УДК 621.372.8+519.6

# СОГЛАСОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДИАФРАГМЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ НА МОДЕ $H_{01}$ С ПОМОЩЬЮ КАНАВКИ-РЕФЛЕКТОРА

А.А. КУРАЕВ, О.И. НАРАНОВИЧ, А.К. СИНИЦЫН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
*П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 8 апреля 2008*

Предложен метод расчета нерегулярных волноводов с частичным диэлектрическим заполнением. Разработана эффективная процедура решения, совмещающая метод преобразования координат, последующее сведение задачи к системе ОДУ на основе метода прямых, парциальные условия излучения на входном и выходном сечениях и метод блочной матричной прогонки для случая продольно-нерегулярного волновода с диэлектрическими вставками. Приведены результаты решения задачи о подборе рефлектора, компенсирующего отражение $H_{01}$-волны круглого волновода от диэлектрического окна.

*Ключевые слова:* уравнения Максвелла, метод сеток, волновод, рефлектор.

## Введение

Диэлектрические вставки специальной формы используются во многих элементах волноводной СВЧ-техники — замедляющие системы, диэлектрические окна. Ввиду этого актуальным является разработка эффективных методов расчета нерегулярных волноводов с частичным диэлектрическим заполнением. В [1] такие задачи решаются на основе метода преобразования координат и неполного метода Галеркина, который, однако, для нерегулярного волновода во многих случаях оказывается неустойчивым. Решение этих задач прямым методом сеток требует значительных вычислительных затрат [2].

В [3, 4] для решения краевых задач в случае продольно нерегулярных волноводов с вакуумным заполнением предложена эффективная процедура решения, удачно совмещающая метод преобразования координат, последующее сведение задачи к системе ОДУ на основе метода прямых, парциальные условия излучения на входном и выходном сечениях [2] и метод блочной матричной прогонки [5, 6]. В настоящей статье описанная в [3, 4] методика развита для случая продольно-нерегулярного волновода с диэлектрическими вставками. В качестве иллюстрации возможностей метода решена задача о подборе рефлектора круглого волновода в виде резонансной канавки, компенсирующей отражение симметричной $H$-волны от тонкого диэлектрического окна.

## Уравнения Максвелла в преобразованной системе координат

Возбуждение волн в рассматриваемом нерегулярном отрезке волновода на рабочей частоте $\omega$ описывается однородными уравнениями Максвелла и соответствующими граничными условиями на внутренней идеально проводящей поверхности волновода. Для решения задачи воспользуемся известной методикой отображения внутренней области нерегулярного волновода, заданного профиля $b(z)$ на цилиндр единичного радиуса [3]. Введем следующее преобразование координат

$$r = \rho b(\zeta); \quad \varphi = \psi; \quad z = \zeta . \tag{1}$$

Безразмерные уравнения Максвелла и граничное условие на стенке волновода для векторов поля в преобразованной системе запишем в виде [3]

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{B}}^p = jW\,\hat{g}\cdot\dot{\varepsilon}(\rho,r)\dot{\vec{E}}^p; \quad \hat{g}^{-1}\cdot\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}^p = -jW\,\dot{\vec{B}}^p; \quad [\vec{r}_0,\vec{E}^p]\Big|_{\rho=1} = 0, \tag{2}$$

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} 1+\rho^2 b' & 0 & -\rho b b' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\rho b b' & 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь $b'=\partial b/\partial z$, все геометрические параметры выражены в единицах $\lambda_0/2\pi$, $\lambda_0=2\pi c/\omega_0$ — опорная длина волны; $W=\omega/\omega_0$.

В случае симметричных $H$-волн задача (2) приводится к скалярному уравнению

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon(\rho,z)W^2}{\rho}u - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b'}{b}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{b'}{b}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1+(b'\rho)^2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0 . \tag{3}$$

Граничное условие на стенке волновода, $u(1, z)=0$ на оси $u(0, z)=0$.

Компоненты симметричной $H$-волны выражаются через $u$ следующим образом:

$$\dot{\vec{B}}^p = \frac{j}{W}\left\{\left(-\frac{\partial u}{\rho\partial z} + \frac{b'}{b}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\vec{\rho}_0 + \left(-\frac{b'}{b}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1+\rho^2 b'^2}{b^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\vec{z}_0\right\}; \; \vec{E}^p = u(\rho,z)/\rho\vec{\psi}_0 . \tag{4}$$

Связь компонент в исходной ($r$, $\varphi$, $z$) и преобразованной ($\rho$, $\psi$, $\zeta$) системах:

$$B_r = B_\rho / b(z); \quad E_\varphi = E_\Psi / b(z); \quad B_z = B_\zeta - B_\rho \cdot b'(z)/b(z) .$$

## Парциальные условия излучения на концах отрезка нерегулярного волновода

В соответствии с методикой [1, 2, 4] представим искомое волновое поле в виде разложения по собственным $H_{0i}$-волнам регулярного волновода единичного радиуса

$$E_\psi(\rho,z) = \sum_i A_i(z)J_1(\mu_{0i}\rho); \; A_i(z) = \frac{1}{h_{0i}}\int_0^1 u(z,\rho)J_1(\mu_{0i}\rho)d\rho; \; h_{0i} = \int_0^1 J_1^2(\mu_{0i}\rho)\rho d\rho . \tag{5}$$

На регулярных участках волновода

$$A_i(z) = \begin{cases} a_i^+ e^{-jk_i z} + a_i^- e^{+jk_i z}; W > \mu_{0i}/b, i = 1,2,...p; \\ a_i^+ e^{-k_i z} + a_i^- e^{+k_i z}; W < \mu_{0i}/b, i > p; \end{cases}, \; k_i = \sqrt{\left|W^2 - \left(\mu_{0i}/b\right)^2\right|} .$$

Здесь $p$ — максимальное количество распространяющихся волн.

Тогда условия на границах сопряжения рассматриваемого нерегулярного отрезка волновода с регулярными участками запишутся в виде.

*Условие полного согласования* при $z=L$. При $z>L$ отсутствуют обратные волны $a_i^- = 0$ .

$$\frac{\partial u(\rho,L)}{\partial z}=-\sum_{i\le p}\frac{jk_i}{h_{0i}}\rho J_1(\mu_{0i}\rho)\int_0^1 u(\overline{\rho},L)J_1(\mu_{0i}\overline{\rho})d\overline{\rho}-\sum_{i>p}\frac{k_i}{h_{0i}}\rho J_1(\mu_{0i}\rho)\int_0^1 u(\overline{\rho},L)J_1(\mu_{0i}\overline{\rho})d\overline{\rho}\,. \quad (6)$$

*Условие набегания слева $H_{0r}$*-волн при $z$ =0. При $z$ <0 $a_r^+\ne 0,\quad a_{i(i\ne r)}^+=0$.

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(\rho,0)}{\partial z}=\sum_{i\le p}\frac{jk_i}{h_{0i}}\rho J_1(\mu_{0i}\rho)\int_0^1 u(\overline{\rho},0)J_1(\mu_{0i}\overline{\rho})d\overline{\rho}+\\+\sum_{i>p}\frac{k_i}{h_{0i}}\rho J_1(\mu_{0i}\rho)\int_0^1 u(\overline{\rho},0)J_1(\mu_{0i}\overline{\rho})d\overline{\rho}-2j\sum_r k_r a_r^+\rho J_1(\mu_{0r}\rho)\end{gathered}\,. \quad (7)$$

Заметим, что условия (6), (7) можно ставить непосредственно на концах нерегулярного отрезка, что позволяет значительно уменьшить расчетную область особенно вблизи границы полосы прозрачности.

*Мощность, переносимая симметричной H-волной* через поперечное сечение:

$$P_s=\mathrm{real}\int_0^b\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{B}}^*\right]_z rdr=\mathrm{imag}\left\{\frac{1}{W}\int_0^1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^*}{\partial z}u-\frac{b'\partial u^*}{b\partial\rho}u\right)d\rho\right\}. \quad (8)$$

*Мощность прямой и обратной распространяющихся парциальных волн* $P_i^{\pm}$ *на регулярных участках* ($b'$=0):

$$P_i^{\pm}=\mathrm{imag}\left\{\frac{1}{W}\int_0^1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_i^{\pm *}}{\partial z}u_i^{\pm}\right)d\rho\right\};\ u_i^{\pm}=\frac{1}{2}\left(u\pm\frac{j}{k_i}\frac{du}{dz}\right). \quad (9)$$

## Метод блочной матричной прогонки

В соответствии с методикой [5] выберем на интервале {0≤ρ≤1} равномерную сетку $\omega_{hr}=\left\{\rho_j=jh_r, h_r=1/m, j=0...m\right\}$ (можно неравномерную) и обозначим

$$\vec{u}=\left\{u(\rho_1,z),...u(\rho_{m-1},z)\right\}=\left\{u_1(z),...u_{m-1}(z)\right\},\ u_0=u_m=0\,.$$

Аппроксимируем уравнение (3) конечно-разностной схемой второго порядка точности. После приведения к векторно-матричной форме, получаем систему ОДУ вида

$$\frac{d}{dz}\left(E(z)\frac{d\vec{u}}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left(Q(z)\vec{u}\right)+Q(z)\frac{d\vec{u}}{dz}+G(z)\vec{u}=0\,. \quad (10)$$

Матрицы *G и Q* имеют следующие ненулевые коэффициенты:

$$g_{1,1}=-\frac{\dot{\varepsilon}(z,\rho_1)W^2}{\rho_1}-\frac{c_{1/2}+c_{1+1/2}}{b^2h_r^2};\ g_{1,2}=-\left(\frac{b'}{b}\right)'\frac{1}{2h_r}+\frac{c_{1+1/2}}{b^2h_r^2};\ c_j=\frac{1+(b'\rho_j)^2}{\rho_j};$$

$$g_{j,j-1}=\left(\frac{b'}{b}\right)'\frac{1}{2h_r}+\frac{c_{j-1/2}}{b^2h_r^2};\ g_{j,j}=\frac{\dot{\varepsilon}(z,\rho_j)W^2}{\rho_j}-\frac{c_{j-1/2}+c_{j+1/2}}{b^2h_r^2};\ g_{j,j+1}=-\left(\frac{b'}{b}\right)'\frac{1}{2h_r}+\frac{c_{j+1/2}}{b^2h_r^2};$$

$$q_{1,2}=-\frac{b'}{b2h_r};\ q_{j,j-1}=\frac{b'}{b2h_r};\ q_{j,j+1}=-\frac{b'}{b2h_r};\ j=2...m-1.$$

Матрица $E$ содержит только ненулевые диагональные элементы, равные $1/\rho_j$, $j$=1…$m$–1.

Для решения краевой задачи для системы (10) введем сетку по $z$ $\omega_{hz} = \left\{ z_k = (k-1)h_z, h_z = L/n, k = 1...n+1 \right\}$, обозначим $\vec{u}^k = \vec{u}(z_k)$ и построим конечно-разностную схему второго порядка точности:

$$\left[E^{k-1/2} - 0,5h_z\left(Q^{k-1} + Q^k\right)\right]\vec{u}^{k-1} + \left[-E^{k-1/2} - E^{k+1/2} + h_z^2 G^k\right]\vec{u}^k + \\ + \left[E^{k+1/2} + 0,5h_z\left(Q^{k+1} + Q^k\right)\right]\vec{u}^{k+1} = 0. \quad (11)$$

Парциальные граничные условия излучения (6), (7) при замене интеграла по методу трапеций приводятся к матричному виду

$$\frac{d\vec{u}^1}{dz} + \beta^0\vec{u}^1 = \vec{\gamma}^0; \frac{d\vec{u}^{n+1}}{dz} + \beta^L\vec{u}^{n+1} = 0; \quad (12)$$

$$\beta_{kl}^0 = -h_r\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{jk_i^0}{h_{0i}}J_1(\mu_{0i}\rho_k)\rho_k J_1(\mu_{0i}\rho_l) + \sum_{i=p+1}^{N_v}\frac{k_i^0}{h_{0i}}J_1(\mu_{0i}\rho_k)\rho_k J_1(\mu_{0i}\rho_l)\right];$$

$$\beta_{kl}^L = h_r\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{jk_i^L}{h_{0i}}J_1(\mu_{0i}\rho_k)\rho_k J_1(\mu_{0i}\rho_l) + \sum_{i=p+1}^{N_v}\frac{k_i^L}{h_{0i}}J_1(\mu_{0i}\rho_k)\rho_k J_1(\mu_{0i}\rho_l)\right];$$

$\gamma_k^0 = -2j\sum_r k_r^0 a_r^+ \rho_k J_1(\mu_{0r}\rho_k)$, $N_v$ — количество учитываемых собственных волн.

Для (12) используем аппроксимацию второго порядка точности [6]:

$$(-3\vec{u}^1 + 4\vec{u}^2 - \vec{u}^3) + 2h_z\beta^0\vec{u}^1 = 2h_z\vec{\gamma}^0; (3\vec{u}^{n+1} - 4\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}) + 2h_z\beta^L\vec{u}^{n+1} = 0. \quad (13)$$

Введем вектор неизвестных $\vec{x} = \{\vec{u}^1, \vec{u}^2, ..., \vec{u}^{n+1}\}$ и запишем систему конечно-разностных уравнений (11) и (13) в виде $A\vec{x} = \vec{d}$. Вследствие приведенной техники построения конечно-разностной схемы сильно разреженная матрица $A$ имеет удобную для последующей обработки блочно-ленточную структуру. Для решения таких систем линейных уравнений с блочно ленточной матрицей была разработана экономичная реализация прямого метода Гаусса с выбором главного элемента — метод блочной матричной прогонки [5]. Идея алгоритма заключается в реализации метода на упакованном массиве из односвязных динамических стеков, в который помещаются только не нулевые элементы. Следует заметить, что данная методика может быть обобщена на случай трехмерных скалярных и векторных систем. Алгоритм метода Гаусса с выбором главного элемента обеспечивает устойчивость конечно-разностной схемы (11), (13) даже если не выполняется условие преобладания диагонального элемента, необходимое для реализации классического метода прогонки и итерационных процедур. Отпадает также во многих случаях необходимость использования методов регуляризации.

Разработана программа, позволяющая рассчитывать электродинамику симметричных Н-волн в нерегулярном волноводе с диэлектрическим заполнением.

**Расчет параметров компенсирующего рефлектора**

Иллюстрацию возможностей программы приведем на примере решения задачи о выборе толщины диэлектрического окна. Диэлектрические окна в вакуумных СВЧ устройствах (например, в черенковском генераторе) используются для изоляции вакуума от воздушной среды. Очень важно сделать это окно таким, чтобы СВЧ волна проходила через него без затухания.

## Постановка задачи

На вход падает симметричная $H$-волна (рис. 1). Она частично отражается от диэлектрической вставки, частично поглощается (если ε — комплексное), частично проходит. Компенсирующий рефлектор выполнен в виде канавки с параметрами $h_k$, $\Delta_k$, $L_k = Z_2 - Z_1$ [3, 4].

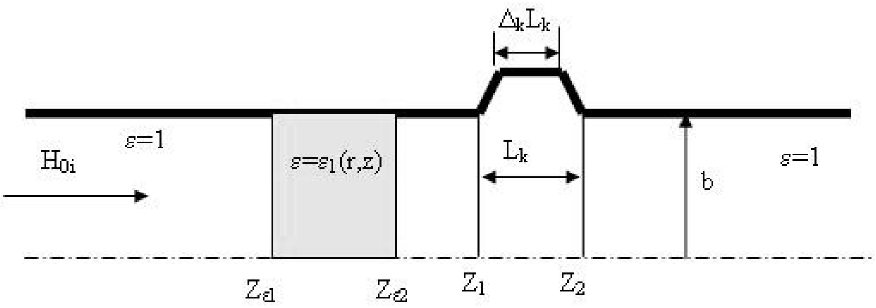


Рис. 1. Геометрия диэлектрического окна с компенсирующим рефлектором

С помощью разработанной программы, реализующей описанную выше модель (2)–(13) рассчитывался коэффициент отражения $K=1-P_s(L)/P_1^+(0)$ ($P_1^+$ и $P_s$ мощности падающей и проходящих волн (8), (9)) диэлектрического окна с рефлектором.

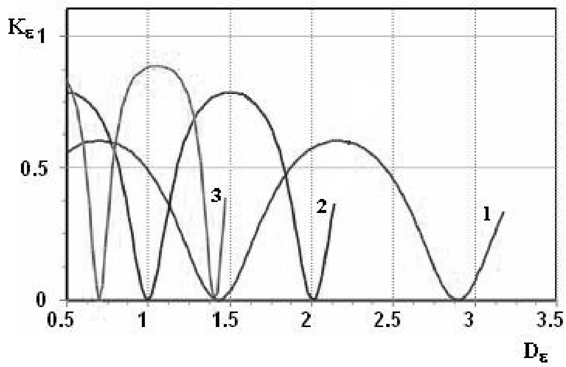


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от толщины диэлектрического окна без рефлектора $b$=5: *1* — ε=5; *2* — ε=10; *3* — ε=20

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента отражения диэлектрического окна без рефлектора $K_\varepsilon$ от толщины диэлектрического окна $D_\varepsilon = Z_{\varepsilon 2} - Z_{\varepsilon 1}$ для различных ε. Видно, что коэффициент отражения при реальных $D_\varepsilon \approx 0{,}5$–1 достигает значительной величины, однако зависимость имеет периодический характер. При определенных значениях $D_\varepsilon$ величина отражения $K_\varepsilon$ становится ничтожно малой. Как показывает анализ, период соответствует половине длины волны в диэлектрике $\Lambda_\varepsilon^{H_{01}} = 2\pi / \sqrt{W^2\varepsilon - (\mu_{0i}/b)^2}$, что полностью согласуется с теорией длинных линий, согласно которой диэлектрическое окно толщиной в половину длины волны представляет резонансный полуволновой трансформатор, и, как следствие, оно обладает свойством полного прохождения волны (без ее отражения).

На рис. 3 представлена рассчитанная зависимость толщины диэлектрика, соответствующая первому минимуму $K_\varepsilon$. Как видно, при небольших значениях ε<3 толщина диэлектрика, соответствующая первому минимуму достигает больших значений, которые неприемлемы при практической реализации.

Реализация тонкого диэлектрического окна в этом случае может быть осуществлена с помощью рефлектора в виде компенсирующей канавки, положение и форма которой представлены на рис. 1. При определенных размерах, положении канавки и толщине диэлектрика возможен резонансный эффект, приводящий к резкому уменьшению коэффициента отражения. Рис. 4. иллюстрирует эту ситуацию. Как видно, между диэлектриком и канавкой устанавливается полволны, т.е. система диэлектрик-канавка эквивалентна полуволновому трансформатору.

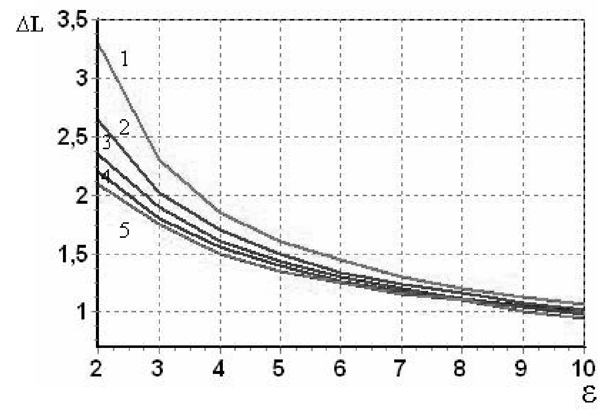


Рис. 3. Зависимость изменения ширины окна от диэлектрической проницаемости для различного радиуса волновода: *1* — *b*=4; *2* — *b*=5; *3* — *b*=6; *4* — *b*=7; *5* — *b*=8

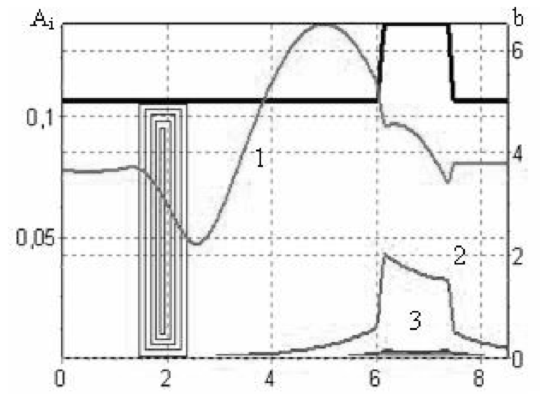


Рис. 4. Положение диэлектрика и канавки при минимальном отражении: *1–3* — амплитуды возбуждаемых волн в разложении (5)

В таблице приведены варианты параметров окон, найденные в процессе минимизации коэффициента отражения с компенсирующим рефлектором $K_{\varepsilon+k}$ для используемых на практике значений их толщин. Здесь $L_{12}=Z_1-Z_{\varepsilon 2}$, крутизна канавки $\Delta_k$=0,8.

Таблица 1. **Варианты расчета оптимизированных параметров**

| $b$ | ε | $D_\varepsilon$ | $K_\varepsilon$ | $K_{\varepsilon+k}$ | $L_{12}$ | $L_k$ | $h_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 0,5 | 0,42 | 0,017 | 9,553 | 2,258 | 1,340 |
| 6 | | | 0,09 | 0,001 | 3,279 | 1,259 | 1,253 |
| 8 | | | 0,07 | 0,007 | 3,648 | 2,974 | 4,199 |
| 10 | | | 0,06 | 0,004 | 3,457 | 2,891 | 5,929 |
| 4 | 3 | 0,5 | 0,72 | 0,01 | 9,723 | 2,062 | 1,475 |
| 6 | | | 0,25 | 0,001 | 3,377 | 1,195 | 1,678 |
| 8 | | | 0,2 | 0,02 | 3,116 | 0,896 | 2,269 |
| 10 | | | 0,18 | 0,07 | 3,102 | 0,803 | 2,381 |
| 4 | 2 | 1 | 0,67 | 0,017 | 9,377 | 2,154 | 1,514 |
| 6 | | | 0,19 | 0,001 | 3,064 | 1,097 | 1,303 |
| 8 | | | 0,15 | 0,005 | 3,326 | 3,067 | 6,087 |
| 10 | | | 0,13 | 0,01 | 3,112 | 2,992 | 6,938 |
| 4 | 3 | 1 | 0,85 | 0,017 | 9,58 | 1,928 | 1,484 |
| 6 | | | 0,39 | 0,001 | 3,096 | 0,917 | 1,486 |
| 8 | | | 0,32 | 0,01 | 3,224 | 3,193 | 9,495 |
| 10 | | | 0,29 | 0,02 | 3,023 | 3,068 | 12,719 |

Анализ приведенных в таблице результатов показывает, что компенсирующий рефлектор позволяет уменьшить отражение в сотни раз, благодаря чему можно выбрать необходимую толщину диэлектрика. При увеличении $b$ до 8–10 сохранение минимального отражения волны достигается при значительном увеличении высоты канавки $h_k$ При больших $b$ расстояние между канавкой и диэлектриком практически не изменяется.

Была исследована зависимость коэффициента отражения диэлектрической вставки с канавкой от частоты при толщине диэлектрического окна равной 0,8. График полосы частот представлен на рис. 5. Полоса частот расширяется с увеличением радиуса волновода $b$.

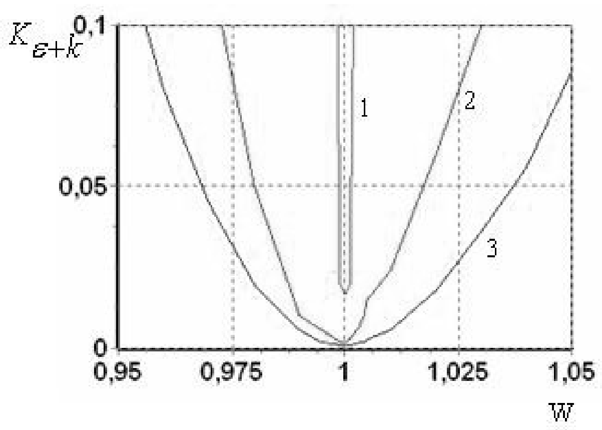


Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения от частоты: *1* — *b*=4; *2* — *b*=5; *3* — *b*=6

**Заключение**

Разработан эффективный метод, позволяющий рассчитывать электродинамику симметричных *H*-волн в нерегулярном волноводе с диэлектрическим заполнением. Получена зависимость от диэлектрической проницаемости изменения толщины диэлектрического окна круглого волновода при которой возможно полное прохождение $H_{01}$-волны вследствие резонансного эффекта для различных значений радиуса волновода. При небольших значениях ε резонансная толщина диэлектрического окна неприемлемо велика.

Найдены параметры рефлектора в виде канавки, расположенной вблизи диэлектрического окна произвольной толщины, при которых реализуется резонансный эффект, приводящий к резкому уменьшению коэффициента отражения рабочей $H_{01}$-волны.

## THE DIELECTRIC DIAPHRAGM MATCHING IN A ROUND WAVEGUIDE ON MODE $H_{01}$ WITH THE HELP OF GROOVE - REFLECTOR

A.A. KURAEV, O.I. NARANOVICH, A.K. SINITSYN

**Abstract**

The effective method of calculation of irregular wave-guides with partial dielectric filling is offered. The effective procedure of the decision successfully combining a method of transformation of coordinates, the subsequent data to system the ODE is developed on the basis of a method of straight lines, partial waves conditions of radiation on entrance and target sections and a method of block matrix run for a case of a longitudinal irregular wave guide with dielectric inserts. Results of the decision of a task about selection of a reflector of a round wave-guide as a resonant flute are resulted.

**Литература**

1. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М., 1983.
2. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Лавренова А.В.* // Радиотехника. 2004. № 12. С. 20–31.
3. *Батура М.П., Кураев А.А, Синицын А.К.* Основы теории, расчета и оптимизации современных электронных приборов СВЧ. Минск, 2007.
4. *Наранович О.И., Синицын А.К.* // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2007. №10. С. 57–63.
5. *Наранович О.И., Синицын А.К.* // Докл. БГУИР. 2007. Т. 5, № 3. С. 18–23.
6. *Синицын А.К.* // Докл. БГУИР. 2007. Т. 5, № 1. С. 57.