УДК 517.977

К УСЛОВИЮ ПОСТОЯННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С.И. СИРОТКО, С.М. СТАХОВСКИЙ, Л.И. МИНЧЕНКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 21 апреля 2009

Условия регулярности (constraint qualifications) играют важную роль в задачах математического программирования. В то же время условия регулярности различаются между собой общностью и условиями применения. Ввиду этого вызывает интерес исследование взаимосвязи различных типов условий регулярности. Целью статьи является доказательство, что известное в литературе условие регулярности постоянной положительно-линейной зависимости (CPLD) влечет выполнение более общего условия *R*-регулярности (называемого также error bound property).

Ключевые слова: условия регулярности, множители Лагранжа, нелинейное программирование.

Введение

Рассмотрим задачу (*P*) математического программирования:

$$f(y) \to \min, \quad y \in C,$$

с непустым множеством допустимых точек

$$C = \; y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \quad i \in I \;, \;\; h_i(y) = 0 \quad i \in I_0 \;,$$

где $y \in R^m$, $I=\{1, \ldots, s\}$, $I_0=\{s+1,\ldots, p\}$ или $I_0=\varnothing$,
и $f, h_i \;\; i = 1, 2, \ldots p$ — непрерывно дифференцируемые функции из R^m в *R*.

С задачей (*P*) связана функция Лагранжа

$$L(y, \lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle \quad , \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \; h = (h_1, \ldots, h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке *y*

$$\Lambda(y) = \quad \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_x L(y, \lambda) = 0, \;\; \lambda_i \ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I \quad .$$

Условиями, существенно влияющими на возможность эффективного решения задачи (P), являются условия регулярности, обеспечивающие непустоту множества $\Lambda(y)$ в точках локального минимума задачи (P) [1–9]. Одним из наиболее известных условий регулярности в точке $y \in C$ является условие Мангасаряна-Фромовица (RMF) [2], требующее, чтобы система векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in I_0$ была линейно независимой, и существовал вектор $\bar{y}_0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \;\; \bar{y}_0 \rangle = 0, \;\; i \in I_0, \;\; \langle \nabla h_i(y), \;\; \bar{y}_0 \rangle < 0, \;\; i \in I(y).$$

(Здесь и далее $I(y) = \{ i \in I \mid h_i(y) = 0 \}$).

Наряду с (RMF) наиболее часто используется условие регулярности постоянного ранга [3], которое по своей природе отлично от условия Мангасаряна-Фромовица. Напомним [3], что в точке y_0 множество C удовлетворяет условию постоянного ранга, если для любого подмножества индексов $J \subset I(y_0) \cup I_0$ система векторов $\nabla h_i(y), \quad i \in J$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0 .

В работе [4] было предложено условие постоянной положительно-линейной зависимости (CPLD), обобщающее одновременно условие регулярности Мангасаряна-Фромовица и условие постоянного ранга.

Определение 1. Будем говорить, что точка y_0 удовлетворяет условию CPLD, если для всех подмножеств индексов $J_1 \subset I(y_0),\ \ J_2 \subset I_0,$ и чисел $\lambda_i \quad i \in J_1 \cup J_2$ таких, что $\lambda_i \geq 0 \quad i \in J_1$ и

$$\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i \nabla h_i(y_0) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \lambda_i + \sum_{i \in J_2} |\lambda|_i > 0,$$

система векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in J_1 \cup J_2$ является линейно зависимой при всех y из некоторой окрестности y_0.

Авторы работы [4] выдвинули предположение, что CPLD должно быть условием регулярности, т.е. гарантировать существование множителей Лагранжа в точках локального экстремума задачи (P). Позже Andreani, Martinez и Schuverdt доказали справедливость данной гипотезы [5].

Поскольку условие CPLD обладает широкой общностью, возникает вопрос о его соотношении с известными ранее условиями регулярности очень общего характера — условием квазинормальности [6] и условием R-регулярности (часто именуемым в литературе error bound property) [1, 7–9]. В [5] было доказано, что из выполнения CPLD в какой-либо точке вытекает квазинормальность в этой точке. Вопрос о взаимосвязи CPLD с R-регулярностью остался нерешенным.

Пусть $\rho(x, C) = \inf_{y \in C} |x - y|,$ где $|y|$ — евклидова норма вектора, B — открытый единичный шар с центром в 0 в пространстве R^m.

Определение 2. Будем говорить, что множество C R-регулярно в точке y_0, если найдутся числа $\alpha > 0,\ \delta > 0$ такие, что

$$\rho(y, C) \leq \alpha \max \ 0, \ h_i(y) \quad i \in I, \ |h_i(y)| \quad i \in I_0$$

для всех $y \in y_0 + \delta B$.

Основной целью нашей статьи является доказательство того факта, что выполнение CPLD в точке y_0 гарантирует R-регулярность множества C в этой точке.

Анализ структуры множества множителей Лагранжа

Множество множителей Лагранжа в задаче (P)

$$\Lambda(y) = \{\lambda \in \mathrm{R}^p \mid \lambda_i \geq 0 \ , \ \lambda_i h_i(y) = 0 \quad i \in I, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) \ + \nabla f(y) = 0\}$$

является многогранным множеством. Если оно не пусто, строение его может быть исследовано, используя общие утверждения о многогранных множествах [10]. Не ограничивая общности можно принять, что активными в точке y являются первые r из ограничений неравенств. Тогда $\Lambda(y)$ задается ограничениями

$$-\lambda_i \le 0 \quad i = 1,\ldots,r,$$
$$\lambda_i = 0 \quad i = r+1,\ldots,s,$$
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = -\nabla f(y).$$

Следовательно, полная матрица ограничений для $\Lambda(y)$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -1 & 0 & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & \cdot & 0 & & & & & & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_r}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_s}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{s+1}}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_p}{\partial y_1} \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\frac{\partial h_1}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_r}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_s}{\partial y_m} & \frac{\partial h_{s+1}}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_p}{\partial y_m}
\end{pmatrix},$$

где на главной диагонали последовательно расположено r элементов, равных -1 и $s-r$, равных 1. Ранг системы линейных ограничений совпадает с рангом матрицы D и, очевидно, равен p, если векторы $\nabla h_i(y)$ $i \in I_0$ линейно независимы. В этом случае в силу теоремы 2.3 [10] множество $\Lambda(y)$ имеет хотя бы одну вершину. В общем случае, когда ранг системы линейных ограничений неполный, т.е. равен $l < p$, то по лемме 2.1 [10] множество $\Lambda(y)$ представимо в виде $\Lambda(y) = M_0 + P$, где P — подпространство размерности $p-l$, M_0 — многогранное множество, определяемое условием

$$\lambda \in \Lambda(y), \quad \lambda_i = 0 \quad i \in I_0 \setminus I_{00},$$

где $I_{00} \subset I_0$ — такое множество индексов из I_0, что система векторов $\nabla h_i(y)$ $i \in I_{00}$ является максимальной линейно независимой подсистемой системы $\nabla h_i(y)$ $i \in I_0$.

Не ограничивая общности, можно считать, что ограничения с индексами $i \in I_0 \setminus I_{00}$ являются первыми в системе ограничений равенств $\nabla h_i(y)$ $i \in I_0$. Тогда матрица системы ограничений многогранного множества M_0 имеет вид:

$$D_0 = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -1 & 0 & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & & & & \cdot & 0 & & & & & & & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_r}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_s}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_q}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_p}{\partial y_1} \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\
\frac{\partial h_1}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_r}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_s}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_q}{\partial y_m} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial h_p}{\partial y_m}
\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг системы ограничений для многогранного множества M_0 равен p и, следовательно, оно имеет вершины. В частности, точка λ будет вершиной тогда и только тогда, когда ([10], с. 71, теорема 1.4) она удовлетворяет ограничениям

$$\lambda_i \geq 0 \quad i \in I(y), \quad \lambda_i = 0 \quad i \notin I(y), \quad \lambda_i = 0 \quad i \in I_0 \setminus I_{00},$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) \ + \nabla f(y) = 0,$$

среди которых p линейно независимых ограничений выполняются как точные равенства.

Отсюда следует, что, если ранг системы векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in I_0 \cup I(y)$ равен q, то точка λ будет вершиной в M_0 тогда и только тогда, когда не менее p - q ее компонент λ_i равны нулю.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть множество множителей Лагранжа $\Lambda(y)$ не пусто. Тогда для любой максимальной линейно независимой подсистемы $\nabla h_i(y) \quad i \in J \subset (I_0 \cup I(y))$ из системы векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in I_0 \cup I(y)$ множество $\Lambda(y)$ содержит точку λ, у которой отличными от нуля могут быть только компоненты λ_i $i \in J$.

Связь CPLD с *R*-регулярностью

Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим $\Pi_C(v)$ множество точек из C, ближайших к точке v. Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования

$$f_v(y) \to \min, \ y \in C, \text{ где } f_v(y) = |y - v|.$$

Обозначим

$$L_v(y,\lambda) = f_v(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle,$$
$$\Lambda_v(y) = \quad \lambda \in R^p \mid \nabla L_v(y,\lambda) = 0, \lambda_i \ge 0, \lambda_i h_i(y) = 0, i \in I \quad .$$

Лемма 2. ([11]). Пусть $y_0 \in fr\ C$, и существуют числа $M > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что при всех $v \in y_0 + \delta_0 B$, $v \notin C$, в точках $y(v) \in \Pi_C(v)$ выполнено условие

$$\Lambda_v^M(y) = \left\{ \lambda \in \Lambda_v(y) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \le M \right\} \ne \varnothing$$

Тогда множество C R-регулярно в точке y_0.

Покажем, из CPLD следует R-регулярность.

Лемма 3. Пусть $y_0 \in fr\ C$ удовлетворяет условию CPLD. Тогда существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $v \notin C$, $v \in y_0 + \delta B$ условие

$$\Lambda_v^M(y) = \left\{ \lambda \in \Lambda_v(y) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \le M \right\} \ne \varnothing$$

имеет место во всех точках $y = y(v) \in \Pi_C(v)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. В этом случае существует последовательность $v_k \to y_0$ такая, что $v_k \notin C$ и $\rho(0, \Lambda_{v_k}(y_k)) \to \infty$ для $y_k = y(v_k) \in \Pi_C(v_k)$. Поскольку $|v_k - y_k| \le |v_k - y_0|$, в этом случае $y_k = y(v_k) \to y_0$.

Из выполнения CPLD в точке $y_0 \in frC$ следует, что C будет *CPLD*-регулярным во всех точках некоторой окрестности y_0. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Lambda_{v_k}(y_k) \ne \varnothing$, $h_i(y_k) = 0 \quad i \in I_0 \cup I(y_k), \quad h_i(y_k) < 0 \quad i \notin (I_0 \cup I(y_k))$, $k = 1, 2, \ldots$.

Более того, выделяя, если необходимо, подпоследовательность из $\{y_k\}$ и обозначая ее также $\{y_k\}$, мы можем считать, что $I(y_k) = I^*$, где I^* не зависит от y_k.

Тогда $h_i(y_k) = 0 \quad i \in I^*, \quad h_i(y_k) < 0 \quad i \in (I \setminus I^*)$. Обозначим $J = I_0 \cup I^*$. Очевидно, для любого y_k существует $i \in J$, для которого $\nabla h_i(y_k) \ne 0$, иначе из определения $\Lambda_{v_k}(y_k)$ следует $\nabla f_{v_k}(y_k) = 0$, что невозможно.

В системе $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_0\}$ выберем максимальную линейно-независимую подсистему $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_{00}\}$, где $I_{00} \subset I_0$, и дополним ее до максимальной линейно-независимой подсистемы $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_{00} \cup I_0^*\}$ в системе $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_0 \cup I^*\}$, где $I_0^* \subset I^*$. Без потери общности мы можем предполагать, что $J^0 = I_{00} \cup I_0^*$ не зависит от k. В силу леммы 1 при $\Lambda_{v_k}(y_k) \ne \varnothing$ система

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y_k) + \nabla f_{v_k}(y_k) = 0, \\ \lambda_i \ge 0 \quad i \in I, \quad \lambda_i = 0 \quad i \notin I_0^*, \; \lambda_i = 0 \quad i \notin I_{00},\end{gathered} \tag{1}$$

имеет решение λ^k такое, что $\lambda_i^k = 0$ для всех $i \notin I_0^*$ и всех $i \notin I_{00}$.

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda^k |\lambda^k|^{-1} \to \bar{\lambda}$. Тогда, поскольку $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(y_k)$ и $\lambda^k \to \infty$, из (1) следует:

$$\sum_{i\in I_{00}\cup I_0^*} \bar{\lambda}_i \nabla h_i(y_0) = 0, \quad \bar{\lambda}_i \geq 0 \quad i \in I, \quad \bar{\lambda}_i = 0 \quad \text{для всех } i \in I \setminus I_0^*,\ i \in I_0 \setminus I_{00},$$

где $|\lambda| = 1$. Последнее означает, что система векторов $\{\nabla h_i(y_0) \quad i \in J^0 = I_{00} \cup I_0^*\}$ положительно линейно зависима и, значит, вследствие условия CPLD векторы $\nabla h_i(y_k) \quad i \in J^0$ должны быть линейно зависимы. Но это противоречит определению этой системы векторов. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы.

Теорема 1. Пусть в точке $y_0 \in C$ выполняется условие CPLD. Тогда C R-регулярно в этой точке.

Доказательство. Если $y_0 \in \operatorname{int} C$, то $\rho(y, C) = 0$ для всех y из некоторой окрестности y_0 и, следовательно, в точке имеет место R-регулярность. В случае, когда $y_0 \in fr\, C$, справедливость утверждения теоремы следует применением леммы 2 и леммы 3.

Следующий пример показывает, что обратное утверждение к теореме 1 не верно, т.е. из R-регулярности не следует выполнение условия CPLD.

Пример 1. Пусть

$$C = \quad y \in R^2 \mid h_1(y) = y_1 - y_2^2 \leq 0, \quad h_2(y) = -y_1 - y_2^2 \leq 0, \quad h_3(y) = y_2 = 0 \quad , \ y_0 = (0,0).$$

Тогда

$$\nabla h_1(y) = (1, -2y_2),\ \nabla h_2(y) = (-1, -2y_2),\ \nabla h_3(y) = (0,1).$$

Нетрудно проверить, что CPLD не выполняется в точке $y_0 \in C$ в то время как множество C R-регулярно в данной точке.

ON CONSTANT POSITIVE LINEAR DEPENDENCE CONDITION IN MATHEMATICAL PROGRAMMING

S.I. SIROTKO, S.M. STAKHOVSKI, L.I. MINCHENKO

Abstract

The relation between the constant positive linear (CPLD) constraint qualification and R-regularity (error bound property) is studied. The main result is that the CPLD constraint qualification implies R-regularity.

Литература

1. *Luderer B., Minchenko L. and Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Publ., Dordrecht, 2002.
2. *Mangasarian O.L., Fromovitz S.* // J. Math. Analysis and Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
3. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
4. *Qi L., Wei Z.* // SIAM Journal on Optimization. 2000. Vol. 10. P. 963–981.
5. *Andreani R., Martinez J.M., Schverdt M.L.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 2005. Vol. 125. P. 473–485.
6. *Hestenes M.R.* Optimization theory — the finite dimensional case. John Wiley, N.-Y., 1975.
7. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
8. *Ioffe A.D.* // Trans. American Math. Soc. 1979. Vol. 251. P.61–69.
9. *Bosch P., Jourani A., Henrion R.* // Applied Mathematics and Applications. 2004. Vol. 50. P.161–181.
10. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. М., 1963.
11. *Минченко Л.И., Гвоздь Е.Н.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 51, № 3. С.5–9.