УДК 517.977

ОСЛАБЛЕННОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ПОСТОЯННОГО РАНГА И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л.И. МИНЧЕНКО, А.А. ВОЛОСЕВИЧ, С.М. СТАХОВСКИЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки,6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 13 мая 2009

Наряду с условиями регулярности, позволяющими в задачах математического программирования гарантировать выполнение принципа Лагранжа в невырожденной форме, в последнее время вызывают интерес так называемые условия регулярности второго порядка, связанные с выполнением необходимых условий оптимальности второго порядка. В публикации 2009 г. Андреани, Эчагю и Шувердт доказали, что известное условие регулярности постоянного ранга является не только условием первого, но и второго порядка. В недавних публикациях авторов было введено ослабленное условие постоянного ранга (RCR), существенно более слабое и легкое для проверки по сравнению с классическим условием постоянного ранга. Главной цель данной статьи является доказательство, что ослабленное условие постоянного ранга является условием, как первого, так и второго порядка, а также вывод так называемых сильных необходимых условий оптимальности второго порядка при выполнении условия RCR.

Ключевые слова: условия оптимальности, условия регулярности, нелинейное программирование.

Введение

Пусть $h_i(y)$ $i=1,\ldots, p$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R. Введем непустое множество допустимых точек $C = \; y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \quad i \in I \;,\; h_i(y) = 0 \quad i \in I_0$, где $y \in R^m$, $I=\{1, \ldots, s\}$, $I_0=\{s+1,\ldots, p\}$ или $I_0=\varnothing$, и рассмотрим задачу (P) математического программирования $f(y) \to \min, \quad y \in C$ с дважды непрерывно дифференцируемой целевой функцией f.

Обозначим через $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$ множество индексов активных в точке $y \in C$ ограничений-неравенств.

Для задачи (P) введем функцию Лагранжа

$$L(y,\lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle \quad \text{, где } \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p),\; h = (h_1,\ldots,h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \quad \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_x L(y,\lambda) = 0,\; \lambda_i \ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I \quad .$$

Известно, что для решения задачи математического программирования широко используются необходимые условия оптимальности, которые в свою очередь справедливы только при выполнении соответствующих условий регулярности [1–10]. Необходимые условия оптимальности в задачах математического программирования делятся на условия оптимальности первого порядка, когда в оптимальной точке требуется существование множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y)$, и условия оптимальности второго порядка, когда дополнительно к существованию множителей Лагранжа требуется, чтобы матрица вторых производных функции Лагранжа была неотрицательно определенной на некотором конусе критических направлений множества C.

Среди необходимых условий оптимальности второго порядка наибольший интерес вызывают так называемые сильные необходимые условия оптимальности SSONC (Strong Second Order Necessary Conditions). Будем говорить, что точка $y_0 \in C$ удовлетворяет условию SSONC, если при любом векторе $\lambda \in \Lambda(y_0)$ выполняется неравенство $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y_0, \lambda)\bar{y}\rangle \geq 0$ для всех $\bar{y} \in K_C(y_0)$,

где $K_C(y_0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle = 0 \quad i \in I_0, \ \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle = 0 \ \ i \in I^+(y_0), \ \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle \leq 0 \quad i \in I^0(y_0)\}$,

$I^+(y_0) = \{i \in I(y_0) \mid \lambda_i > 0\}, I^0(y_0) = \{i \in I(y_0) \mid \lambda_i = 0\}$.

Отметим, что конус критических направлений $K_C(y_0)$ зависит от множителя Лагранжа λ и, следовательно, от целевой функции f.

Соответственно делению необходимых условий на условия первого и второго порядка, условия регулярности делятся на две группы — условия регулярности первого порядка, обеспечивающие выполнение условия $\Lambda(y) \neq \varnothing$, и условия регулярности второго порядка, обеспечивающие, кроме условия, выполнение сильных необходимых условий второго порядка [11–14].

Одним из простейших и наиболее известных условий регулярности является условие линейной независимости градиентов $\nabla h_i(y), \ i \in I(y) \bigcup I_0$, всех активных в точке $y \in C$ ограничений. Известно, что данное условие регулярности является условием регулярности первого и второго порядка.

Более общий характер носит широко применяемое условие регулярности Мангасаряна–Фромовица [4], требующее чтобы в точке $y \in C$ система векторов $\nabla h_i(y), \ i \in I_0$, была линейно независимой и существовал вектор $\bar{y}_0$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \ \bar{y}_0\rangle = 0, \ i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \ \bar{y}_0\rangle < 0, \ i \in I(y)$.

Существует также ряд условий регулярности более слабых (т.е. менее жестких), чем условие Мангасаряна–Фромовица (условие *R*-регулярности [3, 6], условие CPLD [8], условие квазинормальности [9]).

Известно [4], что условие Мангасаряна-Фромовица является условием регулярности первого порядка. В то же время А.В. Арутюновым в [7] построен пример, показывающий, что оно и обобщающие его более слабые условия не гарантируют выполнения сильных необходимых условий оптимальности второго порядка [11, 12]. Это означает, что и любое более слабое условие регулярности не может являться условием регулярности второго порядка. Ввиду данного обстоятельства в литературе неоднократно предлагались условия регулярности второго порядка, включавшие достаточно легко проверяемое условие Мангасаряна–Фромовица в комбинации с некоторым дополнительным условием. В этом направлении в работе [13] были получены так называемые слабые необходимые условия оптимальности второго порядка.

С другой стороны, наряду с условием Мангасаряна–Фромовица, широко признанным в математическом программировании, является условие регулярности постоянного ранга, введенное Р. Жаненом в [5]. Напомним, что множество C удовлетворяет в точке y_0 условию постоянного ранга или *CR*-регулярно в этой точке, если для любого подмножества индексов $J \subset I(y_0) \cup I_0$ система векторов $\nabla h_i(y), \ \ i \in J$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0.

В работе [14] получен вызвавший большой интерес результат о том, что условие постоянного ранга является условием регулярности второго порядка и, более того, как и условие линейной независимости градиентов активных ограничений гарантирует выполнение в оптимальной точке сильных необходимых условий второго порядка.

С другой стороны, в работах [15, 16] предложено ослабленное условие постоянного ранга, существенно более простое для проверки и одновременно более общее, чем оригинальное условие Р. Жанена.

Определение 1. *Будем говорить, что множество C удовлетворяет в точке* $y_0 \in C$ *ослабленному условию постоянного ранга или RCR-регулярно в этой точке, если для любого подмножества индексов* $J = K \cup I_0$*, где* $K \subset I(y_0)$*, система векторов* $\nabla h_i(y), \quad i \in J$ *имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки* y_0.

В [15, 16] показано, что условие *RCR* и условие регулярности Мангасаряна-Фромовица независимы друг от друга, а условие *CR*-регулярности является следствием условия *RCR*. При этом существует широкий круг задач, в которых множество допустимых точек *RCR*-регулярно, но не *CR*-регулярно.

Основной целью нашей работы является доказательство того, что условие *RCR* также является условием регулярности второго порядкам и при его выполнении в оптимальной точке справедливы сильные необходимые условия оптимальности второго порядка.

Необходимые условия оптимальности второго порядка

В [15, 16] показано, что условие *RCR*-регулярности обеспечивает выполнение принципа Лагранжа в невырожденной форме, т.е. является условием регулярности первого порядка.

Пусть $y_0 \in C$. Рассмотрим касательный конус (нижний касательный конус) к множеству *C* в точке $y_0 \in C$ $T_C(y_0) = \bar{y} \in R^m \mid \exists$ функция $o(t)$ такая, что $y + t\bar{y} + o(t) \in C \ \forall t \geq 0$ и множество $\Gamma_C(y_0) = \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I(y_0), \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0$, которое будем называть линеаризованным касательным конусом к *C* в точке $y_0 \in C$.

Лемма 1. *Пусть множество C RCR-регулярно в точке* $y_0 \in C$. *Тогда* $\Gamma_C(y_0) = T_C(y_0)$ *и для любого* $\bar{y} \in \Gamma_C(y_0)$ *найдутся дважды непрерывно дифференцируемая функция* $r(t)$ *и число* $t_0 > 0$ *такие, что* $r(t)/t \to 0$ *при* $t \to 0$ *и* $\xi(t) = y_0 + t\bar{y} + r(t) \in C$ *при* $t \in [0, t_0]$, $h_i(\xi(t)) = 0$, $i \in J = I^2(y_0, \bar{y}) \bigcup I_0$, *при* $t \in (-t_0, t_0)$, *где* $I^2(y_0, \bar{y}) = i \in I(y_0) \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0$.

Доказательство леммы вытекает из детализации доказательства соответствующего утверждения [15, 16].

Теорема 1. *Пусть в точке* $y_0 \in C$*, являющейся решением задачи (P) выполнено условие* *RCR*. *Тогда при любом* $\lambda \in \Lambda(y_0)$ *в данной точке выполняется условие* SSONC.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда $\Lambda(y_0) \neq \varnothing$. Возьмем вектор $\lambda \in \Lambda(y_0)$ и в соответствующем ему конусе критических направлений выберем любой вектор $\bar{y} \in K_C(y_0)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^+(y_0), \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle \leq 0, i \in I^0(y_0),$ и, поскольку $\lambda \in \Lambda(y_0)$, то справедливо равенство $\langle \nabla f(y_0) + \sum\limits_{i \in I_0 \cup I^+(y_0)} \lambda_i \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0$, откуда следует $\nabla f(y_0) = 0$.

В силу леммы 1 существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $r(t)$ такая, что $r(t)/t \to 0$ при $t \to 0$ и $\xi(t) = y_0 + t\bar{y} + r(t) \in C$, $h_i(\xi(t)) = 0$, $i \in I^2(y_0, \bar{y})$, при $t \in [0, t_0]$. Поскольку $\bar{y} \in K_C(y_0) \subset \Gamma_C(y_0)$ и $\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0,\ i \in I^+(y_0)$, то $I^+(y_0) \subset I^2(y_0, \bar{y})$ и, следовательно, по лемме 1 $h_i(\xi(t)) = 0$ для $i \in I^+(y_0) \bigcup I_0$.

Введем функцию $\Phi(t) = f(\xi(t)$. Очевидно $\Phi(t)$ имеет локальный минимум в точке $t = 0$ на множестве $[0, t_0]$, где t_0 — достаточно малое положительное число. Тогда

$$\Phi(t) - \Phi(0) = t\langle \nabla f(y_0), \bar{y} \rangle + t^2\{\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y} \rangle + \langle \nabla f(y_0), r''(0) \rangle\} + o(t^2) =$$

$$= t^2\{\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y} \rangle + \langle \nabla f(y_0), r''(0) \rangle\} + o(t^2) \geq 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y} \rangle + \langle \nabla f(y_0), r''(0) \rangle \geq 0. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$R(t) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(\xi(t)) = 0 \quad t \in (-t_0, t_0),$$ и, следовательно,

$$R''(0) = \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \sum_{i=1}^{p} \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y} \rangle + \langle \sum_{i=1}^{p} \nabla h_i(y_0), r''(0) \rangle = 0. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), получим $\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \sum_{i=1}^{p} \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y} \rangle \geq 0,$ откуда $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y_0, \lambda)\bar{y} \rangle \geq 0$.

Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим задачу (P). Пусть $A \subset R^m$. Обозначим $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$, где $|y|$ — евклидова норма вектора.

Лемма 2 ([6]). *Пусть* $A = \ y \in R^m \mid \langle a_i, y \rangle + b_i \leq 0 \quad i = 1, \ldots, p \ $ *, где* $a_i \in R^m$, $b_i \in R$ *при* $i = 1, \ldots, p$. *Тогда существует число* $\alpha > 0$ *такое, что для всех* $y \in R^m$ $\rho(y, A) \leq \alpha \max \ 0, \ \langle a_i, y \rangle + b_i \leq 0 \ \ i = 1, \ldots, p \ $.

Предположим, что в точке $y_0 \in C$ выполнено условие *RCR*. Известно [15, 16], что в этом случае точка $y_0 \in C$ удовлетворяет условию *R*-регулярности (error bound property) [3, 6] и, следовательно, линеаризованное касательное множество второго порядка

$$\Gamma^2_C(y_0, \bar{y}) = \{\bar{y}_2 \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_2 \rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y} \rangle \leq 0 \; i \in I^2(y_0, \bar{y}),$$

$$\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_2 \rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 h_i(z_0)\bar{y} \rangle \mid = 0 \; i \in I_0\}$$

не пусто при любом $\bar{y} \in \Gamma_C(y_0)$ [3, 17].

Теорема 2. *Пусть в точке* $y_0 \in C$, *удовлетворяющей условию RCR-регулярности, выполнено необходимое условие первого порядка* $\Lambda(y_0) \neq \varnothing$ *и при некотором* $\lambda \in \Lambda(y_0)$ *для всех ненулевых* $\bar{y} \in K_C(y_0)$ *справедливо условие* $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y_0, \lambda)\bar{y} \rangle \ > \ 0$.

Тогда точка y_0 является точкой локального минимума в задаче (P)

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует лежащая в C последовательность $\{y_k\}$ такая, что $y_k \to y_0$ и $f(y_k) < f(y_0)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Не ограничивая общности, можно считать последовательность $\{(y_k - y_0)|y_k - y_0|^{-1}\}$ сходящейся к некоторому вектору $\bar{y}$. Положим $t_k = |y_k - y_0|$. Тогда $y_k = y_0 + t_k\bar{y} + o(t_k)$.

Из соотношений $h_i(y_k) \le 0 \quad i \in I(y_0)$, $h_i(y_k) = 0 \quad i \in I_0$, $f(y_k) - f(y_0) < 0$ получаем $\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle \le 0 \quad i \in I(y_0)$, $\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle = 0 \quad i \in I_0$, $\langle \nabla f(y_0), \bar{y}\rangle \le 0.$

Поскольку $\lambda \in \Lambda(y_0)$, то $\langle \nabla f(y_0), \bar{y}\rangle + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle = 0,$ что возможно только, если $\langle \nabla f(y_0), \bar{y}\rangle = 0$ и $\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle = 0$ для $i \in I^+(y_0)$. Таким образом, выполняются условия $\langle \nabla f(y_0), \bar{y}\rangle = 0$, $I^+(y_0) \subset I^2(y_0, \bar{y})$ и $\bar{y} \in K_C(y_0)$.

Обозначим $\xi_k = (y_k - y_0 - t_k\bar{y})t_k^{-2}$, откуда $y_k = y_0 + t_k\bar{y} + t_k^2\xi_k$, где $t_k\xi_k \to 0$. Тогда $h_i(y_0 + t_k\bar{y} + t_k^2\xi_k) - h_i(y_0) \le 0 \; i \in I(y_0)$, ${}_i(y_0 + t_k\bar{y} + t_k^2\xi_k) - h_i(y_0) = 0 \; i \in I_0$, откуда $\langle \nabla h_i(y_0), \xi_k\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle \le o(t_k^2)t_k^{-2} \; i \in I^2(y_0, \bar{y})$, $\langle \nabla h_i(y_0), \xi_k\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle = o(t_k^2)t_k^{-2} \quad i \in I_0$.

Вследствие непустоты множества $\Gamma_C^2(y_0, \bar{y})$ по лемме 2 из последних соотношений следует, что

$\rho(\xi_k, \Gamma_C^2(y_0, \bar{y})) \le \mu_k$, где $\mu_k \to 0$.

В таком случае найдется вектор $w_k \in \Gamma_C^2(y_0, \bar{y}))$ такой, что $y_k = y_0 + t_k\bar{y} + t_k^2 w_k + o(t_k^2) \in C$ и $t_k w_k \to 0$. Следовательно, $\langle \nabla h_i(y_0), w_k\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle \le 0 \; i \in I^2(y_0, \bar{y})$, $\langle \nabla h_i(y_0), w_k\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle = 0 \; i \in I_0$, $\langle \nabla f(y_0), w_k\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y}\rangle \le \delta_k, \delta_k \to 0.$

Умножая первые два соотношения на соответствующие компоненты λ_i и суммируя с последним, получаем после перехода к пределу $\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y}\rangle + \sum_{i \in I^2(y_0, \bar{y})} \langle \bar{y}, \lambda_i \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle + \sum_{i \in I_0} \langle \bar{y}, \lambda_i \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle \le 0$, что равносильно $\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y_0)\bar{y}\rangle + \sum_{i \in I^+(y_0)} \langle \bar{y}, \lambda_i \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle + \sum_{i \in I_0} \langle \bar{y}, \lambda_i \nabla^2 h_i(y_0)\bar{y}\rangle \le 0$ или $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y_0, \lambda)\bar{y}\rangle \le 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заключение

Таким образом, для задачи математического программирования, удовлетворяющей ослабленному условию регулярности постоянного ранга, получены сильные необходимые условия оптимальности второго порядка и доказаны достаточные условия оптимальности.

RELAXED CONSTANT RANK CONSTRAINT QUALIFICATION AND SECOND ORDER OPTIMALITY CONDITIONS

L.I. MINCHENKO, A.A. VOLOSEVICH, S.M. STAKHOVSKI

Abstract

Nonlinear programming problems are considered under the relaxed constant rank constraint qualification. In this paper we establish that the relaxed constant rank condition is a second order constraint qualification and obtain strong second order necessary optimality conditions and, and in addition, prove sufficient conditions.

Литература

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М., 1990.
2. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. Springer-Verlag, New York, 2000.
3. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
4. *Mangasarian O.L., Fromovitz S.* // J. Mathematical Analysis and Appl. 1967. Vol. 17, P. 37–47.
5. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21, P.110-126.
6. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
7. *Арутюнов А.В.* Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности. Итоги науки и техники, Сер. Мат. анал., 27, ВИНИТИ, М., 1989. С. 147–235.
8. *Andreani R., Martinez J.M., Schverdt M.L.* // J. Optimization Theory and Appl. 2005. Vol. 125. 473–485.
9. *Hestenes M.R.* // Optimization theory — the finite dimensional case. John Wiley, N.-Y., 1975.
10. *Minchenko L., Tarakanov A.* // Optimization, 2005. Vol. 54, P. 433–442.
11. *Anitescu M.* // SIAM J. Optimization, 2000. Vol. 10, P. 116–135.
12. *Baccari A., Trad A.* // SIAM J. Optimization. 2004. Vol. 15. P. 394–408.
13. *Andreani R., Martinez J.M., Schverdt M.L.* // Optimization. 2007. Vol. 56. P. 529–542.
14. *Andreani R., Echague C.E., Schuverdt M.L.* // Optimization (to appear).
15. *Борисенко О.Ф., Минченко Л.И., Стаховский С.М.* // Докл. БГУИР. 2008. № 6. С. 16–21.
16. *Minchenko L., Stakhovski S.* // Optimization (to appear).
17. *Minchenko L., Sakolchik P.* // J.Optim. Theory Appl. 1996. Vol. 90. P. 559-584.