Использование треугольных конечных элементов для моделирования прогибов тонких плит

Курочка К.С.; Роговцова О.В.
Кафедра «Информационные технологии»
Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого
Гомель, Республика Беларусь
e-mail: kurochka@gstu.by, olvaro@inbox.ru

***Аннотация*—В данной работе представлены функции формы для треугольного конечного элемента, используемого для определения прогибов тонких плит; получена матрица жесткости и проведен вычислительный эксперимент, показывающий возможность применения полученных функций формы.**

Ключевые слова: метод конечных элементов; прогиб; треугольный конечный элемент

Введение

Тонкие плиты являются одним из распространенных элементов конструкций и узлов. Для исследования их напряженно-деформированного состояния используют различные численные методы. Наибольшую популярность в настоящее время получил метод конечных элементов [1].

При конечноэлементном моделировании прогибов тонких плит используют гипотезы Кирхгофа [2, 3] и применяют прямоугольные четырехугольные элементы [1, 3]. Однако зачастую исследуемые тонкие плты имеют достаточно сложную конфигурацию и (или) содержат сквозные круглые или овальные отверстия (неоднородности). Такие плиты затруднительно дискретизировать прямоугольными четырехугольными элементами. Поэтому является целесообразным применение треугольных конечных элементов, которые обеспечат необнодимое качество дискретизации исследуемой тонкой плиты.

I. Треугольный конечный элемент при моделировании прогибов тонких плит

Воспользовавшись гипотезами Кирхгофа приходим к тому, что поверхность прогиба зависит только от x, y и в каждом узле конечного элемента будем иметь по три степени свободы [3]:

$$\{g\}^T = \{w \quad \theta_x \quad \theta_y\}, \qquad (1)$$

где w – перемещение вдоль оси OZ, θ_x – угол поворота относительно оси OX, θ_y – угол поворота относительно оси OY, причем $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$; $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$.

Таким образом, для данного элемента будем иметь девять степеней свободы, которым должны соответствовать функции формы. Направим координатные оси вдоль одной из сторон треугольника и переместим начало координат в вершину при этой стороне, тогда функции формы примут вид:

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y)\, w(x_i, y_i);\\
\theta_x(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i(x,y)}{\partial y}\, \theta_x(x_i, y_i);\\
\theta_y(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i(x,y)}{\partial x}\, \theta_y(x_i, y_i),
\end{aligned} \qquad (2)$$

где $N_i(x,y)$ – функции формы конечного элемента; x_i, y_i – координаты узла конечного элемента; $i = \overline{1,3}$;

$$\begin{aligned}
N_1(x,y) = \frac{1}{2x_2^3 x_3 y_3^3}\Big(& 2x_2^3 x_3 y_3^3 + 2x_2^3 x_3 y_3^3 x + 2x_2^3 x_3 y_3^3 y -\\
&- (4x_2^2 x_3 y_3^3 + 6x_2 x_3 y_3^3)x^2 - 2x_2^2 x_3 y_3^3 xy +\\
&+ (8x_2^2 x_3^3 y_3 - 5x_2^3 x_3^2 y_3 - 4x_2^3 x_3 y_3^2 - 6x_2^3 x_3 y_3 +\\
&+ 3x_2^2 x_3^2 y_3^2 - 3x_2 x_3^4 y_3 + 12x_2 x_3^3 y_3 - 6x_3^4 y_3)y^2 +\\
&+ (2x_2 x_3 y_3^3 + 4x_3 y_3^3)x^3 + (4x_2^3 x_3^2 + 2x_2^3 x_3 y_3 +\\
&+ 4x_2^3 x_3 - 8x_2^2 x_3^3 - 2x_2^2 x_3^2 y_3 + 4x_2 x_3^4 - 12x_2 x_3^3 +\\
&+ 8x_3^4)y^3 + (4x_2^2 x_3 y_3 - x_2^3 y_3 + x_2^2 y_3^2 - 3x_2 x_3^2 y_3 +\\
&+ 6x_2 x_3 y_3 - 6x_3^2 y_3)x^2 y^2\Big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2(x,y) = \frac{1}{2x_2^3 x_3 y_3^3}\Big(& (2x_2^2 x_3 y_3^3 - 6x_2 x_3 y_3^3)x^2 +\\
&+ (3x_2^2 x_3^2 y_3^2 - 4x_2^2 x_3^3 y_3 + 3x_2 x_3^4 y_3 +\\
&+ 12x_2 x_3^3 y_3 - 6x_3^4 y_3)y^2 - 2x_2^2 x_3 y_3^3 xy +\\
&+ (4x_3 y_3^3 - 2x_2 x_3 y_3^3)x^3 + (4x_2^2 x_3^3 -\\
&- 2x_2^2 x_3^2 y_3 - 4x_2 x_3^4 - 12x_2 x_3^3 + 8x_3^4)y^3 +\\
&+ (6x_2 x_3 y_3 - 2x_2^2 x_3 y_3 + x_2^2 y_3^2 + 3x_2 x_3^2 y_3 -\\
&- 6x_3^2 y_3)x^2 y^2\Big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3(x,y) = \frac{1}{2x_3 y_3^3}(&(6x_3 y_3 - 2x_3 y_3^2 - x_3^2 y_3)y^2 +\\
&+ (2x_3 y_3 - 4x_3)y^3 + y_3 x^2 y^2).
\end{aligned}$$

В случае произвольно ориентированного треугольника функции формы могут быть найдены с помощью преобразования координат. Выбранная локальная система координат будет связываться с исходной декартовой системой соотношениями вида:

$$\{x^*\} = [\Xi]\{x\}, \tag{3}$$

где x^* – вектор локальных координат; x – вектор глобальных координат; $[\Xi]$ – матрица координатных преобразований: $[\Xi] = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2 - x_1}{l} & \dfrac{y_1 - y_2}{l} & -x_1 \\ \dfrac{y_2 - y_1}{l} & \dfrac{x_2 - x_1}{l} & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

II. Построение матрицы жесткости для треугольного конечного элемента

Перепишем соотношения (2) в виде:

$$\{g\} = [N]\{g^e\}, \tag{4}$$

где $\{g^e\}$ – вектор узловых перемещений.

На основании гипотез Кирхгофа [1], уравнений Коши [2] и соотношений (4) можно выразить деформации через узловые перемещения:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -z\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -2z\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z[Q]\{g^e\}, \tag{5}$$

где матрица $[Q]$ связывает деформации элемента с узловыми перемещениями на основании формул Коши [2], причем порядок следования компонент выбирается аналогично, как и в соотношениях (4).

Воспользуемся законом Гука [2] и выразим напряжения через узловые перемещения:

$$\{\sigma\} = -z[E][Q]\{g^e\}. \tag{6}$$

На основании вариационного принципа возможных перемещений [1] и выражений (5) и (6) имеем:

$$\{\delta g^e\}^T\{R\} = \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \{\delta g^e\}^T [Q]^T [E][Q]\{g^e\} dz dS ,$$

где $\{R\}$ – вектор узловых усилий; S – область треугольного конечного элемента; h –толщина плиты; символ « δ » означает вариацию.

Учитывая, что интегральное выражение не зависит от перемещений, в конечном итоге получим основное уравнение метода конечных элементов:

$$\{R^e\} = [k]\{F^e\}, \tag{7}$$

где $[k] = \dfrac{h^3}{12}\left(\int_S [Q]^T [E][Q] dS\right)$ – локальная матрица жесткости. Интеграл в последнем выражении легко вычисляется точно.

III. Численный эксперимент с использованием предлагаемого треугольного конечного элемента

Для оценки точности решения, получаемого с помощью рассматриваемого конечного элемента, был проведен сравнительный анализ на примере нескольких модельных задач. Исследовалась прямоугольная тонкая пластинка размерами $a \times b \times h$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ. Принималось, что пластинка свободно оперта по всему контуру или защемлена и находится под действием либо сосредоточенной поперечной силы P, либо равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Найденные значения прогибов сравнивались с известными точными решениями [2] и решением методом конечных элементов с помощью четырехугольных прямоугольных элементов [3]. В таблице приведены решения указанных задач, при этом размеры пластинки: $a = 1.19$м, $b = 6$м, $h = 0.22$м; модуль упругости $E = 20 \cdot 10^3\, МПа$; коэффициент Пуассона $\mu = 0.2$. Дискретизация пластинки прямоугольными конечными элементами проводилась на 16 элементов, треугольными элементами – на 32, при этом количество узлов и размерность матрицы жесткости была одинаковой.

Табл.1 Прогиб в центре тонкой пластинки, см

Метод решения	***Сосредоточенная сила P=784.8кН***		***Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q=0.6МПа***	
	свободно опертая	***защемленная***	***свободно опертая***	***защемленная***
МКЭ (четырехугольные элементы)	0.09937	0.04183	0.08408	0.01586
МКЭ (треугольные элементы)	0.10199	0.04167	0.08451	0.01703
Точное решение [2]	0.10197	0.04359	0.08442	0.01692

[1] Zienkiewicz, O.C. The finite element method. Vol. 1: the basis. Fifth edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Boston: Butterworth-Heinemann, 2000. – 694 p.

[2] Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности: учеб. для вузов / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с.

[3] Курочка, К.С. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния сложных систем неоднородных упругопластических дисперсных и сплошных твердых тел / К.С. Курочка // Информатика. – 2007. – №2(14). – С. 117–128.