ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ БАЗИСА РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Литвинчук Д.В. Воротынцев Д.Д.

Калугина М.А. – к.т.н., доцент

Дифференциальные уравнения имеют многочисленные и самые разнообразные приложения в механике, физике, астрономии, технике и в других разделах высшей математики (например, в математической физике вариационном исчислении, теоретической механике, дифференциальной геометрии). При изучении некоторых явлений в физике, технических науках иногда бывает трудно найти соотношения между величинами, характеризующими данное явление, однако легко находится зависимость между этими величинами и их производными. Однако решения многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях или найти их очень сложно. В этих случаях пользуются приближенными методами решения дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде ряда.

В нашей работе были исследованы зависимость погрешности от выбранной ортогональной системы при решении дифференциальных уравнений высших порядков.

Одним из главных вопросов, возникающих при численном решении вычислительных задач, является оценка достоверности полученного результата. Под ***погрешностью*** понимается некоторая величина, характеризующая точность результата.

Определим последовательность многочленов степени $n(n = 0,1,2,\dots)$ формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} * \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad (1)$$

и назовём их ***многочленами Чебышева - Эрмита***. При n = 0 формула (1) теряет смысл, но мы положим просто $H_0(x) = 1$.

Полиномы Лежандра могут быть определены следующей дифференциальной формулой, называемой формулой Родрига: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ (2). Для $n = 0$ полагаем по определению $P_0(x) = 1$.

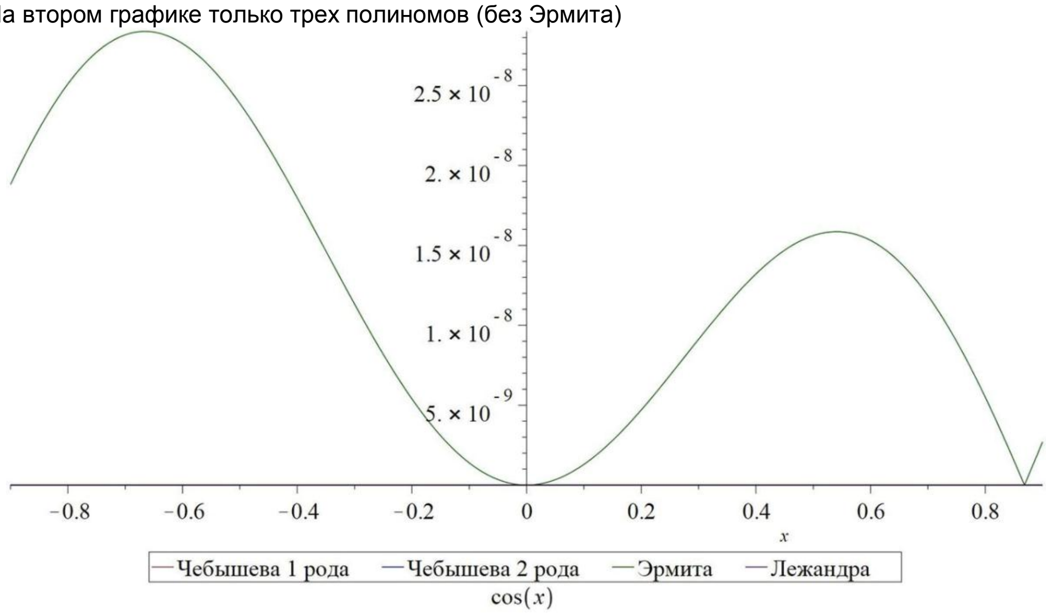
Полиномами Чебышева 1-го рода называются функции $\cos(n * \arccos(x))$, $x \in [-1,1], n = 1,2,3, \dots$

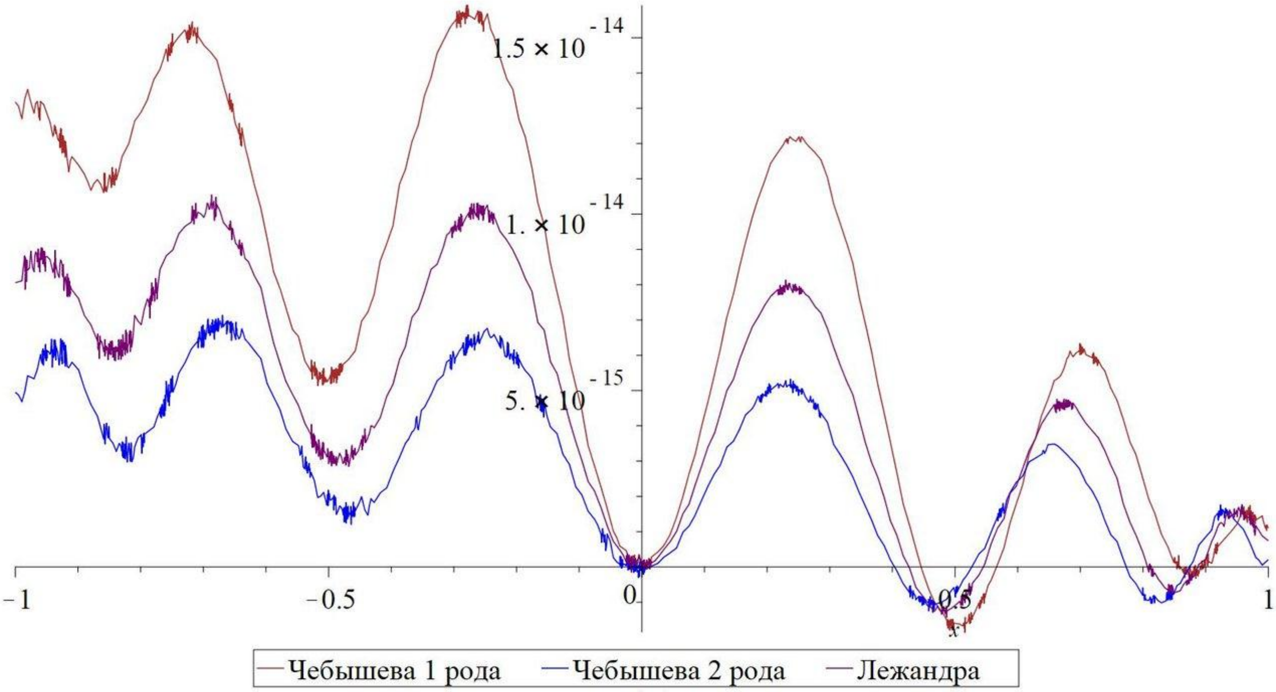
Полиномами Чебышева 2-го рода называются функции $U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x)$, $x \in [-1,1], n = 1,2,3, \dots$

В результате работы были рассмотрены 4 семейства функций: sin(ix), cos(ix), ixsin(x), ixcos(x). Все они дали приблизительно одинаковый результат (см. графики): на небольших значениях i решение ДУ с помощью полиномов Эрмита дает худший результат, с погрешностью порядка 10^-7, остальные - порядка 10^-12. При значениях i около 10-11, погрешности, даваемые всеми полиномами, выравниваются, далее полиномы Эрмита дают лучшее приближение. Остальные полиномы располагаются в следующем порядке (по ухудшению): полиномы Чебышева 2 рода, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева 1 рода. Все они дают приблизительно одинаковые погрешности, но, тем не менее, изменение порядка эффективности на рассмотренных участках не наблюдалось.

На графиках ниже представлена погрешность при разложении функции cos(x) по ортогональным полиномам. На первом графике представлены все четыре полинома: Эрмита, Лежандра, Чебышева 1 и 2 рода.

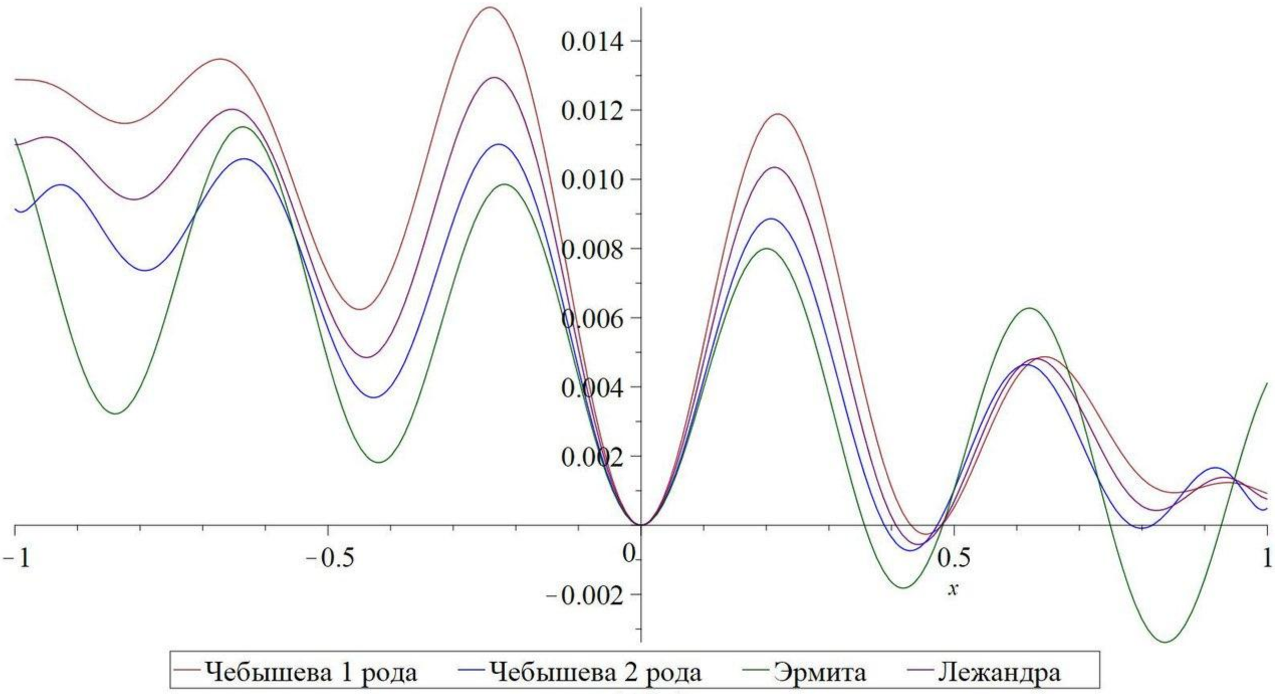
На втором графике только трех полиномов (без Эрмита)





cos(x)

На графике ниже представлена погрешность при разложении cos(15*x) по всем четырем ортогональным полиномам



cos(15 x)

Список использованных источников:

1. Балакин А.Б. Классические ортогональные полиномы.
2. Суетин П. С. Классические ортогональные многочлены
3. Геронимус Я.Л. Теория ортогональных многочленов (Обзор достижений отечественной математики) - М.:Гостехиздат, 1950. 164 с.