УДК 621.391.83:681.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ, ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ И РЕАКЦИЙ СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Н.И. БЕЛЕНКЕВИЧ, В.А. ИЛЬИНКОВ, Д.А. КУХМАР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 20 февраля 2018

Аннотация. Разработаны единые математические модели частотных характеристик сигналов, звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники, которые описывают амплитудно- и фазочастотные характеристики всех типов линейных звеньев, амплитудные и фазовые спектры непериодических финитных и бесконечно протяженных, периодических сигналов и соответствующих им реакций. На основе построенных моделей разработан алгоритм расчета частотных и энергетических характеристик, обеспечивающий создание эффективной автоматизированной процедуры моделирования сигналов, звеньев и реакций в частотной области.

Ключевые слова: система, сигнал, звено, реакция, модель, алгоритм.

Abstract. Single mathematical models of the signals' frequency characteristics, links and responses of telecommunications and radioelectronics systems were suggested. These models embody and epitomize amplitude- and phase-frequency responses of all types of linear links, as well as the amplitude and phase spectrums of no periodic finite, no periodic eternal, periodic signals, and the responses corresponding to them. The algorithm for calculation of frequency and energy characteristics has been developed on the basics of suggested models. The algorithm allows creation of effective automated simulations procedure of signals, links and responses in frequency domain.

Keywords: system, signal, link, response, model, algorithm.

Doklady BGUIR. 2018, Vol. 114, No. 4, pp. 29-36
Modeling of signals, linear links and responses
of telecommunications and radioelectronics systems in frequency domain
N.I. Belenkevich, V.A. Ilyinkov, D.A. Kukhmar

Введение

В настоящее время основным инструментом разработки систем телекоммуникаций и радиоэлектроники (СТР) является математическое (структурно- и схемотехническое) моделирование. Результаты структурнотехнического моделирования, используемого на начальных этапах цикла разработки, определяют алгоритм функционирования, структуру и основные параметры качества создаваемой техники. Важнейшая составляющая структурнотехнического моделирования – моделирование линейных искажений. С его помощью устанавливают обоснованные требования к частотно-временным характеристикам функциональных блоков и системы в целом, применяя в качестве моделей воздействий и блоков континуальные детерминированные сигналы и линейные звенья. Моделирование линейных искажений отличают многообразие и сложность моделей сигналов и звеньев, сложность процедуры и большой объем вычислений при нахождении характеристик в частотной и временной областях.

Сравнительный анализ методов, моделей, алгоритмов и программ моделирования СТР, выполненный в [1], показывает, что известные программные средства структурнотехнического моделирования обладают существенными недостатками, в числе которых: отсутствие развитых библиотек моделей сигналов и звеньев; отсутствие автоматизированных процедур расчета частотно-временных характеристик сигналов, звеньев и реакций (СЗР).

Цель работы – разработка единых математических моделей и алгоритма расчета частотных и энергетических характеристик (ЧХ), обеспечивающих создание эффективной автоматизированной процедуры моделирования в частотной области.

Единые математические модели частотных характеристик СЗР

Вначале необходимо отметить следующее. При моделирование линейных искажений в качестве воздействий используют непериодические бесконечно протяженные $\alpha_0(t)$, $\alpha_{1(2)}(t)$, непериодические финитные $\varphi_{0T}(t)$, $\varphi_{1(2)T}(t)$ и периодические $\varphi_0(t)$, $\varphi_{1(2)}(t)$ сигналы, задаваемые на временных интервалах соответственно $[0,\infty)$, $[t_{1(2)},\infty)$, $[t_1,t_2)$, $[0,t_{1(2)})$, $[t_1+nT,t_2+nT)$ и $[kT,t_{1(2)}+nT)$ $(0\le t_1<t_2\le T;\, n=\overline{-\infty,\infty})$, описываемые лапласовскими изображениями $\bar{\alpha}_0(p)=-S_0(p)$, $\bar{\alpha}_{1(2)}(p)=-S_{1(2)}(p)e^{-pt_{1(2)}}$, $\bar{\varphi}_{0T}(p)=S_2(p)e^{-pt_2}-S_1(p)e^{-pt_1}$, $\bar{\varphi}_{1(2)T}(p)=S_{1(2)}(p)e^{-pt_{1(2)}}-S_0(p)$ и $\bar{\varphi}_{0(1,2)}(p)=\bar{\varphi}_{0(1,2)T}(p)(1-e^{-pT})^{-1}$. В качестве звеньев применяют линейные (не)минимально фазовые звенья с различной формой ЧХ, описываемые операторной передаточной функцией $K_Z(p)$ [1].

В основу решения задачи положим совместное математическое описание СЗР [1]

$$R(p)=\left(R_{2Z}(p)e^{-pt_2}-R_{1Z}(p)e^{-pt_1}\right)\left(1-e^{-pT}\right)^{-1}, \tag{1}$$

построенное на базе операторной дробно-рациональной функции специального вида

$$R_{00}(p)=\frac{A(p)}{CB(p)}=\frac{\prod_{x=1}^{N_3}\left(p+a_{3x}\right)^{n_{3x}}\prod_{y=1}^{N_4}\left(p^2+2a_{4y}p+a_{4y}^2+\omega_{4y}^2\right)^{n_{4y}}}{C\prod_{s=1}^{N_1}\left(p+a_{1s}\right)^{n_{1s}}\prod_{l=1}^{N_2}\left(p^2+2a_{2l}p+a_{2l}^2+\omega_{2l}^2\right)^{n_{2l}}}. \tag{2}$$

Функция (2) образована операцией объединения несовпадающих (одинаковых по форме) массивов коэффициентов функций $K_Z(p)$ и $S_k(p)$ $\left(k=\overline{0,2}\right)$, вследствие чего $N_{1(2)}=N_{Z1(Z2)}+N_{01(02)}$, $N_{3(4)}=N_{Z3(Z4)}+\sum_{k=0}^{2}N_{k3(k4)}$, $C=C_Z^{h_Z}\cdot\prod_{k=0}^{2}C_k^{h_k}$ $\left(h_Z=0,\ 1;\ h_k=0,\ 1\right)$, где N_{Zi}, N_{ki} – размеры массивов функций $K_Z(p)$ и $S_k(p)$ ($i=\overline{1,4}$; массивы знаменателей функций $S_k(p)$ совпадают). С учетом изложенного $\left(i=\overline{1,4},\ j=\overline{3,4}\right)$

$$R_{00}(p)=\begin{cases}R_Z(p)=K_Z(p) & \left(h_Z=1,\ h_0=h_1=h_2=N_{0i}=N_{1j}=N_{2j}=0\right)\\ R_{0(1,2)}(p)=S_{0(1,2)}(p) & \left(h_{0(1,2)}=1,\ h_Z=h_{1(0,0)}=h_{2(2,1)}=N_{Zi}=N_{1(0,0)j}=N_{2(2,1)j}=0\right)\\ R_{0(1,2)Z}(p)=S_{0(1,2)}(p)K_Z(p) & \left(h_Z=h_{0(1,2)}=1,\ h_{1(0,0)}=h_{2(2,1)}=N_{1(0,0)3}=N_{1(0,0)4}=N_{2(2,1)3}=N_{2(2,1)4}=0\right).\end{cases} \tag{3}$$

В отличие от известных, обобщенная модель (1) задает все типы применяемых при моделировании СЗР, полно описывает их частотно-временные характеристики. При этом, как следует из свойств функций (1)–(3), переход к требуемой конкретной модели сигнала, звена либо реакции (разновидности функции $R(p)$) достигается необходимым сочетанием параметров N_{Zi}, N_{ki}, h_Z, h_k и дополнительными предельными переходами при $t_1\to 0$, $t_2\to\infty$ и $T\to\infty$.

Предельным переходом $T\to\infty$ в (1) образуем функцию

$$R_T(p)=R_{2Z}(p)e^{-pt_2}-R_{1Z}(p)e^{-pt_1}=A_{2Z}(p)e^{-pt_2}\big/\left(C_{2Z}B(p)\right)-A_{1Z}(p)e^{-pt_1}\big/\left(C_{1Z}B(p)\right). \tag{4}$$

Она задает на комплексной плоскости множество линейных звеньев, непериодических финитных $\varphi_{kT}(t)$, непериодических бесконечно протяженных $\alpha_k(t)$ сигналов и соответствующих им реакций $\psi_{kT}(t)$ и $\beta_k(t)\left(k=\overline{0,2}\right)$. Для нахождения их ЧХ необходимо [2]: заменой $p=j\omega$ перейти к комплексной функции $R_T(j\omega)$; выполнить с учетом свойств (2) и (3) соответствующие преобразование в базисе комплексных чисел; представить результат в показательной форме $R_T(j\omega)=R_T(\omega)e^{j\theta_T(\omega)}$, модуль $R_T(\omega)$ и аргумент $\theta_T(\omega)$ которой являются искомыми ЧХ. Выполняя указанные преобразования, имеем:

$$R_T(\omega)=\left(R_{TR}^2(\omega)+R_{TI}^2(\omega)\right)^{1/2},\qquad \theta_T(\omega)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{R_{TI}(\omega)}{R_{TR}(\omega)}+\begin{Bmatrix}0\\2\pi\\\pi\end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix}R_{TR}(\omega)>0,\ R_{TI}(\omega)>0\\R_{TR}(\omega)>0,\ R_{TI}(\omega)<0\\R_{TR}(\omega)<0\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}\pi/2\\3\pi/2\\0\end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix}R_{TR}(\omega)=0,\ R_{TI}(\omega)>0\\R_{TR}(\omega)=0,\ R_{TI}(\omega)<0\\R_{TI}(\omega)=0,\ R_{TR}(\omega)\geq 0\end{Bmatrix}\end{cases},\tag{5}$$

где $\begin{Bmatrix}R_{TR}(\omega)\\R_{TI}(\omega)\end{Bmatrix}=R_{2Z}(\omega)\begin{Bmatrix}\cos\\\sin\end{Bmatrix}\left(\theta_{2Z}(\omega)-\omega t_2\right)-R_{1Z}(\omega)\begin{Bmatrix}\cos\\\sin\end{Bmatrix}\left(\theta_{1Z}(\omega)-\omega t_1\right)$;

$R_{1(2)Z}(\omega)e^{j\theta_{1(2)Z}(\omega)}=R_{00}(j\omega)=R_{00}(\omega)e^{j\theta_{00}(\omega)}$ $\left(h_z=h_{1(2)}=1,\ h_{0(0)}=h_{2(1)}=N_{0(0)3}=N_{0(0)4}=N_{2(1)3}=N_{2(1)4}=0\right)$;

$$R_{00}(\omega)=\frac{L_3(\omega)L_4(\omega)}{|C|L_1(\omega)L_2(\omega)};\qquad \theta_{00}(\omega)=\xi_3(\omega)+\xi_4(\omega)-\xi_1(\omega)-\xi_2(\omega)-\begin{Bmatrix}0\\\pi\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix}C>0\\C<0\end{Bmatrix};$$

$$L_{1(3)}(\omega)=\prod_{s(x)=1}^{N_{1(3)}}L_{1s(3x)}^{n_{1s(3x)}}(\omega),\ L_{2(4)}(\omega)=\prod_{l(y)=1}^{N_{2(4)}}L_{2l(4y)}^{n_{2l(4y)}}(\omega);\ L_{1s(3x)}(\omega)=\left(a_{1s(3x)}^2+\omega^2\right)^{1/2},$$

$$L_{2l(4y)}(\omega)=\left(\left(a_{2l(4y)}^2+\omega_{2l(4y)}^2-\omega^2\right)^2+\left(2a_{2l(4y)}\omega\right)^2\right)^{1/2};\ \xi_{1(3)}(\omega)=\sum_{s(x)=1}^{N_{1(3)}}n_{1s(3x)}\cdot\xi_{1s(3x)}(\omega),$$

$$\xi_{2(4)}(\omega)=\sum_{l(y)=1}^{N_{2(4)}}n_{2l(4y)}\cdot\xi_{2l(4y)}(\omega);\quad \xi_{1s(3x)}(\omega)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a_{1s(3x)}}+\begin{Bmatrix}0\\\pi\end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix}a_{1s(3x)}>0\\a_{1s(3x)}<0\end{Bmatrix}\\ \pi/2, & \left\{a_{1s(3x)}=0\right\}\end{cases},\tag{6}$$

$$\xi_{2l(4y)}(\omega)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{2a_{2l(4y)}\omega}{a_{2l(4y)}^2+\omega_{2l(4y)}^2-\omega^2}+\begin{Bmatrix}0\\\pi\end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix}a_{2l(4y)}^2+\omega_{2l(4y)}^2-\omega^2>0,\ a_{2l(4y)}\neq 0\\a_{2l(4y)}^2+\omega_{2l(4y)}^2-\omega^2<0,\ a_{2l(4y)}\neq 0\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}\pi/2\\-\pi/2\end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix}a_{2l(4y)}^2+\omega_{2l(4y)}^2-\omega^2=0,\ 2a_{2l(4y)}\omega>0\\a_{2l(4y)}^2+\omega_{2l(4y)}^2-\omega^2=0,\ 2a_{2l(4y)}\omega<0\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}0\\\pi\end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix}a_{2l(4y)}=0,\ \omega\leq\omega_{2l(4y)}\\a_{2l(4y)}=0,\ \omega>\omega_{2l(4y)}\end{Bmatrix}\end{cases}.$$

Модели $R_T(\omega)$, $\theta_T(\omega)$ (5) описывают ЧХ на частотах ω, которым соответствуют точки $p=j\omega$ на мнимой оси комплексной плоскости, где функция $R_T(p)$ (4) не имеет особенностей. Одновременно отметим, что изображения $\overline{\varphi}_{kT}(p)$, $\overline{\psi}_{kT}(p)$ (непериодических финитных сигналов $\varphi_{kT}(t)$ и соответствующих им реакций $\psi_{kT}(t)$), являясь аналитическими функциями при $\operatorname{Re}p\geq 0$, могут содержать на мнимой оси так называемые устранимые особые точки [2, 3]. Обращение к функции (2) показывает, что одна из них ($p_{1r}=j\omega_{1r}=0$) является корнем того полинома $\left(p+a_{1r}\right)\in\left(p+a_{1s}\right)$ $\left(s=\overline{1,N_1}\right)$, в котором $a_{1r}=\left(a_{1s}\right)_{s=r}=0$. Другие точки $\left(p_{2q}=\pm j\omega_{2q}\right)$ – корни тех полиномов $\left(p^2+2a_{2q}p+a_{2q}^2+\omega_{2q}^2\right)\in\left(p^2+2a_{2l}p+a_{2l}^2+\omega_{2l}^2\right)$ $\left(l=\overline{1,N_2}\right)$, в которых $a_{2q}=\left(a_{2l}\right)_{l=q}=0$.

В устранимой точке функция $R_T(p)$ (4) имеет неопределенность типа $0^m/0^m$, где m – кратность корня p_{1r} (p_{2q}), равная $n_{1r}=(n_{1s})_{s=r}$ $\left(n_{2q}=(n_{2l})_{l=q}\right)$. Далее для упрощения изложения устранимую точку с неопределенностью $0^m/0^m$ будем называть точкой m-го порядка. В качестве простейшего примера можно привести лапласовское изображение идеального прямоугольного импульса с единичной амплитудой и длительностью τ: $R_T(p)=\left(1-e^{-p\tau}\right)/p$. Функция $R_T(p)$ имеет точку первого порядка $p_{1r}=0$.

Возможным способом устранения неопределенности типа $0^m/0^m$ является применение известного правила Лопиталя [3]. Следуя ему, от функции (4) перейдем к функции

$$R_T^M(p)=\left(C_{1Z}A_{2Z}(p)e^{-pt_2}-C_{2Z}A_{1Z}(p)e^{-pt_1}\right)^{(m)}\Big/\left(C_{1Z}C_{2Z}B(p)\right)^{(m)}. \qquad (7)$$

Выполняя последовательно дифференцирование по переменной p, замену $p=j\omega$ и необходимые преобразования в базисе комплексных чисел, получены модели $R_T^{\mathrm{I}}(\omega)$, $\theta_T^{\mathrm{I}}(\omega)$ ($R_T^{\mathrm{II}}(\omega)$, $\theta_T^{\mathrm{II}}(\omega)$) ЧХ в точках первого (второго) порядка (на частотах $\omega_{1r}=0$ и ω_{2q}):

$$\begin{Bmatrix} R_T^{\mathrm{I}}(\omega) \\ R_T^{\mathrm{II}}(\omega)\end{Bmatrix}=\left|R_T^M(j\omega)\right| \quad \begin{Bmatrix} m=1 \\ m=2\end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \theta_T^{\mathrm{I}}(\omega) \\ \theta_T^{\mathrm{II}}(\omega)\end{Bmatrix}=\mathrm{Arg}R_T^M(j\omega) \quad \begin{Bmatrix} m=1 \\ m=2\end{Bmatrix} \qquad (8)$$

(аналитические выражения моделей, по форме подобные соотношениям (5) и (6) (но более сложные), для сокращения объема статьи не приведены).

Математические модели $R_T(\omega)$ и $R_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$ при различных сочетаниях приведенных выше параметров N_{Zi}, N_{ki}, h_Z, h_k, t_1, t_2 и T описывают на всей частотной оси амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) линейных звеньев, модули спектральных плотностей (непрерывные по свойствам амплитудные спектры (АС)) непериодических финитных, непериодических бесконечно протяженных сигналов и соответствующих им реакций, а модели $\theta_T(\omega)$ и $\theta_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$ – фазочастотные характеристики (ФЧХ) звеньев, аргументы спектральных плотностей (непрерывные фазовые спектры (ФС)) упомянутых сигналов и реакций.

Операторная функция $R(p)$ (1) при значениях параметров $h_Z=\overline{0,\ 1}$, $T<\infty$ и дополнительных переходах $t_1\to 0$ и $t_2\to\infty$ задает множество периодических сигналов $\varphi_k(t)$ и соответствующих им реакций $\psi_k(t)$ $\left(k=\overline{0,\ 2}\right)$. С учетом свойств сигналов $\varphi_k(t)$ и устойчивых линейных звеньев особыми точками функции $R(p)$ являются бесконечное число простых (однократных) полюсов $p_n=j2\pi n/T$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости [2].

Для нахождения ЧХ рассматриваемых сигналов и реакций, учитывая простоту механизма вычисления вычетов в простых полюсах, воспользуемся обобщенной теоремой разложения [2]. Она приводит к представлению сигналов $\varphi_k(t)$ и реакций $\psi_k(t)$ в форме ряда Фурье.

Вычисляя вычеты и выполняя последующие преобразования, в результате имеем

$$\begin{Bmatrix} \varphi_k(t) \\ \psi_k(t)\end{Bmatrix}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega_1 t+\theta_n\right), \qquad (9)$$

где $A_0=\begin{Bmatrix} R_T(0)\cos\theta_T(0)/T, & 0=\omega_{1r},\ m=0 \\ R_T^{\mathrm{I(II)}}(0)\cos\theta_T^{\mathrm{I(II)}}(0)/T, & 0=\omega_{1r},\ m=1(2)\end{Bmatrix}$; $\omega=2\pi/T$;

$$A_n=\begin{Bmatrix} 2R_T(n\omega_1)/T, & n\omega_1=\omega_{2q},\ m=0 \\ 2R_T^{\mathrm{I(II)}}(n\omega_1)/T, & n\omega_1=\omega_{2q},\ m=1(2)\end{Bmatrix}; \quad \theta_n=\begin{Bmatrix} \theta_T(n\omega_1), & n\omega_1=\omega_{2q},\ m=0 \\ \theta_T^{\mathrm{I(II)}}(n\omega_1), & n\omega_1=\omega_{2q},\ m=1(2)\end{Bmatrix}; \qquad (10)$$

$R_T(0)$, $R_T^{\mathrm{I(II)}}(0)$, $R_T(n\omega_1)$, $R_T^{\mathrm{I(II)}}(n\omega_1)$, $\theta_T(0)$, $\theta_T^{\mathrm{I(II)}}(0)$, $\theta_T(n\omega_1)$, $\theta_T^{\mathrm{I(II)}}(n\omega_1)$ – значения $R_T(\omega)$, $R_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$, $\theta_T(\omega)$ и $\theta_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$ (модели (5), (8)) на частотах $\omega=0$ и $\omega=n\omega_1$.

Единые математические модели (5), (8), (10) хорошо перекладываются на алгоритмический язык, легко программируются. Они позволяют организовать одинаковую структуру файлов параметров сигналов, звеньев и реакций, что упрощает построение и взаимодействие модулей программы.

Алгоритм расчета частотных и энергетических характеристик СЗР

На основе построенных математических моделей (5), (8), (10) разработан алгоритм расчета частотных и энергетических характеристик СЗР. Он являет собой последовательность следующих этапов.

1. *Выбор предмета исследования, определение сочетания параметров.* Выбирается предмет исследования: ЧХ линейных звеньев, АС и (или) ФС непериодических финитных $\varphi_{kT}(t)$ или непериодических бесконечно протяженных $\alpha_k(t)$, или периодических $\varphi_k(t)$ сигналов, или соответствующих им реакций $\psi_{kT}(t)$, $\beta_k(t)$ и $\psi_k(t)$. Для выбранного предмета определяется соответствующее сочетание значений параметров N_{Zi}, N_{ki}, h_Z, h_k, t_1, t_2 и T $\left(k=\overline{0,\ 2},\ i=\overline{1,\ 4}\right)$, при которых рассчитываются искомые характеристики. Для удобства необходимые сведения представлены в таблице.

Сочетания параметров и соответствующие предметы исследования $\left(\boldsymbol{i=\overline{1,4},\ j=\overline{3,4}}\right)$

Сочетания параметров	Сигналы, звенья, реакции		Модели ЧХ
$h_Z=1,\ h_0=h_1=h_2=N_{0i}=N_{2j}=0,$ $t_1=0,\ t_2\to\infty,\ T\to\infty$	Звенья		$R_T(\omega),\ \theta_T(\omega)$
$h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=t_1,\ t_2=t_2,\ T\to\infty$ $h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=0,\ t_2\to t_1,\ T\to\infty$ $h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=0,\ T\to\infty$	Сигналы	$\varphi_{0T}(t)$ $\varphi_{1T}(t)$ $\varphi_{2T}(t)$	$R_T(\omega),\ R_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega),$ $\theta_T(\omega),\ \theta_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$
$h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=0,\ t_2\to\infty,\ T\to\infty$ $h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=t_1,\ t_2\to\infty,\ T\to\infty$ $h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_2\to\infty,\ t_1\to t_2,\ T\to\infty$	Сигналы	$\alpha_0(t)$ $\alpha_1(t)$ $\alpha_2(t)$	$R_T(\omega),\ \ \theta_T(\omega)$
$h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=t_1,\ t_2=t_2,\ T<\infty$ $h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=0,\ t_2\to t_1,\ T<\infty$ $h_Z=h_0=N_{Zi}=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=1,\ t_1=0,\ T<\infty$	Сигналы	$\varphi_0(t)$ $\varphi_1(t)$ $\varphi_2(t)$	$A_0,\ \ A_n,\ \ \theta_n$
$h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=t_1,\ t_2=t_2,\ T\to\infty$ $h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=0,\ t_2\to t_1,\ T\to\infty$ $h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=0,\ \ T\to\infty$	Реакции	$\psi_{0T}(t)$ $\psi_{1T}(t)$ $\psi_{2T}(t)$	$R_T(\omega),\ R_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega),$ $\theta_T(\omega),\ \theta_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$
$h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=0,\ t_2\to\infty,\ T\to\infty$ $h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=t_1,\ t_2\to\infty,\ T\to\infty$ $h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_2\to\infty,\ t_1\to t_2,\ T\to\infty$	Реакции	$\beta_0(t)$ $\beta_1(t)$ $\beta_2(t)$	$R_T(\omega),\ \ \theta_T(\omega)$
$h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=t_1,\ t_2=t_2,\ T<\infty$ $h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=0,\ t_2\to t_1,\ T<\infty$ $h_0=N_{0j}=0,\ h_1=h_2=h_Z=1,\ t_1=0,\ T<\infty$	Реакции	$\psi_0(t)$ $\psi_1(t)$ $\psi_2(t)$	$A_0,\ \ A_n,\ \ \theta_n$

2. *Выбор диапазона частот и шага расчета.* Ограничения при выборе диапазона частот $\omega_L-\omega_U$ $\left(\omega_L\ge 0,\ \omega_U<\infty\right)$ отсутствуют. Моделируемые характеристики звеньев, сигналов $\varphi_{kT}(t)$, $\alpha_k(t)$, реакций $\psi_{kT}(t)$ и $\beta_k(t)$ по свойствам являются непрерывными. Поэтому шаг $\Delta\omega$ их расчета принципиально может быть любым. Характеристики же сигналов $\varphi_k(t)$ и реакций $\psi_k(t)$ дискретны. Для них шаг расчета составляет $\Delta\omega=2\pi/T$ (T – период повторения).

3. *Выбор механизма разбиения диапазона частот.* Непрерывный диапазон $\omega_L - \omega_U$ заменяется множеством дискретных частот $\omega_n = n\Delta\omega$ $\left(n = \overline{n_L, n_U}\right)$, где $n_{L(U)} = \left[\omega_{L(U)} / \Delta\omega\right]$.

4. *Расчет ЧХ сигналов, звеньев и реакций.*

4.1. В случае устойчивых линейных звеньев операторная функция $R(p) = R_T(p) = K_Z(p)$ (см. (2)–(4)) при $\operatorname{Re} p \geq 0$ не имеет особенностей. Поэтому расчет их АЧХ $K_Z(\omega)$ и ФЧХ $\theta_Z(\omega)$ на частотах ω_n выполняется по моделям соответственно $R_T(\omega)$ и $\theta_T(\omega)$ (формулы (5), табл.).

В СТР для описания звеньев, помимо АЧХ и ФЧХ, также широко применяют характеристику рабочего затухания (ХРЗ) $a_Z(\omega) = -20\lg K_Z(\omega)$ и характеристику группового времени запаздывания (ХГВЗ) $\tau_Z(\omega) = -d\theta_Z(\omega)/d\omega$ [4–7]. Учитывая изложенное, на каждой частоте ω_n дополнительно рассчитываются значения $a_Z(\omega_n)$ и $\tau_Z(\omega_n)$. Причем последние находятся численным методом дифференцирования (с помощью конечных разностей) [8].

4.2. В случае непериодических финитных сигналов $\varphi_{kT}(t)$ и реакций $\psi_{kT}(t)$, как показано выше, могут присутствовать частоты $\omega = \omega_{1r} = 0$ и $\omega = \omega_{2q}$, которым соответствуют устранимые точки. С учетом этого на каждом шаге выполняется сравнение частоты ω_n с частотами $\omega_{1r(2q)}$. Если $\omega_n \neq \omega_{1r(2q)}$, то расчет АС и ФС сигналов (реакций) на этой частоте выполняется по моделям (5) $R_T(\omega)$ и $\theta_T(\omega)$, если $\omega_n = \omega_{1r(2q)}$, – по моделям (8) $R_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$ и $\theta_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)$ ($m = 1$ (2) – порядок устранимой точки).

4.3. В случае непериодических бесконечно протяженных сигналов $\alpha_k(t)$ и реакций $\beta_k(t)$ принципиально могут присутствовать частоты $\omega_{1r(2q)}$, которым соответствуют неустранимые особые точки (простые и кратные полюсы) $p_{1r} = 0$ и $p_{2q} = \pm j\omega_{2q}$ их лапласовских изображений [2]. Такие сигналы (реакции) не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости (имеют бесконечно большую энергию), строго не преобразуемы по Фурье, их спектральная плотность на частотах ω_{1r} и $\pm\omega_{2q}$ представляется с помощью дельта-функций $\delta(\omega)$ и $\delta\left(\omega \pm \omega_{2q}\right)$ [6, 7].

Учитывая изложенное, расчет АС и ФС осуществляется по моделям $R_T(\omega)$ и $\theta_T(\omega)$ (5) на всех частотах ω_n, исключая $\omega_n = \omega_{1r(2q)}$. Для достижения этого, аналогично п. 4.2, выполняется сравнение частот. Если на шаге n $\omega_n = \omega_{1r(2q)}$, то эта точка пропускается.

4.4. В случае периодических сигналов $\varphi_k(t)$ и реакций $\psi_k(t)$, аналогично п. 4.2, на каждом шаге частота ω_n сравнивается с частотами $\omega_{1r(2q)}$. В результате расчет (дискретных) АС и ФС выполняется по соответствующим разновидностям моделей A_0, A_n, θ_n (10).

5. *Расчет энергии непериодических сигналов и реакций.*

5.1. Помимо диапазона частот $\omega_L - \omega_U$ и отвечающего ему множества дискретных частот $\omega_n = n\Delta\omega$ $\left(n = \overline{n_L, n_U}\right)$, вводится расширенный диапазон $0 - \omega_M$ с тем же механизмом разбиения: $n = \overline{0, n_M}$ $\left(n_M = [\omega_M / \Delta\omega],\ n_M >> n_U\right)$.

5.2. На каждой частоте ω_n $\left(n = \overline{0, n_M}\right)$, аналогично п. 4.2 и 4.3, рассчитываются значения $F(n\Delta\omega)$ спектральной плотности энергии $F(\omega)$: $F(\omega) = \left(R_T(\omega)\right)^2$ $\left(\omega \neq \omega_{1r(2q)}\right)$; $F(\omega) = \left(R_T^{\mathrm{I(II)}}(\omega)\right)^2$ $\left(\omega = \omega_{1r(2q)},\ m = 1\ (2)\right)$.

5.3. Рассчитывается энергия E_{LU} в исследуемом диапазоне $\omega_L - \omega_U$ частот:

$$E_{LU} = \left(F\left(n_L\Delta\omega\right) + F\left(n_{U-1}\Delta\omega\right) + 2\sum_{n=n_L+1}^{n_U-2} F\left(n\Delta\omega\right) \right) \Delta\omega \Big/ \left(2\pi\right). \tag{11}$$

Алгоритм (11), реализованный на основе равенства Парсеваля [6, 7] и метода трапеций с постоянным шагом [8], обеспечивает более высокую точность и меньшую вычислительную сложность. По алгоритму (11) при замене в нем $L \to 0$, $U \to L$ $\left(L \to U,\, U \to M\right)$ дополнительно рассчитывается энергия E_{0L} $\left(E_{UM}\right)$ в диапазоне частот $0-\omega_L$ $\left(\omega_U-\omega_M\right)$. Исходя из требуемой точности вычисления энергии, выбирается необходимое значение n_M. Находится полная энергия $E = E_{0L} + E_{LU} + E_{UM}$. Рассчитываются относительные доли энергии в диапазонах $\omega_L - \omega_U$ $\left(0-\omega_L,\, \omega_U-\omega_M\right)$: $\delta^E_{LU(0L,UM)} = E_{LU(0L,UM)} / E$. Применительно к тем сигналам $\alpha_k(t)$ и реакциям $\beta_k(t)$, спектральные плотности которых содержат дельта-функции, энергетические параметры не рассчитываются.

6. *Расчет мощности периодических сигналов и реакций.*

6.1. На каждой частоте ω_n $\left(n = \overline{0, n_M}\right)$ расширенного диапазона, аналогично п. 4.4, рассчитываются значения A_0^2 и A_n^2, где A_0, A_n описываются моделями (10).

6.2. Рассчитываются мощности P_{0L}, P_{LU}, P_{UM} в диапазонах частот соответственно $0-\omega_L$, $\omega_L - \omega_U$ и $\omega_U - \omega_M$: $P_{0L} = A_0^2 + \sum\limits_{n=0}^{n_L-1} A_n^2/2$, $P_{LU} = \sum\limits_{n=n_L}^{n_U} A_n^2/2$, $P_{UM} = \sum\limits_{n=n_U+1}^{n_M} A_n^2/2$.

Исходя из требуемой точности вычисления мощности, выбирается необходимое значение n_M. Находится полная мощность $P = P_{0L} + P_{LU} + P_{UM}$. Аналогично п. 5.3 рассчитываются относительные доли мощности $\delta^P_{LU(0L,UM)} = P_{LU(0L,UM)} / P$.

Разработанный алгоритм позволяет моделировать, помимо частотных характеристик, также энергетические характеристики сигналов и реакций, включая энергию (мощность) и относительную долю энергии (мощности) в любом исследуемом диапазоне частот. Последнее важно для оценки электромагнитной совместимости систем телекоммуникаций и радиоэлектроники.

В соответствии с алгоритмом разработана автоматизированная процедура формирования, преобразования и расчета частотных характеристик математических моделей линейных звеньев систем телекоммуникаций и радиоэлектроники.

Заключение

1. Разработаны единые математические модели частотных характеристик СЗР, которые, в отличие от известных, описывают АЧХ и ФЧХ всех типов линейных звеньев, амплитудные и фазовые спектры непериодических финитных, непериодических бесконечно протяженных, периодических сигналов и соответствующих им реакций. Предложенные модели хорошо перекладываются на алгоритмический язык, легко программируются, позволяют организовать одинаковую структуру параметров СЗР, что делает возможным построение развитых библиотек моделей сигналов и звеньев, упрощает взаимодействие отдельных модулей программы.

2. На основе единых математических моделей разработан алгоритм расчета частотных характеристик, который не имеет ограничений на выбор диапазона частот, позволяет проводить вычисления с заданной точностью, обладает низкой вычислительной сложностью. Предложенный алгоритм моделирует также энергетические характеристики сигналов и реакций, включая энергию (мощность) и относительную долю энергии (мощности) в любом исследуемом диапазоне частот, что соответствует определению внеполосных излучений и может быть использовано в задачах оценки электромагнитной совместимости. Структура алгоритма обеспечивает создание эффективной автоматизированной процедуры моделирования СЗР в частотной области.

Список литературы

1. Беленкевич Н.И., Ильинков В.А. Совместное описание сигналов, линейных звеньев и реакций систем телекоммуникаций и радиоэлектроники // Вестн. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. физ.-техн. навук. 2017. № 4. С. 93–104.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов. СПб.: Лань, 2002. 688 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учебник. В 3.т. М.: Дрофа, 2003, 2004, 2006. 704, 720, 351 с. Т. 1–3.
4. Баскаков С.И. Лекции по теории цепей: учеб. пособие. М.: Либроком, 2016. 278 с.
5. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. СПб.: Лань, 2009. 544 с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Дрофа, 2006. 720 с.
7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Ленанд, 2016. 528 с.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

References

1. Belenkevich N.I., Ilyinkov V.A. Sovmestnoe opisanie signalov, linejnyh zven'ev i reakcij sistem telekommunikacij i radioehlektroniki// Vestn. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-tekhn. navuk. 2017. № 4. S. 93-104. (in Russ.)
2. Lavrent'ev M.A., SHabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo: ucheb. dlya vuzov. SPb.: Lan', 2002. 688 s. (in Russ.)
3. Kudryavcev L.D. Kurs matematicheskogo analiza: uchebnik. V 3.t. M.: Drofa, 2003, 2004, 2006. 704, 720, 351 s. T. 1–3. (in Russ.)
4. Baskakov S.I. Lekcii po teorii cepej: ucheb. posobie. M.: Librokom, 2016. 278 s. (in Russ.)
5. Beleckij A.F. Teoriya linejnyh ehlektricheskih cepej. SPb.: Lan', 2009. 544 s. (in Russ.)
6. Gonorovskij I.S. Radiotekhnicheskie cepi i signaly. M.: Drofa, 2006. 720 s. (in Russ.)
7. Baskakov S.I. Radiotekhnicheskie cepi i signaly. M.: Lenand, 2016. 528 s. (in Russ.)
8. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennye metody. M.: Nauka, 1987. 600 s. (in Russ.)

Сведения об авторах

Беленкевич Н.И., старший преподаватель кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Ильинков В.А., к.т.н., доцент, доцент кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Кухмар Д.А., магистрант кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Belenkevich N.I., senior lecturer of the department of infocommunication technologies of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Ilyinkov V.A., Ph.D., associate professor, associate professor of department of infocommunication technologies of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Kukhmar D.A., master student of the department of infocommunication technologies of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
тел. +375-17-293-88-19;
e-mail: belenkevich@bsuir.by
Беленкевич Наталья Ивановна

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki st., 6,
Belarusian state university
of informatics and radioelectronics
tel. +375-17-293-88-19;
e-mail: belenkevich@bsuir.by
Belenkevich Natalya Ivanovna