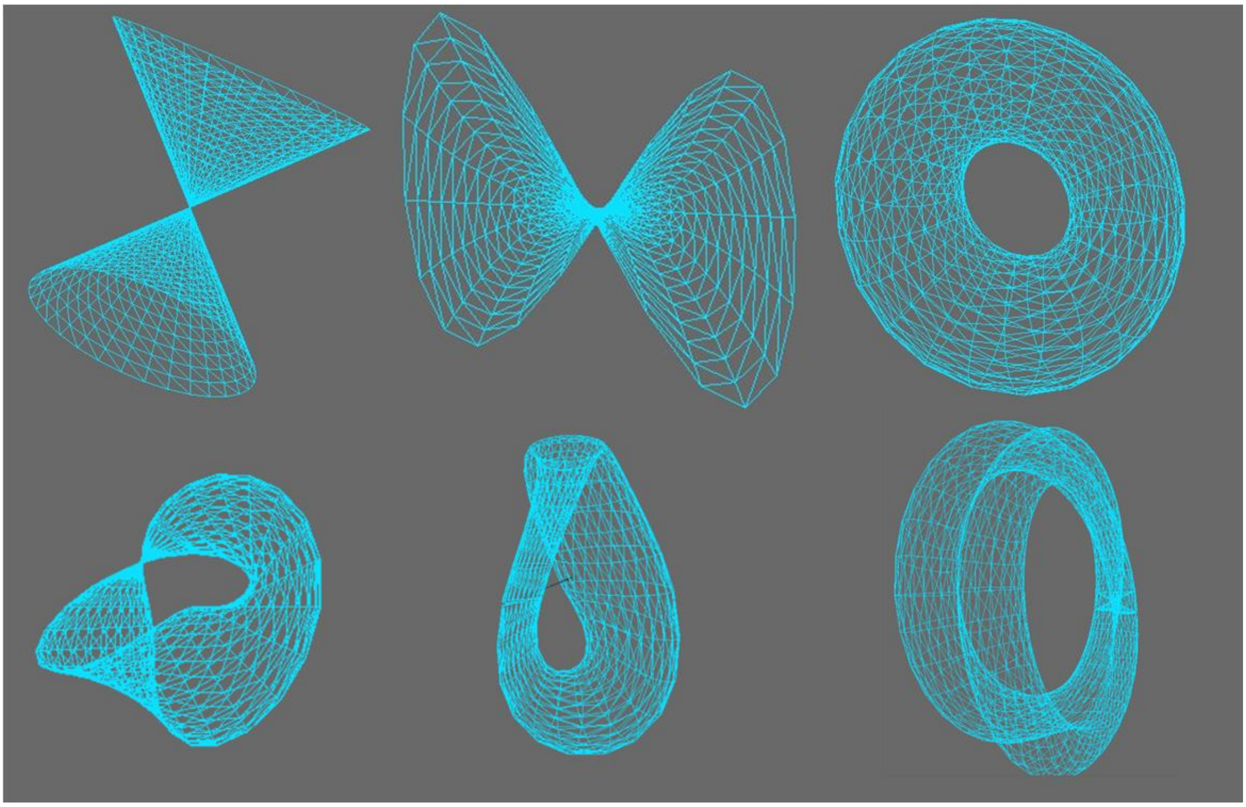

Рис. 2.

Автоматизированное построение различных тел и поверхностей позволяет нам рассмотреть с разных сторон тот или иной 3D объект, расширить знания, изучить более точно его свойства. Наша программа будет особенно полезна студентам и преподавателям, для визуализации трёхмерных объектов в курсе аналитической геометрии и различных приложений теории интегрирования в курсе математического анализа. В дальнейшем мы планируем расширять возможности нашей разработки, как с математической, так и с пользовательской стороны.

Список использованных источников:
1. DirectX 9 уроки программирования на C++, Горнаков С. Г.;
2. Конспект лекций по высшей математике: Письменный Д.;
3. Технология моделирования тел вращения в пространстве / В. В. Фесько, А. С. Орлова // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сборник материалов X Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, 24-24 ноября 2017 года. – Брест: БГТУ, 2017. - С. 62-65.

О ЗАДАЧЕ ИОСИФА ФЛАВИЯ

Белоруссий государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Карамач Н.А., Кот З.К.
Баркова Е. А. – кандидат физ.мат.наук, доцент

Давным-давно, примерно в 1 век н.э., во времена Иудейской войны один ничем не примечательный отряд евреев был загнан римлянами в пещеру с узким входом. Пленникам было предложено сдаться, но вместо этого они решили умереть, не сдавшись врагу: встав в круг, воины договорились, что каждые два воина будут убивать третьего, пока не погибнут все. В составе такого отряда оказался Иосиф Флавий – хитрый историк и военачальник. Он быстро высчитал необходимые для себя и своего товарища места для того, чтобы выжить и сдаться в плен. Так и возникла знаменитая задача Иосифа Флавия, смысл которой заключается в зачеркивании чисел, расставленных по кругу.

Заинтересовавшись задачей Иосифа Флавия, мы решили изменить постановку задачи, решить её и на основании этого получить общий метод решения подобных задач.

Условие новой задачи:

В круге расставлены N чисел. Проходя по кругу, 1-е число пропускается, вычеркиваются числа $2, 3, 4 \ldots q$. Число $q+1$ остается нетронутым. Далее исключаются числа $q+2, q+3, q+4 \ldots 2q$, и так далее.

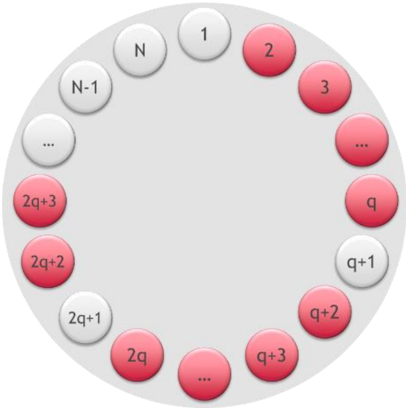

Рисунок - 1. Вычеркнутые после первого прохода числа

Для решения задача разбивается на несколько этапов:
Анализ частных случаев с четным и нечетным количеством чисел, расставленных по кругу;
Вывод рекуррентных соотношений;
Обобщение полученных соотношений и вывод частной формулы.

Четный случай:

Допустим, что изначально в круге имеется $2n$ чисел. После первого прохода по кругу остаются числа с номерами 1, 3, 5 … 2n-3, 2n-1. Следующий проход по кругу будет начинаться с номера 1. Видно, что в круге осталось n чисел, каждое i-е из которых равно $2 * i - 1$. На основе этого выводится рекуррентное соотношение для четного случая:

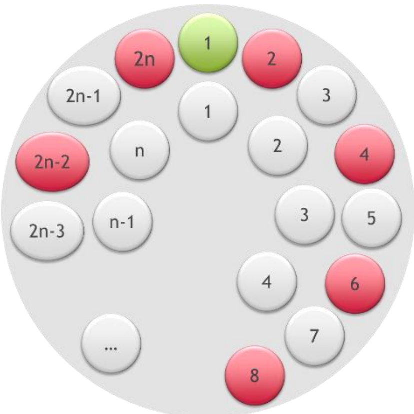

Рисунок - 2. Первый проход по кругу, составленному из четного количества чисел

$$J(2n) = 2J(n) - 1, n \geq 1.$$

Нечетный случай

Теперь в круге расставлено $2n+1$ чисел. Поначалу, все происходит по подобному сценарию. Однако, в этом случае число 1 также вычёркивается для того, чтобы получить ситуацию с n числами. На этот раз рекуррентное соотношение имеет вид

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1, n \geq 1.$$

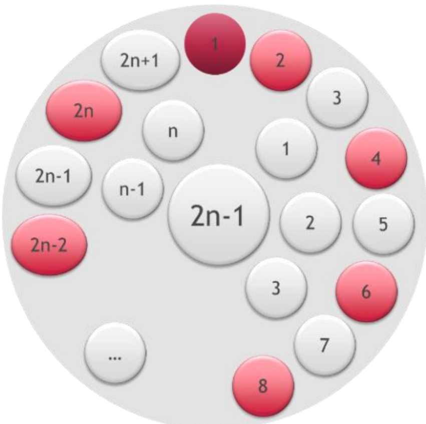

Рисунок - 3. Первый проход по кругу, составленному из нечетного количества чисел

Рекуррентные соотношения

Объединяя получившиеся соотношения с уравнением $J(1) = 1$, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} J(1) = 1; \\ J(2n) = 2J(n) - 1, n \geq 1; \\ J(2n + 1) = 2J(n) + 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Частная формула

Рекуррентное соотношение, полученное ранее, позволяет составить таблицу первых значений $J(n)$ (Рисунок – 4). Несложно заметить, что если сгруппировать значения n по степеням 2-ки (выделено цветом), то в каждой группе $J(n)$ всегда будет начинаться с 1, а затем увеличиваться на 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Итак, запишем n в виде $2^m + l$, где 2^m – наибольшая степень 2-ки, непревосходящая n, а l – то, что остается. Тогда решением полученной системы рекуррентных соотношений будет следующим:

$$J(N) = J(2^m + l) = 2l + 1.$$

Условие второй задачи

Рассмотрим ситуацию, когда в круге стоят натуральные числа от 1 до n, вычеркнем числа 2,3, пропустим число 4 и вычеркнем следующие два числа и т.д. Будем так вычеркивать до тех пор, пока не останется одно число. Это число и будет решением задачи (Рисунок - 4).

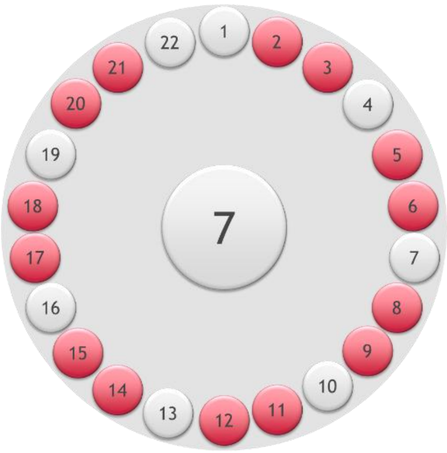

Рисунок - 4. Первый проход по кругу при решении второй задачи. Ответ: 7.

Частный случай

Расставим в круге соответственно 6, 7, 8 чисел. Чтобы число n осталось после первого круга, оно должно иметь вид $n = 3l + 1$ (т.е. при делении на три давать остаток 1). Мы делим n на тройки чисел, два из которых вычеркиваем, значит после удаления остается $l + 1$ число, т.к. удаляется $2l$ чисел.

Чтобы число n осталось невычеркнутым и после второго круга, нужно чтобы $l + 1$ делилось на 3. Предположим, что после второго круга остается k чисел (т.к. вычеркиваются $2k$ чисел). Значит k тогда должно делиться на 3 и так далее, пока после очередного круга не останется меньше 3 чисел и тогда наверняка число n будет вычеркнуто последним. Значит, общая формула для n чисел будет выглядеть следующим образом:

$$n = t * 3^s - 2.$$

Итак, чтобы число n было вычеркнуто последним, оно должно быть представлено в виде двух слагаемых, одно из которых степень тройки, а другое некоторое чётное число.

Частное решение

Представим n в виде $r * 3^s + 2l$. Множитель r нам необходим, чтобы представить некоторые числа. Например, если мы возьмем число 40, выделим максимальную степень тройки - 27, получим что $2l = 13$, откуда четное число $2l = \text{нечетному } 13$. Также, можно заметить, что r – это количество чисел, оставшихся после зачеркивания полного количества кругов (Можно использовать формулу: $r = (n - 1) mod (q - 1) + 1$). Итак, если n представлено в виде $r * 3^s + 2l$, то решением всегда будет являться число 1. Это и будет основа нашего рекуррентного соотношения.

Решение задачи сведением к случаю, рассмотренному ранее

Рассмотрим пример, когда в круге стоят 17 чисел (Рисунок – 5). Проследим цепочку вычеркивания чисел. После того, как мы вычеркнем первую пару чисел в круге, останется 15 чисел. Следующий шаг—вычеркиваем еще 2 числа. В круге остается 13 чисел, вычеркиваем следующую пару и т.д., пока в круге не останется $r * 3s$ чисел. В нашем случае, как только в круге осталось 9 чисел, начертим второй круг и пронумеруем числа снова от 1 до 9. А результат мы знаем заранее: он равен 1. Так как 1 стоит напротив числа 13, то оно и является решением. Такое решение основано на понятии о рекуррентном соотношении, когда последующий член выражается через предыдущий. В нашем случае решение более сложного выражается через решение более легкого. Это помогает быстро найти решение для любого количества чисел.

Итак, решением задачи является число 13. С одной стороны, $13 = J(2l + r * 3^s)$, где l(4) — количество пар чисел, которые были вычеркнуты до тех пор, пока в круге не осталось 9 чисел. С другой стороны, $13 = 3l + 1$.

Рисунок - 5. Пример сведения к случаю, рассмотренному ранее.

Запишем формулу в общем виде:

$$J(n) = J(2l + r * 3s) = 3l + 1$$

Заключение

Итак, мы получили формулу, по которой определяется место числа, вычёркиваемого последним в случае, когда вычеркивается каждое второе число - $J(2^m + l) = 2l + 1$, а также формулу для случая, когда подряд вычеркивается два числа - $J(n) = J(2l + r * 3^s) = 3l + 1$. Способ, который мы применили для решения данной задачи, позволяет вывести общую формулу для случая, когда подряд вычеркивается любое количество чисел - q:

$$Jq(n) = J((q - 1)l \ + \ r * q^s) = ql + 1.$$

ГИПОТЕЗА РИМАНА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Паньков В.А., Чадович В.А.

БорисенкоО.Ф. – к.ф.м.н., доцент

В 2000-м году Математический институт им. Клэя обозначил список из семи математических задач, решение которых не было найдено на протяжении многих лет. Единственной решенной из этого списка задачей остается гипотеза Пуанкаре, доказанная еще в 2003г. Мы бы хотели рассмотреть другую задачу - гипотезу Римана. Гипотеза была сформулирована в 1859 году немецким математиком Бернхардом Риманом и имеет богатую историю, однако так и не была доказана или опровергнута. Более того, до сих пор нет ни намёка на то, чтобы установить её истинность или ложность.

История этой гипотезы берёт свои корни из так называемой Базельской задачи, сформулированной задолго до Римана. Вопрос ставился следующим образом: «Выразить в замкнутом виде бесконечный ряд обратных квадратов». На тот момент уже было известно, что гармонический ряд расходится, а в случае ряда обратных квадратов каждый новый член ряда значительно меньше предыдущего, поэтому «базельский ряд» заинтересовал математиков. Задача была решена в 1735 году Леонардом Эйлером. Потрясающий ответ имел вид $\pi^2/6$. Эйлерово решение дало не только замкнутое выражение для ряда из обратных квадратов, но в качестве побочного продукта еще и замкнутые выражения для многих рядов с чётными степенями знаменателя. Однако для нечётных степеней результат до сих пор неизвестен. Таким образом, мы подобрались к ряду: