УДК 62-506.29:519.21

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.А. ЛОБАТЫЙ, Ж.М. САИД

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 3 марта 2009

На основе теории марковских процессов случайной структуры решается задача вероятностного анализа граничных режимов работы стохастической динамической системы. Аналитически получены выражения для вычисления интенсивностей поглощения реализаций случайного процесса. Это позволяет по известным статистическим характеристикам фазовых координат оценивать вероятность безотказной работы системы управления.

Ключевые слова: стохастическая система, случайная структура, плотность вероятности, срыв управления, функция поглощения.

Введение

Существует широкий класс автоматических систем, у которых переход из одного состояния в другое происходит при достижении одной или несколькими фазовыми координатами определенных границ. Задачи вероятностного анализа таких систем рассматриваются в ряде работ на основе различных теоретических подходов при применении двух классов моделей: имитационных и аналитических. Сложность имитационного моделирования состоит в необходимости обеспечения адекватности математической модели реальному процессу. Иногда необходимо моделировать процессы, происходящие на молекулярном уровне, это требует больших экспериментальных исследований на реальных образцах техники. Предсказательные возможности имитационного моделирования значительно меньше, чем у аналитических моделей. Для проведения предварительного проектирования и оптимизации системы, исследования ее характеристик используются аналитические модели, отражающие основные, наиболее важные свойства системы, позволяющие решать широкий круг задач анализа и синтеза. Аналитическая модель дает решение поставленной задачи в законченной форме в виде функциональной зависимости исследуемых характеристик от параметров модели и обеспечивает глубину анализа.

При аналитическом моделировании граничных режимов работы системы управления целесообразно использовать теорию динамических систем случайной структуры [1], в основе которой лежит изучение разрывных марковских процессов с поглощением и восстановлением реализаций. Рассмотрим распространенный класс задач анализа систем случайной структуры — задачи анализа стохастических динамических систем с учетом срыва управления, когда при достижении фазовыми координатами (параметрами) системы определенных границ она переходит в принципиально иное состояние, например неисправное или неработоспособное.

Теоретический анализ граничных режимов

Достаточно общая математическая модель стохастической динамической системы может быть представлена векторно-матричным уравнением в форме Ланжевена вида

$$\dot{X}(t) = D(X,t) + F(X,t)\xi(t), \ X(t_0) = X_0,$$

где X_0 — случайный вектор начального состояния; $X(t)$ — n-мерный вектор фазовых координат системы; $D(X,t)$, $F(X,t)$ — в общем случае произвольные нелинейная векторная и матричная функции; $\xi(t)$ — вектор белого шума с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивности $G(t)$.

Пусть $X(t)$ может находиться в различных состояниях (структурах). При этом l-я структура характеризует основное (рабочее) состояние системы. Выход процесса $X(t)$ за границы некоторой известной области Ω, ограниченной гиперповерхностью $\Gamma_{lr}\left(X,t\right)$, означает переход системы в одну из r-х ($r=\overline{1,s}$) структур (состояний). Порядок смены структур (чередование индексов l, r, k, …) случаен, представляет собой дискретный процесс $L(t)$ и подчинен определенным статистическим закономерностям. Нахождение процесса в l-й структуре обозначим $X(l,t)$.

Наиболее полной характеристикой процесса l-й структуры $X(l,t)$ является плотность распределения вероятности (ПРВ) $f(X,l,t)$, которая при отсутствии восстановления реализаций процесса $X(l,t)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова вида [1]

$$\dot{f}(X,l,t)=-\nabla_x^T\pi(X,l,t)-\vartheta(X,l,t). \qquad (1)$$

Здесь $\nabla_x^T=\left[\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^T$ — векторный оператор дифференцирования; $\pi(X,l,t)$ — вектор плотности потока вероятности, равный

$$\pi(X,l,t)=A(X,l,t)f(X,l,t)-\frac{1}{2}\nabla_x^T\left[B(X,l,t)f(X,l,t)\right],$$

где $A(X,l,t)$ — вектор сноса с составляющими, характеризующими средние значения локальных скоростей компонент непрерывного векторного марковского процесса; $B(X,l,t)$ — диффузионная матрица, каждый элемент которой характеризует скорость изменения условного момента связи компонент векторного марковского процесса. При математическом описании локальных характеристик $A(X,l,t)$ и $B(X,l,t)$ будем рассматривать стохастические интегралы в смысле Ито как более простые для вычислений [2].

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова является уравнением в частных производных параболического типа. Нахождение решения этого уравнения представляет собой значительную трудность, особенно для многомерных систем. Однако в большинстве случаев этого решения не требуется, так как хорошие результаты позволяет получить гауссова двухмоментная аппроксимация ПРВ $f(X,l,t)$.

Основная проблема при аналитическом исследовании систем случайной структуры заключается в определении функций поглощения $\vartheta(X,l,t)$. В зависимости от условий поглощения реализаций процесса $X(t)$ различают процессы с сосредоточенными и распределенными переходами системы из одного состояния в другое.

В процессах с сосредоточенными переходами смена состояний связана с достижением реализациями $X(t)$ границ некоторой области в фазовом пространстве. Эти границы перехода процесса из области l в область r представляются детерминированными функциями $\gamma_{lr}(t)$. Функция поглощения $\vartheta(X,l,t)$ для многомерного процесса при этом имеет вид:

$$\vartheta(X,l,t)=\sum_{r=1}^{s}n_{lr}^0\,\pi\left(X,l,t\right)\delta\left[\Gamma_{lr}\left(X,t\right)-\gamma_{lr}\right], \qquad (2)$$

где $\delta(...)$ — дельта-функция; n_{lr}^0 — орт внешней нормали к гиперповерхности $\Gamma_{lr}\ \ X,t$; $n_{lr}^0\ \pi\ \ X,l,t$ — скалярное произведение векторов n_{lr}^0 и $\pi\ \ X,l,t$.

В процессах с распределенными переходами многомерная функция поглощения для *l*-й структуры имеет вид:

$$\vartheta(X,l,t) = \nu_l(X,t) f(X,l,t) = \sum_{r=1}^{s} \nu_{lr}(X,t) f(X,l,t) . \qquad (3)$$

Функция $\nu_l(X,t)$ — интенсивность поглощения реализаций *l*-й структуры. Функции $\nu_{lr}(X,t)$ в выражении (3) называются интенсивностями смены структур (переходов из области *l* в *r*-ые области). Они могут быть отличными от нуля во всей или части области существования процесса. Если процессы $L(t)$ и $X(t)$ независимы, то интенсивности переходов не зависят от координат *X* и становятся функциями только индексов *l*, *r* и времени *t* $\nu_{lr}(X,t) = \nu_{lr}(t)$.

Интеграл от ПРВ $f(X,l,t)$ по всей бесконечной открытой области без учета границ и стоков вероятности представляет собой вероятность существования реализаций *l*-й структуры в каждый текущий момент времени *t*.

$$P_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X,l,t) dX \ .$$

Проинтегрировав уравнение (1) по *X* в бесконечных пределах, получим дифференциальное уравнение для $P_l(t)$.

$$\dot{P}_l(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(X,l,t) dX \ , \ P_l(0) = P_{l0} \ .$$

Если функция поглощения $\vartheta(X,l,t)$ рассматривается в выражении (2), то вследствие свойств дельта-функции задача вероятностного анализа сводится к отысканию значения плотности потока вероятности на поглощающей границе $\pi(\gamma_{lr},t)$. В работе [3] проведен подробный анализ такой задачи. Однако точного решения, особенно для многомерных систем, получить не удается. При этом приходится делать ряд допущений и громоздких преобразований.

Простое решение получается при рассмотрении функции поглощения в уравнении (3) при $\vartheta(X,t) = \nu_l(t) f(X,l,t)$. В этом случае при интегрировании уравнения (1) по *X* получаем простое для решения дифференциальное уравнение:

$$\dot{P}_l(t) = -\nu_l(t) P_l(t) \ , \ P_l(0) = P_{l0} \ .$$

Таким образом, при решении задач анализа и особенно синтеза удобнее рассматривать функцию поглощения $\vartheta(X,t)$ в виде (3). Однако основная сложность состоит в приведении функции $\nu_{lr}(X,t)$ к виду $\nu_{lr}(t)$. В общем случае вопрос аналитического определения интенсивностей $\nu_{lr}(t)$ авторами теории динамических систем случайной структуры подробно не рассматривается, предполагая, что $\nu_{lr}(t)$ можно определять экспериментальным путем.

Методика определения интенсивности поглощения реализаций

Воспользуемся для определения $\nu_{lr}(t)$ эргодическим свойством случайного процесса $X(t)$, считая, что математическое ожидание (корреляционную функцию) случайного процесса можно определить по достаточно длинной реализации $X(t)$. На практике большинство рассматриваемых процессов, происходящих в технических системах, являются стационарными и таким свойством обладают. Кроме того, гиперповерхность $\Gamma_{lr}\ \ X,t$ сведем к одной поглощающей границе для конкретной фазовой координаты, что также достаточно характерно для реальных условий.

Рассмотрим реализацию компоненты $x(t)$ процесса $X(t)$. Пусть переход $X(t)$ из состояния l в состояние (структуру) r проявляется в превышении реализацией $x(t)$ некоторого допустимого уровня Δ. Это превышение называется выбросом случайного процесса $x(t)$ [4].

Среднее число положительных выбросов $X(t)$ за уровень Δ на интервале [0, T] случайно и определяется следующим выражением

$$N_{\Delta}(T)=\int_{0}^{T}\dot{x}(t)\ \delta[x(t)-\Delta]\ 1[\dot{x}(t)]dt\,. \tag{4}$$

Подынтегральная функция в (4) вследствие свойств дельта-функции $\delta[x(t)-\Delta]$ и единичной ступенчатой функции $1[\dot{x}(t)]$ равна нулю всюду кроме тех точек, где случайный процесс $x(t)$ пересекает уровень Δ. В точках пересечения процессом $x(t)$ уровня Δ интеграл скачком возрастает на единицу. Следовательно, интеграл (4) равен числу положительных пересечений случайным процессом $x(t)$ уровня Δ на интервале [0,T].

Математическое ожидание случайной величины $N_{\Delta}(T)$ вычисляется по формуле:

$$M\ \ N_{\Delta}(T)\ =\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}N_{\Delta}[T,x(t),\dot{x}(t)]\,f(x,\dot{x},t)dxd\dot{x}\,, \tag{5}$$

где $f(x,\dot{x},t)$ — двумерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ и его производной $\dot{x}(t)$.

Подставляя формулу (4) в (5) и пользуясь известным правилом интегрирования произведения произвольной функции на дельта-функцию, проинтегрируем (5) по переменной $\dot{x}$:

$$M\ \ N_{\Delta}(T)\ =\int_{0}^{T}dt\int_{0}^{\infty}\dot{x}(t)\,f(\Delta,\dot{x},t)d\dot{x}\,. \tag{6}$$

Для случайного процесса $x(t)$, стационарного в узком смысле, для которого любые сечения по временной оси ПРВ $f(x,\dot{x},t)$ зависят лишь от разности аргументов $t_1,...,t_n$ $f(x,\dot{x},t)=f(x,\dot{x},t_i-t_j)$ $(i,\,j=\overline{1,n})$, внутренний интеграл в выражении (6) не зависит от времени и выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$M\ \ N_{\Delta}(T)\ =T\int_{0}^{\infty}\dot{x}(t)\,f(\Delta,\dot{x})d\dot{x}\,. \tag{7}$$

Разделив среднее число выбросов на интервале [0, T] (7) на длину интервала, получим интенсивность числа выбросов:

$$\nu_{\Delta}(T)=\frac{1}{T}M[N_{\Delta}(T)]=\int_{0}^{\infty}\dot{x}\ \ f(\Delta,\dot{x})d\dot{x}\,. \tag{8}$$

Для гауссова процесса, обозначив $f(x,\dot{x})=f(x,\dot{x},t)$, имеем

$$f(x,\dot{x})=\frac{1}{2\pi\sqrt{D_xD_{\dot{x}}(1-r^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{D_x}-\frac{2r(x-m_x)(\dot{x}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_xD_{\dot{x}}}}+\frac{(\dot{x}-m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}}\right]\right), \tag{9}$$

где m_x, $m_{\dot{x}}$ — математические ожидания; D_x, $D_{\dot{x}}$ — дисперсии процессов $X(t)$ и $\dot{X}(t)$; r — коэффициент корреляции $X(t)$ и $\dot{X}(t)$ соответственно.

$$r = r_{x\dot{x}} = \frac{R_{x\dot{x}}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}},$$

где $R_{x\dot{x}}$ — корреляционный момент (момент связи) $X(t)$ и $\dot{X}(t)$.

Подставляя в (8) выражение для плотности вероятности $f(X, \dot{X})$ (9), в котором заменен параметр x на Δ, получим

$$\nu_\Delta(T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\dot{x}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(\Delta - m_x)^2}{D_x} - \frac{2r(\Delta - m_x)(\dot{x} - m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}} + \frac{(\dot{x} - m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}}\right]\right) d\dot{x}, \quad (10)$$

В установившемся режиме при $m_x = m_{\dot{x}} = r = 0$ интеграл (10) легко вычисляется и интенсивность выбросов определяется по формуле:

$$\nu_\Delta(T) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2D_x}\right). \quad (11)$$

Таким образом, задача вычисления интенсивности $\nu_\Delta(T)$ сводится к определению установившейся дисперсии компоненты $x(t)$ и дисперсии ее производной.

При достаточно большом значении $\Delta \subset (\Delta \geq 3\sigma_x,\ \sigma_x = \sqrt{D_x})$ выбросы стационарного процесса $X(t)$ становятся редкими явлениями, а интервалы между выбросами будут настолько велики по сравнению с длительностью выбросов, что сечения случайного процесса, разделенные такими интервалами, будут практически независимыми. При таких предположениях закон распределения числа выбросов будет близок к пуассоновскому закону, для которого

$$P_m = P\{N_\Delta(t) = m\} = \frac{(\nu_\Delta t)^m}{m} \exp\ -\nu_\Delta t\ , \quad (12)$$

где P_m — вероятность того, что число положительных выбросов за уровень Δ случайного процесса $X(t)$ на интервале $[0, t] \subset T$ равно числу m.

Вероятность отсутствия выбросов P_0 и вероятность хотя бы одного выброса P_1 на интервале $[0, t] \subset T$ на основании (12) определяются выражениями

$$P_0 = \exp\ -\nu_\Delta t\ ,\ P_1 = 1 - \exp\ -\nu_\Delta t\ . \quad (13)$$

Если условием работоспособности элемента системы является нахождение $X(t)$ в диапазоне $[H,\ \Delta]$, где H — допустимый уровень отрицательных выбросов $x(t)$, то кроме вычисления $\nu_\Delta(T)$ необходимо определять интенсивность отрицательных выбросов $\nu_{\text{Н}}(T)$. При этом для вычисления среднего числа отрицательных выбросов $M\ \ N_H(T)$ по (7) следует интервал интегрирования брать $(-\infty, 0]$.

Выражения (11)–(13) позволяют оценить вероятность бессрывной работы системы управления на основе известных статистических характеристиках случайных процессов, описывающих ее работу. Эти характеристики могут быть получены путем математического моделирования или экспериментально.

Экспериментальная часть

В качестве примера рассмотрим систему второго порядка, описываемую уравнением

$$\ddot{x}+ax+bx=\xi\,,\ x(0)=0\,, \qquad (14)$$

где ξ — белый шум с нулевым математическим ожиданием и заданной интенсивностью *G*. Система прекращает функционировать (происходит срыв управления) при достижении фазовой координатой x_1 границы Δ. Начальные значения x_1 и x_2 считаем нулевыми. Требуется определить вероятность бессрывного управления в течение заданного времени *t*.

На рис. 1 изображен график процесса $x(t)$ до момента срыва управления t_Δ. На рис. 2 представлен график ПРВ не поглощенных реализаций, находящихся в области (*l*) и не перешедших в область (*r*).

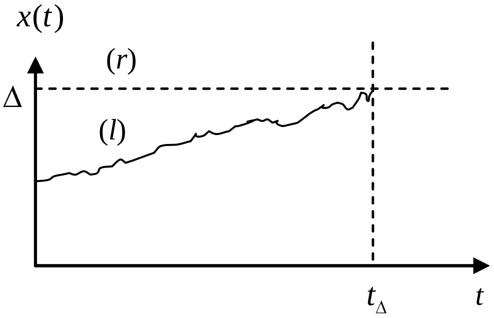

Рис. 1. График процесса $x(t)$ до момента срыва управления

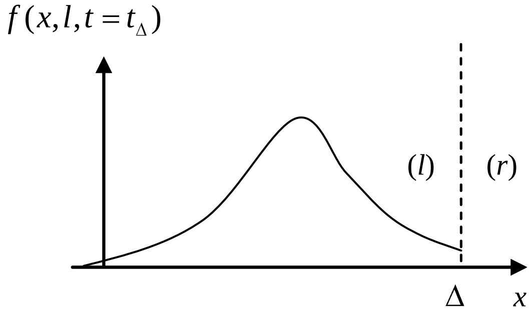

Рис. 2. График ПРВ не поглощенных реализаций

Представим уравнение (14) в виде системы, обозначив $x=x_1$, $\dot{x}=x_2$.

$$\dot{x}_1=x_2\,,\ x_1(0)=x_{10}\,, \qquad (15)$$

$$\dot{x}_2=-ax_2-bx_1+\xi\,,\ m_{\dot{x}}\ \ 0\ \ =m_{\dot{x}0}\,. \qquad (16)$$

Для процесса, описываемого уравнениями (15)–(16), дифференциальные уравнения для входящих в выражение (11) дисперсий имеют вид:

$$\dot{D}_{x1}(t)=\dot{\theta}_{11}=2\theta_{12}\,,\ D_x\ \ 0\ \ =D_{x0}\,, \qquad (17)$$

$$\dot{R}_{x\dot{x}}=\dot{\theta}_{12}=\theta_{22}-2\xi\omega_0\theta_{12}-\omega_0^2\theta_{11}\,,\ R_{x\dot{x}}\ \ 0\ \ =R_{x\dot{x}0}\,, \qquad (18)$$

$$\dot{D}_{\dot{x}}=\dot{\theta}_{22}=-4\xi\omega_0\theta_{22}-2\omega_0^2\theta_{12}+G\,,\ \theta_{22}(0)=\theta_{220}\,. \qquad (19)$$

В установившемся режиме $m_x=m_{\dot{x}}=R_{x\dot{x}}=0$ и входящие в формулу (11) значения D_x и $D_{\dot{x}}$ на основании уравнений (17)–(19) вычисляются по формулам:

$$D_x=\theta_{11}=\frac{G}{4\xi\omega_0^3}\,,\ D_x=\theta_{22}=\frac{G}{4\xi\omega_0}\,.$$

Например, при значениях параметров системы *a*=4, *b*=9000, *G*=1 и времени работы системы *t*=20 с, при значениях $\Delta=3\sigma_x$, $\Delta=4\sigma_x$, $\Delta=5\sigma_x$ в соответствии с формулой (11), интенсивности срывов управления соответственно равны $\nu_\Delta(T)$=0,168, $\nu_\Delta(T)$=0,00507, $\nu_\Delta(T)$=0,0000563. Вероятность срыва управления (хотя бы одного выброса), вычисленная по формуле (12) для приведенных выше трех уровней, равна $P_1(\Delta=3\sigma_x)$=0,965, $P_1(\Delta=4\sigma_x)$=0,0960, $P_1(\Delta=5\sigma_x)$=0,00113 соответственно.

Таким образом, очевидно, что уровень $5\sigma_x$ в данном случае является вполне подходящим, так как при нем вероятность срыва управления является допустимо малой.

Заключение

Предложенная аналитическая математическая модель вероятностного анализа стохастической системы позволяет на основе экспериментально или аналитически определенных статистических характеристик исследуемого процесса и заданных эксплуатационных параметров элементов системы (границ работоспособности), подверженных случайным воздействиям, определить диапазон работоспособности и вероятностные характеристики безотказной работы системы.

ANALYTICAL MODELING BOUNDARY REGIMES OF STOCHASTIC SYSTEMS

A.A. LOBATY, G.M. SAID

Abstract

On the basis of the Marcov processes theory of casual structure the problem of the likelihood analysis of boundary operating modes of stochastic dynamic system dares. Expressions for intensity of absorption of realisations of casual process are analytically received. It allows to estimate probability of non-failure operation of a control system under known statistical characteristics of phase co-ordinates.

Литература

1. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.*. Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
2. *Пугачев В.С., Синицин И.Н.* Теория стохастических систем. М., 2004.
3. *Казаков И.Е., Мальчиков С.В*. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М., 1983.
4. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М., 1970.