УДК 519.95; 681.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ В СИСТЕМАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В.Г. ЛЕВАШЕНКО[1], Е.Н. ЗАЙЦЕВА[1], С.А. ПОТТОСИНА[2]

[1]Жилинский университет
Университетская, 1, Жилина, 01026, Словакия

[2]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 апреля 2007

Целью работы является развитие аппарата многозначной логики за счет разработки регулярных процедур вычисления направленных логических производных. Использование этих производных позволяет в системах поддержки принятия решений (СППР) более детально анализировать изменения параметров исследуемого объекта.

Ключевые слова: многозначная алгебра логики, логическое дифференциальное исчисление, матричные процедуры, принятие решений.

Введение

Происходящие в Республике Беларусь процессы характеризуются динамичностью, значительной степенью неопределенности и сложностью прогнозирования динамики развития экономических объектов (ЭО). Принимаемые на различных уровнях управленческие решения зачастую противоречивы и в совокупности не достигают поставленных целей. Поэтому актуальной задачей является разработка инструментария поддержки принимаемых решений.

Практическое применение такого инструментария позволит в минимальные сроки выполнить анализ текущего состояния ЭО, выработать оптимальное по ряду критериев решение об его развитии, осуществить моделирование принятого решения и дать научно обоснованные выводы о результатах принятого решения. Таким образом, окажется возможным минимизировать затраты на развитие ЭО и потери от недостаточно проработанных решений, что является одним из приоритетов развития экономики Беларуси на современном этапе.

В настоящее время вопросы создания СППР, достаточно хорошо изучены. Однако в известных работах неполно исследованы методы анализа ЭО, представленных *лингвистическими* (*категориальными*) *переменными*. Задание значений лингвистических переменных дискретными величинами позволяет описать состояние ЭО многозначными данными. Математическим аппаратом обработки этих данных является многозначная логика.

Целью работы является развитие методов многозначной логики, и в частности логического дифференциального исчисления, ориентированных на применение в СППР. Использование такого аппарата позволяет эффективно решить ряд задач, востребованных на этапе принятия решений и анализа последствий: анализа динамики ЭО, исследования их чувствительности к изменениям исходных показателей.

Принятие решений и лингвистические переменные

Принятие решения предполагает выбор наиболее предпочтительного решения из множества допустимых альтернатив. Инструментарий, обеспечивающий реализацию такого выбора, называется СППР. Совокупность показателей, описывающих объект, интерпретируется в СППР как атрибуты. Одной из проблем развития СППР является инкапсуляция моделей принятия решений и возможностей адекватной оценки атрибутами окружающей действительности.

Существует ряд подходов к построению моделей принятия решения. Во всех этих моделях особую роль играет формат представления исходных данных. Изначально в моделях принятия решений использовались атрибуты, принимающие значения из множества действительных чисел. В СППР это не всегда оправдано, прежде всего, в связи с недостаточной адекватностью измерений экономических показателей, сложностью получения достоверных значений, разнообразием и спецификой методик их расчета. Кроме того, действительные значения отдельных показателей, в отрыве от остальных, с одной стороны, несут избыточно детализированную для принятия решения информацию об этом показателе, а с другой — не могут являться основанием для выбора решения. Например, анализируя отдельное значение экономического показателя "ожидаемая прибыль проекта", заданного действительным числом, сложно оценить его значимость, не зная значений других показателей ("собственный капитал компании", "объем затрат на проект"), а включение всех этих показателей в процесс принятия решения увеличивает вычислительную сложность.

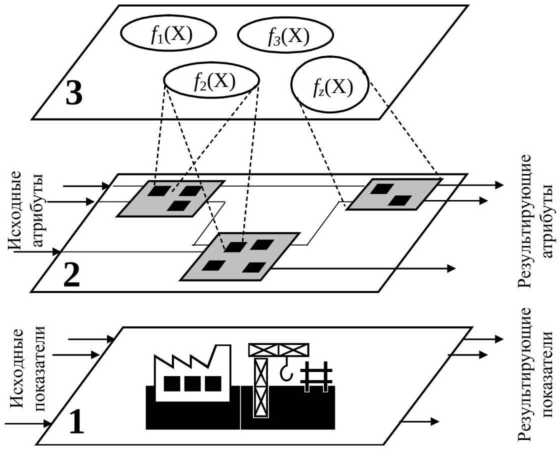
Альтернативой является преобразование задаваемых действительными числами показателей в *лингвистические*. Такое преобразование предусматривает соотнесение одного, а чаще комбинации значений нескольких показателей к m-уровневой шкале и называется *дискретизацией*. В общем случае дискретизация не приводит к снижению достоверности значений используемых в СППР атрибутов. Дискретизированные значения более адекватно оценивают экономические показатели и более устойчивы к методикам их измерения [1]. В результате дискретизации, например, показатель "ожидаемая прибыль проекта" будет принимать значения из множества конечных вариантов мощностью m: прибыль "очень высокая", "высокая", "средняя", "низкая" (m=4). Анализ методов трансформации действительных значений в конечное число интервалов и соотнесение каждого интервала с дискретным значением достаточно хорошо исследованы [2, 3].

Как правило, ЭО описывается системой сложных и взаимосвязанных показателей, между которыми существует функциональная зависимость. Одним из способов представления такой зависимости является использование структурной функции. В этом случае исходные показатели объекта интерпретируются как исходные атрибуты структурной функции, а результирующие — как ее результирующие атрибуты [4].

Система, описывающая показатели того или иного ЭО, достаточно громоздка. В результате структурная функция обладает значительной вычислительной сложностью. Одним из подходов к снижению этой сложности является декомпозиция структурной функции. Суть декомпозиции заключается в разбиении функции на подфункции с меньшим числом атрибутов.

Аргументы таких подфункций будем интерпретировать как промежуточные атрибуты, а сами подфункции — как компоненты структурной функции. В свою очередь компоненты этой функции также являются структурной функцией меньшей сложности и в свою очередь могут быть декомпозируемы. Будем считать, что компонент структурной функции реализует функцию m-значной логики. На рисунке схематично представлены структурная функция и ее компоненты.

Процесс принятия решений конструктивно включает в себя этапы: 1) формализацию описания проблемы и объекта; 2) идентификацию альтернатив; 3) выбор лучшей альтернативы; 4) анализ чувствительности альтернатив к изменению исходных значений.



Представление ЭО в виде структурной и логической функций: слой 1 — экономический объект (ЭО); слой 2 — структурные функции; слой 3 — функции многозначной логики

В настоящее время в СППР первые три этапа считаются достаточно проработанными и поэтому усилия исследователей в основном сосредоточены на развитии четвертого этапа.

Анализ чувствительности (*sensitivity analysis*) предполагает исследование изменения значения результирующих атрибутов при изменении значения одного или нескольких исходных атрибутов. Актуальность этого анализа объясняется тем, что его результаты позволяют [5]:

определить влияние значений отдельных показателей на поведение ЭО;

вычислить устойчивость к изменениям отдельных показателей;

обнаружить начальные условия, обеспечивающие развитие или ухудшение результирующих показателей ЭО и ориентированных на получения оптимальной стратегии развития;

определить при проектировании оптимальную структуру ЭО с учетом разнообразных критериев.

Один из подходов к анализу чувствительности предполагает использование логического дифференциального исчисления [6–8]. Рассмотрим кратко математический аппарат, являющийся основой данного подхода.

Параллельный алгоритм вычисления направленных логических производных

Для описания дискретных процессов, реализуемых компонентами с несколькими устойчивыми состояниями, используются лингвистические переменные. Эти переменные принимают значения из конечного множества, мощности m. При интерпретации этих значений целыми положительными числами происходит переход к m-значным данным $\{0, 1, \ldots, m\text{–}1\}$.

Методы анализа данных в многозначной логике основываются на установлении функциональных отношений между исходными и результирующими атрибутами. Эти функциональные зависимости в терминах *изменения* значений атрибутов являются предметом изучения в *логическом дифференциальном исчислении*. Это название связано с рядом условных аналогий, возникающих между фундаментальными понятиями классической теории дифференциального исчисления математического анализа и данного направления.

Первые исследования в области логического дифференциального исчисления имели конкретную прикладную направленность и были посвящены некоторым специальным проблемам технических систем. Результаты исследований показали, что использование логической производной может считаться если не *альтернативным*, то эффективно дополняющим сложившиеся методы.

Ограниченные возможности логических дифференциальных операторов в исследовании логических объектов многие исследователи пытаются расширить за счет совершенствования техники использования направленных логических дифференциальных операторов [9–10]. Отличительной особенностью этих операторов является возможность обнаружения направления изменения значений аргументов (увеличение, уменьшение), что позволяет более точно исследовать структуру логической функции. Например, с использованием направленных производных определяются условия, при которых изменение значений исходных атрибутов (возрастание, убывание) приводит к возрастанию или убыванию значений на результирующих атрибутов.

Главным препятствием в организации эффективных вычислений, построенных, например, на принципах параллелизма, оказался *символический* математический аппарат созданной теории, основанный на преобразованиях в рамках законов алгебры логики. Получаемые при его реализации технические и программные решения являются неоднородными по структуре, трудно поддающихся распараллеливанию, и не позволяют эффективно использовать возможности современных технологий. Одним из путей организации эффективных параллельных вычислительных процессов является формализация алгоритмов в матричном виде. Важные результаты в области логического дифференциального исчисления получены в работах [11]. Логические преобразования оказалось возможным свести к матричным процедурам, которые позволяют воспользоваться хорошо апробированными средствами, например, пакетом программ матричной алгебры MATLAB [12].

Определение 1. Под функцией *m-значной* (*многозначной*) логики $f(\mathrm{X})=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящей от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, понимается заданная на множестве $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ логическая функция, имеющая отображение вида $\{0, 1, \ldots, m-1\}^n \rightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$ [11].

Одним из способов представления функций многозначной логики является вектор значений, интерпретируемый как столбец таблицы истинности на упорядоченных наборах переменных.

Пример 1. Функция трехзначной логики $f(x_1, x_2)=x_1 \vee x_2$ $(m=3, n=2)$ представляется вектором значений $\mathbf{X}=[012\ 112\ 222]^{\mathrm{T}}$:

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
X	0	1	2	1	1	2	2	2	2

Определение 2. Направленная логическая производная по частной переменной x_i функции m-значной логики, заданной вектором значений **X**, отражает факт изменения значения функции с j на k при изменении значения переменной x_i с a до b и в векторно-матричной форме вычисляется по соотношению [13, 14]

$$\frac{\partial X(j \rightarrow k)}{\partial x_i(a \rightarrow b)} = \left(P_{m^n}^{(i,a)} \varphi_j(X)\right)\left(P_{m^n}^{(i,b)} \varphi_k(X)\right) \qquad (1)$$

Здесь и далее с целью упрощения записи и наглядности операции конъюнкции (операция И) записываются через символы произведения. В соотношении (1) векторный литерал $\varphi_s(\mathbf{X})$ определяется по правилу:

$$\varphi_s(\mathbf{X}) = \varphi_s([x^{(0)}\ x^{(1)} \ldots x^{(m^n-1)}]^{\mathrm{T}}) = [\varphi_s(x^{(0)})\ \varphi_s(x^{(1)}) \ldots \varphi_s(x^{(m^n-1)})]^{\mathrm{T}}, \qquad (2)$$

где s — значение переменной из множества $\{j, k\}$. Матрица дифференцирования $P_{m^n}^{(i,l)}$ по переменной x_i с параметром $l=\{a,b\}$ в соотношении (1) формируется следующим образом:

$$P_{m^n}^{(i,l)} = M_{m^{i-1}} \otimes P_m^{(l)} \otimes M_{m^{n-i}}\ , \qquad (3)$$

где $M_{m^{i-1}}$ и $M_{m^{n-i}}$ — диагональные матрицы размерности $m^{i-1} \times m^{i-1}$ и $m^{n-i} \times m^{n-i}$ соответственно, на главных диагоналях которых записаны значения $(m-1)$; вспомогательная матрица $P_m^{(l)}$ имеет структуру вида:

$$P_m^{(l)} = [\ \varphi_l(0)\ \varphi_l(1) \ldots \varphi_l(m\text{-}1)] \otimes [\underbrace{m\text{-}1\ \ m\text{-}1 \ldots m\text{-}1}_{m \text{ единиц}}]^{\mathrm{T}}\ . \qquad (4)$$

Представим вышеизложенное в форме алгоритма вычисления направленной логической производной функции m-значной логики (по частной переменной).

Исходные данные	m — значность функции; **X** — вектор значений функции m-значной логики; n — число переменных; i — номер переменной по которой выполняется дифференцирование; j, k — параметры изменения значения функции; a, b — параметры изменения i-й переменной.
Выходные данные:	**Y** — вектор значений направленной логической производной функции m-значной логики по частной переменной
Шаг 1.	Сформировать по правилу (4) вспомогательные матрицы $P_m^{(a)}$ и $P_m^{(b)}$.
Шаг 2.	Сформировать по соотношению (3) матрицы дифференцирования
Шаг 3.	Вычислить по формуле (2) литералы $\varphi_j(\mathbf{X})$ и $\varphi_k(\mathbf{X})$.
Шаг 4.	Вычислить направленную логическую производную функции m-значной логики, соотношение (1)

Конец алгоритма.

Пример 2. Вычислить направленную логическую производную $\partial\mathbf{X}(0\to1)/\partial x_2(0\to1)$ функции многозначной логики, заданной вектором значений $\mathbf{X} = [000\ 011\ 012]^{\mathrm{T}}$.

Подставив в соотношение (1) значения параметров i=2, j=0, l=1, a=0, b=1, получим

$$\partial\mathbf{X}(0\to1)/\partial x_2(0\to2) = (\,\mathrm{P}_{3^2}^{(2,0)}\cdot\varphi_0(\mathbf{X}))\cdot(\,\mathrm{P}_{3^2}^{(2,2)}\cdot\varphi_1(\mathbf{X})). \tag{5}$$

Вычислим литералы: $\varphi_0(\mathbf{X}) = [222\ 200\ 200]^{\mathrm{T}}$, $\varphi_1(\mathbf{X}) = [000\ 022\ 020]^{\mathrm{T}}$. По соотношению (3), сформируем матрицы дифференцирования $\mathrm{P}_{3^2}^{(2,0)}$ и $\mathrm{P}_{3^2}^{(2,2)}$ по переменной x_2. Для этого предварительно по правилу (4) построим вспомогательные матрицы $\mathrm{P}_3^{(0)}$ и $\mathrm{P}_3^{(2)}$:

$$\mathrm{P}_3^{(0)} = [\,\varphi_0(0)\ \varphi_0(1)\ \varphi_0(2)]\otimes\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = [2\ 0\ 0]\otimes\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0&0\\2&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\quad \mathrm{P}_3^{(2)} = [\,\varphi_2(0)\ \varphi_2(1)\ \varphi_2(2)]\otimes\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = [0\ 0\ 2]\otimes\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{P}_{3^2}^{(2,0)} = \mathrm{M}_3\otimes\mathrm{P}_3^{(0)} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2&0&0\\2&0&0\\2&0&0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}2&0&0&&&&&&\\2&0&0&&0_{3^2}&&&0_{3^2}&\\2&0&0&&&&&&\\ \hdashline &&&2&0&0&&&\\&0_{3^2}&&2&0&0&&0_{3^2}&\\&&&2&0&0&&&\\ \hdashline &&&&&&2&0&0\\&0_{3^2}&&&0_{3^2}&&2&0&0\\&&&&&&2&0&0\end{array}\right],$$

$$\mathrm{P}_{3^2}^{(2,2)} = \mathrm{M}_3\otimes\mathrm{P}_3^{(2)} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}0&0&2&&&&&&\\0&0&2&&0_{3^2}&&&0_{3^2}&\\0&0&2&&&&&&\\ \hdashline &&&0&0&2&&&\\&0_{3^2}&&0&0&2&&0_{3^2}&\\&&&0&0&2&&&\\ \hdashline &&&&&&0&0&2\\&0_{3^2}&&&0_{3^2}&&0&0&2\\&&&&&&0&0&2\end{array}\right].$$

Подставив матрицы $\mathrm{P}_{3^2}^{(2,0)}$, $\mathrm{P}_{3^2}^{(2,2)}$ и векторы $\varphi_0(\mathbf{X})$, $\varphi_1(\mathbf{X})$ в соотношение (5), запишем:

$$\frac{\partial \mathrm{X}(0\to 1)}{\partial x_2(0\to 2)}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2&0&0& & & & & & \\ 2&0&0& &0_{3^2}& & &0_{3^2}& \\ 2&0&0& & & & & & \\ \hline & & &2&0&0& & & \\ &0_{3^2}& &2&0&0& &0_{3^2}& \\ & & &2&0&0& & & \\ \hline & & & & & &2&0&0\\ &0_{3^2}& & &0_{3^2}& &2&0&0\\ & & & & & &2&0&0 \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\\0\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&2& & & & & & \\ 0&0&2& &0_{3^2}& & &0_{3^2}& \\ 0&0&2& & & & & & \\ \hline & & &0&0&2& & & \\ &0_{3^2}& &0&0&2& &0_{3^2}& \\ & & &0&0&2& & & \\ \hline & & & & & &0&0&2\\ &0_{3^2}& & &0_{3^2}& &0&0&2\\ & & & & & &0&0&2 \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\2\\2\\0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\\2\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\\2\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Вектору значений $\partial\mathbf{X}(0\to1)/\partial x_2(0\to2)=[000222000]^{\mathrm{T}}$ соответствует запись в символической форме $\partial f(0\to1) / \partial x_2(0\to2) = \overset{1}{x_1}$.

Логическая производная по переменной x_2 зависит только от переменной x_1. Это показывает, что значение функции $f(x_1, x_2)$ изменяется с 0 на 1, при изменении x_2 с 0 до 2, только при x_1=1.

Использование направленной логической производной функции m-значной логики по частной переменной позволяет определить изменение значения функции в случае изменения значения только одной ее переменной. Параллельные алгоритмы на основе обобщения этого понятия для группы переменных (вектора) получены в [15].

Заключение

Разработанный математический аппарат логического дифференциального исчисления позволяет исследовать зависимость изменения значения результирующего атрибута от изменения значений исходных атрибутов, заданных лингвистическими (категориальными) переменными посредством однородных и регулярных по структуре матричных алгоритмов. Ориентирование аппарата на обработку лингвистических переменных обеспечивает возможность его использования в качестве инструмента СППР.

Полученные матричные аналоги направленных логических производных по переменным (вектору переменных) и разработанные параллельные алгоритмы их вычисления, удовлетворяют требованиям программной реализации на типовых пакетах программ матричной алгебры [12, 16].

Исследования частично поддержаны грантами Scientific Grant Agency of the Ministry of Education of Slovak Republic and the Slovak Academy of Sciences ZU/05VV_MVTS13 and (VEGA) No 1/1053/04. Авторы статьи благодарят участников белорусско-словацкого семинара "Системы поддержки принятия решений" (БГЭУ, Минск, июнь 2006) за конструктивные замечания, улучшившие наши исследования.

MATHEMATICAL TECHNIQUE MULTIPLE-VALUED LOGIC FOR DATA ANALYSIS IN SYSTEMS OF DECISIONS MAKING SUPPORT

V.G. LEVASHENKO, E.N. ZAITSEVA, S.A. POTTOSINA

Abstract

The work objective is development of multiple-valued logic technique owing to working out regular procedures for calculating directed logical derivatives. Using those derivatives in the systems of decision-making support allows more detailed analyzing the changes of investigated object parameters.

Литература

1. *Liu H., Hussain F., Lim Tan C., Dash M.* // Data Mining and Knowledge Discovery. Vol. 6. 2002. P. 393–423.
2. *Van de Merckt T.* // Machine Learning. 1990. P. 1016–1021.
3. *Koga M., Uchiyama A., Sampei M.* // Electrical Information and Systems Society, 119-C (12): 1561. 1999.
4. *Enoki H., Takami K., Kobayashi Y., Ohta T.* // IEEE Global Telecommunications Conf. 1994. Vol. 2. P. 818–822.
5. *Martinez J.* // IEEE Power Engineering Society Winter Meeting. 2001. Vol. 2. P.799–800.
6. *Zaitseva E.* // Dynamical Systems and Geometric Theories. 2003. Vol. 1, № 2. P. 213–222.
7. *Zaitseva E., Puuronen S.* // IEEE Proc. 36th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic. Nanyang, Singapore. 2006.
8. *Zaitseva E., Levashenko V.* // IEEE Proc. 52nd Annual Reliability & Maintainability Symposium (RAMS). Newport Beach, California, USA, 2006. P. 253–259.
9. *Tapia M., Guima T., Katbab A.* // Applied Mathematics and Computation. 1991. P. 225–285.
10. *Шмерко В.П, Левашенко В.Г., Янушкевич С.Н.* // Кибернетика и системный анализ НАН Украины. 1996. № 6. С. 41–58.
11. *Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Зайцева Е.Н.* Алгоритмы и систолические процессоры для обработки многозначных данных. Минск. 1990.
12. *Levashenko V., Zaitseva E., Sanko A.* // Proc 2nd Int. Conf. on New Information Technologies in Education, Vol. 1. Minsk, Belarus, 1996. P. 329–338.
13. *Shmerko V., Yanushkevich S., Levashenko V., Bondar I.* // IEEE Proc. 26th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic. 1996. P. 267–272.
14. *Shmerko V., Yanushkevich S., Levashenko V., Moraga C., Holovinsky G.* // Automation and Remote Control (USA). 2000. Vol. 61, № 5. P. 844–857.
15. *Levashenko V., Zaitseva E., Yanushkevich S.* // Proc. of Workshop on Sampling Theory & Applications. Riga, Latvia. 1995. P. 319–322.
16. *Поттосина С.*А., *Кузьмицкий Д.В.*, *Шмерко В.П.*, *Янушкевич С.Н.* Булево дифференциальное исчисление в вычислительной технике: Учебн. пособие. Ч. 1. Матричный аппарат булева дифференциального исчисления. Минск, 1990. 81 с.