А. С. Стародубец

КВАТЕРНИОНЫ, ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ. КВАТЕРНИОНЫ И ПОВОРОТЫ ПРОСТРАНСТВА. ПРЕИМУЩЕСТВА КВАТЕРНИОНОВ ПЕРЕД УГЛАМИ ЭЙЛЕРА

Рассматривается математическая база и области применения Кватернионов. Сравнение кватернинов с другими способами моделирования поворота объекта в пространстве.

Введение

Существует несколько способов решения задачи моделирования поворотов объекта в пространстве: углы Эйлера, матрицы поворота, кватернионы. Для повышения точности поворотов и скорости моделирования предлагается использовать вариант кватернионов.

I. Математическое представление кватернионов

Кватернионы - обощение комплексного числа, пример гиперкомплексоной системы. Они представляет собой упорядоченную четверку действительных чисел s, a, b, c, которые связаны с четырьмя базисными элементами 1, i, j, k, обладающими следующими свойствами: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Кватернион Q разделяют на скалярную часть s и векторную $v = a*i+b*j+c*k$, так что Q=s+v. Важная особенность кватернионов состоит в том, что подмножеством кватернионов являются вещественные числа, комплексные числа, векторы в трехмерном пространстве. Введем следующие бинарные операции для кватернионов $Q1 = s1+v1$ и $Q2 = s2+v2$. 1. Сложение кватернионов $Q1+Q2 = (s1+s2)+(v1+v2)$. 2. Произведение кватернионов $Q1*Q2 = s1*s2+s2*v1+s1*v2-(v1, v2)+[v1, v2]$. Заметим, что операция некоммутативна. Кватернион называется сопряженным по отношению к $Q = s+ai+bj+ck$, если $Q' = s-(ai+bj+ck)$. В этом случае произведение есть число, равное квадрату модуля кватерниона Q: $|Q|^2 = s^2+a^2+b^2+c^2$.

II. Приложение кватернионов

Описать повороты в трехмерном пространстве можно используя углы Эйлера. Однако данный метод имеет проблему, названную “Шарнирный замок”. Из-за того, что конечный результат вращений зависит от их порядка, иногда вращение вокруг одной оси может отобразится на вращение вокруг другой оси. Удачной областью применения углов Эйлера может служить использование постоянных во времени поворотов.
Матрици поворота - второй способ задания вращения. Комбинирование поворотов в этом случае осуществляется перемножением матриц. Обычно необходимо использовать матрицы размерности 3x3. Недостатком матричного метода является невозможность его интерполяции. Идеальная область применения матричных поворотов – повороты вокруг одной из трёх осей за счёт стандартных матриц поворота, потребляющих минимум вычислительного времени.
Любой поворот вокруг оси можно представить кватернионом с модулем, равным 1. В качестве примера рассмотрим последовательное применение поворотов на 90 вокруг вектора k, а затем вокруг вектора j. Это преобразование можно представить в виде произведения двух кватернионов Q1 = cos45 + jsin45 и Q2 = cos45 + ksin45. В результате получим поворот на 120 вокруг оси, равнонаклоненной к ортам i, j, k. Но самое большое преимущество кватернионов - интерполяция. Интерполяция углов Эйлера приводит пути, не являющемуся кратчайшим. Кратчайший путь между ориентациями проходит по дуге. Кватернионы могут интерполироваться с помощью сферической линейной интерполяции (SLERP). Сумма двух кватернионов Q1 и Q2 даст кватернион, который как раз и принадлежит плоскости вращения по кратчайшей дуге между v1 и v2. Данный вид интерполяции позволяет найти кратчайший поворот на поверхности сферы. Алгебра кватернионов учавствует в описании движения манипуляторов, робототехнике [1], электродинамике.

III. Выводы

Кватернионы являются удачным выбором при моделировании поворотов в простртнастве в сравнении с рассмотренными методами

1. К. Фу,Р. Гонсалес, К. Ли Робототехника.: Мир, 1989. 622 с

Стародубец Андрей Сергеевич, студент 1 курса ФИТиУ БГУИР, astarodubetc@mail.ru
Научный руководитель: Цегельник Владимир Владимирович, заведующий кафедрой высшей математики БГУИР, доктор физ.-матем. наук, профессор, tsegvv@bsuir.by.