УДК 517.977

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л.И. МИНЧЕНКО, С.М. СТАХОВСКИЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 27 сентября 2007

Рассматриваются параметрические задачи квадратичного программирования с необязательно выпуклой целевой функцией, и доказывается существование первых и вторых производных функции оптимального значения.

Ключевые слова: функция оптимального значения, параметрические задачи, производные по направлениям.

Введение

Рассмотрим параметрическую задачу квадратичного программирования $P(x)$, в которой требуется минимизировать целевую функцию $f(x, y)$ по переменной y на множестве

$$F(x) = \left\{ y \in R^m \mid h_i(x, y) \le 0 \quad i \in I \right\},$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $z(x, y)$, $I = \{1, \ldots, p\}$, $f(z) = \langle c, z\rangle + \langle z, Qz\rangle$, $h_i\,(x, y) = \langle a_i, y\rangle + \langle b_i, x\rangle + d_i$ $i = 1, \ldots, p$, $c \in R^{n+m}$, Q — квадратная матрица порядка $n+m$.

В данной задаче F — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому вектору параметров $x \in R^n$ замкнутое множество $F(x)R^n\subset$.

Обозначим через $\operatorname{dom} F$ и $\operatorname{gr} F$ соответственно область определения и график многозначного отображения F, т.е.

$$\operatorname{dom} F = \{x \in R^n \mid F(x) \ne \varnothing\}, \quad \operatorname{gr} F = \{(x, y) \mid y \in F(x), \quad x \in R^n\}.$$

Введем функцию оптимального значения $\varphi(x) = \min\{f(x, y) | \, y \in F(x)\}$ и множество оптимальных решений задачи $P(x)$:

$$\omega(x) = \left\{ y \in F(x) \mid f(x, y) = \varphi(x) \right\}.$$

Будем в дальнейшем предполагать, что многозначное отображение F равномерно ограниченно в окрестности точки $x_0 \in \operatorname{dom} F$ в том смысле, что существуют окрестность X_0 точки x_0 и компакт $Y_0 \subset R^m$ такие, что $F(X_0) \subset Y_0$. Очевидно при сделанных предположениях $\omega(x)$ является компактным множеством.

Производные по направлениям функции оптимального значения играют важную роль в исследовании устойчивости задач оптимизации относительно возмущений параметров, в построении методов решения минимаксных задач, в квазидифференциальном исчислении и приложениях негладкого анализа. Исследованию дифференцируемости функций оптимального значения посвящена обширная литература [1–11].

Пусть $\overline{x} \in R^n$. Для функции оптимального значения φ введем производную по направлению $\overline{x}$ в точке x_0:

$$\varphi'(x_0;\overline{x}) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(\varphi(x_0+t\overline{x})-\varphi(x_0)).$$

Пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in R^n$. Следуя [12], определим производную второго порядка функции φ в точке x_0 по направлениям $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ как

$$\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{2}{t^2}(\varphi(x_0+t\overline{x}_1+t^2\overline{x}_2)-\varphi(x_0)-t\varphi'(x_0;\overline{x}_1)).$$

Вторые производные функции оптимального значения изучались в работах [2, 3, 10, 11], где при различных предположениях получены достаточные условия их существования и формулы для их вычисления. Так в работах [2, 3] показано, что существование $\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ обеспечивается условиями R-регулярностью задачи (или более жестким условием регулярности Мангасаряна–Фромовица) и дополнительным требованием выполнения сильного достаточного условия строгого минимума. Целью данной заметки является получение более результата, дополняющего [2, 3] для случая задачи квадратичного программирования.

Первые и вторые производные функции оптимального значения

Следуя [3], введем нижнюю и верхнюю производные Дини многозначного отображения F в точке $z=(x,y)\in \operatorname{gr} F$ по направлению $\overline{x}$:

$$D_+F(z;\overline{x}) = \left\{\overline{y}\in R^m \mid \exists o(t) \text{ такое, что } y+t\overline{y}+o(t)\in F(x+t\overline{x})\ \forall t\ge 0\right\},$$
$$D^+F(z;\overline{x}) = \left\{\overline{y}\in R^m \mid \exists t_k\downarrow 0 \text{ и } \overline{y}_k\to\overline{y} \text{ такие, что } y+t_k\overline{y}_k\in F(x+t_k\overline{x})\ \ k=1,2,\ldots\right\}.$$

Вследствие свойств топологических пределов множества $D^+F(z;\overline{x})$ и $D_+(z;\overline{x})$ являются замкнутыми, причем $D_+F(z;\overline{x})\subset D^+F(z;\overline{x})$.

В случае, когда $D_+F(z;\overline{x}) = D^+F(z;\overline{x})$ будем их общее значение называть производной многозначного отображения F в точке $z=(x,y)\in \operatorname{gr} F$ по направлению $\overline{x}$ и обозначать $DF(z;\overline{x})$. При этом будем говорить, что многозначное отображение F дифференцируемо в точке z по направлению $\overline{x}$.

Пусть $z=(x, y)\in \operatorname{gr} F$. Следуя [3], введем вторые нижнюю и верхнюю производные Дини многозначного отображения F в точке $z=(x,y)$ при $\overline{z}_1=(\overline{x}_1,\overline{y}_1)\in \operatorname{gr} DF(z_0,.)$ по направлениям $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2\in R^n$:

$$D_+^2F(z,\overline{z}_1;\overline{x}_2) = \left\{\overline{y}_2\in R^m \mid \exists o(t) \text{ такое, что } y+t\overline{y}_1+t^2\overline{y}_2+o(t^2)\in F(x+t\overline{x}_1+t^2\overline{x}_2)\ \forall t\ge 0\right\},$$
$$D^{+2}F(z,\overline{z}_1;\overline{x}_2) = \left\{\overline{y}_2\in R^m \mid \exists o(t) \text{ и } \exists t_k\downarrow 0 \text{ такие, что } y+t_k\overline{y}_1+t_k^2\overline{y}_2+o(t_k^2)\in F(x+t_k\overline{x}_1+t_k^2\overline{x}_2)\right\}.$$

Если вторые нижняя и верхняя производные Дини $D_+^2F(z,\overline{z}_1;\overline{x}_2)$ и $D^{+2}F(z,\overline{z}_1;\overline{x}_2)$ совпадают, их общее значение будем обозначать $D^2F(z,\overline{z}_1;\overline{x}_2)$ и называть второй производной многозначного отображения F в точке $z=(x,y)$ при $\overline{z}_1=(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ по направлениям $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2\in R^n$ и обозначать $D^2F(z,\overline{z}_1;\overline{x}_2)$.

Пусть $\rho(x, C) = \inf_{y \in C} |x - y|$, где $|y|$ — евклидова норма вектора, B — открытый единичный шар с центром в 0 в пространстве R^m.

Определим также множество индексов ограничений типа неравенства, активных в точке z:

$I(z) = \{i \in I \mid h_i(z) = 0\}$.

Лемма 1 [13]. *Пусть* $a_i \in R^m$, $b_i \in R$ *при* $i=1, \ldots, p$. *Тогда множество* $C=\{y \in R^m \mid \langle a_i, y\rangle + b_i \le 0 \quad i=1, \ldots, p\}$ *R-регулярно в каждой точке* $y_0 \in C$ *в том смысле, что существует число* $\alpha>0$ *такое, что* $\rho(y, C) \le \alpha \max\{0, \langle a_i, y\rangle + b_i \quad i=1, \ldots, p\}$ *для всех* $y \in R^m$.

Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$, $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y})$. Введем множество

$$\Gamma(z_0; \overline{x}) = \left\{ \overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(z_0), \overline{z} \rangle \le 0 \quad i \in I(z_0) \right\}.$$

Полагая $\overline{z}_1 = (\overline{x}_1, \overline{y}_1)$, $\overline{z}_2 = (\overline{x}_2, \overline{y}_2)$, $I^2(z_0, \overline{z}_1) = \{i \in I(z_0) \big| \langle \nabla h_i(z_0), \overline{z}_1 \rangle = 0\}$, где $\overline{y}_1 \in \Gamma(z_0; \overline{x}_1)$, введем множество

$$\Gamma^2(z_0, \overline{z}_1; \overline{x}_2) = \left\{ \overline{y}_2 \in R^m \mid \langle \nabla h_i(z_0), \overline{z}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{z}_1, \nabla^2 h_i(z_0) \overline{z}_1 \rangle \le 0 \quad i \in I^2(z_0, \overline{z}_1) \right\}.$$

Для задачи $P(x)$ введем функцию Лагранжа $L(z, \lambda) = f(z) + \langle \lambda, h(z) \rangle$, где $z = (x, y)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $h = (h_1, \ldots, h_p)$ и множество множителей Лагранжа в точке z

$$\Lambda(z) = \left\{ \ \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_y L(z, \lambda) = 0, \ \lambda_i \ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z) = 0, \quad i \in I \ \right\}.$$

Пусть

$$z_0 = (x_0, y_0), \ \overline{z} = (\overline{x}, \overline{y}), \ \ \overline{z}_1 = (\overline{x}_1, \overline{y}_1), \ \overline{z}_2 = (\overline{x}_2, \overline{y}_2),$$
$$\Gamma^*(z_0; \overline{x}_1) = \{ \ \overline{y}_1 \in \Gamma(z_0; \overline{x}_1) \mid \langle \nabla f(z_0), (\overline{x}_1, \overline{y}_1) \rangle = \min_{\overline{y} \in \Gamma(z_0; \overline{x}_1)} \langle \nabla f(z_0), (\overline{x}_1, \overline{y}) \rangle \},$$
$$\Phi(z_0, \overline{z}_1, \overline{z}_2) = \langle \nabla f(z_0), \overline{z}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{z}_1, \nabla^2 f(z_0), \overline{z}_1 \rangle,$$
$$\Lambda^2(z_0; \overline{x}) = \{ \ \lambda \in \Lambda(z_0) \mid \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \overline{x} \rangle = \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \overline{x} \rangle \}.$$

Лемма 2. *Пусть* $z_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$, $\overline{z}_1 = (\overline{x}_1, \overline{y}_1)$. *Для задачи* $P(x)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\Gamma(z_0; \overline{x}) \ne \varnothing$, *то многозначное отображение* F *дифференцируемо в точке* z_0 *по направлению* $\overline{x}$ *и* $DF(z; \overline{x}) = \Gamma(z_0; \overline{x}) \ne \varnothing$;

2) *если* $\overline{y}_1 \in \Gamma(z_0; \overline{x}_1)$ *и* $\Gamma^2(z_0, \overline{z}_1; \overline{x}_2) \ne \varnothing$, *то для многозначного отображения* F *существует в точке* z_0 *вторая производная* $D^2F(z, \overline{z}_1; \overline{x}_2)$ *по направлениям* $\overline{x}_1, \overline{x}_2$, *причем* $D^2F(z, \overline{z}_1; \overline{x}_2) = \Gamma^2(z_0, \overline{z}_1; \overline{x}_2) \ne \varnothing$.

Лемма 3. *Пусть* $\Gamma(z_0; \overline{x}) \ne \varnothing$. *Тогда* $\Gamma^*(z_0; \overline{x}) \ne \varnothing$.

Доказательство. Покажем, что $\langle \nabla_y f(z_0), \overline{y} \ \rangle$ ограничена снизу на $\Gamma(z_0; \overline{x} \ )$. Действительно, рецессивный конус $0^+\Gamma(z_0; \overline{x})$ многогранного множества $\Gamma(z_0; \overline{x})$ совпадает с $\Gamma(z_0; 0) = DF(z_0; 0)$ и, следовательно, для любого $\overline{y} \in \Gamma(z_0; 0)$ существует функция $o(t)$ такая, что $y_0 + t\overline{y} + o(t) \in F(x_0)$ и, значит, $f(x_0, y_0 + t\overline{y} + o(t)) - f(x_0, y_0) \ge 0$, откуда

$\langle \nabla_y f(z_0), \bar{y} \rangle \geq 0$ на множестве Γ(z_0; 0). Поскольку многогранное множество является суммой ограниченного многогранника и своего рецессивного конуса ([5]), последнее означает ограниченность $\langle \nabla_y f(z_0), \bar{y} \rangle$ на множестве $\Gamma(z_0; \bar{x})$.

Теорема 1. *Для задачи P(x) справедливы следующие утверждения.*

1) *пусть* $\Gamma(z_0; \bar{x}) \neq \varnothing$ *в любой точке* $z_0 = (x_0, y_0)$ *такой, что* $y_0 \in \omega(x_0)$. *Тогда функция* φ *дифференцируема в точке* x_0 *направлению* $\bar{x}$, *причем*

$$\varphi'(x_0; \bar{x}) = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma(z_0; \bar{x})} \langle \nabla f(z_0), \bar{z} \rangle = \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x} \rangle; \tag{1}$$

2) пусть в любой точке $z_0=(x_0, y_0)$ такой, что $y_0 \in \omega(x_0)$ выполнены условия $\Gamma(z_0; \bar{x}_1) \neq \varnothing$ и $\Gamma^2(z_0, \bar{z}_1; \bar{x}_2) \neq \varnothing$ для всех $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ таких, что $\bar{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \bar{x}_1)$. Тогда существует конечная вторая производная функции φ в точке x_0 по направлениям $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2 \in R^n$, причем

$$\begin{aligned} \varphi''(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y}_1 \in \Gamma(z_0; \bar{x}_1)} \min_{\bar{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \bar{z}_1; \bar{x}_2)} 2\Phi(z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \\ &= \min_{y_0 \in \omega(x_0)} \min_{\bar{y}_1 \in \omega(x_0, \bar{x}_1)} \max_{\Lambda^2(z_0; \bar{x})} \{ 2\langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x}_2 \rangle + \langle \bar{z}_1, \nabla^2 L(z_0, \lambda), \bar{z}_1 \rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. 1) Справедливость первого утверждения следует из основного результата работы [7].

2) Пусть $y_0 \in \omega(x_0)$, $z_0=(x_0, y_0)$, $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $\bar{z}_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$. В силу леммы 2 $DF(z_0; \bar{x}_1) = \Gamma(z_0; \bar{x}_1) \neq \varnothing$ и $D^2 F(z, \bar{z}_1; \bar{x}_2) = \Gamma^2(z_0, \bar{z}_1; \bar{x}_2) \neq \varnothing$. Кроме того, $\Gamma^*(z_0; \bar{x}_1) \neq \varnothing$ по лемме 3.

Пусть $\bar{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \bar{x}_1)$, $\bar{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \bar{z}_1; \bar{x}_2)$. Тогда по определению производной $D^2 F(z, \bar{z}_1; \bar{x}_2)$ найдется функция $o(t)$ такая, что $y_0 + t\bar{y}_1 + t^2 \bar{y}_2 + o(t^2) \in F(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2 \bar{x}_2)$ при всех $t \geq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2 \bar{x}_2) - \varphi(x_0) - t\varphi'(x_0; \bar{x}_1) \leq \\ &\leq f(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2 \bar{x}_2, y_0 + t\bar{y}_1 + t^2 \bar{y}_2 + o(t^2)) - f(x_0, y_0) - t\varphi'(x_0; \bar{x}_1) \leq \\ &= t\langle \nabla f(z_0), \bar{z}_1 \rangle + t^2 \langle \nabla f(z_0), \bar{z}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{z}_1, \nabla^2 f(z_0), \bar{z}_1 \rangle + o(t^2) - t\varphi'(x_0; \bar{x}_1) = \\ &= t^2 \Phi(z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2) + o(t^2), \end{aligned} \tag{3}$$

откуда переход к пределу при $t \downarrow 0$ дает

$$D^{2+}\varphi(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{2}{t^2} (\varphi(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2 \bar{x}_2) - \varphi(x_0) - t\varphi'(x_0; \bar{x}_1)) \leq 2\Phi(z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2),$$

или с учетом произвольности выбора $y_0 \in \omega(x_0)$, $\bar{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \bar{x}_1)$,

$$D^{2+}\varphi(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \inf_{\bar{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \bar{x}_1)} \inf_{\bar{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \bar{z}_1; \bar{x}_2)} 2\Phi(z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2). \tag{4}$$

Пусть $D_+^2 \varphi(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{2}{t^2} (\varphi(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2 \bar{x}_2) - \varphi(x_0) - t\varphi'(x_0; \bar{x}_1))$ достигается на последовательности $t_k \downarrow 0$. Пусть $x_k = x_0 + t_k \bar{x}_1 + t_k^2 \bar{x}_2$, $y_k \in \omega(x_k)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $y_k \to y_0$, причем в силу замкнутости многозначного отображения *F* в рассматриваемой задаче справедливо включение $y_0 \in F(x_0)$. С другой стороны в силу (3) $\limsup\limits_{t\downarrow 0} \varphi(x_0 + t\overline{x}_1 + t^2\overline{x}_2) \le \varphi(x_0)$ и, следовательно, переход к пределу в равенстве $\varphi(x_0 + t_k\overline{x}_1 + t_k{}^2\overline{x}_2) = f(x_0 + t_k\overline{x}_1 + t_k{}^2\overline{x}_2,\ y_k)$ дает $\varphi(x_0) = f(x_0, y_0)$, откуда с учетом $y_0 \in F(x_0)$ следует $y_0 \in \omega(x_0)$.

Положим $\hat{y}_k = t_k^{-1}(y_k - y_0)$. Легко видеть, что $\Gamma(z_0;\overline{x}_1) = \left\{\overline{y}_1 \mid \langle a_i, \overline{y}_1\rangle + \langle b_i, \overline{x}_1\rangle \le 0\ \ i \in I(z_0)\right\}$, $h_i(z_k) - h_i(z_0) = \langle a_i, y_k - y_0\rangle + \langle b_i, x_k - x_0\rangle \le 0$ при $i \in I(z_0)$, откуда

$$\langle a_i, \hat{y}_k\rangle + \langle b_i, \overline{x}_1\rangle \le -t_k\langle b_i, \overline{x}_2\rangle \quad i \in I(z_0). \tag{5}$$

Возьмем $\overline{y}_1 \in \Gamma^*((x_0, y_0); \overline{x}_1)$. Тогда $\varphi(x_k) - \varphi(x_0) = f(z_k) - f(z_0) = = \langle \nabla f(z_0), z_k - z_0\rangle + \frac{1}{2}\langle z_k - z_0, \nabla^2 f(z_0)(z_k - z_0)\rangle$ и в силу (3) $\varphi(x_k) - \varphi(x_0) \le t_k\varphi'(x_0; \overline{x}_1) + +M_1 t_k^2$, где $M_1 = \text{const} > 0$.

Отсюда получаем $\langle \nabla f(z_0), z_k - z_0\rangle \le t_k\varphi'(x_0; \overline{x}_1) + M_2 t_k^2$, $M_2 = \text{const} > 0$, или

$$\langle \nabla_y f(z_0), \hat{y}_k\rangle + \langle \nabla_x f(z_0), \overline{x}_1\rangle \le \min_{\overline{y} \in \Gamma(z_0; \overline{x}_1)} \langle \nabla f(z_0), (\overline{x}_1, \overline{y}\rangle + M_2 t_k. \tag{6}$$

Из последнего неравенства и (5) в силу леммы 1 следует, что

$$\rho(\hat{y}_k, \Gamma^*(z_0; \overline{x}_1)) \le \alpha \max\Big\{\ 0,\ \langle a_i, \hat{y}_k\rangle + \langle b_i, \overline{x}_1\rangle \quad i \in I(z_0),$$
$$\langle \nabla_y f(z_0), \hat{y}_k\rangle + \langle \nabla_x f(z_0), \overline{x}_1\rangle - \min_{\overline{y} \in \Gamma(z_0; \overline{x}_1)} \langle \nabla f(z_0), (\overline{x}_1, \overline{y}\rangle\ \Big\}.$$

Следовательно, принимая во внимание оценки (5) и (6), окончательно получаем $\rho(\hat{y}_k, \Gamma^*(z_0; \overline{x}_1)) \le M_3 t_k,\ \ M_3 = \text{const} > 0.$

Тогда существует $\overline{y}_{1k} \in \Gamma^*(z_0; \overline{x}_1)$ такой, что $\hat{y}_k = \overline{y}_{1k} + t_k q_k,\ \overline{y}_{1k} \to 0,$ где последовательность $\{q_k\}$ ограничена. В таком случае, не убавив общности, можно считать, что $q_k \to \overline{y}_2$ и $\hat{y}_k = \overline{y}_{1k} + t_k\overline{y}_2 + o(t_k)$. Полагая $\overline{z}_{1k} = (\overline{x}_1, \overline{y}_{1k})$, при $i \in I^2(z_0, \overline{z}_{1k})$ получим $0 \ge h_i(z_k) - h_i(z_0) = \langle a_i, y_k - y_0\rangle + \langle b_i, x_k - x_0\rangle = t_k\left[\langle a_i, \overline{y}_{1k}\rangle + \langle b_i, \overline{x}_1\rangle\right] + t_k^2\left[\langle a_i, \overline{y}_2\rangle + \langle b_i, \overline{x}_2\rangle\right] + o(t_k^2),$ откуда $\langle a_i, \overline{y}_2\rangle + \langle b_i, \overline{x}_2\rangle \le 0,$ т.е. $\overline{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \overline{z}_{1k}; \overline{x}_2)$. Тогда $\varphi(x_k) - \varphi(x_0) = = f(z_k) - f(z_0) = \langle \nabla f(z_0), z_k - z_0\rangle + \frac{1}{2}\langle z_k - z_0, \nabla^2 f(z_0)(z_k - z_0)\rangle = t_k\langle \nabla f(z_0), \overline{z}_{1k}\rangle + t_k^2[\langle \nabla f(z_0), \overline{z}_2\rangle + +\frac{1}{2}\langle \overline{z}_{1k}, \nabla^2 f(z_0)\overline{z}_{1k}\rangle\ ] + o(t_k^2),$ где $\overline{z}_{1k} = (\overline{x}_1, \overline{y}_{1k}),\ \overline{z}_2 = (\overline{x}_2, \overline{y}_2)$.

Отсюда $\varphi(x_k) - \varphi(x_0) - t_k\varphi'(x_0; \overline{x}) \ge t_k^2[\langle \nabla f(z_0), \overline{z}_2\rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{z}_{1k}, \nabla^2 f(z_0)\overline{z}_{1k}\rangle\ ] + o(t_k^2) = = t_k^2\Phi(z_0, \overline{z}_{1k}, \overline{z}_2) + o(t_k^2) \ge t_k^2 \inf\limits_{\overline{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \overline{x}_1)} \inf\limits_{\overline{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \overline{z}_1; \overline{x}_2)} \Phi(z_0, \overline{z}_1, \overline{z}_2) + o(t_k^2)$ и, следовательно,

$$D_+^2\varphi(x_0; \overline{x}_1, \overline{x}_2) \ge \inf_{\overline{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \overline{x}_1)} \inf_{\overline{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \overline{z}_1; \overline{x}_2)} 2\Phi(z_0, \overline{z}_1, \overline{z}_2),$$

откуда окончательно получаем

$$D_+^2\varphi(x_0; \overline{x}_1, \overline{x}_2) \ge \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \inf_{\overline{y}_1 \in \Gamma^*(z_0; \overline{x}_1)} \inf_{\overline{y}_2 \in \Gamma^2(z_0, \overline{z}_1; \overline{x}_2)} 2\Phi(z_0, \overline{z}_1, \overline{z}_2).$$

Сравнивая с оценкой (4), получаем, что производная $\varphi''(x_0;\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ существует, причем $\varphi''(x_0;\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\inf\limits_{y_0\in\omega(x_0)}\inf\limits_{\bar{y}_1\in\Gamma^*(z_0;\bar{x}_1)}\inf\limits_{\bar{y}_2\in\Gamma^2(z_0,\bar{z}_1;\bar{x}_2)}2\Phi(z_0,\bar{z}_1,\bar{z}_2)$.

Применение леммы о двойственности [3, 11] позволяет утверждать о равносильности данной формулы и двойного равенства (2).

Теорема 2. *Пусть в задаче* $P(x)$ *выполняется условие* $x_0\in\mathrm{int\ dom}\,F$. *Тогда для любых направлений* $\bar{x}\in R^n$ *и* $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in R^n$ *существуют конечные производные* $\varphi'(x_0;\bar{x})$ *и* $\varphi''(x_0;\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, *для которых справедливы формулы* (1) *и* (2).

Доказательство. Следуя [3], можно показать, что при сделанных предположениях многозначное отображение F R-регулярно в любой точке $z_0=(x_0, y_0)\in\mathrm{gr}\,F$ в том смысле, что найдутся числа $\alpha>0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что $\rho(y, F(x))\leq\alpha\max\{0, h_i(x, y)\ \ i\in I\}$ для всех $x\in x_0+\delta_1 B$, $y\in y_0+\delta_2 B$. В таком случае, согласно [3] $DF(z_0;\bar{x})=\Gamma(z_0;\bar{x})\neq\varnothing$ и $D^2F(z,\bar{z}_1;\bar{x}_2)=$ $=\Gamma^2(z_0,\bar{z}_1;\bar{x}_2)\neq\varnothing$ для любых направлений $\bar{x}\in R^n$ и $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in R^n$. Далее следует повторить доказательство теоремы 1.

ON DIFFERENTIABILITY OF VALUE FUNCTION IN PARAMETRIC QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEMS

L.I. MINCHENKO, S.M. STAKHOVSKI

Abstract

Parametric quadratic programming problems are studied and the existence of the first and the second directional derivatives for value function are proved.

Литература

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М., 1990.
2. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. Springer-Verlag, New York, 2000.
3. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2002.
4. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
5. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М., 1973.
6. *Минченко Л.И., Волосевич А.А.* // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 3. С. 28–32.
7. *Минченко Л.И., Сацура Т.В.* // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1997. Т. 37, № 1. С. 18–22.
8. *Minchenko L., Tarakanov A.* // Optimization. 2005. Vol. 54. P. 433–442.
9. *Минченко Л.И., Тараканов А.Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 4. С. 24–28.
10. *Ralph D., Dempe S.* // Mathematical Programming. 1995. Vol. 70. P. 159–172.
11. *Auslender A., Cominetti R.* // Optimization. 1990. Vol. 21. P. 240–258.
12. *Ben-Tal A., Zowe J.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1985. Vol. 47. P. 493–490.
13. *Федоров В.В.* Численные методы решения максиминных задач. М., 1979.