

УДК 004.896:621.865

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ КАЛИБРОВКЕ ПЛОСКИХ АНТРОПОМОРФНЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ

А.П. ПАШКЕВИЧ, А.С. КЛИМЧИК

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 11 марта 2008

Предлагается методика построения оптимального плана калибровочного эксперимента для n -звенного плоского антропоморфного манипулятора. Получены аналитические условия оптимальности, приводятся примеры оптимальных планов эксперимента для двух- и трехзвенных манипуляторов. Проведена оценка точности идентификации параметров модели. Приводятся результаты имитационного моделирования, подтверждающие эффективность предложенных планов.

Ключевые слова: антропоморфные манипуляторы, калибровка, планирование эксперимента.

Введение

Управление современными промышленными роботами-манипуляторами осуществляется без обратной связи по положению исполнительного органа, поэтому точность позиционирования зависит от соответствия математической модели реальной. Для устранения отклонений между этими моделями необходима калибровка [1]. С целью повышения точности калибровки используют планирование эксперимента, но применение классической теории планирование эксперимента [2] в данном случае невозможно в связи со спецификой математической модели роботов [3, 4]. Калибровку кинематической модели можно разбить на четыре этапа [5]: моделирование, измерение, идентификация и компенсация. Первые два этапа включают в себя построение математической модели робота и проведение экспериментов. Большинство алгоритмов калибровки основаны на идентификации параметров Денавита–Хартенберга [3], которые не могут быть корректно оценены, если оси соседних звеньев параллельны. Поэтому Nayati [6], Stone [7], и Zhuang [8] используют в своих работах модифицированную модель манипулятора. Точность калибровки повышается при увеличении количества экспериментов. Существенно повысить точность идентификации позволяет планирование эксперимента [9]. На последнем этапе калибровке корректируется математическая модель. Сложность решения обратной задачи кинематики не всегда позволяет скорректировать математическую модель. В этом случае прибегают к численным методам Ньютона–Рафсона [10].

Целью работы является поиск оптимальных планов эксперимента для калибровки манипуляторов антропоморфной архитектуры. В работах [11] при поиске оптимального плана использовались численные методы решения данной задачи. В данной работе построение оптимального плана эксперимента осуществляется аналитически, что позволяет предложить общие правила построения оптимальных планов для манипуляторов схожей структуры. Для двухзвенного манипулятора эта задача частично решена в [12]. В данной работе решается задача оптимизации плана эксперимента для произвольного количества звеньев, при этом производится

подробный анализ и вывод результатов для двух- и трехзвенных роботов-манипуляторов. Выдвигается предположение об оптимальности плана эксперимента для произвольного числа звеньев, которое успешно подтверждается моделированием. Производится оценка полученных планов эксперимента.

Постановка задачи

Рассмотрим плоский последовательный манипулятор, который в общем случае описывается системой уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n (l_i^0 + \Delta l_i) \cos\left(\sum_{j=1}^i q_j^0 + \sum_{j=1}^i \Delta q_j\right), \\ y &= \sum_{i=1}^n (l_i^0 + \Delta l_i) \sin\left(\sum_{j=1}^i q_j^0 + \sum_{j=1}^i \Delta q_j\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где n — количество звеньев; (x, y) — декартовы координаты рабочего органа манипулятора; l_i^0 — номинальные длины звеньев; Δl_i — отклонения длин от номинальных значений; q_j^0 — углы поворота звеньев (показания датчиков); Δq_j^0 — смещения нуля датчиков угловых координат.

Рассматриваемая модель (1) содержит $2n$ параметров $\{\Delta l_i, \Delta q_i, i = \overline{1, n}\}$, которые отражают отклонение номинальной математической модели от реальной. Эти параметры определяются в процессе калибровки. Предполагается, что калибровка осуществляется на основании измерений декартовых координат (x_i, y_i) положений рабочего органа манипулятора, соответствующих m конфигурациям, описываемых наборами обобщенных координат $Q_i = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni}), i = \overline{1, m}$. При этом декартовы координаты (x_i, y_i) измеряются с некоторой погрешностью.

Как показано в ряде работ [9], чувствительность алгоритма калибровки к погрешностям измерений не одинакова для различных конфигураций. Поэтому задача заключается в оптимальном выборе значений $\{q_{ij}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}\}$, при которых погрешности измерений наименьшим образом влияют на точность идентификации параметров модели.

Алгоритм калибровки

Исходными данными для калибровки являются набор векторов обобщенных координат $Q_i = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni}), i = \overline{1, m}$, и положений рабочего органа $P_i = [x_i \ y_i]^T, i = \overline{1, m}$, соответствующих m конфигурациям робота. По этим данным находят искомые параметры $\Delta P = \{\Delta l_i, \Delta q_i, i = \overline{1, n}\}$, которые обеспечивают наилучшую аппроксимацию отображения

$$Q_i \xrightarrow{\Delta P} P_i, i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

описывающего кинематическую модель манипулятора. Для количественной оценки точности аппроксимации используем сумму квадратов невязок, тогда рассматриваемая задача может быть сведена к задаче оптимизации вида

$$F = \sum_{i=1}^m ((f_x(Q_i) - x_i)^2 + (f_y(Q_i) - y_i)^2) \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $f_x(Q_i), f_y(Q_i)$ определяются правыми частями уравнения (1).

Полученная оптимизационная задача может быть решена при использовании известного условия стационарности точки экстремума $\partial F / \partial \Pi_i = 0, i = \overline{1, 2n}$. Для поставленной задачи оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Delta q_k} = & \sum_{i=1}^m \left(- \sum_{l=1}^n ((l_l^0 + \Delta l_l) \sin(\sum_{j=1}^l q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^l \Delta q_j)) (\sum_{l=1}^n (l_l^0 + \Delta l_l) \cos(\sum_{j=1}^l q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^l \Delta q_j) - x_i) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^n ((l_l^0 + \Delta l_l) \cos(\sum_{j=1}^l q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^l \Delta q_j)) (\sum_{l=1}^n (l_l^0 + \Delta l_l) \sin(\sum_{j=1}^l q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^l \Delta q_j) - y_i) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Delta l_k} = & \sum_{i=1}^m \left(\cos(\sum_{j=1}^k q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^k \Delta q_j) (\sum_{l=1}^n (l_l^0 + \Delta l_l) \cos(\sum_{j=1}^l q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^l \Delta q_j) - x_i) + \right. \\ & \left. + \sin(\sum_{j=1}^k q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^k \Delta q_j) (\sum_{l=1}^n (l_l^0 + \Delta l_l) \sin(\sum_{j=1}^l q_{ji}^0 + \sum_{j=1}^l \Delta q_j) - y_i) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где индекс k изменяется от 1 до n . Найти решение этой задачи аналитически невозможно. Поэтому целесообразно применить линеаризацию модели (1):

$$P_i = P_{0i} + J_i \Delta \Pi, \quad (6)$$

где P_{0i} — вектор положения рабочего органа при номинальных значениях параметров

$$P_{0i} = \left[\sum_{k=1}^n (l_k^0) \cos(\sum_{j=1}^i q_{ji}^0) \quad \sum_{k=1}^n (l_k^0) \sin(\sum_{j=1}^i q_{ji}^0) \right]^T, \quad i = \overline{1, m}; \quad J_i - \text{якобиан.}$$

Матрицу якобиана для n -звенного манипулятора можно получить, дифференцируя (1) по всем параметрам:

$$J_{1ji} = -l_j \sum_{k=j}^m \sin \theta_{ji}, \quad J_{2ji} = l_j \sum_{k=j}^m \cos \theta_{ji}, \quad j = \overline{1, n}, \quad J_{1ji} = \cos \theta_{ji}, \quad J_{2ji} = \sin \theta_{ji}, \quad j = \overline{n+1, 2n}, \quad (7)$$

где $\theta_{ji} = \sum_{k=1}^j q_{ki}$. С учетом (7) сумму квадратов невязок (3) можно записать

$$F = \sum_{i=1}^m ((J_i \Delta \Pi - \Delta P_i)^T (J_i \Delta \Pi - \Delta P_i)) \rightarrow \min, \quad (8)$$

где $\Delta P_i = P_i - P_{0i}$. Тогда условие оптимальности имеет вид

$$\sum_{i=1}^m (J_i^T J_i) \Delta \Pi = \sum_{i=1}^m (J_i^T \Delta P_i), \quad (9)$$

откуда искомые параметры $\Delta \Pi$, можно определить как

$$\Delta \Pi = (J_a^T J_a)^{-1} J_a^T \Delta P_a, \quad (10)$$

где $J_a = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_m]^T$; $\Delta P_a = [\Delta P_1 \ \Delta P_2 \ \dots \ \Delta P_m]^T$.

Для повышения точности описанная процедура повторяется несколько раз, каждая следующая итерация должна включать результаты предыдущих расчетов. Соответствующий алгоритм приводится ниже.

Шаг 1. Проведение эксперимента, формирование наборов векторов обобщенных координат Q_i и положений манипулятора $P_i(x_i, y_i)$. Изначально принимаем $\Delta \Pi = 0$.

Шаг 2. Определение положений манипулятора по известным векторам обобщенных координат в результате решения прямой задачи кинематики (1).

Шаг 3. Вычисление невязок и искомых параметров ΔP согласно (10).

Шаг 4. Корректировка математической модели и векторов обобщенных координат:

$$l_j = l_j + \Delta l_j, \quad q_{ji} = q_{ji} + \Delta q_{ji}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Шаг 5. Если требуемая точность не достигнута, то переходим к шагу 2.

При использовании приведенного алгоритма следует учитывать, что точные параметры модели можно определить лишь при отсутствии погрешностей в исходных данных $\{Q_i, P_i\}$. Поскольку на практике это не соблюдается, то целесообразно использовать методы оптимального планирования эксперимента, позволяющие уменьшить чувствительность оценки параметров к ошибкам измерений.

Планирование эксперимента

Предположим, что измерения положения производятся с погрешностями Δx и Δy , являющимися некоррелированными случайными величинами с нормальным законом распределения со среднеквадратическим отклонением σ и нулевым математическим ожиданием. Поскольку ошибки измерений сравнительно малы, то погрешности идентификации параметров можно оценить по линеаризованной модели (6). Тогда точность параметров кинематической модели будет определяться по матрице ковариации, которая, исходя из [2], имеет вид

$$\text{cov}(\Delta P) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^m (J_i^T J_i) \right)^{-1}. \quad (11)$$

Следовательно, качество плана эксперимента определяется матричной суммой $\sum_{i=1}^m (J_i^T J_i)$. Для рассматриваемой модели (1) указанную сумму можно представить в виде блочной матрицы

$$\sum (J_i^T J_i) = \begin{bmatrix} L C L & L S \\ (L S)^T & C \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $C = (c_{jk})$; $S = (s_{jk})$; $c_{jk} = \sum_{i=1}^m \cos(\theta_{ji} - \theta_{ki})$; $s_{jk} = \sum_{i=1}^m \sin(\theta_{ji} - \theta_{ki})$; $\theta_{ji} = \sum_{k=1}^j q_{ki}$;
 $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n)$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$.

Для сравнения планов эксперимента воспользуемся D -критерием оптимальности (так как в данном случае применение A -критерия нецелесообразно, поскольку след матрицы не зависит от плана эксперимента). Согласно [13], D -оптимальному плану соответствует наименьший на множестве планов определитель ковариационной матрицы. Но для определения ковариационной матрицы необходимо определить обратную матрицу (12), поэтому условие D -оптимальности принимает вид

$$\det \left(\sum_{i=1}^m (J_i^T (Q_i^*) J_i (Q_i^*)) \right) = \max \det \left(\sum_{i=1}^m (J_i^T (Q_i) J_i (Q_i)) \right), \quad (13)$$

где Q_i^* — вектора обобщенных координат, соответствующие максимуму детерминанту.

Заметим, что матрица (13) имеет блочную структуру, причем каждый из ее элементов представляет собой квадратную матрицу размерности $n \times n$. Это позволяет применить формулы Шура [14], которые сводят вычисление определителя $2n$ -го порядка к вычислению определителя порядка n . Тогда, предположив, что $\det(C) \neq 0$ получаем

$$\det \left(\sum (J_i^T J_i) \right) = \det(L(C - SC^{-1}S^T)LC), \quad (14)$$

что соответствует вычислению четырех определителей порядка n :

$$\det(\sum (J_i^T J_i)) = \det^2(L) \det(C) \det(C - SC^{-1}S^T). \quad (15)$$

Частные решения поставленной задачи представлены в табл. 1

Таблица 1. Частные решения для построения оптимального плана

	Двухзвенный манипулятор	Трехзвенный манипулятор
$\det(\sum (J_i^T J_i))$	$l_1^2 l_2^2 (n^2 - ((\sum_{i=1}^m c_{2i})^2 + (\sum_{i=1}^m s_{2i})^2))^2$	$l_1^2 l_2^2 l_3^2 (n^3 + 2 \sum_{i=1}^m s_{23i} \sum_{i=1}^m c_{3i} \sum_{i=1}^m s_{2i} + 2 \sum_{i=1}^m c_{23i} \sum_{i=1}^m c_{3i} \sum_{i=1}^m c_{2i} + 2 \sum_{i=1}^m s_{23i} \sum_{i=1}^m s_{3i} \sum_{i=1}^m c_{2i} - 2 \sum_{i=1}^m c_{23i} \sum_{i=1}^m s_{3i} \sum_{i=1}^m s_{2i} - n((\sum_{i=1}^m c_{2i})^2 + (\sum_{i=1}^m s_{2i})^2 + (\sum_{i=1}^m c_{3i})^2 + (\sum_{i=1}^m s_{3i})^2 + (\sum_{i=1}^m c_{23i})^2 + (\sum_{i=1}^m s_{23i})^2))^2$
Условие оптимальности плана	$\sum_{i=1}^m c_{2i} = 0, \sum_{i=1}^m s_{2i} = 0$	$\sum_{i=1}^m c_{2i} = 0; \sum_{i=1}^m s_{2i} = 0; \sum_{i=1}^m c_{3i} = 0; \sum_{i=1}^m s_{3i} = 0; \sum_{i=1}^m c_{23i} = 0; \sum_{i=1}^m s_{23i} = 0$
Обозначения	$c_{2i} = \cos q_{2i}; s_{2i} = \sin q_{2i}; i = \overline{1, m}$	$c_{3i} = \cos q_{3i}; s_{3i} = \sin q_{3i}; c_{23i} = \cos(q_{2i} + q_{3i}); s_{3i} = \sin(q_{2i} + q_{3i}); i = \overline{1, m}$

На основании полученных результатов можно предположить, что для произвольного числа звеньев условием оптимальности плана эксперимента являются

$$\sum_{i=1}^m c_{ji} = 0; \sum_{i=1}^m s_{ji} = 0; \sum_{i=1}^m c_{pi} = 0; \sum_{i=1}^m s_{pi} = 0, \quad (16)$$

где $j = \overline{1, n}$, $c_{pi} = \cos(\sum_{k=1}^t q_{ki} - \sum_{h=1}^r q_{hi})$, $s_{pi} = \sin(\sum_{k=1}^t q_{ki} - \sum_{h=1}^r q_{hi})$, $t = \overline{1, n}$, $r = \overline{1, n}$.

При формировании оптимального плана для большого количества точек его можно разбивать на несколько планов для меньшего количества точек эксперимента, что существенно упрощает построение оптимального плана калибровочного эксперимента.

Оценка точности идентификации

Опираясь на планы оптимальных экспериментов для двух- и трехзвенных манипуляторов, полученных выше, оценим точность идентификации кинематических параметров модели.

Для этого воспользуемся выражением (11) $\text{cov}(\Delta \Pi) = \sigma^2 (\sum_{i=1}^m (J_i^T J_i))^{-1}$. Полученные результаты представлены в табл. 2.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что точность идентификации кинематических параметров манипулятора зависит от точности измерительного инструмента и от количества точек эксперимента. Так для достижения точности идентификации длины звеньев 0,01 мм при точности измерительного механизма $\sigma = 0,1$ мм необходимо провести 100 экспериментов. Для достижения точности в 0,01 рад линейных угловых величин следует провести большее количество экспериментов, так как обратная зависимость от линейного размера звена (обычно менее 1 м) снижает точность идентификации.

Таблица 2. Оценка точности идентификации кинематических параметров

	Двухзвенный манипулятор	Трехзвенный манипулятор
$\sum_{i=1}^m (J_i^T J_i)$	$\text{diag}(ml_1^2, ml_2^2, m, m)$	$\text{diag}(ml_1^2, ml_2^2, ml_3^2, m, m, m)$
Точность идентификации	$H(q_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{m} l_1}; H(q_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{m} l_2};$ $H(l_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}; H(l_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$	$H(q_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{m} l_1}; H(q_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{m} l_2};$ $H(q_3) = \frac{\sigma}{\sqrt{m} l_3}; H(l_1) = \frac{\sigma}{\sqrt{m}};$ $H(l_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}; H(l_3) = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$

Моделирование процесса идентификации

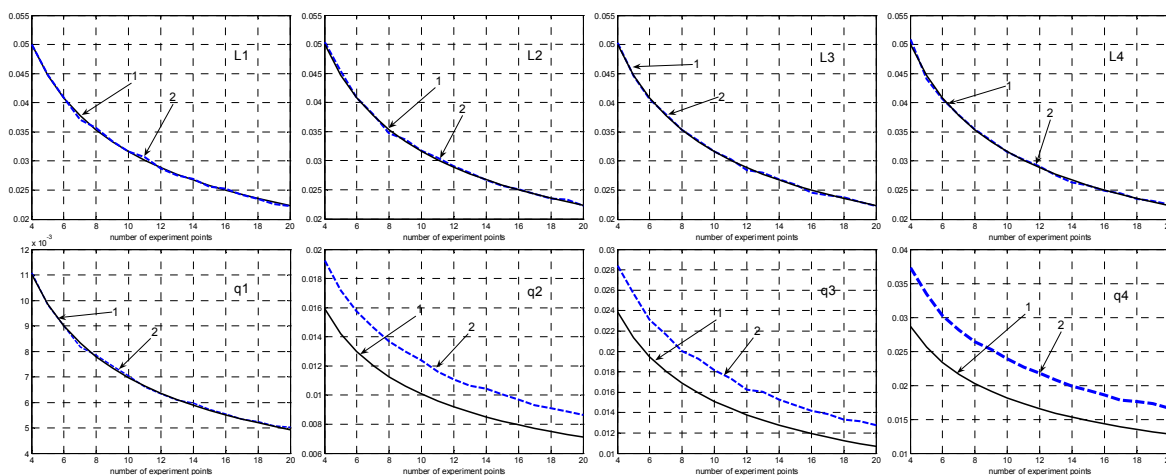
Проведем оценку точности идентификации кинематических параметров двух-, трех- и четырехзвенных манипуляторов в зависимости от количества точек эксперимента. Точки проведения эксперимента расположим в соответствии с полученными условиями оптимальности, а для четырехзвенного манипулятора — в соответствии с выдвинутым предположением. Для получения достоверных результатов проведем каждый эксперимент 10000. Для идентификации зададим отклонения линейных и угловых величин, значения которых для двух и трехзвенных манипуляторов приведены в табл. 3. При этом будем считать, что точность измерения σ составляет 0,1 мм. Моделирование проведем в пакете MATLAB. Построим зависимости точности идентификации модели робота от количества точек эксперимента. Результаты эксперимента для двух и трехзвенного манипуляторов приведены в табл. 3.

Таблица 3. Оценка точности идентификации кинематических параметров

	Двухзвенный манипулятор		Трехзвенный манипулятор	
Параметры звеньев	L1=260; dL1=1,5; L2=180; dL2=-0,6;	dq1=0,5; dq2=-0,5;	L1=260; dL1=1,5; L2=180; dL2=-0,6; L3=120; dL3=-0,4;	dq1=0,5; dq2=-0,5; dq3=0,7;
Точность идентификации	3 точки эксперимента	20 точек эксперимента	3 точки эксперимента	20 точек эксперимента
	dL1=0,058 dL2=0,058 dq1=0,013 dq2=0,022	dL1=0,022 dL2=0,022 dq1=0,005 dq2=0,009	dL1=0,058 dL2=0,058 dL3=0,058 dq1=0,013 dq2=0,022 dq3=0,036	dL1=0,022 dL2=0,022 dL3=0,022 dq1=0,005 dq2=0,009 dq3=0,013
Примечание	Графики для линейных величин совпадают с теоретическими. Для dq1 теоретическая и экспериментальная кривая совпадают, Для dq2 и dq3 экспериментальные кривые идут на 0,002 градуса выше			

Отклонения экспериментальных кривых для угловых величин от аналитических связано с методом идентификации модели, который идентифицирует суммарное отклонение угловых величин для второго и третьего сустава.

При проведении калибровочного эксперимента для четырехзвенного манипулятора задали длины звеньев равные $l_1 = 260$, $l_2 = 180$, $l_3 = 120$, $l_4 = 100$, а их отклонения соответственно 1,5, -0,6, -0,4 и 0,7 мм. Отклонение нуля углового положения задали равными 0,5°, -0,5°, 0,7° и -0,3° для первого, второго, третьего и четвертого углов соответственно. Полученные результаты моделирования представлены на рисунке.



Точность идентификации параметров четырехзвенного манипулятора при оптимальном плане эксперимента: 1 — экспериментальная, 2 — теоретическая кривая

Результаты моделирования показывают, что точность идентификации, полученная экспериментально, совпадает с рассчитанными аналитически для линейных величин и составляет 0,05 мм для четырех точек эксперимента и 0,022 мм для двадцати точек эксперимента. Экспериментальная точность идентификации второго и третьего угла хуже аналитической на $0,002^\circ$, а для четвертого звена на $0,005^\circ$. Снижение точности идентификации в этом случае связано с расчетом аддитивной ошибки углов. По полученным результатам можно определить необходимое количество экспериментов по заданной конечной точности модели. Так для приведенного эксперимента для достижения точности идентификации длины звеньев 0,01 мм необходимо провести 100 экспериментов. При этом точность идентификации угловых величин составит $0,007^\circ$, $0,03^\circ$, $0,035^\circ$ и $0,068^\circ$. Полученные результаты свидетельствуют о том, что для четырехзвенного манипулятора условие оптимальности справедливо.

Заключение

Полученные условия оптимальности калибровочного эксперимента позволяют повысить точность идентификации математической модели робота-манипулятора. Приведенные алгоритмы калибровки позволяют достичь требуемой точности позиционирования манипулятора за минимальное количество контрольно-измерительных операций. Проведенное имитационное моделирование подтверждает аналитические результаты, подтверждена гипотеза об оптимальности плана для n -звенного манипулятора.

CALIBRATION EXPERIMENTS PLANNING FOR A PLANAR ANTHROPOMORPHIC MANIPULATOR

A.P. PASHKEVICH, A.S. KLIMCHIK

Abstract

A novel technique for the optimal calibration experiments planning for a planar anthropomorphic manipulator with n degrees of freedom is proposed. Analytical optimality conditions are derived, examples of optimum calibration plans for manipulators with two and three degrees of freedom are presented. The parameter estimation accuracy under the measurement noise is evaluated. The simulation results confirm efficiency of the proposed calibration experiments planning technique.

Литература

1. Roth Z., Mooring B., Ravani B. // IEEE J. of Robotic and Automation. 1987. Vol. 3, No 5. P. 377–385.
2. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М., 1969.
3. Hollerbach J.M. A Survey of Kinematic Calibration, The Robotics Review 1. Cambridge, MIT Press. 1989. P. 207–242.
4. Mooring B.W, Roth Z.S, Driels M.R. Fundamentals of Manipulator Calibration. John Wiley & Sons, 1991.
5. Elatta A.Y., Li Pei Gen, Fan Liang Zhi, et al. // Information Technology J. 2004. No. 3(1). P. 74–78.
6. Hayati S. // IEE Int. Conf. Decision and Control. San Antonio, 1983. P. 1477–1483.
7. Stone H.W. Kinematic Modeling, Identification, and Control of Robor Forward Manipulators, Boston, Kluwer, 1987.
8. Zhuang H., Roth Z.S., Harnano F. // IEEE Trans. Robotics and Automation. 1992. Vol. 8. P. 451–463.
9. Ikits M., Hollerbach J.M. // Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 20–25 Apr 1997. 1997. Vol. 4, Issue 1, P. 3191–3196.
10. Mirman C.R., Gupta K.C. // J. Robotic System. 1992. No. 9. P. 133–137.
11. Mooring B.W. et. al. Fundamentals of Manipulator Calibration. John Wiley & Sons, NY. 1991. P. 135–140.
12. Пашкевич А.П. // Докл. БГУИР. 2004. № 1 С. 50–63.
13. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М., 1976.
15. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М., 1967.