

СВОЙСТВА ОСТАТКОВ ПРИ ДЕЛЕНИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Известно, что число кратно 2^n или 5^n тогда и только тогда, когда число, составленное из последних n цифр числа, кратно 2^n или 5^n соответственно.

Определение. Пусть m – натуральное число, записанное в t -ричной системе счисления и состоящее только из единиц. Если существует хотя бы одно такое m , кратное n , то $Z(n, t)$ принимает значение, равное количеству единиц в наименьшем таком m , если такого числа нет, то $Z(n, t) = 0$. К примеру, $Z(10, 10) = 0$, т.к. не существует числа, состоящего только из единиц и кратного 10, а $Z(7, 10) = 6$, т.к. 111111 кратно 7, при этом не существует меньшего натурального числа, состоящего только из единиц и кратного 7.

Лемма 1. Для любых натуральных k и n справедливо:

$$10^{k \cdot Z(n, 10)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Следствие. Для любых натуральных p , k и n , справедливо, что $p \cdot 10^{k \cdot Z(n, 10)} \equiv p \pmod{n}$ по свойствам сравнений по модулю.

Таким образом, если мы разобьем любое число на $Z(n)$ -значные группы чисел, отсчитывая справа, то остаток исходного числа при делении на n равен сумме остатков полученных групп. К примеру попробуем посчитать остаток при делении на 271 числа

3902030803053438947497680359. $Z(271, 10) = 5$, а значит, разобьем число на 5-значные группы, отсчитывая справа и посчитаем их суммы:

$$80359 + 74976 + 43894 + 3053 + 20308 + 390 = 222980$$

Полученное число имеет более 5 цифр, значит мы можем применить эту операцию еще раз:

$$22980 + 2 = 22982$$

Посчитать остаток при делении полученного числа на 271 легче, чем у исходного. Назовем полученное в результате число значением функции $U(c(n))$, где c – исходное число, а n – натуральный делитель. Таким образом,

$$U(3902030803053438947497680359(271)) = 22982$$

Исходя из этого, имеет место следующий признак делимости:

Всякое натуральное число N кратно $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot c$, где c и 10 взаимно просты, а k_1 и k_2 – целые неотрицательные степени 2 и 5, тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

1. Число, составленное из последних k_1 цифр числа, кратно 2^{k_1} ;
2. Число, составленное из последних k_2 цифр числа, кратно 5^{k_2} ;
3. $U(N(c))$ кратно c .

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники