УДК 539.2+533.9

ПОСТОЯННАЯ ПЛАНКА И ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА

Н.Т. КВАСОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 9 февраля 2007

В настоящем сообщении на базе физико-математических формализмов волновой и геометрической оптики, а также с учетом квантования действия S показана возможность волнового описания движения материальных частиц, что, в свою очередь, приводит к уравнению, аналогичному уравнению Шрёдингера.

Ключевые слова: волновая оптика, геометрическая оптика, уравнение движения частиц.

Введение

Сегодня уравнение Шрёдингера стало рабочим инструментом во многих областях науки и техники как при описании свойств материи на микроуровне, так и при создании новых приборов, устройств и технологий. Вставляя в него (как в "черный ящик") сконструированную для данной системы потенциальную энергию $U(\vec{r})$, мы получаем полное описание эволюции исследуемого объекта. Как показывает более чем 80-летний опыт "работы" уравнения Шрёдингера, результаты теоретического описания на его основе всегда великолепно подтверждались экспериментом. Тем более удивительным является тот факт, что принципы, на базе которых это уравнение построено, не являются однозначными и общепринятыми.

Теоретический анализ

Рассмотрим ансамбль, состоящий из N частиц, и для его описания введем конфигурационное $3N$-мерное пространство. В таком пространстве состояние всего ансамбля будет представлено изображающей точкой. Пусть эволюция данной системы, находящейся во внешнем потенциальном поле U, происходит в течение определенного времени τ. Разобьем τ на интервалы, разделенные моментами времени t_1, t_2, t_3, … (в пределе — бесконечно малые интервалы). Каждому моменту t_i в конфигурационном пространстве будет соответствовать точка, характеризуемая радиусом-вектором $\vec{r}^{(i)} = \left(\vec{r}_1^{(i)}, \vec{r}_2^{(i)}, \vec{r}_3^{(i)}, ..., \vec{r}_N^{(i)}\right)$. Здесь $\vec{r}^{(i)}$ — $3N$-мерный вектор.

Заменим всю последовательность состояний одной системы вдоль временной координаты совокупностью одинаковых систем в какой-то определенный момент времени (сформируем так называемый ансамбль). Теперь в $3N$-мерном пространстве имеется идеальный "газ" точек, которые будем характеризовать плотностью w (число точек в единице объема конфигурационного пространства). Вероятность dW того, что в объеме dV будет dN' точек, можно формально представить как

$$dW = wdV, \tag{1}$$

где $dV = dx_1 dy_1 dz_1 \cdot dx_2 dy_2 dz_2 ... dx_N dy_N dz_N$

Стационарное течение точек "газа" в этом случае может быть описано обычным уравнением непрерывности

$$\frac{\partial w(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r},t) = 0\,, \tag{2}$$

где

$$\vec{j}(\vec{r},t) = w(\vec{r},t)\cdot\vec{\upsilon}\,, \tag{3}$$

$\vec{\upsilon}$ — $3N$-мерная скорость, $\vec{j}$ — плотность потока "газа". Величина $w(\vec{r},t)$, как обычно, нормируется условием $\int\limits_V w(\vec{r},t)dV = 1$.

Для дальнейшего анализа эволюции системы частиц сначала обратимся к принципам описания электромагнитного поля в рамках волнового и геометрического подходов.

Известно, что распространение электромагнитных волн в среде характеризуется волновыми уравнениями для напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\overline{H}$ полей. В частности, для вектора $\vec{E}$ в свободном пространстве без источников можно записать:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \upsilon_S^2 \Delta \vec{E}(\vec{r},t) = 0\,, \tag{4}$$

где v_s — скорость электромагнитной волны в среде; Δ — оператор Лапласа. Интенсивность $\Im$ электромагнитного поля, как известно, пропорциональна $\vec{E}\cdot\vec{E}^*$:

$$\Im \sim \vec{E}\cdot\vec{E}^*\,, \tag{5}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

Величина w в формуле (1) также характеризует интенсивность числа изображающих точек в конфигурационном пространстве. Поэтому по аналогии с (5) представим величину w как $\psi\cdot\psi^*$, где функция ψ будет характеризовать амплитуду вероятности состояния системы N точек в этом пространстве.

Определим теперь уравнение для ψ, которое описывало бы эволюцию ψ в пространстве и во времени аналогично тому, как уравнение (4) описывает развитие $\vec{E}(\vec{r},t)$. Для этого представим скорость $\vec{\upsilon}$ в следующем виде:

$$\vec{\upsilon} = A\left(\frac{\vec{\nabla}\psi}{\psi} - \frac{\vec{\nabla}\psi^*}{\psi^*}\right). \tag{6}$$

С учетом (6) плотность потока $\vec{j}$ (3) можно переписать как

$$\vec{j} = A(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)\,. \tag{7}$$

Подставляя (9) в (2), получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + A\Delta\psi + B\psi = 0\,, \tag{8}$$

где величины A и B предстоит определить из дополнительных условий.

Как уже указывалось, в волновой оптике световое поле представляет собой волновой процесс и описывается векторами напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, которые в свою очередь можно определить из уравнений Максвелла. В геометрической же оптике предполагается, что свет распространяется по строго определенным траекториям. Переход от волновой оптики к геометрической осуществляется в пределе $\lambda\to 0$ (λ — длина световой волны). Амплитуду электрического поля в электромагнитной волне возьмем в виде $E = E_0 e^{i\varphi}$. Так как переход к геометрической оптике связан с переходом к малым длинам волн, то это соответствует увеличению фазы φ. Кроме того, в этом случае распространение света осуществляется в соответствии с принципом Ферма, когда разность фаз в начальной и конечной точках минимальна.

Возвращаясь к проблеме описания движения частиц в пространстве, следует отметить, что в классической механике основополагающим в этом отношении является принцип наименьшего действия, когда реальной траекторией тела является та, вдоль которой величина действия S минимальна (аналогично для разности фаз в геометрической оптике):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{9}$$

где L — функция Лагранжа $L=T-U$; T — кинетическая энергия; U — потенциальная энергия. L является функцией обобщенных координат q, скоростей $\dot{q}$ и времени t.

Если в моменты времени t_1 и t_2 система имеет определенные положения, характеризуемые соответственно q_1 и q_2 (в декартовом пространстве это просто x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2), то истинное движение между указанными ее положениями будет таким, что величина S примет минимальное для данных условий значение. Кроме того, изменение действия для механической системы при ее перемещении во времени определяет ее полную энергию $H=T+U$ (H — функция Гамильтона)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{10}$$

А теперь введем в наш анализ постоянную Планка, зная, что она имеет размерность действия, и распространим приведенные выше рассуждения для света на случай движения частиц. Для произвольной системы отношение $S/\hbar$ определяет степень приближения ее к микро- ($S/\hbar \geq 1$) или макросостоянию ($S/\hbar >> 1$). Сопоставляя условие минимизации разности фаз в случае принципа Ферма (геометрическая оптика) и минимизации действия в случае принципа наименьшего действия (механика движущейся частицы), можно предположить следующий вид функции ψ в уравнении (8):

$$\psi = Ce^{i\frac{S}{\hbar}}, \tag{11}$$

где C — постоянная величина.

Функция ψ (11) есть волновая функция квазиклассической физической системы. Она "работает" в рамках действия принципа соответствия, утверждающего совпадение результатов классического и квантового описаний в определенных областях перекрытия. Возрастание S здесь предполагает переход к классическому описанию движения по траектории, что в свою очередь соответствует $\lambda \to 0$ при переходе к геометрической оптике.

Рассмотрим случай движения одной частицы (N=1) теперь уже в трехмерном декартовом пространстве.

Подставляя (11) в уравнение (8), при определенных допущениях получим:

$$A = -\frac{i\hbar}{2m};\ B = \frac{i}{\hbar}U. \tag{12}$$

С учетом (12) уравнение (8) можно записать в окончательном варианте:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + U(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t). \tag{13}$$

Такое уравнение для описания движения микрочастиц в 1926 г. предложил Э. Шрёдингер. В его уравнении волновая функция $\psi(\vec{r},t)$ (амплитуда вероятности, вектор состояния, ψ-функция — с этими названиями она встречается в литературе) характеризует физическое состояние микроскопической системы (ее энергию, импульс, момент импульса, спин). Квадрат ее модуля $\psi\cdot\psi^*$ есть плотность вероятности обнаружить частицу в данной точке пространства. Такой статус ψ определяет ее свойства **конечности**, **непрерывности** и **однозначности**.

Уравнение (13) позволило решить вставшую в физике фундаментальную проблему, заключающуюся в неспособности имеющегося на то время физико-математического формализма описать ряд явлений микромира.

Движение частиц и их систем в классической физике, как известно, описывается вторым законом Ньютона:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}\,, \tag{14}$$

где $\vec{F}_i$ — силы, действующие на тело, $\vec{a}$ — ускорение, $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{S}}{dt^2}$.

Решая это дифференциальное уравнение, мы получим, в частности, траекторию движения частицы, т.е. последовательность точек, проходимых при движении. Однако, как показали многочисленные эксперименты, такой подход оказался неуниверсальным. В его рамках, например, в принципе оказалось невозможным объяснить дифракционные и интерференционные явления, происходящие в мире атомных частиц. В этой связи было предложено поведение микрочастиц определять волновой функцией $\psi(\vec{r},t)$, а самой частице массы m приписать в качестве ее характеристики длину волны Λ (Луи де Бройль, 1923 г.).

$$\Lambda = h/m\upsilon\,, \tag{15}$$

где h — постоянная Планка, v — скорость движения.

Основываясь на этой гипотезе, Э. Шрёдингер и "сконструировал" свое уравнение.

Выводы

1. В данной работе показана возможность описания движения материи на волновом языке, не прибегая к идее наличия у отдельной частицы волновых свойств.

2. В результате проведенного теоретического анализа дана иллюстрация диалектики множественного и единого, когда при переходе от множественного к единому имеет место "поручение" единому определенных свойств множественного. Единое, однако, не означает одну частицу, оно есть свойство, с одной стороны, противоположное множественному, а с другой — подразумевающее множественное.

3. Фундаментальным законом микромира является дискретность действия S. Квантование энергии, момента импульса и его проекции, а также наличие спина у частиц есть следствие этого закона, что вытекает из решения уравнения (13).

PLANCK CONSTANT AND WAVE MECHANICS

N.T. KVASOV

Abstract

The possibility for wave description of material particles motion on basis of physico-mathematical formalisms of wave and geometrical optics and with taking into account the quantization of action S has been reported. That approach allows to obtain the equation, similar to Schroedinger's one.