $f^{(1)}(\varphi, t)$ в соответствии с допущением об усеченной гауссовой аппроксимации представим в виде

$$f^{(1)}(\varphi, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi D'_\varphi}} \exp\left[-\frac{(\varphi - m'_\varphi)^2}{2D'_\varphi}\right], & \varphi < \alpha, \varphi > \beta, \\ 0, & \alpha \leq \varphi \leq \beta. \end{cases} \quad (29)$$

Для определения $P_2(t)$ в соответствии с (12), (14), (15) получаем уравнение

$$\dot{P}_2 = [-\pi^{(1)}(\beta, t) - \pi^{(1)}(\alpha, t)]P_2, \quad P_2(t_i) = 1, \quad (30)$$

где

$$\pi^{(1)}(\varphi, t) = Af^{(1)}(\varphi, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} [Bf^{(1)}(\varphi, t)]. \quad (31)$$

Для определения $m'_\varphi(t)$ и $D'_\varphi(t)$ на основе (10) запишем уравнения вида

$$\dot{m}'_\varphi = Am'_\varphi - \beta\pi^{(1)}(\beta, t) - \alpha\pi^{(1)}(\alpha, t) - \frac{\dot{P}_2}{P_2} m'_\varphi, \quad m'_\varphi(t_i) = m_\varphi(t_i), \quad (32)$$

$$\dot{D}'_\varphi = 2AD'_\varphi + B - (\beta - m'_\varphi)^2 \pi^{(1)}(\beta, t) - (\alpha - m'_\varphi)^2 \pi^{(1)}(\alpha, t) - \frac{\dot{P}_2}{P_2} D'_\varphi, \quad D'_\varphi(t_i) = D_\varphi(t_i). \quad (33)$$

Производную $\partial f^{(1)}(\varphi, t)/\partial \varphi$ на границах α и β приближенно вычисляем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [f^{(1)}(\varphi, t)]_{\varphi=\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} [f^{(1)}(\varphi, t)]_{\varphi=\beta} = \frac{f^{(1)}(\alpha - \Delta\varphi, t)}{\Delta\varphi}, \quad (34)$$

где $\Delta\varphi$ — малое приращение координаты φ .

Найдем интерполяционный многочлен при следующих исходных данных: $t_1=0,1$ с; $t_2=0,2$ с; $t_3=0,3$ с; $t_4=0,4$ с; $P_1=0,52$; $P_2=0,63$; $P_3=0,67$; $P_4=0,71$. Многочлен Лагранжа для данного примера имеет вид

$$I_r(t) = \frac{(t-0,2)(t-0,3)(t-0,4)}{(0,1-0,2)(0,1-0,3)(0,1-0,4)} + \frac{(t-0,1)(t-0,3)(t-0,4)}{(0,2-0,1)(0,2-0,3)(0,2-0,4)} + \\ \frac{(t-0,1)(t-0,2)(t-0,4)}{(0,3-0,1)(0,3-0,2)(0,3-0,4)} + \frac{(t-0,1)(t-0,2)(t-0,3)}{(0,4-0,1)(0,4-0,2)(0,4-0,3)} = \\ 11,66t^3 - 10,50t^2 + 3,43t + 0,38. \quad (35)$$

$$f_T(t) = \partial P_C(t) / \partial t = 34,98t^2 - 21,00t + 3,43. \quad (36)$$

На рис. 1 приведены зависимости $P_C(t_r)$ при различных значениях τ_c , соединенные интерполяционными кривыми. На рис. 2 приведены зависимости $f_T(t_r)$ также соединенные интерполяционными кривыми. Приведенные на рис. 1 и 2 зависимости под номером 1 получены при $\tau_c=0,01$ с; 2 — при $\tau_c=0,02$ с; 3 — при $\tau_c=0,03$ с; 4 — при $\tau_c=0,04$ с; 5 — при $\tau_c=0,05$ с.

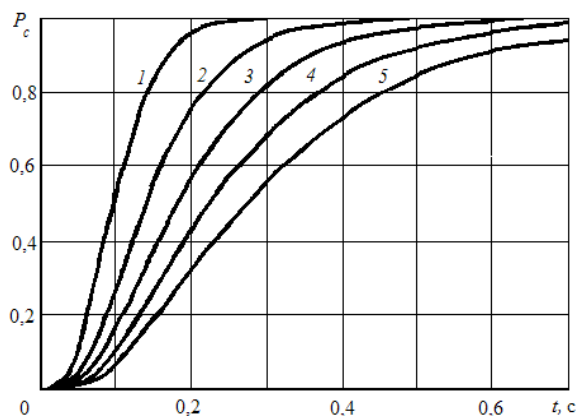


Рис. 1. Вероятность срыва синхронизма

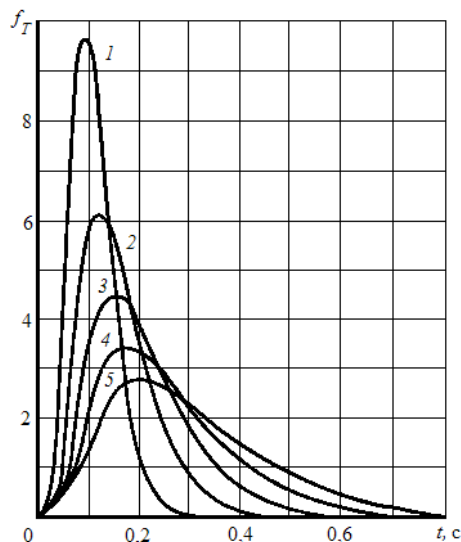


Рис. 2. Плотность вероятности распределения времени срыва синхронизма

Заключение

Результаты расчетов показывают, что при вероятностном срыве синхронизма систем ФАПЧ необходимо учитывать инерционность системы, поскольку без учета этого фактора происходит существенное изменение вероятностной картины процесса, что может привести к ошибкам при принятии решения о качестве объекта.

Таким образом, приведенная выше методика позволяет приближенно решать ряд практических задач вероятностного анализа срыва синхронизма в инерционных системах ФАПЧ. При этом точность полученного решения тем выше, чем меньше τ_c по сравнению со временем работы системы.

PROBABILISTIC ANALYSIS OF FAILURE OF SYNCHRONISM SYSTEMS OF PHASE AUTO TUNING OF FREQUENCY

V.L. BUSKO, A.A. LOBATY, HEKMAT AHMAD ALQATAWNEH

Abstract

On the basis of the theory of casual of marcov processes the task of an estimation of probability of failure of synchronism of system of phase auto tuning of frequency is considered at the account инерционности of system.

Литература

1. Батура М.П. Дискретные системы с фазовым управлением. Минск, 2002.
2. Стеклов В.К., Коробко В.В. Итерационные системы фазовой автоподстройки. Киев, 2004.
3. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М., 1972.
4. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
5. Лобатый А.А. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. № 4.