УДК 517.977.58

ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ПОЛИТИКИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМЕХАМИ

О.И. КОСТЮКОВА, Н.М. ФЕДОРЦОВА

Институт математики НАН Беларуси
Сурганова, 11, Минск, 220072, Беларусь

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки,6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 10 июня 2009

Рассматриваются линейные динамические системы с помехами (возмущениями). Для данных систем решается задача построения оптимальной гарантированной политики управления, которую в процессе управления системой разрешается корректировать в заданные моменты времени. Предлагаемая политика управления гарантирует, что для всех допустимых возмущений значение критерия качества не превосходит заранее вычисленного значения, аппроксимирующего оптимальное значение критерия качества.

Ключевые слова: линейные задачи оптимального управления, закон управления, политика управления.

Введение

В работе рассматривается класс линейных задач оптимального управления системой с ограниченными помехами. В настоящее время существуют различные подходы к решению таких задач [1]. Среди них отметим следующие два. При использовании первого подхода строится управление (программное оптимальное гарантированное управление), имеющее наилучшее значение критерия качества при наихудшей реализации помехи. Второй подход заключается в нахождении оптимальной гарантированной политики управления, состоящей из законов управления, конкретные значения которых зависят от реализовавшихся возмущений.

Достоинство первого подхода в том, что он позволяет достаточно просто найти решение задачи. Недостатком является то, что до начала процесса управления строится лишь одно управление для всех возможных возмущений. При этом не принимается во внимание дополнительная информация о состоянии системы, которая может быть получена в процессе управления. Это может привести к плохому качеству найденного управления. В связи с этим для решения поставленной в данной работе задачи будет использоваться второй подход.

Для рассматриваемой задачи строится оптимальная гарантированная политика управления, которая может корректироваться в заданные промежуточные моменты времени в зависимости от реализовавшихся состояний системы в данные моменты. Показано, что для нахождения закона управления из оптимальной политики на некотором интервале управления необходимо решить соответствующую многоуровневую минимаксную задачу.

Наряду с оптимальной политикой строится политика управления, аппроксимирующая оптимальную политику. Аппроксимирующая политика управления гарантирует, что при любом допустимом возмущении значение критерия качества не превзойдет заранее подсчитанной оценки.

Постановка задачи

Рассматривается линейная динамическая система управления вида

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bu(t) + gw(t),\ z(0) = z_0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rank}(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n,\ \operatorname{rank}(g, Ag, ..., A^{n-1}g) = n,$$

на временном интервале $T = [0, t_*]$. Здесь $z(t) \in R^n$ — состояние системы в момент времени t, $u(t) \in R,\ t \in T$ — функция управления, принадлежащая множеству U, $w(t) \in R, t \in T$, — функция неизвестного возмущения, принадлежащая заданному ограниченному множеству Ω (множества U и Ω определяются ниже). Начальное состояние системы $z_0 \in R^n$ неизвестно до начала процесса управления, однако предполагается, что оно станет известно непосредственно в момент начала процесса управления. Матрица $A \in R^{n \times n}$ и векторы $b, g \in R^n$ заданы.

Предполагается, что на отрезке T управления системой заданы моменты времени $t_i,\ i = \overline{1, m-1},\ m > 1$, такие, что $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = t_*$. Для всех $i,\ i = \overline{1, m},$ выражение $z(t \mid y, u_i(\cdot), w_i(\cdot)),\ t \in T_i = [t_{i-1}, t_i]$, определяет траекторию возмущенной системы

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bu_i(t) + gw_i(t),\ \ t \in T_i,\ \ z(t_{i-1}) = y,$$

порожденную управлением $u_i(\cdot) \in U_i$, возмущением $w_i(\cdot) \in \Omega_i$ и состоянием системы $y \in R^n$ в момент времени $t = t_{i-1}$. Здесь

$$u_i(\cdot) = (u_i(t), t \in T_i) \in U_i = L_2(T_i),\ \ w_i(\cdot) = (w_i(t), t \in T_i) \in \Omega_i = \{w(\cdot) \in L_2(T_i) : \int_{T_i} w^2(t)dt \le v_i\},$$

числа $v_i > 0,\ i = \overline{1, m},$ заданы. Обозначим через $z_0 = z(0),\ z_i = z(t \mid z_{i-1}, u_i(\cdot), w_i(\cdot)),\ i = \overline{1, m},$ состояния системы (1) в моменты времени $t = t_i,\ i = \overline{0, m}.$ Множества допустимых управлений U и возмущений Ω с учетом введенных обозначений определяются следующим образом

$$U = \{u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), ..., u_m(\cdot)) : u_i(\cdot) \in U_i,\ i = \overline{1, m}\},$$

$$\Omega = \{w(\cdot) = (w_1(\cdot), w_2(\cdot), ..., w_m(\cdot)) : w_i(\cdot) \in \Omega_i,\ i = \overline{1, m}\}. \tag{2}$$

Качество допустимого управления $u(\cdot) \in U$ оценивается критерием

$$J(z_0, u(\cdot)) = \max_{w(\cdot) \in \Omega} \sum_{i=1}^{m} \left(\left\| z(t_i \mid z_{i-1}, u_i(\cdot), w_i(\cdot)) - d_i \right\|^2_{S_i} + \int_{T_i} u_i^2(t)dt \right), \tag{3}$$

где n — векторы d_i и $n \times n$ — матрицы $S_i \dot{>} 0$, $i = \overline{1, m}$, заданы. Здесь и в дальнейшем: $S \dot{>} 0$ означает, что симметричная матрица S положительно определена, $\|z\|^2_S$ — взвешенная норма вектора $z \in R^n$ с некоторой положительно определенной матрицей S : $\|z\|^2_S := z^T S z$.

Необходимо найти такое управление, которое доставляет минимальное гарантированное значение критерию качества (3)

$$J^0(z_0) = \min_{u(\cdot) \in U} J(z_0, u(\cdot)). \tag{4}$$

Пусть в каждый из заданных моментов t_i, $i = \overline{1, m-1}$, можно: а) измерить текущее состояние $z_i = z(t_i \mid z_{i-1}, u_i(\cdot), w_i(\cdot))$ системы (1); б) скорректировать управление на следующем временном интервале $T_{i+1} = [t_i, t_{i+1}]$, используя новую информацию о состоянии системы.

Принимая во внимание дополнительные предположения, вместо одного управления будем строить политику управления $\pi = (u_i(\cdot \mid z_{i-1}), i = \overline{1, m})$, состоящую из законов управления $u_i(\cdot \mid z_{i-1}) = (u_i(t \mid z_{i-1}), t \in T_i)$, $z_{i-1} \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, каждый из которых действует на соответствующем временном интервале $T_i = [t_{i-1}, t_i]$. Траектория $z(t) = z(t \mid \pi, w(\cdot))$, $t \in T$, системы, соответствующая политике управления π, определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bu_i(t \mid z(t_{i-1})) + gw_i(t), \quad t \in T_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad z(0) = z_0.$$

Критерий качества для политики управления задается соотношением

$$J(z_0, \pi) = \max_{w(\cdot) \in \Omega} J(z_0, \pi, w(\cdot)), \; J(z_0, \pi, w(\cdot)) = \sum_{i=1}^{m} \left(\left\| z(t_i \mid \pi, w(\cdot)) - d_i \right\|^2_{S_i} + \int_{T_i} u_i^2(t \mid z(t_{i-1} \mid \pi, w_i(\cdot)))dt \right). \quad (5)$$

Оптимальной является такая политика управления

$$\pi^0 = (u_i^0(\cdot \mid z_{i-1}), i = \overline{1, m}), \;\; u_i^0(\cdot \mid z_{i-1}) = (u_i^0(t \mid z_{i-1}), t \in T_i), \; z_{i-1} \in R^n, \; i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

которая минимизирует критерий качества $J(z_0, \pi)$:

$$J(z_0, \pi^0) = \min_{\pi} J(z_0, \pi). \quad (7)$$

Использование в данной постановке промежуточных точек коррекции на интервале управления значительно улучшает гарантированное значение критерия качества по сравнению с тем, которое дает программное оптимальное гарантированное управление $u^*(\cdot) \in U$, получаемое при первом подходе к решению поставленной задачи. Управление $u^*(\cdot) \in U$ является лишь допустимым управлением для задачи во второй постановке. При втором подходе решением является не одно управление, а политика, состоящая из нескольких законов управления. Конкретная реализация политики в конкретной ситуации зависит от состояний, в которые динамическая система попадает в каждый из заданных моментов времени под влиянием возмущений и управляющих воздействий.

Цель работы — доказать существование оптимальной политики, вывести соотношения, определяющие ее, и определить способы преодоления вычислительных трудностей.

Оптимальная политика управления

Основываясь на [2–4], обоснуем существование оптимальной политики управления π^0 (6) и выведем соотношения, определяющие ее.

Рассмотрим временной интервал $T_m = [t_{m-1}, t_m]$. Пусть в момент времени $t = t_{m-1}$ система (1) находится в состоянии $z(t_{m-1}) = z_{m-1}$. Оптимальное гарантированное управление $u_m^0(t \mid z_{m-1})$ на интервале T_m является решением минимаксной задачи

$$J_m(z_{m-1}) := \min_{u_m \in U_m} \max_{w_m \in \Omega_m} \left(\left\| z(t_m \mid z_{m-1}, u_m(\cdot), w_m(\cdot)) - d_m \right\|^2_{S_m} + \int_{T_m} u_m^2(t)dt \right). \quad (8)$$

Можно показать, используя лемму 1 (см. [4]), что задача (8) представима в виде

$$J_m(z_{m-1}) := \min_{\psi_m \in R^n} \max_{\tilde{z}_m \in Z_m^*(z_{m-1}, \psi_m)} \left(\tilde{z}_m^T S_m \tilde{z}_m + \psi_m^T G_m \psi_m \right), \quad (9)$$

где

$$Q_i = \int_{T_i} F(t_i,\tau)g(F(t_i,\tau)g)^T d\tau,\ G_i = \int_{T_i} F(t_i,\tau)b(F(t_i,\tau)b)^T d\tau,\ F_i = F(t_i,t_{i-1}),$$
$$Z_i^*(x,\psi) := \{z \in R^n : \|z - F_i x - G_i\psi + d_i\|^2_{Q_i^{-1}} \le v_i,\ x,\psi \in R^n\},\ i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Здесь и далее $F(t,\tau)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$.

По решению $\psi_m^0(z_{m-1}) \in R^n$ одноуровневой минимаксной задачи (9) закон управления $u_m^0(t \mid z_{m-1}), t \in T_m$, строится по правилу $u_m^0(t \mid z_{m-1}) = \psi_m^{0T}(z_{m-1})F(t_m,t)b,\ t \in T_m,\ z_{m-1} \in R^n$.

Предположим, что для некоторого $i, 1 \le i \le m-1$, законы управления $u_j^0(\cdot \mid z_{j-1}) \in U_j$ на интервалах $T_j,\ j = \overline{i+1,m}$, найдены. Предположим также, что известна функция $J_{i+1}(z_i)$, $z_i \in R^n$, которая дает сумму последних $(m-i)$ членов в критерии качества (5).

Рассмотрим временной интервал $T_i = [t_{i-1}, t_i]$. Предположим, что в момент $t = t_{i-1}$ рассматриваемая система находится в состоянии $z(t_{i-1}) = z_{i-1}$. Оптимальное гарантированное управление $u_i^0(t \mid z_{i-1})$ на интервале T_i является решением минимаксной задачи

$$J_i(z_{i-1}) := \min_{u_i \in U_i} \max_{w_i \in \Omega_i} \ \|z(t_i \mid z_{i-1}, u_i(\cdot), w_i(\cdot)) - d_i\|^2_{S_i} + \int_{T_i} u_i^2(t)dt + J_{i+1}(z(t_i \mid z_{i-1}, u_i(\cdot), w_i(\cdot)))\ . \tag{11}$$

Аналогично предыдущему случаю можно показать, что задача (11) представима в виде

$$J_i(z_{i-1}) := \min_{\psi_i \in R^n} \max_{\tilde{z}_i \in Z_i^*(z_{i-1},\psi_i)} \ \tilde{z}_i^T S_i \tilde{z}_i + \psi_i^T G_i \psi_i + J_{i+1}(\tilde{z}_i + d_i)\ , \tag{12}$$

где для каждого $j,\ j = \overline{i,m},$ множество $Z_j^*(x,\psi)$ определяется соотношением (10).

Решение $\psi_i^0(z_{i-1}) \in R^n$ минимаксной задачи (12) позволяет построить закон управления $u_i^0(t \mid z_{i-1}), t \in T_i$, по правилу

$$u_i^0(t \mid z_{i-1}) = \psi_i^{0T}(z_{i-1})F(t_i,t)b,\ t \in T_i,\ z_{i-1} \in R^n. \tag{13}$$

Итак, чтобы найти решение исходной задачи оптимального управления, необходимо для $i = \overline{1,m-1}$ решить уравнение Беллмана (12) с начальным условием (9).

Принимая во внимание (9) и рекурсивный характер соотношения (12), функции $J_i(z_{i-1}),\ i = \overline{1,m},$ можно представить в виде

$$J_i(z_{i-1}) := \min_{\psi_i \in R^n} \max_{\tilde{z}_i \in Z_i^*(z_{i-1},\psi_i)} \dots \min_{\psi_m \in R^n} \max_{\tilde{z}_m \in Z_m^*(\tilde{z}_{m-1}+d_{m-1},\psi_m)} \sum_{j=i}^{m} \left(\tilde{z}_j^T S_j \tilde{z}_j + \psi_j^T G_j \psi_j \right),\ i = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Задача (14) является $(m-i+1)$ — уровневой минимаксной задачей. У нее всегда есть решение вследствие ограниченности допустимых множеств.

Функция $J_1(z_0)$ определяет значение критерия качества (5) оптимальной политики управления π^0 при заданном начальном состоянии $z_0 \in R^n$ системы в задаче (1): $J(z_0,\pi^0) = J_1(z_0)$. Для каждого $i,\ i = \overline{1,m},$ закон управления $u_i^0(t \mid z_{i-1})$, $t \in T_i$, из оптимальной политики π^0 определяется соотношением (13), где $\psi_i^0(z_{i-1})$ — решение задачи (14).

Итак, для построения оптимальной политики необходимо для каждого $i, i = \overline{1,m}$, решить задачу (14). Однако решение задач (14) сопряжено со значительными вычислительными трудностями. На данный момент не существует стандартных методов, которые бы позволили их решить. Ниже будет предложен алгоритм упрощения задач вида (14) путем построения их верхних аппроксимаций. Аппроксимирующие задачи не дают точных значений искомых векторов $\psi_i^0(z_{i-1}) \in R^n, i=\overline{1,m}$, однако аппроксимирующая каждой i-й задачи позволяет найти такой вектор $\psi_i^*(z_{i-1}) \in R^n$, который может использоваться для построения закона управления на i-м интервале по правилу (13) с заменой $\psi_i^0(z_{i-1})$ на $\psi_i^*(z_{i-1})$. Построенные законы $u_i^*(\cdot \mid z_{i-1}), i=\overline{1,m},$ формируют политику управления π^*, которая аппроксимирует оптимальную политику π^0. Аппроксимирующие задачи по своей структуре значительно проще соответствующих исходных минимаксных задач. Решать их можно стандартными методами.

Алгоритм построения аппроксимирующей политики управления

Вспомогательные результаты. При заданных $S,G,F,Q \in R^{n\times n} (S,G,Q \dot{>} 0, \det F \neq 0)$, $d \in R^n, v \in R, v > 0$, рассмотрим следующие две задачи оптимизации

$$I_0(x) := \min_{\psi\in R^n} \max_{z\in R^n} \ z^T S z + \psi^T G \psi$$

при условии

$$\left\| z - Fx - G\psi + d \right\|_{Q^{-1}}^2 \le v, \ x \in R^n, \tag{15}$$

и

$$I_*(x) := \min_{\lambda \ge \lambda_{max}(\bar{S})} \left[\tilde{f}(x,\lambda) + \lambda v \right], \ x \in R^n, \tag{16}$$

где

$$\tilde{f}(x,\lambda) := (\bar{F}x - \bar{d})^T \left[\bar{G} + \bar{S}^{-1} - I/\lambda \right]^{-1} (\bar{F}x - \bar{d}),\ \bar{S} = T^T S T,\ \bar{G} = T^{-1} G T^{-T},\ \bar{F} = T^{-1}F,\ \bar{d} = T^{-1}d,\ Q = TT^T.$$

Здесь и далее I — единичная матрица, $\lambda_{max}(S)$ — максимальное собственное значение матрицы S. Задачи (15) и (16) эквивалентны в смысле следующей леммы.

Лемма 1. *Справедливо равенство* $I_0(x) = I_*(x)$. *При известном решении* $\lambda^0 = \lambda^0(x)$ *задачи* (16) *решение* $\psi^0 = \psi^0(x)$ *задачи* (15) *строится по правилу* $\psi^0 = \left[Q/\lambda^0 - S^{-1} - G \right]^{-1}(Fx - d)$.

Принимая во внимание обозначения, принятые в предыдущем разделе, введем следующие обозначения:

$$M_m(\lambda_m) := \left(G_m + S_m^{-1} - Q_m/\lambda_m \right)^{-1},\ M_{i+1}(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) := \left(G_{i+1} + \bar{S}_{i+1}^{-1}(\lambda_{i+2},...,\lambda_m) - Q_{i+1}/\lambda_{i+1} \right)^{-1},\ i=\overline{1,m-2},$$

$$\bar{S}_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) := \left(S_i + F_{i+1}^T M_{i+1}(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) F_{i+1} \right) \dot{>} 0,\ i=\overline{1,m-1},$$

$$h_{m-1}(\lambda_m) := d_{m-1} + \left(F_m^{-1} - \bar{S}_{m-1}^{-1}(\lambda_m) S_{m-1} F_m^{-1} \right) d_m,$$

$$h_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) := d_i + \left(F_{i+1}^{-1} - \bar{S}_i^{-1}(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) S_i F_{i+1}^{-1} \right) h_{i+1}(\lambda_{i+2},...,\lambda_m),\ i=\overline{1,m-2},$$

$$g_{m-1}(\lambda_m) := d_m^T F_m^{-T} S_{m-1} \left[S_{m-1}^{-1} - \bar{S}_{m-1}^{-1}(\lambda_m) \right] S_{m-1} F_m^{-1} d_m,$$

$$g_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) := h_{i+1}^T(\lambda_{i+2},...,\lambda_m) F_{i+1}^{-T} S_i \left[S_i^{-1} - \bar{S}_i^{-1}(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) \right] S_i F_{i+1}^{-1} h_{i+1}(\lambda_{i+2},...,\lambda_m),\ i=\overline{1,m-2},$$

$$\tilde f_m(z,\lambda_m) := (F_m z - d_m)^T \left(G_m + S_m^{-1} - Q_m/\lambda_m\right)^{-1}(F_m z - d_m),\ z\in R^n,$$

$$\tilde f_i(z,\lambda_i,...,\lambda_m) := (F_i z - h_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m))^T \left(G_i + \bar S_i^{-1}(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) - Q_i/\lambda_i\right)^{-1}(F_i z - h_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m)),\ i=\overline{1,m-1},$$

$$\tilde{\tilde f}_m(z,\lambda_m) := \tilde f_m(z,\lambda_m) + \lambda_m v_m,\ \tilde{\tilde f}_i(z,\lambda_i,..,\lambda_m) := \tilde f_i(z,\lambda_i,..,\lambda_m) + \sum_{j=i}^{m}\lambda_j v_j + \sum_{j=i}^{m-1} g_j(\lambda_{j+1},..,\lambda_m),\ i=\overline{1,m-1},$$

$$\tilde{\tilde g}_i(z,\psi) := z^T S_i z + \psi^T G_i \psi,\ i=\overline{1,m},\ \ Z_s(x,\psi) := \{z\in R^n : \|z - F_s x - G_s\psi + d_s\|^2_{Q_s^{-1}} \le v_s,\ x,\psi\in R^n\},\ s=\overline{1,m},$$

$$\tilde S_m = T_m^T S_m T_m,\ \ T_m T_m^T = Q_m,\ \ \tilde S_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) = T_i^T \bar S_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) T_i,\ \ T_i T_i^T = Q_i,\ \ i=\overline{1,m-1},$$

$$\mu_m = \lambda_{max}(\tilde S_m),\ \mu_i(\cdot) = \mu_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m) = \lambda_{max}(\tilde S_i(\lambda_{i+1},...,\lambda_m)),\ i=\overline{1,m-1}.$$

Введем также функции $\hat{\hat f}_i(y,\lambda_i,...,\lambda_m),\ y\in R^n,\ i=2,...,m,$ такие, что

$$\hat{\hat f}_i(z+d_{i-1},\lambda_i,...,\lambda_m) \equiv \tilde{\tilde f}_i(z,\lambda_i,...,\lambda_m),\ i=2,...,m.$$

Ранее было показано, что для построения оптимальной политики управления исходной динамической системой (1) необходимо знать функции (см. (9), (12))

$$J_m(z) := \min_{\psi_m\in R^n}\ \max_{\tilde z_m\in Z_m(z,\psi_m)} \tilde{\tilde g}_m(\tilde z_m,\psi_m),\ J_i(z) := \min_{\psi_i\in R^n}\ \max_{\tilde z_i\in Z_i(z,\psi_i)} \left[\tilde{\tilde g}_i(\tilde z_i,\psi_i) + J_{i+1}(\tilde z_i + d_i)\right],\ i=1,...,m-1.$$

Рассмотрим дополнительно функции $I_m(z) := J_m(z),$

$$I_i(z) := \min_{\lambda_m\ge\mu_m}\ \min_{\lambda_{m-1}\ge\mu_{m-1}(\cdot)} ... \min_{\lambda_{i+1}\ge\mu_{i+1}(\cdot)}\ \min_{\psi_i\in R^n}\ \max_{\tilde z_i\in Z_i(z,\psi_i)} \left[\tilde{\tilde g}_i(\tilde z_i,\psi_i) + \hat{\hat f}_{i+1}(\tilde z_i + d_i,\lambda_{i+1},...,\lambda_m)\right],\ i=\overline{1,m-1}.$$

Согласно лемме 1, каждая функция $I_i(z), i=1,...,m-1$, допускает представление

$$I_i(z) = \min_{\lambda_m\ge\mu_m}\ \min_{\lambda_{m-1}\ge\mu_{m-1}(\cdot)} ... \min_{\lambda_i\ge\mu_i(\cdot)} \tilde{\tilde f}_i(z,\lambda_i,...,\lambda_m). \tag{17}$$

Можно доказать справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Имеют место неравенства*

$$J_i(z) \le I_i(z),\ \ i=1,...,m. \tag{18}$$

Аппроксимирующая политика управления. Используя неравенства (18), построим аппроксимирующую политику управления и исследуем ее свойства.

При $i=1$ из (17) и (18) следует, что $J_1(z_0)\le I_1(z_0)$. Следовательно, оптимальное значение целевой функции в задаче (17) при $i=1$ может выступать в качестве аппроксимации оптимального значения критерия качества в исходной задаче (7).

Определим законы управления из аппроксимирующей политики π^*. Пусть при заданном $z_0\in R^n$ решением задачи $I_1(z_0)$ (17) является вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*,...,\lambda_m^*)^T$.

Для каждого $i,\ i=\overline{1,m-1},$ обозначим через $\psi_i^*(\lambda^*,z)$ решение задачи

$$W_i(z) := \sum_{j=i+1}^{m}\lambda_j^* v_j + \sum_{j=i+1}^{m-1} g_j(\lambda_{j+1}^*,...,\lambda_m^*) + \min_{\psi_i\in R^n}\ \max_{\tilde z_i\in Z_i(z,\psi_i)}\left(\tilde{\tilde g}(\tilde z_i,\psi_i) + \tilde f_{i+1}\left(\tilde z_i,\lambda_{i+1}^*,...,\lambda_m^*\right)\right), \tag{19}$$

а через $\psi_m^*(\lambda^*,z) = \psi_m^*(z)$ — решение задачи

$$W_m(z) := \min_{\psi_m\in R^n}\ \max_{\tilde z_m\in Z_m(z,\psi_m)} \tilde{\tilde g}(\tilde z_m,\psi_m). \tag{20}$$

Определим закон управления из политики $\pi^* = \pi^*(\lambda^*)$ на интервале T_i по правилу

$$u_i^*(\cdot \mid z_{i-1}) = \left(u_i^*(t \mid z_{i-1}) = \psi_i^{*T}(\lambda^*, z_{i-1}) F(t_i, t) b,\, t \in T_i \right),\, z_{i-1} \in R^n,\, i = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Лемма 3. *При заданном начальном состоянии* $z(0) = z_0$ *системы построенная политика* $\pi^*(\lambda^*)$ *гарантирует, что при любом допустимом возмущении* $w(\cdot) \in \Omega$ *значение критерия качества* $J(z_0, \pi^*, w(\cdot))$ *не превосходит величину* $I_1(z_0) = W_1(z_0)$*, и что для политики* $\pi^*(\lambda^*)$ *оценка* $W_1(z_0)$ *критерия качества является точной.*

Для построения решения $\psi_m^*(\lambda^*, z) = \psi_m^*(z)$ вспомогательной задачи (20) необходимо, согласно лемме 1, найти решение $\lambda_m^* = \lambda_m^*(z)$ эквивалентной задачи

$$\min_{\lambda_m \geq \lambda_{max}(\tilde{S}_m)} \left(\tilde{f}(z, \lambda_m) + \lambda_m v_m \right). \tag{22}$$

При известном значении λ_m^* решение $\psi_m^*(z)$ задачи (20) строится по правилу

$$\psi_m^*(\lambda^*, z) = \left(Q_m / \lambda_m^* - S_m^{-1} - G_m \right)^{-1} (F_m z - d_m). \tag{23}$$

Для построения решения $\psi_i^*(\lambda^*, z)$ вспомогательной задачи (19), необходимо, согласно лемме 1, отыскать решение $\lambda_i^* = \lambda_i^*(\lambda^*, z)$ эквивалентной задачи вида

$$\min_{\lambda_i \geq \lambda_{max}(\tilde{S}_i(\lambda_{i+1}^*, \ldots, \lambda_m^*))} \left(\tilde{f}(z, \lambda_i, \lambda_{i+1}^*, \ldots, \lambda_m^*) + \lambda_i v_i \right). \tag{24}$$

Зная величину $\lambda_i^* = \lambda_i^*(\lambda^*, z)$, решение задачи (19) нетрудно найти по правилу

$$\psi_i^*(\lambda^*, z) = \left(Q_i / \lambda_i^* - \overline{S}_i^{-1}(\lambda_{i+1}^*, \ldots, \lambda_m^*) - G_i \right)^{-1} \; F_i z - h_i(\lambda_{i+1}^*, \ldots, \lambda_m^*) \; . \tag{25}$$

Задачи (22) и (24) являются задачами минимизации функций одной переменной и могут быть легко решены известными методами.

Подытоживая, получаем следующие правила построения и использования законов управления, определяющих политику $\pi^*(\lambda^*)$. Перед началом реального процесса управления при известном начальном состоянии системы $z_0 = z(t_0)$ формулируется и решается в режиме off-line задача $I_1(z_0)$ (17). Пусть $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ — ее решение. Предположим, что идет динамический процесс и что текущий момент времени t_{i-1}. Согласно предположению, в данный момент известно состояние реальной системы $z_{i-1} = z(t_{i-1})$. Для управления системой на интервале $T_i = [t_{i-1}, t_i]$ необходимо определить закон управления $u_i^*(\cdot \mid z_{i-1})$. Для этого в режиме on-line выполняются следующие вычисления: 1) в зависимости от интервала управления решается задача (22) или (24), по ее решению строится вектор $\psi_i^*(\lambda^*, z_{i-1})$ по соответствующей формуле (23) или (25); 2) строится закон управления $u_i^*(\cdot \mid z_{i-1})$ по правилу (21); 3) закон управления $u_i^*(\cdot \mid z_{i-1})$ подается на вход системы на интервале T_i. Под действием этого управления и некоторого реализовавшегося возмущения система попадает в некоторое состояние $z_i = z(t_i)$ в момент t_i. Согласно предположению, в момент t_i состояние реальной системы z_i становится известным и процесс повторяется.

Экспериментальная часть

В данном разделе приведем результат численного эксперимента, реализующего предложенный алгоритм построения гарантированной политики управления системой (1).

Цель эксперимента — сравнить гарантированное значение критерия качества $I_1(z_0)$ (см. (17) при $i=1$) аппроксимирующей политики управления π^* со значениями критерия $J(z_0,\pi^*,w(\cdot))$ (5), порожденными различными конкретными реализациями возмущений.

Рассмотрим динамическую систему (1) со следующими данными ($n = 4$):

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^T=(3,10,-6,9),\ g^T=(5,-1,4,3),\ z_0^T=(-1,1,3,-4),\ t_*=30.$$

Временной отрезок $T=[0,t_*]$ управления системой делим на три интервала управления $(m=3)$ точками коррекции $t_1=10,\ t_2=15.$ Множество допустимых возмущений Ω определяется соотношением (2), где $v_i=\sqrt{\alpha}(t_i-t_{i-1}),\ i=\overline{1,m},\ \alpha=1,2.$ Качество допустимого управления $u(\cdot)\in U$ оценивается критерием (3), где

$$d_1^T=(3,4,-6,5),\ d_2^T=(1,-5,7,5),\ d_3^T=(-4,7,8,-1),\ S_1=S_2=S_3=I.$$

Гарантированное значение критерия качества в рассматриваемой задаче: $I_1(z_0)=8391{,}1332.$ Для сравнения величины $I_1(z_0)$ с реальными значениями критерия качества $J(z_0,\pi^*,w(\cdot))$ различных реализаций политики π^*, было проведено 50 экспериментов с различными конкретными допустимыми возмущениями $w^{(i)}(\cdot)\in\Omega, i=\overline{1,50}$. Вот некоторые из них:

$$w^{(1)}(t)=-0,7\sin(\sqrt{t}),\ t\in T,$$

$$w^{(2)}(t)=0,2t-1,\ t\in T_1,\ w^{(2)}(t)=0,5\sin(t),\ t\in T_2,\ w^{(2)}(t)=\cos(t)+\sin(t),\ t\in T_3,$$

$$w^{(3)}(t)=0,02t^2,\ t\in T_1,\ w^{(3)}(t)=\sin^2(t),\ t\in T_2,\ w^{(3)}(t)=0,001t^2+0,03t-2,\ t\in T_3.$$

Результаты эксперимента подтвердили тот факт, что величина $J(z_0,\pi^*,w(\cdot))$ ни при каком допустимом возмущении $w(\cdot)\in\Omega$ не превосходит заранее подсчитанного значения $I_1(z_0)$. Так, при использовании политики π^* с указанными выше возмущениями были получены следующие значения критерия качества:

$$J(z_0,\pi^*,w^{(1)}(\cdot))=739,3194,\ \ J(z_0,\pi^*,w^{(2)}(\cdot))=3461,56748,\ \ J(z_0,\pi^*,w^{(3)}(\cdot))=3299,2777.$$

Отметим, что существует допустимое возмущение $\overline{w}(\cdot)\in\Omega$ такое, что $J(z_0,\pi^*,\overline{w}(\cdot))=I_1(z_0).$

Заключение

В работе обоснованы правила построения оптимальной политики управления π^0 линейной динамической системой (1). Формирующие ее законы управления строятся по правилу (13). В связи со сложностью построения политики π^0 предложен метод построения политики управления $\pi^*=(u_i^*(\cdot\mid z_{i-1}),\ i=\overline{1,m}),$ аппроксимирующей оптимальную политику π^0.

Законы управления $u_i^*(\cdot \mid z_{i-1}) = (u_i^*(t \mid z_{i-1}), t \in T_i), z_{i-1} \in R^n, i = \overline{1,m},$ из аппроксимирующей политики управления π^* также строятся по правилу (13), однако в качестве вектора $\psi_i^0(z_{i-1})$ берется не решение соответствующей многоуровневой минимаксной задачи (14), а некоторый вектор $\psi_i^*(z_{i-1})$, который строится по определенному правилу на базе решения задачи, аппроксимирующей задачу (14) сверху.

Показано, что при заданном начальном состоянии $z(0) = z_0$ системы построенная политика π^* гарантирует, что при любом допустимом возмущении $w(\cdot) \in \Omega$ значение критерия качества $J(z_0, \pi^*, w(\cdot))$ не превосходит величину $I_1(z_0)$, подсчитанную согласно (17).

CONSTRUCTION OF A GUARANTEED CONTROL POLICY FOR A LINEAR SYSTEM WITH DISTURBANCES

O.I. KOSTYUKOVA, N.M. FEDARTSOVA

Abstract

Linear dynamic systems in the presence of disturbances are considered. Problem of constructing optimal guaranteed control policy for these systems is solved. Optimal control policy is allowed to be corrected at the given time moments during a control process. Available control policy guarantees that for all admissible disturbances, cost functional does not exceed a calculated beforehand value that approximates the optimal value.

Литература

1. *Lee JH, Yu Z.* // Automatica. 1997. Vol. 33, № 5. P. 763–781.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., 1960.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
4. *Kostina E.A, Kostyukova O.I.* // Mathematical Programming. 2006. Vol. 107. № 1–2(B). P. 131–153.