УДК 517.925.7

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННОЙ С ТРЕТЬИМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

В.В. ЦЕГЕЛЬНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 25 февраля 2008

Исследованы аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейностью производной неизвестных функций.

Ключевые слова: третье уравнение Пенлеве, преобразование Беклунда.

Третье уравнение Пенлеве [1]

$$zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + \gamma z w^4 + \delta z \qquad (P_3)$$

с ненулевыми параметрами γ и δ масштабным преобразованием неизвестной функции w и независимой переменной z можно привести к виду

$$zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + zw^4 - z. \qquad (1)$$

Относительно решений уравнения (1) справедлива [2]

Теорема 1. *Пусть* $w = w(z, \alpha, \beta)$ *— решение уравнения* (1) *при фиксированных значениях параметров* α, β *такое, что* $R(R-2) \not\equiv 0$.

Тогда функция

$$w_1(z) = 2zR(R-2)[2z\frac{dR}{dz} + (\varepsilon_3 A - \varepsilon_2 B)R - 2\varepsilon_3 A]^{-1}, \qquad (2)$$

$$R = w' - \varepsilon_1 w^2 - \frac{1}{z}(\alpha\varepsilon_1 - 1)w + 1,\ A = \beta - 2\varepsilon_1 + 2,\ B = \beta + 2\varepsilon_1 - 2$$

определяет решение уравнения (1) *при*

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2 B - \varepsilon_1\varepsilon_3 A + 4\varepsilon_1),\ \beta_1 = \frac{\varepsilon_2}{2}B + \frac{\varepsilon_3}{2}A,\ \varepsilon_j^2 = 1,\ j = \overline{1,3}.$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий теоремы 1 каждое решение уравнения (1) порождает 6 новых решений, два из которых, в частности, имеют вид [3]

$$w_{-\alpha-4\varepsilon,-\beta} = \frac{M(z)(-2z + M(z))\,w}{M(z)(-2z + M(z)) + 2z(2 + \beta + \alpha\varepsilon)w - (4 + 2\alpha\varepsilon)M(z)w}, \qquad (3)$$

где $M(z) = zw' + \varepsilon z w^2 + (\alpha\varepsilon + 1)\,w + z, \quad \varepsilon^2 = 1.$

Поскольку уравнение (1) инвариантно относительно преобразования

$S: w(z,\alpha,\beta) \to -w(z,-\alpha,-\beta)$,

то формула (3) записывается в виде

$$y + \frac{M(z)(-2z + M(z))\, w}{M(z)(-2z + M(z)) + 2z(2 + \beta + \alpha\varepsilon)\, w - (4 + 2\alpha\varepsilon) M(z)\, w} = 0, \tag{4}$$

где $w_{\alpha+4\varepsilon,\beta} = y$. Принимая во внимание тот факт, что $w = w_{\alpha,\beta}$, и выполняя в (4) последовательно преобразование $\varepsilon \to -\varepsilon,\ \alpha \to \alpha + 4\varepsilon$, придем к уравнению

$$w + \frac{N(z)(-2z + N(z))\, y}{N(z)(-2z + N(z)) + 2z(-2 + \beta - \alpha\varepsilon)\, y + (4 + 2\alpha\varepsilon)\, N(z)\, y} = 0, \tag{5}$$

где $N(z) = z y' - \varepsilon z y^2 - (\alpha\varepsilon + 3)\, y + z$.

Целью настоящей работы является исследование аналитических свойств решений системы уравнений (4), (5). Ниже мы будем предлагать, что

$M(z)(-2z + M(z)) \not\equiv 0$ и $N(z)(-2z + N(z)) \not\equiv 0$.

1. Исключая из системы (4), (5) неизвестную функцию y, приходим к заключению, что функция w удовлетворяет совокупности дифференциальных уравнений (1) или

$$\begin{gathered} z^4 w^8 + 2\alpha z^3 w^7 + 2z^2(\alpha(\alpha+\varepsilon)+1)\, w^6 + 2z(\beta z^2 + 6\varepsilon + \alpha(\alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 10))\, w^5 + \\ +(-2z^4 - 4\beta\varepsilon z^2 + \alpha^4 + 22\alpha^2 + 8\alpha(\alpha^2+3)\,\varepsilon + 9)\, w^4 - 2z(\alpha z^2 + \beta(\alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 4))\, w^3 + \\ +2z^2(\beta^2 + \alpha\varepsilon + 1)\, w^2 - 2\beta z^3 w + z^4 + z(z^3 w'^4 + 2wz^2(2wz + \alpha)\,\varepsilon w'^3 + 2z(3z^2 w^4 + \\ +(\alpha - 4\varepsilon) z w^3 - (2\alpha\varepsilon + 1)\, w^2 + \beta z w - z^2)\, w'^2 + 2w(2\varepsilon z^3 w^5 + (\alpha\varepsilon - 4)\, z^2 w^4 - \\ -(7\alpha z + z(\alpha^2 + 4)\,\varepsilon)\, w^3 + (4\beta\varepsilon z^2 + \alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 4)\, w^2 - z(2\varepsilon z^2 + \beta - \alpha\beta\varepsilon)\, w - \\ -z^2(\alpha\varepsilon + 2)\, w'' w - \alpha\varepsilon z^2)\, w' - 2zw^2(z(\alpha + 2\varepsilon)\, w^2 + (\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + 2)\, w - \beta z)\, w'' = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

или

$$(\alpha\varepsilon + 2)\{[zw' + \varepsilon z w^2 + (\alpha\varepsilon + 1)\, w]^2 + z^2\} - 2\beta z[zw' + \varepsilon z w^2 + (\alpha\varepsilon + 1)\, w] = 0. \tag{7}$$

2. Если из системы (4), (5) исключить неизвестную функцию w, то приходим к заключению, что функция y удовлетворяет совокупности дифференциальных уравнений

$$zyy'' = zy'^2 - yy' + (\alpha + 4\varepsilon) y^3 + \beta y + z y^4 - z \tag{8}$$

или

$$\begin{gathered} z^4 y^8 + 2(\alpha + 4\varepsilon)\, z^3 y^7 + 2z^2(\alpha^2 + 7\varepsilon\alpha + 13) y^6 + 2z(\beta z^2 + 18\varepsilon + \alpha(\alpha^2 + 7\alpha\varepsilon + 18))\, y^5 + \\ +(-2z^4 + 4\beta\varepsilon z^2 + \alpha^4 + 22\alpha^2 + 8\alpha(\alpha^2 + 3)\,\varepsilon + 9)\, y^4 - 2z((\alpha + 4\varepsilon) z^2 + \alpha\beta(\alpha + 3\varepsilon))\, y^3 + \\ +2z^2(\beta^2 - \alpha\varepsilon - 3)\, y^2 - 2\beta z^3 y + z^4 + z(z^3 y'^4 - 2yz^2(2\varepsilon yz + \alpha\varepsilon + 4)\, y'^3 + 2z(3z^2 y^4 + \\ +z(\alpha + 8\varepsilon) y^3 + (2\alpha\varepsilon + 7)\, y^2 + \beta z y - z^2)\, y'^2 + 2y(-2y(y^4 - 1)\,\varepsilon z^3 - \\ -(-\alpha\varepsilon + 8) y^4 - 4\varepsilon\beta y^2 + \alpha\varepsilon + 4)\, z^2 + y(\alpha\varepsilon + 2) y'' z^2 + y(y^2(\alpha + (\alpha^2 - 8)\,\varepsilon - \\ -\beta(\alpha\varepsilon + 5))\, z + y^2\alpha(\alpha + 3\varepsilon)) y' - 2y^2 z(z(\alpha + 2\varepsilon)\, y^2 + (\alpha^2 + 5\alpha\varepsilon + 6) y - \beta z) y'') = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

или

$$(\alpha\varepsilon+2)\{[zy'-\varepsilon zy^2-(\alpha\varepsilon+3)y]^2+z^2\}+2\beta z[zy'-\varepsilon zy^2+(\alpha\varepsilon+3)y]=0\,. \qquad (10)$$

Уравнение (8) получается из (1) преобразованием $w=y,\ \alpha\to\alpha+4\varepsilon$.

3. Пусть функции w, y не являются решениями ни одного из уравнений (6) или (7) и (9) или (10) соответственно. Тогда справедливы следующие теоремы

Теорема 2. *Пусть* $w=w(z,\alpha,\beta)$ *— решение уравнения* (1) *при фиксированных значениях параметров* α,β *такое, что* $M(z)(-2z+M(z))\not\equiv 0,\ \varepsilon^2=1$. *Тогда функция* y, *определяемая соотношением* (4), *является решением уравнения* (8).

Теорема 3. *Пусть* $y=y(z,\alpha,\beta,\varepsilon)$ *— решение уравнения* (8) *при фиксированных значениях параметров* $\alpha,\beta,\varepsilon^2=1$ *такое, что* $N(z)(-2z+N(z))\not\equiv 0$. *Тогда функция* w, *определяемая соотношением* (5), *является решением уравнения* (1).

Таким образом, при выполнении условий теорем 2 и 3 соотношения (4) при фиксированных значениях $\alpha,\beta,\varepsilon^2=1$ устанавливают взаимно однозначное соответствие (определяют прямое и обратное преобразование Беклунда) между решениями w, y уравнения (P_3) с набором параметров $(\alpha,\beta,1,-1),\ (\alpha+4\varepsilon,\beta,1,-1)$ соответственно.

Если функции w, y не являются решениями ни одного из уравнений (1) или (2) и (8) или (9) соответственно, то соотношения (4) при фиксированных значениях $\alpha,\beta,\varepsilon^2=1$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (7) и (10). При этом (поскольку (7) и (10) – дифференциальные уравнения первого порядка) соотношениям (4), (5) можно придать алгебраическую форму. Нетрудно также убедиться в том, что уравнение (10) получается из (7) преобразованием $w=y,\varepsilon\to-\varepsilon,\alpha\to\alpha+4\varepsilon$. Поскольку левая часть уравнения (7) при $\sigma\beta=\alpha\varepsilon+2\neq 0, \sigma^2=1$ есть точный квадрат, то оно равносильно уравнению

$$zw'+\varepsilon zw^2+(\alpha\varepsilon+1)w-\sigma z=0\,. \qquad (11)$$

Известно, что все решения уравнения (11) являются [1] одновременно решениями уравнения (1) при $\sigma\beta-\alpha\varepsilon-2=0$.

Пусть функции w, y не являются решениями ни одного из уравнений (1) или (7) и (8) или (10) соответственно. Тогда соотношения (4), (5) при фиксированных $\alpha,\beta,\varepsilon^2=1$ определяют взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (6) и (9). Можно убедиться в том, что уравнение (9) получается из (6) преобразованием $w=y,\varepsilon\to-\varepsilon,\alpha\to\alpha+4\varepsilon$.

Замечание. Решение w уравнения (1) с помощью (4) может перейти в решение уравнения (10) в том случае, если оно одновременно является решением уравнения (7).

Таким образом, в работе доказано, что соотношения (4), (5) действительно определяют прямое и обратное преобразования Беклунда уравнения (1). Кроме того, также доказано, что указанные соотношения определяют, с одной стороны, взаимно однозначное соответствие между решениями двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, а с другой стороны, устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка класса Фукса.

ABOUT SOLUTIONS OF SYSTEM DIFFERENTIAL EQUATIONS CONNECTED WITH THIRD PAINLEVE' EQUATION

V.V. TSEGEL'NIK

Abstract

It is constructed a system of two differential equations of the first order that, from the first side, determine the direct and inverse Bäcklund transformation for the third Painleve' equation and from the other side, establish (under certain condition) a one-to-one correspondence between the solutions of two nonlinear differential equations of the second order.

Литература

1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
2. Громак В.И. // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 373–376.
3. Громак В.И., Цегельник В.В. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1118–1124.