УДК 621.317.846

К МЕТОДУ АНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЕТЕЛЬ ГИСТЕРЕЗИСА

В.М. ИЛЬИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки,6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 3 ноября 2008

Показана возможность использования нетрадиционного решения квадратного уравнения для описания неоднозначных характеристик типа петель гистерезиса, дающая ряд преимуществ перед известными методами.

Ключевые слова: аналитическая аппроксимация, петля гистерезиса, нетрадиционное решение квадратного уравнения.

Введение

Проблема аналитической аппроксимации неоднозначных характеристик (типа петель гистерезиса) издавна привлекает внимание специалистов в области нелинейных цепей и устройств. Объясняется это, с одной стороны, трудностью ее осуществления, а с другой — расширяющейся потребностью иметь достаточно гибкую и универсальную возможность рассчитывать и анализировать сложные процессы большого круга нелинейных задач [1–3] с учетом гистерезиса.

В работе [4] изложен новый подход в этом деле, базирующийся на использовании для описания петель гистерезиса квадратного уравнения с однозначными переменными коэффициентами, аппроксимация которых не вызывает затруднений. Получены простые соотношения для петли гистерезиса, как функции b(h), так и h(b), аналогичные формуле корней квадратного уравнения, состоящие из суммы двух функций. Это дает ряд преимуществ по сравнению с тем, что было предложено ранее [1, 2].

Однако, как показали исследования, использование квадратного уравнения даст возможность осуществить дальнейшее усовершенствование аналитического описания петли гистерезиса, если применить нетрадиционное решение этого уравнения. В частности, это позволяет выразить корни квадратного уравнения в виде произведения двух простых функций, каждая из которых в отдельности может быть определена через коэффициенты рассматриваемого уравнения. Такая возможность обеспечивает большую гибкость аналитического описания петли гистерезиса. Рассмотрим суть предлагаемого метода.

Нетрадиционное решение квадратного уравнения

Способ нетрадиционного решения квадратного уравнения с заданными вещественными коэффициентами рассмотрим как сущность следующей теоремы.

Теорема. *Вещественные корни* Y_1 *и* Y_2 *квадратного уравнения — это косинусная и синусная составляющие радиуса-вектора* A*, являющегося, как и корни, функцией коэффициентов уравнения.*

Положим, что корни уравнения

$$Y^2 + a_1 Y + a_2 = 0 \tag{1}$$

в общем виде равны $A\cos\alpha$, где A и α — некоторые функции коэффициентов a_1 и a_2 уравнения (1).

Таким образом, заданное уравнение можно представить как

$$A^2\cos^2\alpha + a_1 A\cos\alpha + a_2 = 0$$

или

$$\frac{1}{2}A^2\cos^2\alpha - \frac{1}{2}A^2\sin^2\alpha + \frac{1}{2}A^2 + a_1 A\cos\alpha + a_2 = 0.$$

Выполним группировку членов этого соотношения:

$A^2\cos^2\alpha + 2a_1 A\cos\alpha + a_1^2 - A^2\sin^2\alpha + A^2 - a_1^2 + 2a_2 = 0$ и приравняем к нулю отдельно его алгебраическую и тригонометрическую части, т.е.

$$A^2 - a_1^2 + 2a_2 = 0,\ (A\cos\alpha + a_1)^2 - A^2\sin^2\alpha = 0.$$

Отсюда следует, что

$$A = \sqrt{a_1^2 - 2a_2}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 = \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 = -\frac{a_1}{A} = -\frac{a}{\sqrt{a_1^2 - 2a_2}}. \tag{3}$$

Из этих уравнений видно, что и радиус-вектор A и являющиеся его сомножителями тригонометрические функции предопределяются порознь только коэффициентами квадратного уравнения (1).

Равенство (3) запишем в виде

$$\sin(45^\circ + \alpha_1) = \sin(135^\circ + \alpha_2) = -\frac{a_1}{\sqrt{2}A} = \sin\beta, \tag{4}$$

в котором $\sin(45^\circ + \alpha_1)$ и $\sin(135^\circ + \alpha_2)$ равны $-\dfrac{a_1}{\sqrt{2}A}$, такую же величину имеет $\sin\beta$ вспомогательного угла β. Причем предопределяется он также коэффициентами a_1 и a_2. Это дает основание сформулировать следующую лемму (об одном синусе трех углов).

Лемма. *Трем углам* $45^\circ + \alpha_1$, $135^\circ + \alpha_2$ и β *соответствует одно значение их синусов, равное* $-\dfrac{a_1}{\sqrt{2}A}$.

Следовательно, можно записать два уравнения для углов:

$$45^\circ + \alpha_1 = \beta,\ 135^\circ + \alpha_2 = \beta, \text{ т.е.}$$

$$\alpha_1 = \beta - 45^\circ,\ \alpha_2 = \beta - 135^\circ. \tag{5}$$

Уравнениями (2) и (5) определяются величины A, α_1, α_2, $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ и корни уравнения (1) $Y_1 = A\cos\alpha_1$, $Y_2 = A\cos\alpha_2$, что является доказательством теоремы.

Пример 1. Определим нетрадиционным методом корни квадратного уравнения $Y^2 + Y - 6 = 0$. По уравнению (2) находим $A = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} = \sqrt{1 + 2\cdot 6} = \sqrt{13}$.

Синус трех углов (4) равен:

$$-\frac{a}{\sqrt{2}A} = -\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} = -0{,}196116 = \sin\ -11^\circ 20'\ .$$

Таким образом $\sin\ 45°+\alpha_1\ =\sin\ -11°20'\ $; $\alpha_1=-56°20'$; $\cos(-56°20')=0{,}5544$; $Y_1=A\cos\alpha_1=\sqrt{13}\cdot 0{,}554=2$; $\sin\ 135°+\alpha_2\ =\sin\ -11°20'\ $; $\alpha_1=-146°20'$; $\cos\alpha_2=-\sin 56°20'=-0{,}8323$; $Y_2=A\cos\alpha_2=\sqrt{13}\cdot(-0{,}8323)=-3$.

Величины и знаки корней Y_1 и Y_2 удовлетворяют заданному уравнению. Из приведенного расчета также видно, что $\cos\alpha_2=\sin\alpha_1=-0{,}8323$, т.е. корни квадратного уравнения равны $Y_1=A\cos\alpha$, $Y_2=A\sin\alpha$, следовательно они являются косинусной и синусной составляющей радиуса-вектора А. Для их нахождения достаточно применять только один тригонометрический оператор $\cos\alpha_1+\sin\alpha_1=-a_1/A$, а второй $\cos\alpha_2-\sin\alpha_2=-a_1/A$ использовать для контроля.

Ранее отмечалось [4], что для особых пяти значений аргумента X петли гистерезиса ее ординаты выражаются корнями частных уравнений первой степени. В связи с этим рассмотрим решение такого уравнения нетрадиционным методом.

Пример 2. Пусть имеем уравнение $Y-5=0$; или $Y^2-5Y=0$, где $a_1=-5$, $a_2=0$. Поэтому $A=\sqrt{a_1^2-2a_2}=\sqrt{a_1^2}=a_1=5$; $\sin\ 45°+\alpha_1\ =-\dfrac{a_1}{\sqrt{2}A}=\dfrac{5}{\sqrt{2}\cdot 5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45°$; $\alpha_1=45°-45°=0$; $\cos\alpha_1=1$; $Y_1=A\cos\alpha_1=5\cdot 1=5$; $\sin\alpha_1=\sin 0=0$; $Y_2=A\sin 0=0$.

Радиус-вектор (2) или общий множитель корней квадратного уравнения

$$A=\sqrt{a_1^2-2a_2}=\sqrt{\ Y_1+Y_2\ ^2-2Y_1Y_2}=\sqrt{Y_1^2+2Y_1Y_2+Y_2^2-2Y_1Y_2}=\sqrt{Y_1^2+Y_2^2}\ . \qquad (6)$$

связан с корнями уравнением окружности. Характерно, что на его величину, как следует из (6), не влияют знаки корней. Поэтому для всех уравнений с одинаковыми по абсолютным величинам корнями он будет одним и тем же. Более обобщенно можно утверждать, что он будет одним и тем же для множества пар корней, которые удовлетворяют с ним уравнению окружности, в том числе когда один из корней равен нулю, а второй равен А (уравнение первой степени).

Так как значение синуса углов $45°+\alpha_1$, $135°+\alpha_2$ и β можно выразить непосредственно через коэффициенты a_1 и a_2 исходного квадратного уравнения (1)

$$-\frac{a_1}{\sqrt{2}A}=-\frac{a_1}{\sqrt{2}\sqrt{a_1^2-2a_2}}=-\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-2a_2/a_1^2}}\ , \qquad (7)$$

то отсюда следует, что синус трех отмеченных углов полностью предопределяется отношением a_2/a_1^2, которое не зависит от знака a_1. Это упрощает аппроксимацию петель гистерезиса. Дальнейшее упрощение достигается возможностью определения расчетных значений косинусной и синусной составляющей радиуса-вектора А непосредственно через коэффициенты a_1 и a_2 решаемого уравнения.

Определение расчетных тригонометрических функций через коэффициенты квадратного уравнения

В рассмотренных примерах $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ определены через углы α_1 и α_2, которые вычислены через коэффициенты, заданные в исходных уравнениях. Но характер связи обоих тригонометрических операторов с коэффициентами a_1 и a_2 позволяет определить $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ непосредственно через эти коэффициенты, без вычисления их углов, что исключает необходимость использовать таблицы косинусов и синусов и повышает точность расчета корней. Действительно, произведение корней

$$a_2=A\cos\alpha\ A\sin\alpha=A^2\cos\alpha\ \sin\alpha\ . \qquad (8)$$

Их сумма равна

$$a_1 = A\cos\alpha + A\sin\alpha = A(\cos\alpha + \sin\alpha), \quad (9)$$

а общий множитель $A = \sqrt{a_1^2 - 2a_2}$.

Из (8) следует, что $\sin\alpha = \dfrac{a_2}{A^2\cos\alpha}$, поэтому имеем с учетом (3) $\cos\alpha + \dfrac{a_2}{A^2\cos\alpha} = -\dfrac{a_1}{A}$, откуда

$$\cos^2\alpha + \frac{a_1}{A}\cos\alpha + \frac{a_2}{A^2} = 0. \quad (10)$$

Аналогично

$$\sin^2\alpha + \frac{a_1}{A}\sin\alpha + \frac{a_2}{A^2} = 0, \quad (11)$$

т.е. имеем два равнозначных квадратных уравнения для определения cosα_1, cos α_2, sin α_1, sin α_2:

$$\cos\alpha_{12} = -\frac{a_1}{2A} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4A^2} - \frac{a_2}{A^2}} = \frac{a_1}{2A}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{a_2}{a_1^2}}\right) \quad (12)$$

В свою очередь

$$\sin\alpha_{12} = \frac{a_1}{2A}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{a_2}{a_1^2}}\right). \quad (13)$$

Поскольку общий множитель корней квадратного уравнения *A* непосредственно зависит от коэффициентов a_1 и a_2 (2), это указывает на прямую связь тригонометрических функций с этими коэффициентами. Как уже отмечалось, $\cos\alpha_2 = \sin\alpha_1$, а $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$. Поэтому решение уравнения (12) дает величины cos $_1$ и sin $_1$, а решение уравнения (13) дает значения cosα_2 и sinα_2, т.е. каждое из этих уравнений определяет косинусную и синусную составляющую корней заданного квадратного уравнения. Следует также подчеркнуть, что сумма квадратов корней каждого из уравнений (12) и (13) равна 1. Из соотношений $Y_1 = A\cos\alpha$ и $Y_2 = A\sin\alpha$ видно также, что сумма квадратов отношений $\left(\dfrac{y_1}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2}{A}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. И то и другое соотношения могут быть использованы для нахождения корня, парного с известным корнем уравнения, и контроля расчетов.

Важная роль при отображении ветвей петли гистерезиса принадлежит их особым точкам с ординатами, описываемыми, как отмечалось в примере 2, частными уравнениями (2)–(6) [4]. Рассмотрим их более тщательно.

Применение нетрадиционного метода для решения частных уравнений петли гистерезиса

Здесь будем иметь в виду пять случаев особых значений ординат петли гистерезиса, которые предопределяют ее описание в целом.

1. Уравнение петли гистерезиса, соответствующее аргументу X=1, характеризуется $a_1 = -2$, $a_2 = 1$; $A = \sqrt{2}$. Для него в соответствии с (12)

$$\cos\alpha_{12} = -\frac{2}{2\sqrt{2}}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};\ Y_1 = Y_2 = A\cos\alpha = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

2. При $X = h_c$: $a_1 = -0,83673$; $a_2 = 0$; $A = 0,83673$;

$$\cos\alpha_{12} = \frac{-0,83673}{2\cdot 0,83637}\ -1 \pm \sqrt{1-0}\ = -\frac{1}{2}\ -1 \pm 1\ = 1,0\ ;\ Y_1 = 0,83673\cdot 1 = 0,83673;\ Y_2 = 0\ .$$

3. При $X = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = -b_r^2 = -0,481455$; $A = \sqrt{2}b_r = \sqrt{2}\cdot 0,69387$;

$$\cos\alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}b_r}\ -0 \pm \sqrt{0,481155}\ = \pm\frac{b_r}{\sqrt{2}b_r} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ Y_1 = \sqrt{2}b_r\,\frac{1}{\sqrt{2}} = b_r;\ Y_2 = \sqrt{2}b_r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -b_r\ .$$

4. При $X = -h_c$; $a_1 = 0,83673$; $a_2 = 0$; $A = 0,83673$;

$$\cos\alpha_{12} = \frac{-0,83673}{2\cdot 0,83637}\ -1 \pm \sqrt{1-4\cdot 0}\ = 0,1;\ Y_1 = 0;\ Y_2 = -0,83673.$$

5. При $X = -1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 1$; $A = \sqrt{2}$ $\cos\alpha_{12} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\left(-1 \pm \sqrt{1-4\cdot\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$Y_1 = Y_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1\ .$$

Определение ординат при пяти рассмотренных значениях аргумента X методом нетрадиционного решения квадратных уравнений не потребовало привлечения значений соответствующих переменных коэффициентов, аппроксимировавшихся в ранее рассмотренной методике [4].

Между этими значениями ординат особых точек существуют четыре промежуточных участка ветвей петли гистерезиса. Как будет показано далее, для их аналитического описания можно обойтись без аппроксимации переменных коэффициентов квадратных уравнений.

Заключение

Изложена возможность аналитического описания неоднозначных характеристик типа петель гистерезиса путем нетрадиционного решения квадратных уравнений. Доказана теорема обосновывающая эту возможность. Даны примеры ее конкретного использования. Отмечены преимущества этого подхода.

THE ANALYTICAL APPROXIMATION METHOD OF HYSTERESIS LOOP

V.M. ILYIN

Abstract

The using of quadratic equation untraditional solution for description of ambiguous functions of hysteresis loop types and their advantages are shown.

Литература

1. *Филлипов К.* Нелинейная электротехника. М., 1968.
2. *Кушнер В.Ф., Ферсман Б.А.* Теория нелинейных электрических цепей. М., 1974.
3. *Хагаси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М, 1968.
4. *Ильин В.М.* // Докл. БГУИР. 2006. № 2. С. 57–63.