

УДК 621.396.96

ОПТИМАЛЬНОЕ ВРЕМЕННОЕ СЖАТИЕ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ШУМОВОГО ПОМЕХОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

О.Г. ЛАПУКА

Военная академия Республики Беларусь
Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 10 марта 2008

Представлены методика и результаты синтеза алгоритма цифровой фильтрации, оптимальной по критерию минимума длительности отклика фильтра (максимального временного сжатия сигнала), при аддитивном гауссовом случайном входном воздействии. Проведена сравнительная оценка результатов цифровой обработки различных сигналов по алгоритмам оптимального временного сжатия, максимального временного сжатия и согласованной фильтрации.

Ключевые слова: оптимальная фильтрация, цифровая обработка сигналов, КИХ-фильтры, временное сжатие сигналов.

Введение

Рассмотренные в работе [1] фильтры максимального сжатия (ФМС) обеспечивают минимум длительности отклика в идеальных условиях, т.е. при отсутствии шумового воздействия на входе устройства обработки. В реальных условиях функционирования радиотехнических систем прием сигналов осуществляется при аддитивном мешающем воздействии различной природы: наличии внутренних шумов радиоприемного устройства, флуктуаций параметров среды распространения сигналов, промышленных помех и т. д. При этом структура и параметры устройств обработки, полученные в результате стохастического синтеза по критерию минимума длительности отклика и приведенные в [1], строго говоря, не будут являться оптимальными. Таким образом, представляет интерес аналитическое решение задачи синтеза фильтров, обеспечивающих минимум длительности выходного сигнала с учетом шумового воздействия, которые далее будем называть фильтрами оптимального сжатия (ФОС).

Теоретический анализ

Будем использовать модель входного мешающего воздействия в виде вектора-столбца случайных некоррелированных отсчетов, распределенных по нормальному закону – так называемого дискретного белого гауссовского шума (ДБГШ):

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{bmatrix}^T. \quad (1)$$

Для решения указанной задачи важным является понятие *установившегося шума*, которым обозначим отклик фильтра на шумовое воздействие, действующее заблаговременно. Для КИХ-фильтров это означает, что шум должен появиться на входе устройства обработки ранее полезного сигнала по крайней мере на время, равное длительности импульсной характеристики

фильтра (переходный процесс воздействия шума на КИХ-фильтр к моменту появления на входе полезного сигнала должен быть закончен). Будем рассматривать только фильтры с размерностью импульсной характеристики, совпадающей с размерностью полезного сигнала $r_h = r_s$. При $r_h < r_s$ отклик фильтра в каждый момент определяется только частью входного сигнала, при $r_h > r_s$ реакция фильтра на сигнал размерности r_s затянута излишне. Условие $r_h = r_s$ обеспечивает участие всех отсчетов сигнала в формировании отклика, при этом его размерность (дискретная "длительность") будет равна $2r_s - 1$.

Размерность вектора-столбца шумового воздействия определим с учетом следующих обстоятельств:

– шум начинает действовать заблаговременно, таким образом, чтобы к началу появления отклика полезного сигнала (точка A на рис. 1) выходная шумовая составляющая фильтра уже была установившейся;

– шум прекращает действовать одновременно с окончанием сигнальной составляющей отклика фильтра (точка B).

Как видно из рис. 1, в этом случае размерность входного шума должна составлять $k = 3r_s - 2$.

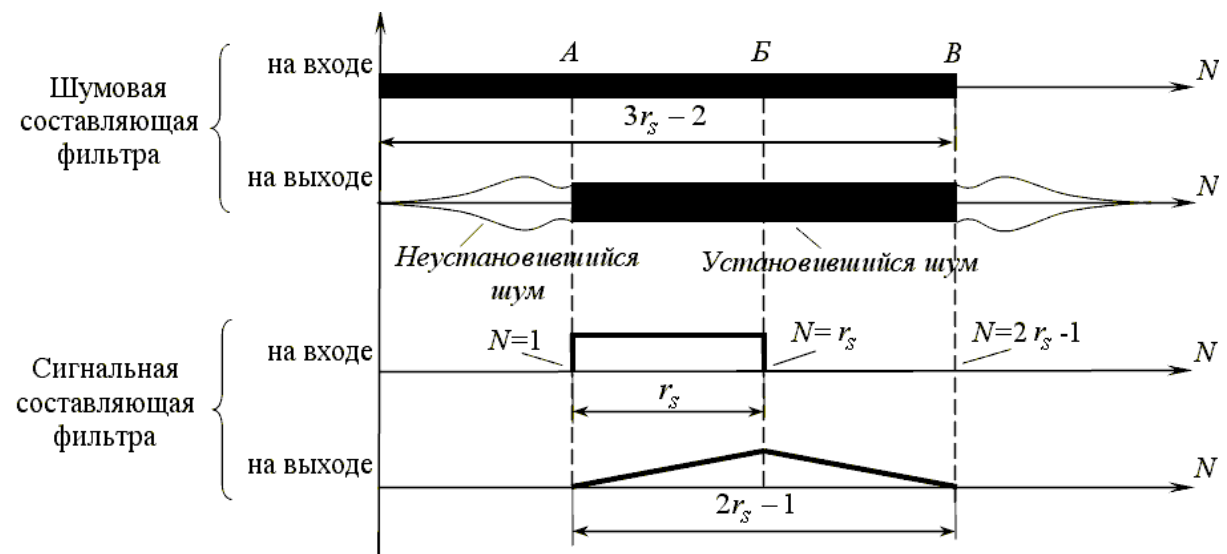


Рис. 1. Временные диаграммы, к объяснению понятия *установившийся шум*

Процедура фильтрации ДБГШ описывается сверткой импульсной характеристики фильтра и вектора (1), которая в векторно-матричных обозначениях описывается выражением

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_0 \mathbf{n} \mathbf{J} \mathbf{h}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{h} — вектор-столбец размерностью r_s импульсной характеристики фильтра; \mathbf{J} — матрица отражения (единичная кроссдиагональная матрица), обеспечивающая зеркальное отражение элементов исходного вектора; $\mathbf{C}_0 \mathbf{n}$ — ганкелева матрица [2] размерностью $r_s \times 2r_s - 1$, ее структура полностью определяется образующим вектором-столбцом дискретных шумовых отсчетов. Например, для $r_s = 3$ входной шум представляется вектором $\mathbf{n} = n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4 \ n_5 \ n_6 \ n_7^T$, а матрица $\mathbf{C}_0 \mathbf{n}$ будет иметь вид

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ n_3 & n_4 & n_5 & n_6 & n_7 \end{pmatrix}^T.$$

В соответствии с принципом суперпозиции полный отклик фильтра может быть найден как сумма его полезной и шумовой составляющих:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_n = \alpha \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{s} \mathbf{B} \mathbf{h} + \mathbf{C}_0 \mathbf{n} \mathbf{J} \mathbf{h}, \quad (3)$$

где α — амплитуда полезного сигнала; $\mathbf{s} = s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{r_s}^T$ — нормированный вектор-столбец дискретных отсчетов полезного сигнала размерностью r_s : $\|\mathbf{s}\|^2 = 1$; \mathbf{B} — вспомогательная матрица "удлинения" путем дополнения нулевыми отсчетами сигнала размерности r_s до размерности $2r_s - 1$, соответствующей выходу цифрового фильтра: например, для $r_s = 3$ данная матрица имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$\mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{s}$ — теплицева нижнетреугольная матрица свертки [3], сформированная по образующему "удлиненному" вектору $\mathbf{B} \mathbf{s}$ размерностью $2r_s - 1$. Например, для $r_s = 3$ эта матрица имеет структуру:

$$\mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & s_2 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & s_2 & s_1 \end{bmatrix}.$$

Фильтром оптимального сжатия назовем фильтр, обеспечивающий наименьшее (в среднеквадратическом смысле) отклонение полного нормированного выходного сигнала от идеальной "кнопочной" функции, т.е. минимум функционала

$$I_{\text{ФОС}} = \left\langle \left\| \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} - \mathbf{L} \right\|_{\mathbf{n}}^2 \right\rangle, \quad (4)$$

где $\mathbf{L} = \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{1} = 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0^T$ — идеальная "кнопочная" функция; $\mathbf{1} = 1 \ 0 \ \dots \ 0^T$ — вектор-столбец, соответствующий дискретно-конечномерному аналогу δ -функции.

Можно показать, что нормировка отклика в выражении (4), заключающаяся в делении вектора \mathbf{y} на его "центральное" значение (отсчет в "момент" $N=r_s$), является непринципиальной и не влияет на результат. В этом случае функционал (4) можно представить в виде

$$I_{\text{ФОС}} = \left\langle \|\mathbf{y} - \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{1}\|_{\mathbf{n}}^2 \right\rangle = \left\langle \|\mathbf{y}\|^2 \right\rangle_{\mathbf{n}} - 2 \left\langle \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{1} \right\rangle_{\mathbf{n}} + 1. \quad (5)$$

С учетом выражения (3) распишем отдельно слагаемые, входящие в формулу (5). Получим:

$$\langle \|\mathbf{y}\|^2 \rangle_{\mathbf{n}} = \langle \|\mathbf{y}_s + \mathbf{y}_n\|^2 \rangle_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{y}_s\|^2 + \langle 2\mathbf{y}_s^T \mathbf{y}_n \rangle_{\mathbf{n}} + \langle \|\mathbf{y}_n\|^2 \rangle_{\mathbf{n}}. \quad (6)$$

Так как полезный сигнал и шум некоррелированы между собой, усредненное по шумам произведение $\mathbf{y}_s^T \mathbf{y}_n$ равно нулю. В этом случае, с учетом формул (2) и (3) выражение (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \langle \|\mathbf{y}\|^2 \rangle_{\mathbf{n}} &= \|\mathbf{y}_s\|^2 + \langle \|\mathbf{y}_n\|^2 \rangle_{\mathbf{n}} = \\ &= \alpha^2 \mathbf{h}^T \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{B}_s \mathbf{F} \mathbf{B}_s \mathbf{B} \mathbf{h} + \langle \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{C}_0^T \mathbf{n} \mathbf{C}_0 \mathbf{n} \mathbf{J} \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{n}} = \\ &= \alpha^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \langle \mathbf{C}_0^T \mathbf{n} \mathbf{C}_0 \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{n}} \mathbf{h} = \\ &= \alpha^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \langle \|\mathbf{n}\|^2 \rangle_{\mathbf{n}} \mathbf{I} \mathbf{h} = \alpha^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{h} + \sigma_n^2 (2r_s - 1) \mathbf{h}^T \mathbf{I} \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь \mathbf{I} — единичная матрица; $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{B}_s \mathbf{F} \mathbf{B}_s \mathbf{B}$ — квадратная теплицева центрально-симметрическая матрица (для нее справедливо равенство $\mathbf{J} \mathbf{Q}_0 \mathbf{J} = \mathbf{Q}_0$) размерностью $r_s \times r_s$. Структура данной матрицы полностью определяется формой полезного сигнала. Например, для трехэлементного входного сигнала $s_1 \ s_2 \ s_3^T$ матрица имеет вид

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \|s\|^2 & s_1 s_2 + s_2 s_3 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 + s_2 s_3 & \|s\|^2 & s_1 s_2 + s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_1 s_2 + s_2 s_3 & \|s\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_1 s_2 + s_2 s_3 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 + s_2 s_3 & 1 & s_1 s_2 + s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_1 s_2 + s_2 s_3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Как показано в [1], матрица \mathbf{Q}_0 характеризует норму автокорреляционного вектора полезного сигнала: $\mathbf{k}^0 \mathbf{s}, \mathbf{s} = \mathbf{F} \mathbf{B}_s \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{s}$.

Второе слагаемое выражения (5) пропорционально скалярному произведению отклика фильтра и идеальной "кнопочной" функции, которое численно равно значению отклика в его средней точке $N=r_s$ (точка B на рис. 1):

$$\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{l} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{l} = \alpha \mathbf{F} \mathbf{B}_s \mathbf{B} \mathbf{h} + \mathbf{C}_0 \mathbf{n} \mathbf{J} \mathbf{h}^T \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{l} = \alpha \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{s} + \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{n}. \quad (9)$$

С учетом выражений (7) и (9) формула (5) переписывается в виде

$$I_{\text{ФОС}} = \langle \|\mathbf{y} - \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{l}\|^2 \rangle_{\mathbf{n}} = \alpha^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{h} + \sigma_n^2 (2r_s - 1) \mathbf{h}^T \mathbf{I} \mathbf{h} - 2\alpha \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{s} - 2 \langle \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{n}} + 1. \quad (10)$$

Так как входной шум представляет собой центрированный случайный процесс, некоррелированный с полезным сигналом, то усредненное по шумам скалярное произведение векторов, описывающих импульсную характеристику фильтра и входной шум, равно нулю. С учетом этого выражение для функционала (10) можно представить в виде:

$$I_{\text{ФОС}} = \alpha^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{h} + \sigma_n^2 (2r_s - 1) \mathbf{h}^T \mathbf{I} \mathbf{h} - 2\alpha \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{s} + 1 = \mathbf{h}^T \mathbf{Q} \mathbf{h} - 2\alpha \mathbf{h}^T \mathbf{J} \mathbf{s} + 1, \quad (11)$$

где $\mathbf{Q} = \alpha^2 \mathbf{Q}_0 + \sigma_n^2 (2r_s - 1) \mathbf{I}$.

Найдем импульсную характеристику \mathbf{h} фильтра, доставляющую минимум функционала (11). Для этого отыщем его частную производную по \mathbf{h} и приравняем ее к нулевому вектору. В результате получим:

$$\frac{\partial I_{\text{ФОС}}}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{Q}\mathbf{h} - 2\alpha\mathbf{J}\mathbf{s} = \emptyset; \quad (12)$$

$$\mathbf{h} = \alpha\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{s}. \quad (13)$$

Подставляя в данное выражение значение матрицы \mathbf{Q} , получим выражение для иско- мой импульсной характеристики с точностью до постоянного множителя α :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \alpha \left(\alpha^2 \mathbf{Q}_0 + \sigma_n^2 (2r_s - 1) \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J}\mathbf{s} = \frac{\alpha}{\sigma_n^2} \left(\frac{\alpha^2}{\sigma_n^2} \mathbf{Q}_0 + (2r_s - 1) \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J}\mathbf{s} = \\ &= \frac{\alpha}{\sigma_n^2} q^2 \mathbf{Q}_0 + (2r_s - 1) \mathbf{I}^{-1} \mathbf{J}\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь новая переменная $q^2 = \frac{\alpha^2}{\sigma_n^2}$ имеет физический смысл величины, пропорциональ- ной квадрату отношения сигнал/шум на входе устройства цифровой обработки.

Сравнительный анализ формулы (14) с аналогичными выражениями для согласованного фильтра $\mathbf{h}_{\text{СФ}} = \mathbf{J}\mathbf{s}$ и фильтра максимального сжатия $\mathbf{h}_{\text{ФМС}} = \rho\mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{J}\mathbf{s}$ [1] позволяет говорить о том, что отношение сигнал/шум определяет степень близости ФОС к СФ или ФМС. Действи- тельно, при малых отношениях сигнал/шум первым слагаемым в скобках выражения (14) мож- но пренебречь, и данное выражение становится полностью аналогичным импульсной характе- ристике СФ. С другой стороны, при больших отношениях сигнал/шум, пренебрегая вторым слагаемым формулы (14), получаем выражение, аналогичное импульсной характеристике ФМС. Фильтр оптимального сжатия с импульсной характеристикой вида (14) является устрой- ством цифровой обработки, обеспечивающим максимальное временное сжатие при произволь- ном входном отношении сигнал/шум.

Из выражения (14) следует, что форма импульсной характеристики фильтра оптималь- ного сжатия зависит от отношения сигнал/шум на входе. Таким образом, техническая реализа- ция данного устройства потребует оценки этого параметра с последующим учетом его в алго- ритме фильтрации. Сложность работы такого устройства определяется в основном сложностью расчета импульсной характеристики оптимального фильтра, которая требует выполнения про- цедуры нахождения обратной матрицы достаточно большой размерности. При изменении от- ношения сигнал/шум, например, вызванном приближением цели, выполнение операции его оценки и соответствующей коррекции импульсной характеристики фильтра должно регулярно повторяться.

Численный эксперимент

Рассмотрим результаты численных расчетов в среде Matlab нормированных огибающих сигнальных составляющих откликов фильтра оптимального сжатия на прямоугольный ра- диоимпульс (рис. 2,а), радиоимпульс с линейной частотной модуляцией (для величины базы ЛЧМ $b=8$) и прямоугольной огибающей (рис. 2,б), радиоимпульс с гауссовой огибающей (рис. 2,в), радиоимпульс с линейной частотной модуляцией ($b=8$) и гауссовой огибающей (рис. 2, г). На этих же рисунках для сравнения приведены нормированные огибающие сигналь- ных составляющих входных воздействий (помечены точками) и откликов в случае обработки сигналов в СФ (пунктир) и ФМС (помечены крестиками). Данные результаты получены для входного отношения сигнал/шум, равного 30 дБ и размерности входного сигнала $r_s = 161$.

Как видно из представленных графиков, по параметру, характеризующему длитель- ность отклика, ФОС занимает промежуточное положение по отношению к СФ и ФМС.

Известно [1], что максимальное временное сжатие сигнала в ФМС достигается за счет существенного ухудшения отношения сигнал/шум на выходе фильтра. В ряде случаев это отношение существенно уменьшается даже по сравнению с входным отношением сигнал/шум. Данное свойство ФМС убедительно иллюстрируется полным откликом фильтра, представляющим собой сумму сигнальной и шумовой составляющих (на рис. 3 график, помеченный крестиками). Реализации, представленные на рисунке, получены при входном воздействии радиоимпульса с гауссовой огибающей для отношения сигнал/шум на входе СФ, ФМС и ФОС, равного 30 дБ.

Анализ результатов показывает, что оптимальная обработка сигнала в ФОС имеет существенные преимущества в выходном отношении сигнал/шум по сравнению с алгоритмом максимального сжатия. Как видно из рис. 4, для радиоимпульса с гауссовой огибающей в центральной точке отклика потери в отношении сигнал/шум в ФОС по сравнению с СФ составили ≈ 6 дБ, в то время как в ФМС они более 40 дБ.

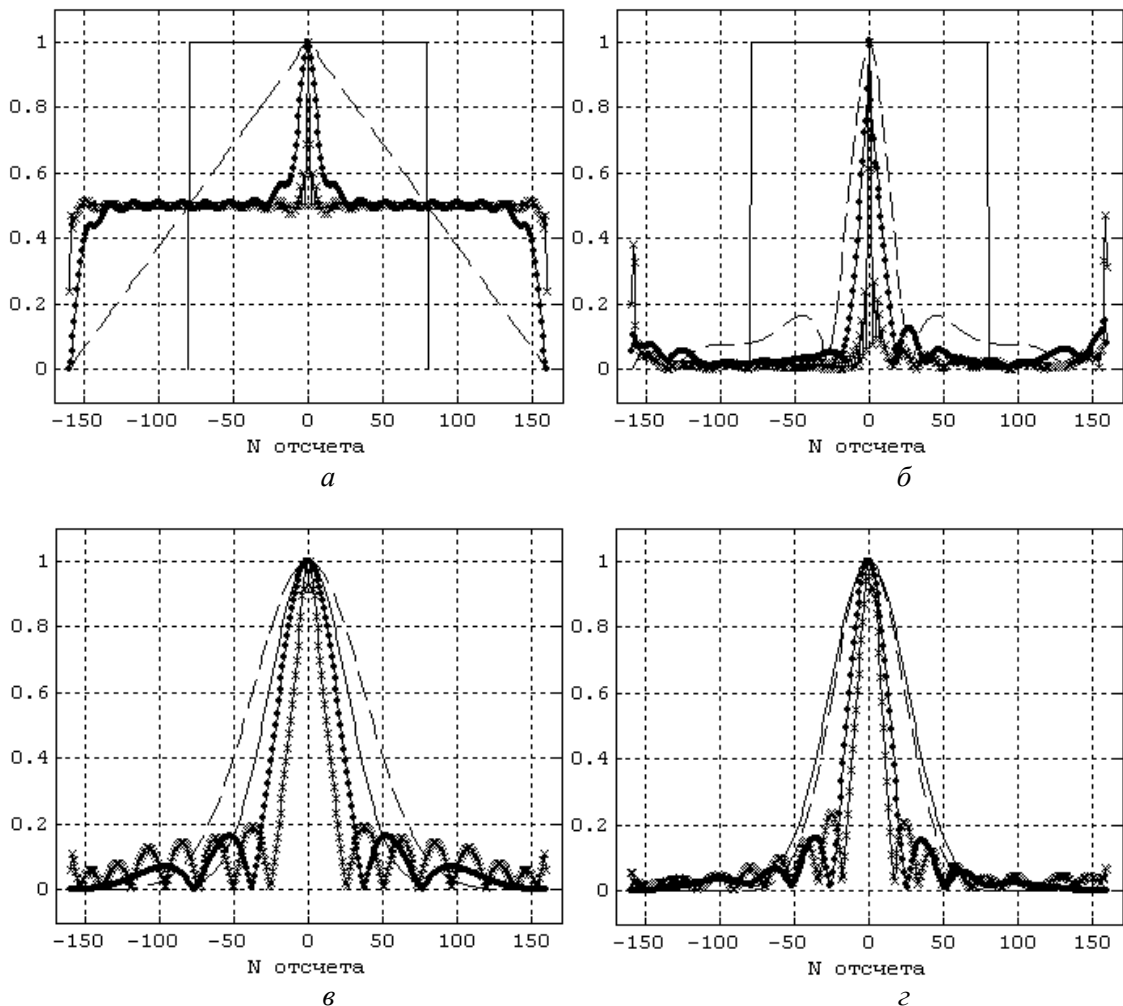


Рис. 2. Нормированные огибающие сигнальных составляющих откликов ФОС (помечены точками), СФ (пунктир) и ФМС (помечены крестиками) при следующих входных воздействиях (сплошные линии): *а* — прямоугольный радиоимпульс; *б* — прямоугольный радиоимпульс с ЛЧМ ($b=8$); *в* — радиоимпульс с гауссовой огибающей; *г* — радиоимпульс с гауссовой огибающей и ЛЧМ ($b=8$)

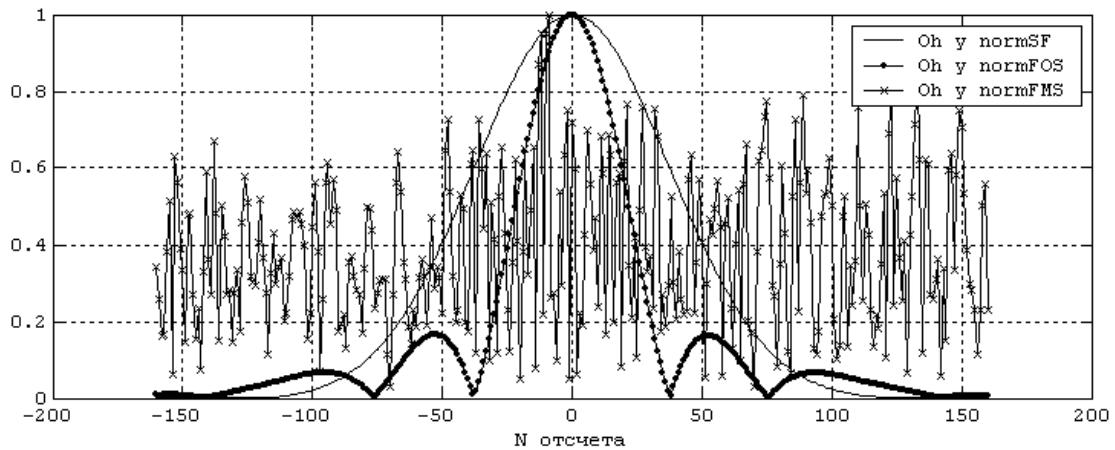


Рис. 3. Нормированные реализации откликов СФ (сплошная линия), ФОС (помечена точками) и ФМС (помечена крестиками) при входном воздействии радиоимпульса с гауссовой огибающей

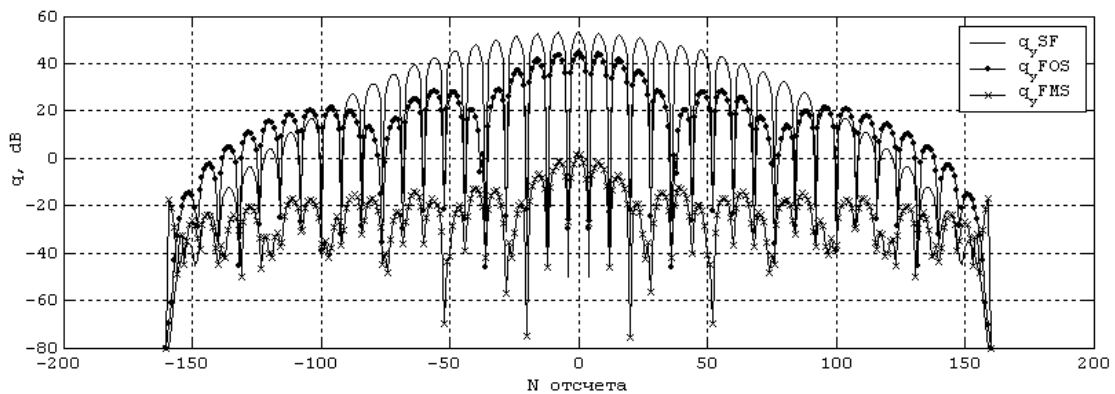


Рис. 4. Мгновенное отношение сигнал/шум на выходе СФ (сплошная линия), ФОС (помечена точками) и ФМС (помечена крестиками) при входном воздействии радиоимпульса с гауссовой огибающей

В таблице представлены оценки показателей:

– временного сжатия, характеризующих отношение длительностей входного сигнала и отклика по уровню -3 дБ;

– помехоустойчивости, характеризующих среднее отношение сигнал/шум в центральной точке (в максимуме) отклика фильтра при входном отношении сигнал/шум, равном 30 дБ.

Данные показатели позволяют обобщить сравнительные результаты цифровой обработки рассматриваемых типов сигналов в СФ, ФОС и ФМС.

Обобщенные показатели степени сжатия и помехоустойчивости для различных типов сигналов и их цифровой обработки

Вид радиосигнала	Тип огибающей	Оценка показателя временного сжатия			Оценка показателя помехоустойчивости, дБ		
		для СФ	для ФОС	для ФМС	для СФ	для ФОС	для ФМС
1. Радиоимпульс без ЛЧМ	Прямоуг.	1,7	10,5	158	52,1	45,5	25,2
	Гауссова	0,7	1,3	2,8	52,3	44,1	0,9
2. Радиоимпульс с ЛЧМ, $b=4$	Прямоуг.	3,7	52,7	158	52,9	41,3	33,4
	Гауссова	0,8	1,4	2,5	52,1	45,1	9,1
3. Радиоимпульс с ЛЧМ, $b=6$	Прямоуг.	5,9	31,6	158	52,9	43,5	34,1
	Гауссова	0,9	1,7	3,0	52,3	45,2	9,9
4. Радиоимпульс с ЛЧМ, $b=8$	Прямоуг.	7,6	26,3	158	52,6	43,9	33,4
	Гауссова	1,1	2,0	3,0	52,7	45,5	13,1

Заключение

Результаты проведенных исследований позволяют говорить о существенном улучшении способностей ФОС по сжатию радиоимпульсов по сравнению с согласованной фильтрацией без значительного ухудшения отношения сигнал/шум. Это обеспечивает хорошую перспективу использования ФОС в каналах обработки сигнала радиоприемных устройств различного назначения.

Отметим, что оптимальное сжатие сигналов в цифровых устройствах обеспечивается без какой-либо аппаратной доработки каналов приема, т.е. исключительно за счет совершенствования алгоритмов цифровой фильтрации. При этом существенно улучшается разрешающая способность по дальности, что может в определенных ситуациях являться решающим фактором увеличения эффективности боевого применения радиотехнической системы в целом.

OPTIMAL TIME COMPRESSION OF SIGNALS IN CONDITIONS OF NOISE JAMMING

O.G. LAPUKA

Abstract

The technique and results of algorithm synthesis of a digital filtration, which is optimum by criterion of a minimum of filter response duration (the maximal time compression of a signal), at additive gauss casual entrance influence are presented. The comparison of results of digital processing of various signals on optimum time compression algorithms, the maximal time compression and the coordinated filtration is accomplished.

Литература

1. *Лапука О.Г.* // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2007. № 2. С. 97–103
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
3. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов: Учеб. для вузов. СПб., 2006.