

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра высшей математики

***МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ***

В трех частях

Часть 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2018

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73
М34

Авторы:

Ж. А. Черняк, О. Н. Малышева, З. Н. Примичева,
О. А. Мокеева, Л. И. Василюк

Рецензенты:

кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры
учреждения образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»
(протокол №15 от 13.10.2017);

доцент кафедры высшей математики №1
Белорусского национального технического университета
кандидат физико-математических наук, доцент О. Р. Габасова

Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений.
М34 В 3 ч. Ч. 1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в
математический анализ : учеб.-метод. пособие / Ж. А. Черняк [и др.]. –
Минск : БГУИР, 2018. – 220 с. : ил.
ISBN 978-985-543-396-6 (ч. 1).

Содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим
разделам курса высшей математики: аналитическая геометрия и векторная алгебра,
линейная алгебра, введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной
переменной и образцы решений для самостоятельной контролируемой работы
студентов.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов и
преподавателей высшей математики.

УДК 517(076.1)
ББК 22.16я73

ISBN 978-985-543-396-6 (ч. 1)
ISBN 978-985-543-395-9

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2018

Содержание

Введение	4
1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия	5
1.1. Задания по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»	5
1.2. Образцы решений заданий по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»	29
2. Линейная алгебра	49
2.1. Задания по теме «Линейная алгебра»	49
2.2. Образцы решений заданий по теме «Линейная алгебра»	86
3. Введение в математический анализ	122
3.1. Задания по теме «Введение в математический анализ»	122
3.1. Образцы решений заданий по теме «Введение в математический анализ»	149
4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения	170
4.1. Задания по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения»	170
4.2. Образцы решений заданий по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения»	194
Литература	220

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие является первой частью учебно-методического комплекса «Математика. Сборник тематических заданий с образцами решений» в трех частях.

Данное издание включает не только варианты индивидуальных заданий по разделам курса высшей математики «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения», изучаемым обычно в первом семестре первого курса, но также и образцы решений типовых вариантов. При этом каждая задача образцового варианта решена чрезвычайно подробно, все вычислительные выкладки сопровождаются словесными пояснениями, позволяющими студенту разобраться в решениях задач каждого раздела в подробностях, соответствующих его потребностям. На взгляд авторов, большое количество разобранных до деталей задач поможет студентам создать необходимую базу для понимания изучаемых идей и методов, приобрести уверенность в своих силах и умение самостоятельно работать с учебной литературой, поддерживая и развивая тем самым свой творческий потенциал.

Авторы пособия придерживаются концепции: основные идеи и методы математики не должны «тонуть» в громоздких вычислениях. Поэтому наряду со стандартными (порядком наскучившими) задачами, без которых, к сожалению, трудно постигнуть классическую математику, авторы предлагают и такие задачи, которые нужно решить «на уровне идеи». Например, в некоторых задачах требуется привести схему решения, не находя значений, числовых параметров, или преобразовать поставленную задачу к более простому виду (без дальнейшего решения полученной задачи) и т. д.

В большинстве своем задачи данного учебно-методического пособия имеют средний уровень сложности, соответствующий требованиям программы. Для студентов, желающих расширить свой кругозор, предлагаются чуть более сложные задачи, отмеченные звездочкой (*), для которых тоже приводятся либо полные решения, либо указания к решениям.

Задачи из этого сборника также можно использовать для аудиторной работы, проведения самостоятельных и контрольных работ, составления экзаменационных материалов.

Задачи с подробными решениями рекомендуются для самостоятельной проработки студентами при подготовке к контрольным работам, зачетам и экзаменам.

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Задания по теме

«Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

Задание 1

Заданы векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{d} , \vec{c} .

1) Постройте векторы \vec{a} и \vec{b} , убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор \vec{d} по этому базису.

2) Докажите аналитически, что векторы \vec{a} и \vec{b} образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора \vec{c} в этом базисе. Нормируйте базис $\{\vec{a}; \vec{b}\}$.

3) В параллелограмме, построенном на векторах \vec{a} и \vec{b} , найдите:

а) угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;

б) координаты диагоналей \vec{d}_1 и \vec{d}_2 и проекции вектора \vec{a} на векторы \vec{d}_1 и \vec{d}_2 ;

в) длину меньшей из высот параллелограмма и его площадь.

4)* Найдите направляющие косинусы вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами \vec{a} и \vec{b} .

5)* Вычислите работу, произведенную силой $\vec{F} = -5\vec{d}_1 + 4\vec{d}_2$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(3;5)$ в положение $B(-7;4)$. Под каким углом к вектору \overline{AB} направлена сила \vec{F} ?

Варианты

1) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j}$.

2) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{j}$.

3) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = -6\vec{i} - \vec{j}$.

4) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i}$.

5) $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 14\vec{j}$.

6) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - 10\vec{j}$.

7) $\vec{a} = -2\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 10\vec{j}$.

8) $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 31\vec{j}$.

9) $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

10) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.

11) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = 8\vec{i} - 9\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$.

- 12) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = 7\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = -14\vec{i} + 15\vec{j}$.
- 13) $\vec{a} = \vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 10\vec{j}$.
- 14) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{d} = -\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - 7\vec{j}$.
- 15) $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 17\vec{j}$.
- 16) $\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{d} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{c} = 11\vec{j}$.
- 17) $\vec{a} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} - 11\vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 35\vec{j}$.
- 18) $\vec{a} = 9\vec{i} - 6\vec{j}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = 23\vec{i} - 4\vec{j}$.
- 19) $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{c} = -19\vec{i} - 6\vec{j}$.
- 20) $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{d} = 12\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{i}$.
- 21) $\vec{a} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{d} = 9\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{c} = 25\vec{i} + 8\vec{j}$.
- 22) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{d} = 7\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 13\vec{j}$.
- 23) $\vec{a} = -7\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 11\vec{j}$.
- 24) $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{d} = 9\vec{i} - 8\vec{j}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j}$.
- 25) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{d} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j}$.
- 26) $\vec{a} = -7\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{d} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = -15\vec{i} - 9\vec{j}$.
- 27) $\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{d} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{c} = 11\vec{i} + 27\vec{j}$.
- 28) $\vec{a} = 10\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = 5\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{c} = 10\vec{i} + 31\vec{j}$.
- 29) $\vec{a} = \vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = 11\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 44\vec{j}$.
- 30) $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{d} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 41\vec{j}$.

Задание 2

Даны точки A , B , C . Найдите:

- 1) координаты вектора \overrightarrow{BM} , направленного по медиане треугольника ABC ;
- 2) длину высоты BH треугольника ABC ;
- 3) координаты точки H ;
- 4) длину высоты BD треугольной пирамиды $DABC$, имеющей объем 24;
- 5)* координаты точки D .

Варианты

- 1) $A(2; 2; -2)$, $B(1; 3; 5)$, $C(-4; 0; 6)$.
- 2) $A(1; -1; 2)$, $B(-3; 4; 7)$, $C(0; 1; 5)$.
- 3) $A(2; -2; 3)$, $B(5; 3; 1)$, $C(-1; 0; 7)$.

- 4) $A(3; 0; 1), B(2; 4; 5), C(7; -8; 3)$.
- 5) $A(-5; 7; 4), B(-2; -3; 1), C(9; -6; 4)$.
- 6) $A(0; 1; -1), B(2; -4; 9), C(6; 7; -6)$.
- 7) $A(-3; 4; -4), B(5; 1; -1), C(2; 7; 0)$.
- 8) $A(9; 7; 0), B(4; -3; 2), C(1; 8; 4)$.
- 9) $A(6; 5; 4), B(3; 2; 1), C(1; 2; 9)$.
- 10) $A(-7; 6; 0), B(5; -4; 3), C(1; -2; 3)$.
- 11) $A(4; -4; 5), B(6; 0; 7), C(1; 2; 9)$.
- 12) $A(-6; 7; 4), B(9; 3; 0), C(-2; 5; 4)$.
- 13) $A(3; 8; -1), B(-1; 1; 2), C(3; -7; -7)$.
- 14) $A(0; 0; 1), B(2; 3; 4), C(5; 6; 7)$.
- 15) $A(-9; -8; 4), B(3; -3; 3), C(2; 0; 5)$.
- 16) $A(1; 3; -4), B(2; -2; 7), C(4; 5; 6)$.
- 17) $A(-2; 9; 8), B(4; -6; -6), C(1; 0; 2)$.
- 18) $A(1; 0; -4), B(0; -5; 5), C(6; 9; 8)$.
- 19) $A(3; 4; 0), B(-2; 1; 2), C(4; 6; 0)$.
- 20) $A(9; -5; -2), B(4; 3; 1), C(-2; 4; 5)$.
- 21) $A(3; 2; -1), B(1; -1; 4), C(7; -5; 2)$.
- 22) $A(-4; 2; 3), B(-2; -1; 1), C(0; 5; 7)$.
- 23) $A(-3; 4; 5), B(1; 2; 3), C(-7; 8; 2)$.
- 24) $A(1; 0; -5), B(4; 3; 6), C(-7; 2; 3)$.
- 25) $A(1; -1; 1), B(2; 3; -4), C(4; -3; 3)$.
- 26) $A(3; -2; 7), B(1; 0; -4), C(2; -3; 4)$.
- 27) $A(2; -7; 4), B(1; 1; -5), C(6; 8; -9)$.
- 28) $A(3; -3; 7), B(1; -2; 4), C(6; 8; -2)$.
- 29) $A(1; 4; 3), B(5; -6; 9), C(1; -2; 2)$.
- 30) $A(5; 10; -1), B(2; 4; -8), C(8; 7; -3)$.

Задание 3

1) В декартовой системе координат постройте прямую l_1 , заданную уравнением в отрезках, и найдите координаты точек A и B пересечения этой прямой с осями Ox и Oy соответственно.

2) Запишите уравнение прямой l_2 , проходящей через точку A под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси Ox . Постройте прямую l_2 .

3) Найдите координаты точки C пересечения прямой l_2 и прямой l_3 , проходящей через точку B параллельно оси Ox . Постройте прямую l_3 .

4) Запишите общее уравнение прямой l_4 , проходящей через точку C перпендикулярно прямой l_1 .

5) Запишите нормальное уравнение прямой l_5 , проходящей через точку B параллельно прямой l_4 . Найдите расстояние от прямой l_5 до начала координат O .

6)* Запишите параметрические уравнения прямой l_6 – биссектрисы внутреннего угла B треугольника ABC .

7)* Найдите координаты точки C' , симметричной точке C относительно прямой l_1 .

8)* Найдите координаты четырех замечательных точек треугольника ABC : а) ортоцентра; б) центра тяжести; в) центра вписанной окружности; г) центра описанной окружности.

Варианты

1) $l_1: \frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1.$

2) $l_1: \frac{x}{-6} + \frac{y}{-8} = 1.$

3) $l_1: \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1.$

4) $l_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$

5) $l_1: \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1.$

6) $l_1: \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1.$

7) $l_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1.$

8) $l_1: \frac{x}{9} + \frac{y}{-12} = 1.$

9) $l_1: \frac{x}{-9} + \frac{y}{-12} = 1.$

10) $l_1: \frac{x}{-9} + \frac{y}{12} = 1.$

11) $l_1: \frac{x}{9} + \frac{y}{12} = 1.$

12) $l_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1.$

13) $l_1: \frac{x}{-2} + \frac{y}{-5} = 1.$

14) $l_1: \frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1.$

15) $l_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1.$

16) $l_1: \frac{x}{-3} + \frac{y}{7} = 1.$

17) $l_1: \frac{x}{-3} + \frac{y}{-7} = 1.$

18) $l_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1.$

19) $l_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{-7} = 1.$

20) $l_1: \frac{x}{1} + \frac{y}{6} = 1.$

21) $l_1: \frac{x}{1} + \frac{y}{-6} = 1.$

22) $l_1: \frac{x}{-1} + \frac{y}{6} = 1.$

23) $l_1: \frac{x}{-1} + \frac{y}{-6} = 1.$

24) $l_1: \frac{x}{4} + \frac{y}{-10} = 1.$

25) $l_1: \frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1.$

26) $l_1: \frac{x}{-4} + \frac{y}{-10} = 1.$

27) $l_1: \frac{x}{-4} + \frac{y}{10} = 1.$

28) $l_1: \frac{x}{5} + \frac{y}{-9} = 1.$

29) $l_1: \frac{x}{-5} + \frac{y}{9} = 1.$

30) $l_1: \frac{x}{-5} + \frac{y}{-9} = 1.$

Задание 4

Дана треугольная призма $PQR P_1 Q_1 R_1$, для которой известны координаты точки $P_1(2; 1; -1)$ и координаты вершин P, Q, R основания PQR :

- 1) определите ориентацию тройки $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PP_1}$;
- 2) найдите расстояние между плоскостями PQR и $P_1 Q_1 R_1$;
- 3) составьте уравнение прямой OO_1 , где O и O_1 – точки пересечения медиан треугольников PQR и $P_1 Q_1 R_1$ соответственно;
- 4) найдите расстояние между прямыми PQ и $P_1 Q_1$;
- 5) вычислите расстояние между прямыми QR и $P_1 Q_1$;
- 6) * найдите точку P' , симметричную точке P относительно прямой QR ;
- 7) * определите момент силы $\overrightarrow{PP_1}$ относительно точки Q ;
- 8) * найдите координаты точки Q_1 :
 - а) в декартовой системе координат;
 - б) в базисе, построенном на векторах $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PP_1}$.

Варианты

- 1) $P(2; 2; -2), Q(1; 3; 5), R(-4; 0; 6).$
- 2) $P(1; -1; 2), Q(-3; 4; 7), R(0; 1; 5).$
- 3) $P(2; -2; 3), Q(5; 3; 1), R(-1; 0; 7).$
- 4) $P(3; 0; 1), Q(2; 4; 5), R(7; -8; 3).$
- 5) $P(-5; 7; 4), Q(-2; -3; 1), R(9; -6; 4).$
- 6) $P(0; 1; -1), Q(2; -4; 9), R(6; 7; -6).$
- 7) $P(-3; 4; -4), Q(5; 1; -1), R(2; 7; 0).$
- 8) $P(9; 7; 0), Q(4; -3; 2), R(1; 8; 4).$
- 9) $P(6; 5; 4), Q(3; 2; 1), R(1; 2; 9).$
- 10) $P(-7; 6; 0), Q(5; -4; 3), R(1; -2; 3).$
- 11) $P(4; -4; 5), Q(6; 0; 7), R(1; 2; 9).$

- 12) $P(-6; 7; 4)$, $Q(9; 3; 0)$, $R(-2; 5; 4)$.
- 13) $P(3; 8; -1)$, $Q(-1; 1; 2)$, $R(3; -7; -7)$.
- 14) $P(0; 0; 1)$, $Q(2; 3; 4)$, $R(5; 6; 7)$.
- 15) $P(-9; -8; 4)$, $Q(3; -3; 3)$, $R(2; 0; 5)$.
- 16) $P(1; 3; -4)$, $Q(2; -2; 7)$, $R(4; 5; 6)$.
- 17) $P(-2; 9; 8)$, $Q(4; -6; -6)$, $R(1; 0; 2)$.
- 18) $P(1; 0; -4)$, $Q(0; -5; 5)$, $R(6; 9; 8)$.
- 19) $P(3; 4; 0)$, $Q(-2; 1; 2)$, $R(4; 6; 0)$.
- 20) $P(9; -5; -2)$, $Q(4; 3; 1)$, $R(-2; 4; 5)$.
- 21) $P(3; 2; -1)$, $Q(1; -1; 4)$, $R(7; -5; 2)$.
- 22) $P(-4; 2; 3)$, $Q(-2; -1; 1)$, $R(0; 5; 7)$.
- 23) $P(-3; 4; 5)$, $Q(1; 2; 3)$, $R(-7; 8; 2)$.
- 24) $P(1; 0; -5)$, $Q(4; 3; 6)$, $R(-7; 2; 3)$.
- 25) $P(1; -1; 1)$, $Q(2; 3; -4)$, $R(4; -3; 3)$.
- 26) $P(3; -2; 7)$, $Q(1; 0; -4)$, $R(2; -3; 4)$.
- 27) $P(2; -7; 4)$, $Q(1; 1; -5)$, $R(6; 8; -9)$.
- 28) $P(3; -3; 7)$, $Q(1; -2; 4)$, $R(6; 8; -2)$.
- 29) $P(1; 4; 3)$, $Q(5; -6; 9)$, $R(1; -2; 2)$.
- 30) $P(5; 10; -1)$, $Q(2; 4; -8)$, $R(8; 7; -3)$.

Задание 5

1) Запишите уравнения прямых l_1, l_2, l_3 , по которым заданная плоскость α пересекает координатные плоскости xOy , xOz и yOz соответственно и постройте эти прямые.

2) Найдите координаты точек A, B и C пересечения плоскости α с осями Ox , Oy и Oz соответственно и найдите площадь треугольника ABC .

3) Запишите уравнение прямой l_4 , проходящей через точку C перпендикулярно плоскости α .

4) На прямой l_4 найдите координаты точки P , равноудаленной от точки B и начала координат O .

5) Найдите угол между прямой l_5 , проходящей через точки P и O , и плоскостью α .

6) Найдите расстояние от точки P до плоскости α .

7) Найдите объем пирамиды $OABC$ и $PABC$.

8)* Найдите углы, которые плоскость α образует с координатными осями.

Варианты

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\alpha: 3x - 4y - 6z + 12 = 0.$ | 2) $\alpha: 3x - 4y + 6z + 12 = 0.$ |
| 3) $\alpha: 3x + 4y + 6z + 12 = 0.$ | 4) $\alpha: 3x + 4y - 6z + 12 = 0.$ |
| 5) $\alpha: 4x + 3y + 6z + 12 = 0.$ | 6) $\alpha: 4x + 3y + 6z - 12 = 0.$ |
| 7) $\alpha: 4x - 3y + 6z - 12 = 0.$ | 8) $\alpha: 4x - 3y - 6z - 12 = 0.$ |
| 9) $\alpha: -4x + 3y + 6z - 12 = 0.$ | 10) $\alpha: 6x + 3y + 4z - 12 = 0.$ |
| 11) $\alpha: 6x - 3y + 4z - 12 = 0.$ | 12) $\alpha: 6x - 3y - 4z - 12 = 0.$ |
| 13) $\alpha: 6x + 3y - 4z - 12 = 0.$ | 14) $\alpha: x + 2y + 3z + 6 = 0.$ |
| 15) $\alpha: x + 2y + 3z - 6 = 0.$ | 16) $\alpha: x - 2y + 3z + 6 = 0.$ |
| 17) $\alpha: x - 2y + 3z - 6 = 0.$ | 18) $\alpha: x + 2y - 3z + 6 = 0.$ |
| 19) $\alpha: x + 2y - 3z - 6 = 0.$ | 20) $\alpha: 2x + y + 3z - 6 = 0.$ |
| 21) $\alpha: 2x + y - 3z - 6 = 0.$ | 22) $\alpha: 2x - y - 3z - 6 = 0.$ |
| 23) $\alpha: 2x + y - 3z + 6 = 0.$ | 24) $\alpha: 2x + y + 3z + 6 = 0.$ |
| 25) $\alpha: 5x + y + 10z - 10 = 0.$ | 26) $\alpha: 5x - y + 10z - 10 = 0.$ |
| 27) $\alpha: 5x - y - 10z - 10 = 0.$ | 28) $\alpha: 5x + y + 10z + 10 = 0.$ |
| 29) $\alpha: x - 5y + 10z + 10 = 0.$ | 30) $\alpha: x - 10y + 5z + 10 = 0.$ |

Задание 6

- 1) Постройте кривые, заданные уравнениями а)–д).
- 2) Постройте области, ограниченные заданными кривыми а)–в)*.

Варианты

1. 1) а) $x = 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{25}};$
 б) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$
 в) $12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0;$
 г) $r = 5 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$
 д) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, & x \geq 0, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, & y \geq 0. \end{cases}$
- 2) а) $y^2 = x + 8, x + y = 1;$
 б) $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \\ x = 0 \ (x \geq 0); \end{cases}$

$$в) * \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

2. 1) а) $x^2 + y^2 + 16 = 0$;

б) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$;

в) $y^2 + 8x + 16 = 0$;

г) $r = -4 \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$;

д) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0.$

2) а) $x^2 = -y, \quad -x = y + 3$;

б) $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 16 \sin^3 t, \\ x = 0 \quad (x \leq 0); \end{cases}$

в) * $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 3). \end{cases}$

3. 1) а) $y = -5\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$;

б) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$;

в) $y^2 + 6x + 14y + 43 = 0$;

г) $r = 2 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$;

д) $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0.$

2) а) $x^2 = -\frac{1}{6}y, \quad x - y = \frac{1}{18}$;

б) $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \\ y = 0, \quad y \geq 0; \end{cases}$

$$в) * \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

4. 1) а) $y = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$;

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi; 2\pi];$

в) $x^2 - 3 - 2x + y = 0$;

г) $r = 5 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad y \geq 0, x \leq 0.$

2) а) $x^2 = \frac{1}{50} y, \quad x + y = \frac{1}{50}$;

б) $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos^3 t, \\ y = \frac{1}{16} \sin^3 t, \\ x = 0, y = 0, \end{cases} \quad x \geq 0, y \leq 0;$

в) * $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1). \end{cases}$

5. 1) а) $x = 4\sqrt{1 + \frac{y^2}{36}}$;

б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 7 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right];$

в) $2x^2 - 12x - 3y + 18 = 0$;

г) $r = -2 \sin \varphi, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$;

д) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0.$

2) а) $y^2 = -\frac{1}{50} x, \quad -x + y = \frac{1}{100}$;

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{1}{16} \cos^3 t, \\ y = \frac{1}{4} \sin^3 t, \\ x = 0, y = 0, x \leq 0, y \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 8 \quad (0 < x < 10\pi, y \geq 8). \end{cases}$$

6. 1) а) $x = -4\sqrt{1 + \frac{y^2}{36}}$;

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;

в) $x^2 - 6x + 2y + 11 = 0$;

г) $r = 10 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$;

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t, \end{cases} \quad y \leq 0.$

2) а) $y^2 = \frac{1}{6}x, \quad x + y = \frac{1}{6}$;

б) $\begin{cases} x = \frac{1}{9} \cos^3 t, \\ y = \frac{1}{16} \sin^3 t, \\ x = 0, x \geq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$

7. 1) а) $(x+4)^2 = (1-y)^2$;

б) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$;

в) $x^2 - 4y^2 + 14x - 24y + 9 = 0$;

г) $r = -3 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$;

$$\text{д)} \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \quad y \leq 0.$$

$$2) \quad \text{а)} \quad x^2 = \frac{1}{6} y, \quad -x + y = \frac{1}{12};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = \frac{1}{16} \cos^3 t, \\ y = \frac{1}{9} \sin^3 t, \\ x = 0, \quad x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{в)}^* \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 15). \end{cases}$$

$$8. \quad 1) \quad \text{а)} \quad y = -\frac{1}{3} \sqrt{x-4};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$\text{в)} \quad x^2 - 4y^2 + 14x - 24y + 17 = 0;$$

$$\text{г)} \quad r = 7 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi;$$

$$\text{д)} \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2) \quad \text{а)} \quad y^2 = -\frac{1}{6} x, \quad -x - y = \frac{1}{12};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = \frac{1}{25} \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{в)}^* \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 2). \end{cases}$$

$$9. \quad 1) \quad \text{а)} \quad x = -\frac{1}{4} \sqrt{y+2};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$$

$$в) 9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0;$$

$$г) r = -8 \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0;$$

$$д) \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \quad y \leq 0.$$

$$2) \quad а) x^2 = -\frac{1}{100} y, \quad x + y = -\frac{1}{100};$$

$$б) \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \frac{1}{25} \sin^3 t, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0; \end{cases}$$

$$в) * \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$$

$$10. \quad 1) \quad а) x = \frac{1}{4} \sqrt{y+2};$$

$$б) \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$в) 4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0;$$

$$г) r = 4 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4};$$

$$д) \begin{cases} x = 7 \cos^3 t, \\ y = 7 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0.$$

$$2) \quad а) y^2 = \frac{1}{100} x, \quad x - y = \frac{1}{100};$$

$$б) \begin{cases} x = 11 \cos^3 t, \\ y = 11 \sin^3 t, \\ y = 0, \quad y \geq 0; \end{cases}$$

$$в) * \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 14 \quad (0 < x < 16\pi, \quad y \geq 14). \end{cases}$$

$$11. \quad 1) \quad а) x = 5 \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\pi; 0];$$

$$\text{в) } 4y^2 - 8y - 2x - 1 = 0;$$

$$\text{г) } r = -6 \cos \varphi, \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad y \leq 0.$$

$$2) \text{ а) } x^2 = -\frac{1}{4}y, \quad x + y = -\frac{1}{4};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 13 \cos^3 t, \\ y = 13 \sin^3 t, \\ x = 0, \quad x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$$

$$12. \quad 1) \text{ а) } x = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 7 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right];$$

$$\text{в) } 4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0;$$

$$\text{г) } r = 10 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0, \quad y \leq 0.$$

$$2) \text{ а) } y^2 = -16x, \quad x + y = -4;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1, \quad y = 1, \quad y = 3;$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 5 \quad (0 < x < 6\pi, \quad y \geq 5). \end{cases}$$

$$13. \quad 1) \text{ а) } x^2 - 4y^2 = 0;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 8 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi; 2\pi];$$

$$\text{в) } 2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0;$$

г) $r = -10 \sin \varphi, \pi \leq \varphi \leq 2\pi;$

д) $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} y \geq 0.$

2) а) $y^2 = 20x, x - y = 1;$

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1, x = 1, x = 3;$

в) * $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 8 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 8). \end{cases}$

14. 1) а) $y = -2\sqrt{1 + \frac{x^2}{16}};$

б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} t \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right];$

в) $4y^2 + 4y - 2y + 1 = 0;$

г) $r = \cos \varphi, \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

д) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} y \leq 0.$

2) а) $x^2 = -6y, x + y = -1;$

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1, y = 2, y = 4;$

в) * $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = \frac{1}{2} \quad \left(0 < x < 2\pi, y \geq \frac{1}{2} \right). \end{cases}$

15. 1) а) $y = 3\sqrt{x+2};$

б) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right];$

в) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y + 31 = 0;$

г) $r = -5 \cos \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\pi;$

д) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} y \geq 0.$

- 2) а) $y^2 = -6x, x + y = -1$;
- б) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1, x = 1, x = 3$;
- в) * $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 5 \quad (0 < x < 10\pi, y \geq 5). \end{cases}$
16. 1) а) $y = -3\sqrt{x+2}$;
- б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 10 \sin t, \end{cases} t \in \left[\frac{\pi}{6}; \pi \right]$;
- в) $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$;
- г) $r = 8 \sin \varphi, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$;
- д) $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} x \geq 0.$
- 2) а) $x^2 = -8y, x - y = 2$;
- б) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1, x = -3, x = 6$;
- в) * $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$
17. 1) а) $y = 3\sqrt{1-x^2}$;
- б) $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [\pi; 2\pi]$;
- в) $2y^2 - 3x - 16y + 17 = 0$;
- г) $r = -8 \sin \varphi, \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$;
- д) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 15 \sin^3 t, \end{cases} x \leq 0.$
- 2) а) $y^2 = 8x, y - x = 2$;
- б) $x^2 - y^2 = 25, y = 0, y = 4$;
- в) * $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 10 \quad (0 < x < 20\pi, y \geq 10). \end{cases}$
18. 1) а) $y = -3\sqrt{1-x^2}$;

$$\text{б) } \begin{cases} x = 7 \cos t, \\ y = 7 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$\text{в) } 2y^2 + 3x + 20y + 53 = 0;$$

$$\text{г) } r = 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0;$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 12 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2) \quad \text{а) } x^2 = 10y, \quad -x + y = 5;$$

$$\text{б) } y^2 - x^2 = 25, \quad x = -4, \quad x = 0;$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$19. \quad 1) \quad \text{а) } x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\pi; 0];$$

$$\text{в) } 4x^2 + 7y^2 + 16x - 14y - 5 = 0;$$

$$\text{г) } r = -2 \cos \varphi, \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 12 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2) \quad \text{а) } y^2 = 10x, \quad x + y = 5;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad y = 1, \quad y = 2;$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 5 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 5). \end{cases}$$

$$20. \quad 1) \quad \text{а) } x = -2\sqrt{y-5};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 7 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$\text{в) } x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0;$$

$$\text{г) } r = 10 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi;$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 13 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0, \quad y \leq 0.$$

- 2) а) $x^2 = -10y, -x - y = 7;$
 б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, x = -1, x = -2;$
 в) * $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$
21. 1) а) $x = 3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}};$
 б) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right];$
 в) $2y^2 - 3x - 4y - 13 = 0;$
 г) $r = -10 \sin \varphi, \pi \leq \varphi \leq 2\pi;$
 д) $\begin{cases} x = 13 \cos^3 t, \\ y = 13 \sin^3 t, \end{cases} y \leq 0.$
- 2) а) $x^2 = 16y, x + y = 5;$
 б) $x^2 - y^2 = 16, y = -2, y = 2;$
 в) * $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 2). \end{cases}$
22. 1) а) $x = -3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}};$
 б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi];$
 в) $y^2 - 3x + 4y + 19 = 0;$
 г) $r = \frac{1}{4} \cos \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$
 д) $\begin{cases} x = 7 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ y = 1, x \leq 0, y \leq 0. \end{cases}$
- 2) а) $y^2 = 16x, x + y = 5;$
 б) $x^2 - 4y^2 = 16, y = -1, y = 2;$

$$в) * \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 1 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 1). \end{cases}$$

23. 1) а) $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right];$

в) $2y^2 - 3x + 20y + 47 = 0;$

г) $r = -\frac{1}{4} \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2};$

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, y \leq 0.$

2) а) $x^2 = -16y, \quad x + y = -4;$

б) $y^2 - x^2 = 16, \quad x = -2, x = 2;$

в) * $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 4). \end{cases}$

24. 1) а) $y = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi \right];$

в) $2y^2 + 3x - 16y + 47 = 0;$

г) $r = \frac{1}{9} \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4};$

д) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 14 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, y \leq 0.$

2) а) $y^2 = -16x, \quad -x + y = 8;$

б) $y^2 - 4x^2 = 16, \quad x = -1, x = 2;$

в) * $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = \frac{3}{2} \quad \left(0 < x < 2\pi, y \geq \frac{3}{2} \right). \end{cases}$

25. 1) а) $x^2 - 6x = y^2 - 9;$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 7 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$\text{в) } 25x^2 - 4y^2 + 100x + 56y - 196 = 0;$$

$$\text{г) } r = -\frac{1}{9} \sin \varphi, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 14 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2) \quad \text{а) } x^2 = 18y, \quad y - x = 10;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1, \quad y = -1, \quad y = 5;$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 10\pi, \quad y \geq 2). \end{cases}$$

$$26. \quad 1) \quad \text{а) } x = -\sqrt{25 - y^2};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right];$$

$$\text{в) } 49x^2 - 4y^2 + 98x - 64y - 403 = 0;$$

$$\text{г) } r = 20 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2) \quad \text{а) } y^2 = 18x, \quad x + y = 12;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad y = -2, \quad y = 0;$$

$$\text{в) }^* \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 1 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 1). \end{cases}$$

$$27. \quad 1) \quad \text{а) } y = \frac{1}{2} \sqrt{x+3};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right];$$

$$\text{в) } 4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 51 = 0;$$

$$\text{г) } r = -20 \cos \varphi, \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \leq 0.$$

2) а) $x^2 = -18y, \quad y - x = 9;$

б) $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1, \quad y = \frac{1}{2}, \quad y = 0;$

в) * $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$

28. 1) а) $(x-3)^2 = -2y^2;$

б) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right];$

в) $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0;$

г) $r = 15 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4};$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 7 \sin^3 t, \end{cases} \quad x \geq 0.$$

2) а) $y^2 = -18x, \quad x + y = -16;$

б) $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1, \quad y = -4, \quad y = 4;$

в) * $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 1 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 1). \end{cases}$

29. 1) а) $x = 3\sqrt{y-4};$

б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{2\pi}{3}; 2\pi \right];$

в) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0;$

г) $r = -15 \sin \varphi, \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2};$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 7 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad y \geq 0.$$

2) а) $x^2 = 50y, \quad x + y = 50;$

б) $x^2 + y^2 = 100, \quad y = -8, \quad y = 6;$

$$в) * \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 1 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 1). \end{cases}$$

30. 1) а) $x = -3\sqrt{y-4}$;

б) $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi; 2\pi]$;

в) $4x^2 - 25y^2 - 100x - 50y - 25 = 0$;

г) $r = 18 \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 9 \sin^3 t, \end{cases} \quad y \leq 0.$

2) а) $y^2 = 50x, \quad x + y = 100$;

б) $x^2 + y^2 = 16, \quad x = -3, \quad x = 1$;

в) * $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \\ y = 7 \quad (0 < x < 14\pi, y \geq 7). \end{cases}$

Задание 7

1) В пространстве \mathbb{R}^3 постройте область, ограниченную поверхностями γ_1, γ_2 , и проекции этой области на координатные плоскости.

2) Приведите уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности второго порядка к каноническому виду и укажите ее тип.

Варианты

1. 1) $\gamma_1: z = 15\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}, \quad \gamma_2: z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2$;

2) $5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0.$

2. 1) $\gamma_1: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \gamma_2: z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{255}}$;

2) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0.$

3. 1) $\gamma_1: z^2 = 64 - x^2 - y^2, \quad \gamma_2: x^2 + y^2 = 60$ (внутри цилиндра);

$$2) 5x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 10x + 12y + 16z + 3 = 0.$$

$$4. \quad 1) \gamma_1: z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}, \quad \gamma_2: 2z = x^2 + y^2;$$

$$2) 4x^2 - 9y^2 + z^2 + 24x - 18y - 10z + 88 = 0.$$

$$5. \quad 1) \gamma_1: z = x^2 + y^2, \quad \gamma_2: 9 - z = x^2 + y^2;$$

$$2) 3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12x + 8y + 12z + 2 = 0.$$

$$6. \quad 1) \gamma_1: z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \gamma_2: z = 10 - x^2 - y^2;$$

$$2) 9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0.$$

$$7. \quad 1) \gamma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad \gamma_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ (внутри цилиндра);}$$

$$2) x^2 - 6x + 2y + 11 = 0.$$

$$8. \quad 1) \gamma_1: z = 21\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}, \quad \gamma_2: z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2;$$

$$2) y^2 - 3x - 4y + 10 = 0.$$

$$9. \quad 1) \gamma_1: z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad \gamma_2: 6z = x^2 + y^2;$$

$$2) 9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$$

$$10. \quad 1) \gamma_1: z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{80}}, \quad \gamma_2: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2};$$

$$2) 2x^2 + 3y^2 + 6x - 18y - 12z + 47 = 0.$$

$$11. \quad 1) \gamma_1: z^2 + x^2 = 81 - x^2, \quad \gamma_2: z = x^2 + y^2 \text{ (внутри параболоида);}$$

$$2) 2x^2 - 3y^2 - 4z^2 + 4x + 12y + 8z - 14 = 0.$$

$$12. \quad 1) \gamma_1: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \gamma_2: \frac{z}{3} = x^2 + y^2;$$

- 2) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.
13. 1) $\gamma_1: z = 6\sqrt{x^2 + y^2}$, $\gamma_2: z = 16 - x^2 - y^2$;
2) $4y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.
14. 1) $\gamma_1: z = 2 - 12(x^2 + y^2)$, $\gamma_2: z = 24x + 2$;
2) $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$.
15. 1) $\gamma_1: z = 32(x^2 + y^2) + 3$, $\gamma_2: z = 3 - 64x$;
2) $5x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 10x + 12y - 16z - 49 = 0$.
16. 1) $\gamma_1: z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $\gamma_2: z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$;
2) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6x + 4y + 32z - 49 = 0$.
17. 1) $\gamma_1: z = 10(x^2 + y^2) + 1$, $\gamma_2: z = 1 - 20y$;
2) $2y^2 + 3x + 20y + 53 = 0$.
18. 1) $\gamma_1: z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $\gamma_2: 9z = x^2 + y^2$;
2) $4x^2 + 7y^2 + 16x - 14y - 5 = 0$.
19. 1) $\gamma_1: x^2 + y^2 = 49 - z^2$, $\gamma_2: x^2 + y^2 = 33$ (внутри цилиндра);
2) $4x^2 + y^2 + 8x - 14y + 52 = 0$.
20. 1) $\gamma_1: z = 28(x^2 + y^2) + 3$, $\gamma_2: z = 56y + 3$;
2) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 40y + 73 = 0$.
21. 1) $\gamma_1: z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $\gamma_2: z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}}$;
2) $25x^2 - 4y^2 + 100x + 56y + 4 = 0$.

22. 1) $\gamma_1: z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}$, $\gamma_2: z = x^2 + y^2$;
 2) $3x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 6x - 36y - 8z - 1 = 0$.
23. 1) $\gamma_1: x^2 + z^2 - 36 + y^2 = 0$, $\gamma_2: x^2 = 27 - y^2$ (внутри цилиндра);
 2) $x^2 - 2x - 2y - 5 = 0$.
24. 1) $\gamma_1: z = 12\sqrt{x^2 + y^2}$, $\gamma_2: z = 28 - x^2 - y^2$;
 2) $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.
25. 1) $\gamma_1: z = 22((x-1)^2 + y^2) + 3$, $\gamma_2: z = 47 - 44x$;
 2) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$.
26. 1) $\gamma_1: z = 26((x-1)^2 + y^2) - 2$, $\gamma_2: z = 50 - 52x$;
 2) $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 32 = 0$.
27. 1) $\gamma_1: z = 32((x-1)^2 + y^2) + 3$, $\gamma_2: z = 67 - 64x$;
 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 11 = 0$.
28. 1) $\gamma_1: -5 - z^2 = x^2 + y^2$, $\gamma_2: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
 2) $36x^2 - 9y^2 - 72x - 18y + 351 = 0$.
29. 1) $\gamma_1: z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, $\gamma_2: z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
 2) $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z^2 + 18 = 0$.
30. 1) $\gamma_1: z^2 + x^2 + y^2 = 49$, $\gamma_2: x^2 + z^2 = 33$ (внутри цилиндра);
 2) $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z^2 = 0$.

1.2. Образцы решений заданий по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

Задание 1

Заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = 8\vec{i} + \vec{j}$.

1) Постройте векторы \vec{a} и \vec{b} , убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор \vec{d} по этому базису.

2) Докажите аналитически, что векторы \vec{a} и \vec{b} образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора \vec{c} в этом базисе. Нормируйте базис $\{\vec{a}; \vec{b}\}$.

3) В параллелограмме, построенном на векторах \vec{a} и \vec{b} , найдите:

а) угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;

б) координаты диагоналей \vec{d}_1 и \vec{d}_2 и проекции вектора \vec{a} на векторы \vec{d}_1 и \vec{d}_2 ;

в) длину меньшей из высот параллелограмма и его площадь.

4)* Найдите направляющие косинусы вектора, направленного по биссектрисе угла, образованного между векторами \vec{a} и \vec{b} .

5)* Вычислите работу, произведенную силой $\vec{F} = -5\vec{d}_1 + 4\vec{d}_2$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(3;5)$ в положение $B(-7;4)$. Под каким углом к вектору \vec{AB} направлена сила \vec{F} ?

Решение

1) Упорядоченная пара любых плоских неколлинеарных векторов образует базис на плоскости.

Векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, поэтому они образуют базис на плоскости. Как следует из рис. 1

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

2) Проверим аналитически, что векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, следовательно, образуют базис:

$$\vec{a} = (2; 1), \vec{b} = (-1; 1),$$

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{1}, \text{ значит } \vec{a} \nparallel \vec{b}.$$

Таким образом, векторы \vec{a} и \vec{b} образуют базис на плоскости.

Найдем координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ в базисе $\{\vec{a}; \vec{b}\}$. Пусть

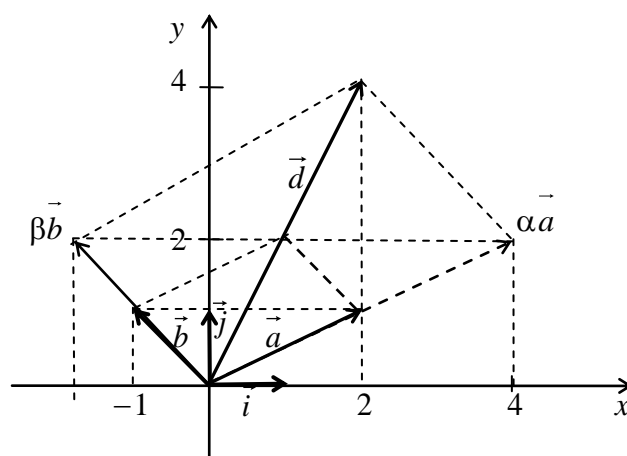


Рис. 1

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}.$$

Запишем это равенство в координатном виде:

$$(8;1) = \alpha \cdot (2;1) + \beta \cdot (-1;1) \Leftrightarrow (8;1) = (2\alpha - \beta; \alpha + \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 8, \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = -2. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } \vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (3; -2).$$

Нормируем базис $\{\vec{a}; \vec{b}\}$, заменив в нем векторы на их орты $\{\vec{a}_0; \vec{b}_0\}$ (т. е. векторы единичной длины того же направления):

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – длины векторов \vec{a} и \vec{b} : $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

3) а) Для нахождения косинуса угла между векторами будем использовать формулу $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Найдем скалярное произведение векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1 < 0, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow$$

$$\text{угол } \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

3) б) Найдем координаты диагоналей параллелограмма $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$:

$$\vec{d}_1 = (2\vec{i} + \vec{j}) + (-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j} = (1; 2), \quad \vec{d}_2 = (2\vec{i} + \vec{j}) - (-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} = (1; 0).$$

$$\text{пр}_{\vec{d}_1} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{d}_1)}{|\vec{d}_1|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad \text{пр}_{\vec{d}_2} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{d}_2)}{|\vec{d}_2|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2.$$

3) в) Меньшая из высот h параллелограмма проведена к большей его стороне, т. е. к стороне, построенной на векторе \vec{a} . Поскольку, с одной стороны, площадь параллелограмма равна

$$S = |\vec{a}| \cdot h, \text{ а с другой стороны,}$$

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \text{ то } h = |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$h = \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Тогда } S = |\vec{a}| \cdot h = \sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = 3.$$

4) * Указание.

Направляющий вектор \vec{l} биссектрисы угла, образованного векторами \vec{a} и \vec{b} , направлен по диагонали ромба со сторонами \vec{a}_0 и \vec{b}_0 , где \vec{a}_0 и \vec{b}_0 – орты векторов \vec{a} и \vec{b} соответственно (рис. 2).

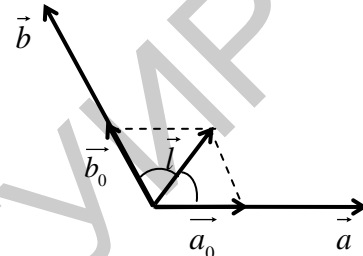


Рис. 2

5) * Указание.

Работа силы \vec{F} , приложенная в точке A , есть скалярное произведение этой силы на вектор перемещения \vec{AB} .

Задание 2

В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки $A(3;5;4)$, $B(8;7;4)$, $C(5;10;4)$. Найдите:

- 1) координаты вектора \vec{BM} , направленного по медиане треугольника ABC ;
- 2) длину высоты BH треугольника ABC ;
- 3) координаты точки H ;
- 4) длину высоты BD треугольной пирамиды $DABC$, имеющей объем 24;
- 5) * координаты точки D .

Решение

1) Найдём координаты точки M (рис. 3), являющейся серединой отрезка AC , по формулам

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+10}{2} = 7\frac{1}{2},$$

$$z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4.$$

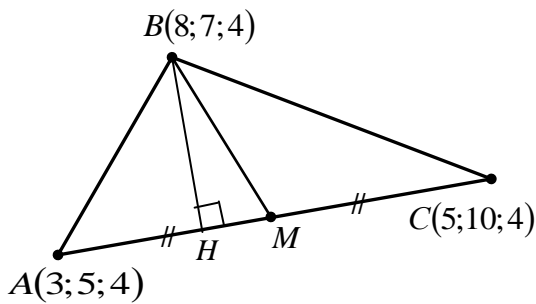


Рис. 3

Так как точка $M\left(4; 7\frac{1}{2}; 4\right)$ является концом вектора \overline{BM} , то

$$\overline{BM} = \left(4 - 8; 7\frac{1}{2} - 7; 4 - 4\right) = \left(-4; \frac{1}{2}; 0\right).$$

2) Найдем площадь ΔABC ,

используя геометрический смысл векторного произведения:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right|.$$

$$\overline{AB} = (8 - 3; 7 - 5; 4 - 4) = (4; 2; 0),$$

$$\overline{AC} = (5 - 3; 10 - 5; 4 - 4) = (2; 5; 0).$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 16\vec{k} = (0; 0; 16).$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 16^2} = 8.$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{BH}| \cdot |\overline{AC}|,$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(5 - 3)^2 + (10 - 5)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{29}.$$

Тогда $|\overline{BH}| = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{29}} = \frac{16\sqrt{29}}{29}.$

3) Точка H является точкой пересечения прямой AC и плоскости γ , проходящей через точку B перпендикулярно вектору \overline{AC} (рис. 4).

Составим уравнение плоскости γ с вектором нормали $\overline{AC} = (a; b; c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки B , принадлежащей плоскости γ : $x_0 = x_B = 8, y_0 = y_B = 7, z_0 = z_B = 4.$

Найдем координаты вектора $\overline{AC} = (5 - 3; 10 - 5; 4 - 4) = (2; 5; 0)$, который является нормальным вектором плоскости γ .

Тогда уравнение плоскости γ примет вид

$$2 \cdot (x - 8) + 5 \cdot (y - 7) + 0 \cdot (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 51 = 0.$$

Теперь составим параметрические уравнения прямой AC :

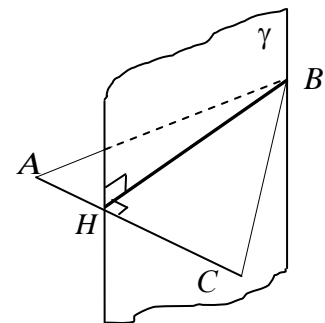


Рис. 4

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

В нашем случае $(m; n; p) = \overrightarrow{AC} = (2; 5; 0)$ – направляющий вектор прямой AC , $(x_0; y_0; z_0) = (x_A; y_A; z_A) = (3; 5; 4)$ – известная точка A .

$$\text{Тогда } \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 + 5t, \\ z = 4 + 0 \cdot t. \end{cases}$$

Поскольку в точке H прямая AC пересекает плоскость γ , то координаты точки H являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y - 51 = 0, \\ x = 3 + 2t, \\ y = 5 + 5t, \\ z = 4. \end{cases}$$

Подставив выражения для x , y , z в первое уравнение системы, получим $2(3 + 2t) + 5(5 + 5t) - 51 = 0 \Leftrightarrow 6 + 4t + 25 + 25t - 51 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 29t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{29}$.

Подставив найденное значение параметра t , находим координаты точки H : $x = 4\frac{11}{29}$, $y = 8\frac{13}{29}$, $z = 4$, откуда $H\left(4\frac{11}{29}; 8\frac{13}{29}; 4\right)$.

4) Поскольку $V_{DABC} = \frac{1}{3}BD \cdot S_{\Delta ABC}$, при этом $S_{\Delta ABC} = 8$ (см. п. 2 этого задания), то $BD = \frac{3V_{DABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 24}{8} = 9$.

5) * Указание.

Точка $D(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит прямой, перпендикулярной плоскости треугольника ABC , направляющим вектором которой является нормальный вектор этой плоскости. С другой стороны, точка $D(x_0; y_0; z_0)$ лежит в плоскости, параллельной плоскости треугольника ABC и находящейся на расстоянии 9 от нее. Заметим, что координаты точки D определяются неоднозначно.

Задание 3

1) В декартовой системе координат постройте прямую l_1 , заданную уравнением $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ и найдите координаты точек A и B пересечения этой прямой с осями Ox и Oy соответственно.

2) Запишите уравнение прямой l_2 , проходящей через точку A под углом $\alpha = 30^\circ$ к оси Ox . Постройте прямую l_2 .

3) Найдите координаты точки C пересечения прямой l_2 и прямой l_3 , проходящей через точку B параллельно оси Ox . Постройте прямую l_3 .

4) Запишите общее уравнение прямой l_4 , проходящей через точку C перпендикулярно прямой l_1 .

5) Запишите нормальное уравнение прямой l_5 , проходящей через точку B параллельно прямой l_4 . Найдите расстояние от прямой l_5 до начала координат O .

6)* Запишите параметрические уравнения прямой l_6 – биссектрисы внутреннего угла B треугольника ABC .

7)* Найдите координаты точки C' , симметричной точке C относительно прямой l_1 .

8)* Найдите координаты четырех замечательных точек треугольника ABC : а) ортоцентра; б) центра тяжести; в) центра вписанной окружности; г) центра описанной окружности.

Решение

1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ – уравнение прямой l_1 в отрезках, которая пересекает ось Ox в точке $A(6;0)$, а ось Oy в точке $B(0;8)$ (рис. 5).

2) Найдем уравнение прямой l_2 как уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$.

Угловым коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Найдем значение параметра b .

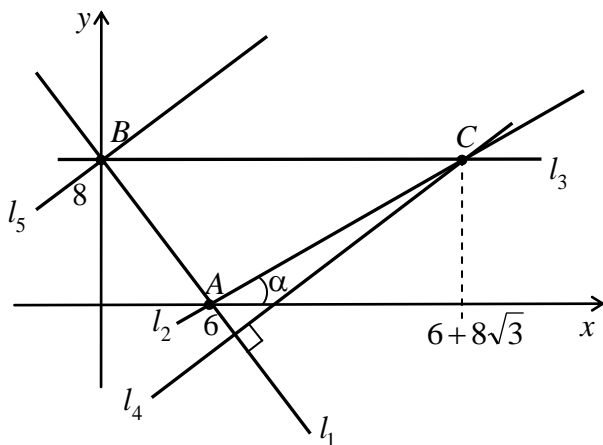


Рис. 5

Точка $A(6;0) \in l_2$, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$, откуда $0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 + b \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$.

Тогда уравнение l_2 принимает вид $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$.

3) Прямая l_3 имеет уравнение $y = 8$. Поскольку $C = l_2 \cap l_3$, то координаты точки C являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}, \\ y = 8. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 + 8\sqrt{3}, \\ y = 8. \end{cases}$$

Значит, $C(6 + 8\sqrt{3}; 8)$.

4) Запишем общее уравнение прямой $l_1: \frac{x}{6} + \frac{y}{8} - 1 = 0$. Ее нормальный вектор $\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{8}\right)$ является направляющим вектором для прямой l_4 .

Составим каноническое уравнение прямой l_4 :

$$\frac{x - (6 + 8\sqrt{3})}{\frac{1}{6}} = \frac{y - 8}{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow 6x - 36 - 48\sqrt{3} = 8y - 64 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6x - 8y + 28 - 48\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 14 - 24\sqrt{3} = 0$ – общее уравнение прямой l_4 .

5) Поскольку прямая l_5 параллельна прямой l_4 , то нормальный вектор $\vec{n}_4 = (3; -4)$ прямой l_4 также будет и нормальным вектором прямой l_5 . Тогда, используя уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $(A; B) = (3; -4)$ – координаты нормального вектора прямой l_5 , а координаты ее известной точки $x_0 = x_B = 0$, $y_0 = y_B = 8$, получим $3(x - 0) + (-4)(y - 8) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 32 = 0$.

Нормируем полученное уравнение с помощью нормирующего множителя $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5}$, знак «-» которого выбираем противоположным знаком свободного члена в общем уравнении прямой l_5 .

Таким образом, $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{32}{5} = 0$ – нормальное уравнение прямой l_5 .

Отсюда расстояние ρ от прямой l_5 до начала координат O равно $\frac{32}{5}$ – модулю свободного члена в нормальном уравнении прямой l_5 .

6)* См. указание к задаче 4 данного задания.

7)* Указание.

Точка C' лежит на прямой l_7 , проходящей через точку C перпендикулярно прямой l_1 , а точка O пересечения прямых l_1 и l_7 является серединой отрезка CC' (рис. 6).

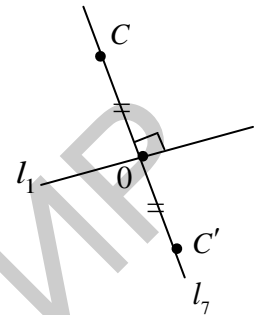


Рис. 6

8)* Указание.

а) Ортоцентр – точка пересечения высот треугольника ABC .

б) Центр тяжести треугольника – точка пересечения медиан треугольника ABC .

в) Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис треугольника ABC .

г) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Координаты каждой из четырех замечательных точек треугольника можно получить путем решения системы двух уравнений указанных выше прямых, которым они принадлежат.

Задание 4

Дана треугольная призма $PQR P_1 Q_1 R_1$, для которой известны координаты точки $P_1(1; 3; -2)$ и координаты вершин $P(1; 3; 6)$, $Q(2; 2; 1)$, $R(-1; 0; 1)$ основания PQR . Найдите:

- 1) ориентацию тройки векторов \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , $\overrightarrow{PP_1}$;
- 2) расстояние между плоскостями PQR и $P_1 Q_1 R_1$;
- 3) уравнение прямой OO_1 , где O и O_1 – точки пересечения медиан треугольников PQR и $P_1 Q_1 R_1$ соответственно;
- 4) расстояние между прямыми PQ и $P_1 Q_1$;
- 5) расстояние между прямыми QR и $P_1 Q_1$;
- 6)* точку P' , симметричную точке P относительно прямой QR ;
- 7)* момент силы $\overrightarrow{PP_1}$ относительно точки Q ;
- 8)* координаты точки Q_1 ;
- а) в декартовой системе координат;
- б) в базисе, состоящем из векторов \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , $\overrightarrow{PP_1}$.

Решение

1) Найдем координаты векторов \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , $\overrightarrow{PP_1}$ и вычислим их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PP_1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 40 > 0 \Rightarrow \text{тройка векторов}$$

\overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , $\overrightarrow{PP_1}$ – левая (рис. 7).

2) Плоскости $P_1Q_1R_1$ и PQR

параллельны, значит, расстояние между ними равно расстоянию от точки P_1 до плоскости PQR .

Составим уравнение плоскости PQR . Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой плоскости, тогда векторы \overrightarrow{PM} , \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} компланарны, а значит, их смешанное произведение равно 0.

$$(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - (y-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (z-6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10(x-1) + 15(y-3) - 5(z-6) = 0 \Leftrightarrow -10x + 15y - 5z - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + z + 1 = 0.$$

Расстояние от точки $P_1(1; 3; -2)$ до плоскости PQR , имеющей общее уравнение $2x - 3y + z + 1 = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7},$$

где $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$, $D = 1$, $(x_0; y_0; z_0) = (1; 3; -2)$ (рис. 8).

Таким образом, $d = \frac{4\sqrt{14}}{7}$ – расстояние между плоскостями PQR и $P_1Q_1R_1$.

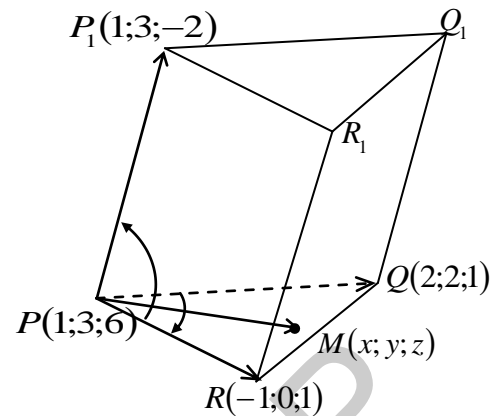


Рис. 7

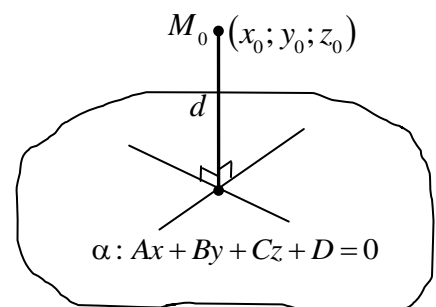


Рис. 8

3) Пусть O – точка пересечения медиан PN и QM треугольника PQR (рис. 9).

Координаты точек M и N являются координатами середин отрезков PR и QR соответственно:

$$x_M = \frac{x_P + x_R}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0,$$

$$y_M = \frac{y_P + y_R}{2} = \frac{3 + 0}{2} = 1,5,$$

$$z_M = \frac{z_P + z_R}{2} = \frac{6 + 1}{2} = 3,5.$$

Таким образом, точка $M(0; 1,5; 3,5)$ найдена. Аналогично находим точку $N(0,5; 1; 1)$. Точка O является точкой пересечения прямых QM и PN .

Составим канонические уравнения прямой QM :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ где } (x_1; y_1; z_1) \text{ – координаты точки } Q, \text{ а } (x_2; y_2; z_2) \text{ – координаты точки } M.$$

Итак, канонические уравнения прямой QM имеют вид

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 2}{-0,5} = \frac{z - 1}{2,5} \text{ или } \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-5}.$$

Аналогично составим канонические уравнения прямой PN :

$$\frac{x - 1}{0,5 - 1} = \frac{y - 3}{1 - 3} = \frac{z - 6}{1 - 6} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{0,5} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z - 6}{-5} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 6}{10}.$$

Чтобы найти координаты точки $O = PN \cap QM$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 6}{10} = t_1, \\ \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-5} = t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t_1, \\ y = 3 + 4t_1, \\ z = 6 + 10t_1, \\ x = 2 + 4t_2, \\ y = 2 + t_2, \\ z = 1 - 5t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t_1 = 2 + 4t_2, \\ 3 + 4t_1 = 2 + t_2, \\ 6 + 10t_1 = 1 - 5t_2, \\ x = 1 + t_1, \\ y = 3 + 4t_1, \\ z = 6 + 10t_1 \end{cases} \Rightarrow$$

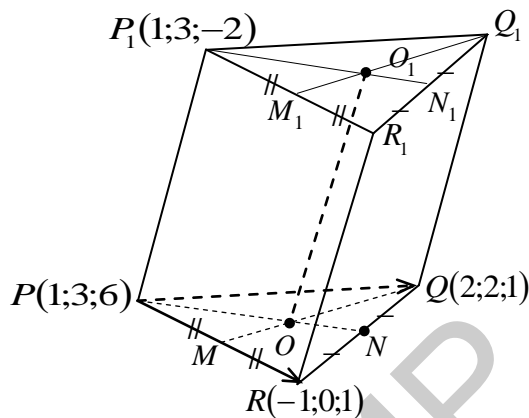


Рис. 9

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = -\frac{1}{3}, \\ x = \frac{2}{3}, \\ y = -\frac{1}{3}, \\ z = \frac{8}{3}. \end{cases} \quad \text{Таким образом, точка } O\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right) \text{ найдена.}$$

Прямая OO_1 проходит через точку O и параллельна прямой PP_1 , значит, ее направляющий вектор $\overrightarrow{PP_1} = (0; 0; -8)$, поэтому канонические уравнения прямой OO_1 имеют вид

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{0} = \frac{y + \frac{1}{3}}{0} = \frac{z - \frac{8}{3}}{-8} \quad \text{или} \quad \frac{x - \frac{2}{3}}{0} = \frac{y + \frac{1}{3}}{0} = \frac{z - \frac{8}{3}}{1}.$$

4) Расстояние между прямыми PQ и P_1Q_1 есть высота P_1H параллелограмма PQQ_1P_1 , опущенная из вершины P_1 на сторону PQ .

Найдем площадь параллелограмма PQQ_1P_1 (рис. 10), используя геометрический смысл модуля векторного произведения $\overrightarrow{PP_1}$ и \overrightarrow{PQ} .

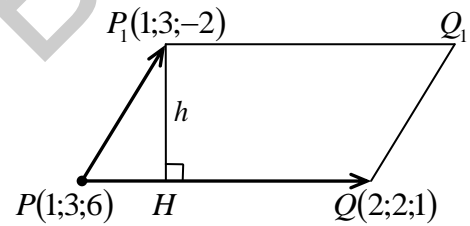


Рис. 10

$$S_{PQQ_1P_1} = \text{mod}[\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PQ}] = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= |-8\vec{i} - 8\vec{j} + 0\vec{k}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{PQQ_1P_1} = P_1H \cdot PQ,$$

$$\text{где } PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } P_1H = \frac{S_{PQQ_1P_1}}{PQ} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{9}.$$

5) Прямые QR и P_1Q_1 скрещиваются (рис. 11).

Найдем направляющие векторы этих прямых:

$$\vec{l}_1 = \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{PQ} = (1; -1; -5),$$

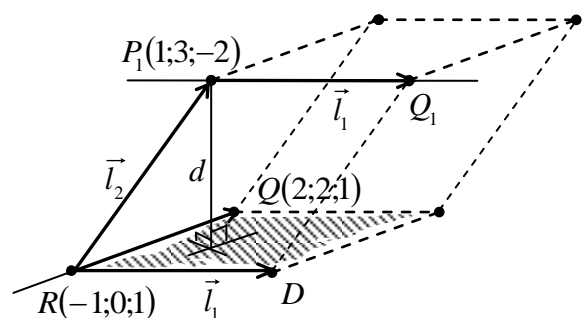


Рис. 11

$$\vec{l}_2 = \overline{RQ} = (3; 2; 0).$$

Расстояние d между прямыми QR и P_1Q_1 будет высотой параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \overline{RP_1}$, где $\overline{RP_1} = (2; 3; -3)$. Высота опущена из точки P_1 на плоскость QRD векторов $\vec{l}_1 = \overline{RD}, \vec{l}_2 = \overline{RQ}$.

$$d = \frac{V_{\text{параллелепипеда}}}{S_{\text{основания}}} = \frac{|(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \overline{RP_1})|}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|}.$$

$$|(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \overline{RP_1})| = \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = |(-6 - 45 + 0) - (-20 + 3 + 0)| = 40.$$

$$|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]| = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = |10\vec{i} - 15\vec{j} + 5\vec{k}| = \sqrt{10^2 + (-15)^2 + 5^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 \cdot (2^2 + 3^2 + 1)} = 5\sqrt{14}.$$

$$\text{Таким образом, } d = \frac{40}{5\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

6)* Указание.

1. Составим уравнение прямой QR .
2. Составим уравнение плоскости α , проходящей через точку P перпендикулярно прямой QR .
3. Найдем координаты точки N пересечения прямой QR и плоскости α .
4. Найдем координаты точки P' , учитывая, что точка N – середина отрезка PP' (рис. 12).

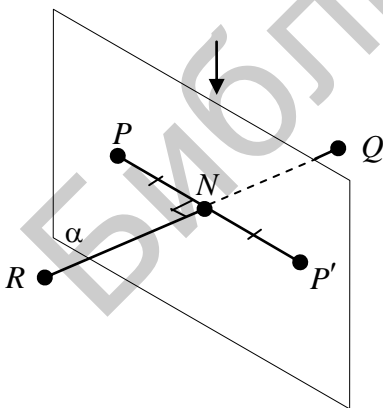


Рис. 12

7)* Указание.

Момент силы $\overline{PP_1}$, приложенной в точке P относительно точки Q , выражается формулой $M = [\overline{QP}, \overline{PP_1}]$.

8)* Указание.

а) Воспользуемся равенством векторов \overline{PQ} и $\overline{P_1Q_1}$.

б) 1. Найдем координаты вектора $\overline{PQ_1}$ в ДСК.

2. Разложим вектор $\overline{PQ_1}$ по базису $\overline{PR}, \overline{PQ}, \overline{PP_1}$, т. е. найдем такие числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, что $\overline{PQ_1} = \alpha \cdot \overline{PR} + \beta \cdot \overline{PQ} + \gamma \cdot \overline{PP_1}$.

3. Координаты точки $Q_1(x_1; y_1; z_1)$ в новом базисе $\{\overline{PR}, \overline{PQ}, \overline{PP_1}\}$ находим как координаты ее радиуса-вектора $\overline{PQ_1}$.

Задание 5

1) Постройте в декартовой системе координат прямые l_1, l_2, l_3 , по которым плоскость $\alpha: -3x + 4y - 6z + 12 = 0$ пересекает координатные плоскости xOy , xOz и yOz соответственно, и запишите их уравнения.

2) Найдите координаты точек A, B и C пересечения плоскости α с осями Ox , Oy и Oz соответственно и вычислите площадь треугольника ABC .

3) Запишите уравнение прямой l_4 , проходящей через точку C перпендикулярно плоскости α .

4) На прямой l_4 найдите координаты точки P , равноудаленной от точки B и начала координат O .

5) Найдите угол между прямой l_5 , проходящей через точки P и O , и плоскостью α .

6) Найдите расстояние от точки P до плоскости α .

7) Найдите объем пирамиды $OABC$ и $PABC$.

8)* Найдите углы, которые плоскость α образует с координатными осями.

Решение

1) Перейдем от общего уравнения плоскости α к уравнению в отрезках:

$$-3x + 4y - 6z = -12 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1.$$

Тогда следами, по которым плоскость α пересекает координатные плоскости xOy , xOz и yOz , будут следующие прямые (рис. 13):

$$l_1: \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1, \\ z = 0; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$l_3: \begin{cases} \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

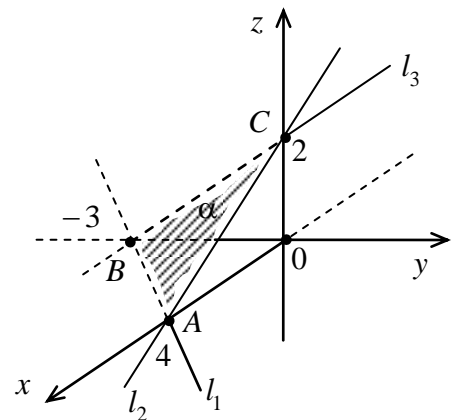


Рис. 13

2) Обозначим A, B, C – точки пересечения прямых l_1, l_2, l_3 с координатными осями Ox , Oy и Oz соответственно.

Найдем координаты точек A, B, C .

Координаты точки A являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} -3x + 4y - 6z = -12, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4; 0; 0).$$

Координаты точки B найдем как решение системы

$$\begin{cases} -3x + 4y - 6z = -12, \\ x = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; -3; 0).$$

Аналогично составляем и решаем систему для нахождения координат точки C :

$$\begin{cases} -3x + 4y - 6z = -12, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0; 0; 2).$$

Поскольку $\overrightarrow{AB} = (-4; -3; 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (-4; 0; 2)$, то искомая площадь треугольника ABC

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-6\vec{i} - 8\vec{j} - 12\vec{k}| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{61} = \sqrt{61}. \end{aligned}$$

3) Заметим, что направляющий вектор прямой l_4 коллинеарен нормальному вектору $\vec{n} = (-3; 4; -6)$ плоскости α , поэтому канонические уравнения прямой l_4 имеют вид $\frac{x-0}{-3} = \frac{y-0}{4} = \frac{z-2}{-6}$ или $\frac{x}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-6}$.

4) Запишем параметрические уравнения прямой l_4 :
$$\begin{cases} x = -3t, \\ y = 4t, \\ z = 2 - 6t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Точка $P(-3t_0; 4t_0; 2 - 6t_0)$ лежит на прямой l_4 и равноудалена от точек $B(0; -3; 0)$ и $O(0; 0; 0)$, следовательно $|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{OP}|$, где $\overrightarrow{BP} = (-3t_0; 4t_0 + 3; 2 - 6t_0)$, $\overrightarrow{OP} = (-3t_0; 4t_0; 2 - 6t_0)$.

Составим уравнение $|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{OP}|$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-3t_0)^2 + (4t_0 + 3)^2 + (2 - 6t_0)^2} &= \sqrt{(-3t_0)^2 + (4t_0)^2 + (2 - 6t_0)^2}, \\ 9t_0^2 + 16t_0^2 + 24t_0 + 9 + 4 - 24t_0 + 36t_0^2 &= 9t_0^2 + 16t_0^2 + 4 - 24t_0 + 36t_0^2, \end{aligned}$$

$$24t_0 + 9 = 0, \quad t_0 = -\frac{3}{8}.$$

Таким образом, $P\left(-3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right); 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right); 2 - 6 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)\right) = P\left(1\frac{1}{8}; -1\frac{1}{2}; 4\frac{1}{4}\right)$ –

искомая точка.

5) Прямую l_5 , проходящую через точки P и O направляет вектор $\overrightarrow{OP} = \left(1\frac{1}{8}; -1\frac{1}{2}; 4\frac{1}{4}\right) = \vec{l}$, а плоскость α имеет нормальный вектор $\vec{n} = (-3; 4; -6)$.

Обозначим $\alpha = (\vec{n} \wedge \vec{l})$, $\beta = (l_5 \wedge \alpha)$ (рис. 14).

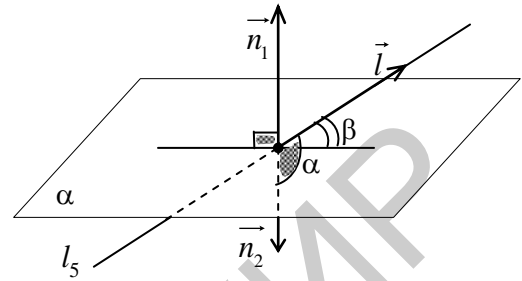


Рис. 14

Тогда искомым углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, если α – острый угол, при этом $\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$. Если же α – тупой угол, то $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, тогда $\sin \beta = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$. В любом случае для нахождения $\sin \beta$ достаточно вычислить $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(\vec{n}, \vec{l})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{l}|} = \frac{-3 \cdot 1\frac{1}{8} + 4 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) + (-6) \cdot 4\frac{1}{4}}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{\left(1\frac{1}{8}\right)^2 + \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4\frac{1}{4}\right)^2}} = \\ &= -\frac{279}{\sqrt{84241}}. \end{aligned}$$

Так как $\cos \alpha < 0$, то α – тупой, значит, $\sin \beta = -\cos \alpha = \frac{279}{\sqrt{84241}}$, т. е.

$$\beta = \arcsin \frac{279}{\sqrt{84241}}.$$

6) Найдем расстояние от точки P до плоскости α по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{где} \quad \vec{n} = (A; B; C) = (-3; 4; -6), \quad D = 12,$$

$$(x_0; y_0; z_0) = (x_P; y_P; z_P) = \left(1\frac{1}{8}; -1\frac{1}{2}; 4\frac{1}{4}\right).$$

Таким образом,

$$d = \frac{\left| -3 \cdot 1 \frac{1}{8} + 4 \cdot \left(-1 \frac{1}{2} \right) - 6 \cdot 4 \frac{1}{4} + 12 \right|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-6)^2}} = \frac{183}{8\sqrt{61}} - \text{искомое расстояние.}$$

7) Объем пирамиды $OABC$:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} CO \cdot S_{\Delta AOB} = \frac{1}{6} CO \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Объем пирамиды $PABC$:

$$V_{PABC} = \frac{1}{3} d \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{183}{6\sqrt{61}} \cdot \sqrt{61} = \frac{183}{18} = 10 \frac{1}{6} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

8)* Указание.

Угол между двумя плоскостями есть угол между их нормальными векторами. Нормальными векторами к координатным плоскостям xOy , xOz и yOz будут векторы $\vec{k} = (0; 0; 1)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$ соответственно.

Задание 6

1) Постройте кривые, заданные уравнениями а)–д).

а) $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{9}}$;

б) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$;

в) $4x - y^2 + 6y = 0$;

г) $r = -2 \cos \varphi$, $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$;

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} y \geq 0.$

2) Постройте области а)–в)*, ограниченные указанными линиями:

а) $x^2 = -4y$, $y - x + 4 = 0$;

б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$, $y = -1$, $y = 2$;

в)* $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12, \end{cases} (0 < x < 16\pi, y \geq 12).$

Решение

1) а) Приведем уравнение кривой к каноническому виду:

$$x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{9}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 = 1 + \frac{y^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1. \end{cases}$$

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$ – это каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a=1$, $b=3$, вершинами в точках $(\pm 1; 0)$ и асимптотами $y = \pm 3x$.

Тогда уравнение $x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{9}}$ определяет ее левую ветвь, поскольку $x \leq 0$ (рис. 15).

б) Уравнения $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}$ где $t \in [-\pi; \pi]$,

являются параметрическими уравнениями эллипса с

полуосями $a=4$, $b=5$. Поскольку $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$x = 4 \cos t \geq 0$, поэтому при указанных значениях параметра t уравнения задают дугу эллипса, соединяющую точку $A(0; -5)$ (соответствующую значению параметра $t = -\frac{\pi}{2}$) с точкой $B(0; 5)$

(соответствующей значению параметра $t = \frac{\pi}{2}$), лежащую в правой полуплоскости (рис. 16).

в) Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделив полный квадрат по переменной y :

$$\begin{aligned} 4x - (y^2 - 6y + 9) + 9 &= 0 \Leftrightarrow \\ 4x + 9 &= (y - 3)^2 \Leftrightarrow 4\left(x + \frac{9}{4}\right) = (y - 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + \frac{9}{4} &= \frac{1}{4}(y - 3)^2 \text{ (рис. 17)}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение определяет параболу с вершиной в точке $\left(-2\frac{1}{4}; 3\right)$, ветвями, направленными вправо, и осью симметрии $y = 3$.

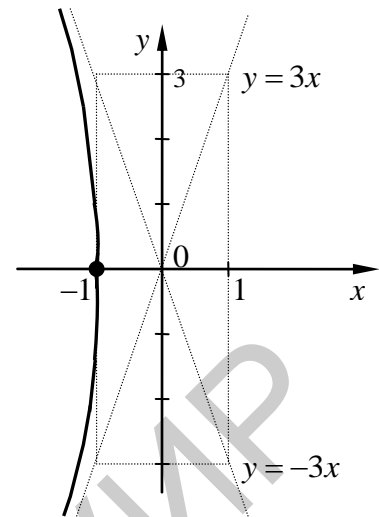


Рис. 15

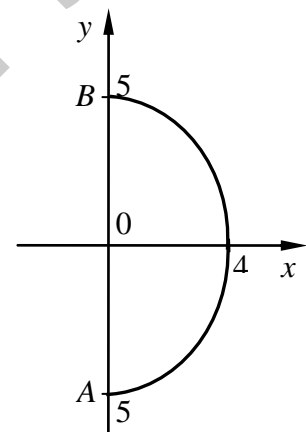


Рис. 16

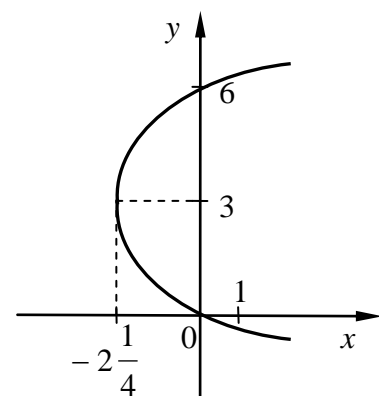


Рис. 17

г) Уравнение $r = -2 \cos \varphi$ есть полярное уравнение окружности $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Поскольку $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, то искомая кривая есть нижняя полуокружность, расположенная в III координатной четверти (рис. 18).

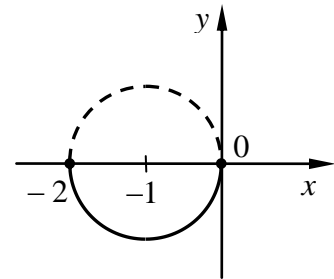


Рис. 18

д) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$ – параметрические уравнения астроиды. Из условия $y \geq 0$ получаем $2 \sin^3 t \geq 0 \Leftrightarrow \sin t \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \pi$.

Тогда искомая линия – дуга астроиды, расположенная в I и II четвертях (рис. 19).

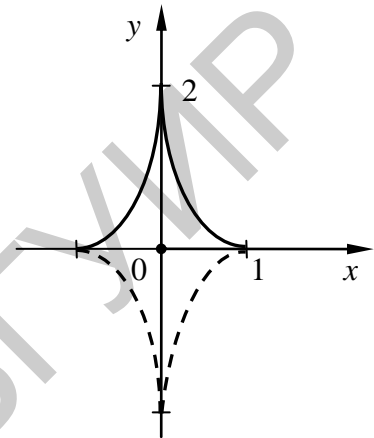


Рис. 19

2) а) Уравнение $x^2 = -4y$ определяет параболу с вершиной в точке $(0;0)$, ветви которой направлены влево.

$y - x + 4 = 0$ – общее уравнение прямой

$$\Leftrightarrow y - x = -4 \Leftrightarrow \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1.$$

Искомая область D изображена на рис. 20.

б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a = 2, b = 4$.

$y = -1, y = 2$ – прямые, параллельные оси Ox .

Искомая область D изображена на рис. 21.

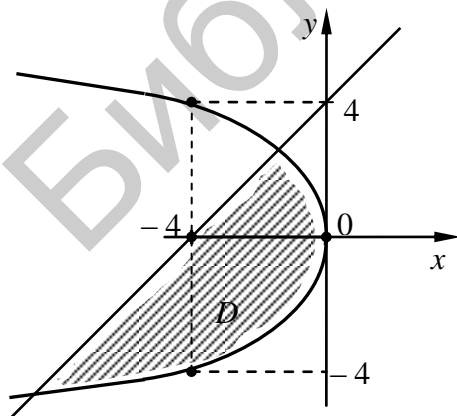


Рис. 20

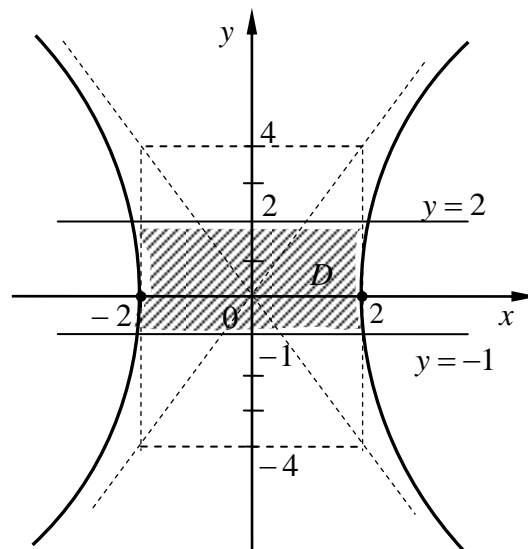


Рис. 21

в)* Указание.

Канонические уравнения циклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 < x < 2a\pi).$$

Задание 7

1) В пространстве \mathbb{R}^3 постройте область, ограниченную поверхностями $\gamma_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\gamma_2: \frac{3z}{2} = x^2 + y^2$. Постройте проекции этой области на координатные плоскости.

2) Приведите уравнение $F(x, y, z) = 9y^2 + 4z^2 - 36x + 36y - 24z - 108 = 0$ поверхности второго порядка к каноническому виду и укажите ее тип.

Решение

1) Поверхность γ_1 , заданная уравнением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, есть верхняя полусфера сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом 1, а γ_2 – параболоид. Линией пересечения этих поверхностей будет окружность

$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ \frac{3z}{2} = x^2 + y^2 \end{cases}$ радиусом $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, лежащая в плоскости $z = \frac{1}{2}$.

Изобразим область T , ограниченную поверхностями γ_1 и γ_2 (рис. 22).

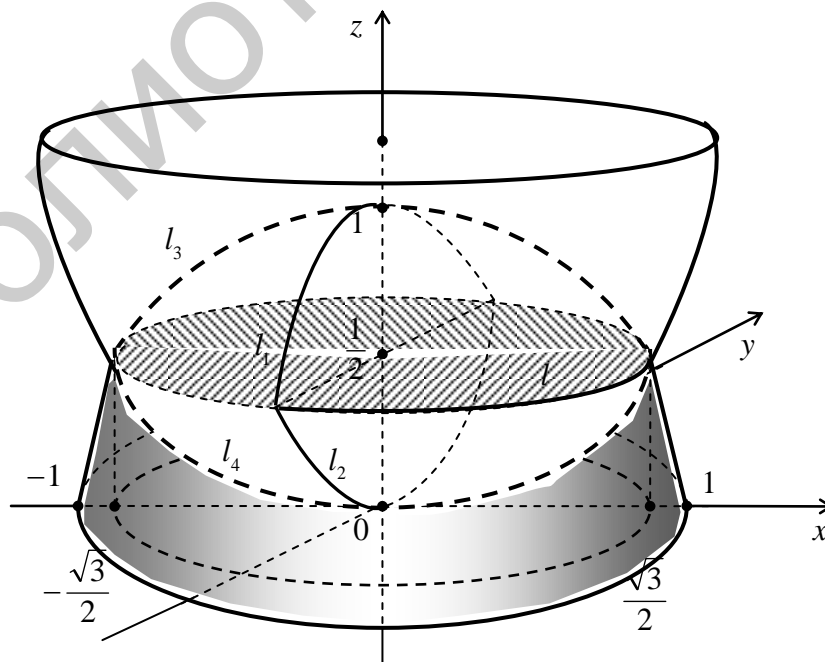


Рис. 22

Проекцией области T на плоскость Oxy будет окружность $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ (рис. 23).

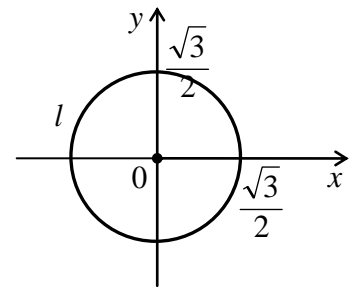


Рис. 23

Проекция области T на плоскость Oyz изображена на рис. 24, на плоскость Oxz – на рис. 25.

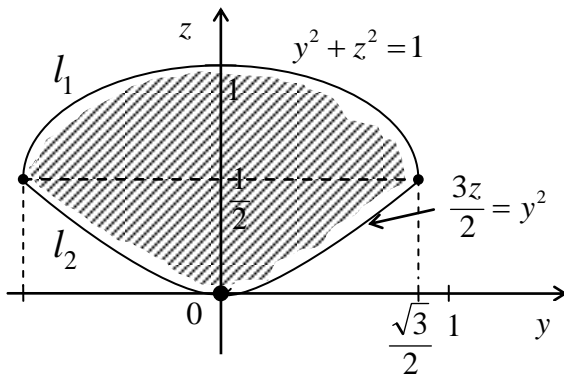


Рис. 24

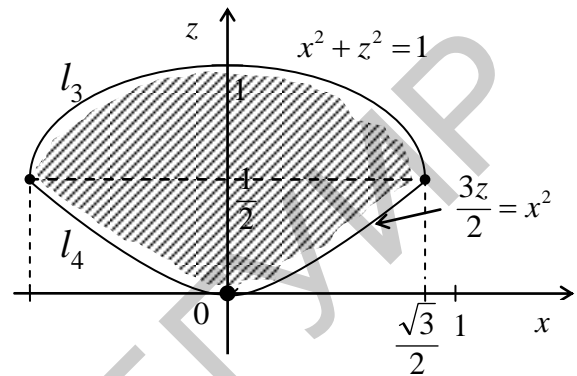


Рис. 25

2) Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделив полный квадрат по переменным y и z :

$$9y^2 + 4z^2 - 36x + 36y - 24z - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36x + 9(y^2 + 4y) + 4(z^2 - 6z) - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36x + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 4(z^2 - 6z + 9) - 36 - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-36x + 9(y+2)^2 + 4(z-3)^2 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-36x}{180} + \frac{9(y+2)^2}{180} + \frac{4(z-3)^2}{180} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{-5} + \frac{(y+2)^2}{20} + \frac{(z-3)^2}{45} = 1 \Leftrightarrow$$

$$x + 5 = \frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} \quad - \text{ каноническое уравнение эллиптического}$$

параболоида.

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Задания по теме «Линейная алгебра»

Задание 1

Для данных матриц M , N , L вычислите коэффициенты α и β , найдите матрицы A и B , с помощью которых составьте матрицу $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Проверьте, является ли матрица C вырожденной и определите ее ранг.

Варианты

$$1) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 19 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^{-1}), \quad \beta = 2 \det(L^{11}), \quad A = N^T \cdot M, \quad B = L^T.$$

$$2) M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 3 \det(L^9), \quad \beta = \det(L^{-1}), \quad A = M \cdot N^T, \quad B = L.$$

$$3) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -\det(L)^{-1}, \quad \beta = 2 \det((L^4)^{-1}), \quad A = N \cdot M^T, \quad B = L.$$

$$4) M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -9 & 4 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 4 \det(L), \quad \beta = \det((L^{-1})^5), \quad A = M^T \cdot N, \quad B = L^T.$$

$$5) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L), \quad \beta = 5 \det((L^7)^{-1}), \quad A = N \cdot M^T, \quad B = L.$$

$$6) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -3 \det(L^{-1}), \quad \beta = \det((L^9)^{-1}), \quad A = M^T \cdot N^T, \quad B = L.$$

$$7) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -2 \det(L), \quad \beta = \det\left(\left(L^{-1}\right)^5\right), \quad A = N \cdot M, \quad B = L^T.$$

$$8) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = (-2) \det(L^{-1}), \quad \beta = \det\left(\left(L^5\right)^{-1}\right), \quad A = N^T \cdot M^T, \quad B = L.$$

$$9) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^7), \quad \beta = (-3) \det\left(\left(L^{-1}\right)^5\right), \quad A = M^T \cdot N, \quad B = L^T.$$

$$10) M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^{-1}), \quad \beta = (-4) \det\left(\left(L^7\right)^{-1}\right), \quad A = N^T \cdot M, \quad B = L.$$

$$11) M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -5 \det(L^{-1}), \quad \beta = \det\left(\left(L^5\right)^{-1}\right), \quad A = M \cdot N^T, \quad B = L^T.$$

$$12) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L), \quad \beta = -2 \det\left(\left(L^{-1}\right)^7\right), \quad A = M \cdot N^T, \quad B = L.$$

$$13) M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 2 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -\det(L^5), \quad \beta = 4 \det\left(\left(L^{-1}\right)^3\right), \quad A = M^T \cdot N, \quad B = L^T.$$

$$14) M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^9), \quad \beta = 3 \det\left(\left(L^{-1}\right)^5\right), \quad A = N^T \cdot M, \quad B = L.$$

$$15) M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^{11}), \beta = -2 \det((L^{-1})^7), A = M^T \cdot N^T, B = L.$$

$$16) M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -3 \det(L^5), \beta = \det(L^{-1}), A = N \cdot M, B = L^T.$$

$$17) M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^{-1}), \beta = 4 \det((L^7)^{-1}), A = N^T \cdot M^T, B = L.$$

$$18) M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^7), \beta = 2 \det((L^{-1})^5), A = N \cdot M^T, B = L.$$

$$19) M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 8 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 3 \det((L^{-1})^5), \beta = -\det(L^{13}), A = M^T \cdot N, B = L.$$

$$20) M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ -7 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 2 \det(L^{-1}), \beta = -\det((L^{15})^{-1}), A = N \cdot M, B = L^T.$$

$$21) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 10 & -7 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \det(L^{11}), \beta = -3 \det((L^{-1})^7), A = M^T \cdot N^T, B = L.$$

$$22) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -2 \det(L^{-1}), \beta = \det((L^9)^{-1}), A = M \cdot N^T, B = L.$$

$$23) M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -4 \det(L^{15}), \quad \beta = \det((L^{-1})^{14}), \quad A = M \cdot N, \quad B = L^T.$$

$$24) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 3 \det(L^9), \quad \beta = -\det((L^{-1})^7), \quad A = N^T \cdot M^T, \quad B = L.$$

$$25) M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 2 \det(L^{-1}), \quad \beta = -\det(L^5), \quad A = M^T \cdot N^T, \quad B = L.$$

$$26) M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -2 \det(L^5), \quad \beta = \det((L^{-1})^8), \quad A = M^T \cdot N, \quad B = L.$$

$$27) M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 3 \det(L^{-1}), \quad \beta = -\det((L^5)^{-1}), \quad A = N \cdot M, \quad B = L^T.$$

$$28) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -4 \det(L^7), \quad \beta = \det((L^{-1})^5), \quad A = M \cdot N^T, \quad B = L.$$

$$29) M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 2 \det((L^{-1})^T), \quad \beta = -\det(L^{13}), \quad A = M \cdot N^T, \quad B = L.$$

$$30) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -3 \det(L^7), \quad \beta = \det((L^9)^{-1}), \quad A = N^T \cdot M^T, \quad B = L.$$

Задание 2

Решив матричное уравнение, найдите матрицу X и вычислите ее ранг.

Варианты

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -7 & -5 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 11 \\ 19 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 6 & 7 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$6) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 10 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 13 & -3 & -7 \\ 12 & 23 & 9 \\ -5 & -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -30 & -3 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$8) \begin{pmatrix} 3 & -5 & -35 \\ 3 & -5 & -6 \\ -7 & 2 & 14 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 28 \\ 3 & -1 \\ -36 & -46 \end{pmatrix}.$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 4 & 6 \\ 46 & 33 \end{pmatrix}.$$

$$10) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$11) \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$12) \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 6 & -16 \\ 29 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14) \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 20 & -32 \\ 10 & -16 \end{pmatrix}.$$

$$15) \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$16) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 44 & 19 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$17) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -9 & 15 \\ -18 & -18 & -42 \end{pmatrix}.$$

$$18) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$19) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 17 & -10 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

$$20) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -3 \\ 52 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$21) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$22) \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$23) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$24) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -13 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$25) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$26) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$27) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$28) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$29) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 9 & -11 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$30) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 11 \\ -1 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задание 3

Выясните, образуют ли линейное пространство данные множества а) – в) с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

Варианты

1) а) Множество всех целых чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих первой четверти.

2) а) Множество всех действительных чисел, больших 9;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских сонаправленных векторов.

3) а) Множество всех действительных чисел, по модулю больших 1;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, лежащих на оси Ox .

4) а) Множество всех простых чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, коллинеарных данной прямой.

5) а) Множество всех действительных положительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, длина которых равна 7.

6) а) Множество всех рациональных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, вторая координата которых равна -2 .

7) а) Множество всех чисел, кратных 3;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих второй четверти.

8) а) Множество всех действительных неположительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих острый угол с данной прямой.

9) а) Множество всех четных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является отрицательным числом.

10) а) Множество всех правильных рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, лежащих на оси Oy .

11) а) Множество всех действительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих третьей четверти.

12) а) Множество всех нечетных чисел, больших 11;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, длина которых равна 4.

13) а) Множество всех натуральных делителей числа 180;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, имеющих равные координаты.

14) а) Множество всех нечетных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является положительным числом.

15) а) Множество всех действительных чисел, принадлежащих промежутку $[-1; 8]$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих угол $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox .

16) а) Множество всех действительных чисел, имеющих вид $k\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, модуль которых не превосходит 10.

17) а) Множество всех четных чисел, больших 6;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является нечетным числом.

18) а) Множество всех иррациональных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, перпендикулярных оси Oy .

19) а) Множество всех целых чисел, кратных 2, но не кратных 5;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, первая координата которых равна 3.

20) а) Множество всех действительных чисел, модуль которых меньше 3;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих четвертой четверти.

21) а) Множество всех действительных чисел вида $a + \sqrt{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, ортогональных вектору $\vec{a} = (-2; 1)$.

22) а) Множество всех действительных неотрицательных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых равна 0.

23) а) Множество всех неправильных рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, принадлежащих третьей четверти.

24) а) Множество всех чисел, кратных 7;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих угол $\frac{2\pi}{3}$ с осью Ox .

25) а) Множество всех действительных чисел вида $\sqrt{3}n + a$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, разность координат которых является нечетным числом.

26) а) Множество всех составных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских единичных векторов.

27) а) Множество всех целых чисел, кратных 3, но не кратных 9;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, принадлежащих четвертой четверти.

28) а) Множество всех действительных чисел, меньших 5;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, образующих тупой угол с данной прямой.

29) а) Множество всех чисел, имеющих вид $4k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является четным числом.

30) а) Множество всех правильных несократимых рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех плоских векторов, разность координат которых является четным числом.

Задание 4

Даны 3 различных линейных пространства:

а) $V = \mathbb{R}^3$;

б) V – пространство всех матриц второго порядка;

в) V – пространство многочленов, степень которых не превосходит 3.

В каждом из этих пространств указан упорядоченный набор векторов и фиксированный вектор \vec{y} .

Докажите, что данный набор векторов образует базис линейного пространства V , и найдите координаты вектора \vec{y} в этом базисе.

Варианты

1) а) $\vec{e}_1 = (0; 1; 2)$, $\vec{e}_2 = (1; 0; 1)$, $\vec{e}_3 = (-1; 2; 4)$, $\vec{y} = (-2; 4; 5)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 47 & 49 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = (x + 1)^2$, $f_4(x) = (x + 1)^3$,

$Y(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

2) а) $\vec{e}_1 = (1; 0; -1)$, $\vec{e}_2 = (2; 1; 1)$, $\vec{e}_3 = (0; 1; 1)$, $\vec{y} = (3; -1; 2)$;

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 1, f_2(x) = x - 3, f_3(x) = x^2, f_4(x) = -x^3 + x + 1,$$

$$Y(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5.$$

$$3) \text{ а) } \bar{e}_1 = (1; -1; -1), \bar{e}_2 = (0; 1; 0), \bar{e}_3 = (1; 3; 2), \bar{y} = (-1; 4; 2);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2 + 3, f_4(x) = x^3 - x^2 + 2,$$

$$Y(x) = x^3 - x^2 + x + 4.$$

$$4) \text{ а) } \bar{e}_1 = (-1; 3; 1), \bar{e}_2 = (1; 0; 4), \bar{e}_3 = (2; -1; 1), \bar{y} = (4; -3; -1);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -11 & 46 \\ -8 & 16 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 2, f_2(x) = x - 2, f_3(x) = (x - 2)^2, f_4(x) = (x - 2)^3,$$

$$Y(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6.$$

$$5) \text{ а) } \bar{e}_1 = (2; -4; 3), \bar{e}_2 = (-1; 0; 5), \bar{e}_3 = (1; -2; -1), \bar{y} = (3; -8; 1);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = -1, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x^2 + 4, f_4(x) = x^3 + x + 1,$$

$$Y(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3.$$

$$6) \text{ а) } \bar{e}_1 = (3; -1; 4), \bar{e}_2 = (1; -3; -3), \bar{e}_3 = (0; -1; -2), \bar{y} = (3; 5; 9);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 3, f_2(x) = x + 2, f_3(x) = x^2 + x - 1, f_4(x) = x^3 + 1,$$

$$Y(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5.$$

$$7) \text{ a) } \bar{e}_1 = (1; -5; -1), \quad \bar{e}_2 = (0; 1; -3), \quad \bar{e}_3 = (1; -1; 1), \quad \bar{y} = (1; -6; 2);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = -2, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2 - 2x - 1, \quad f_4(x) = x^3 + 2x^2 - 1,$$

$$Y(x) = -4x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

$$8) \text{ a) } \bar{e}_1 = (1; 3; 7), \quad \bar{e}_2 = (-1; 0; 1), \quad \bar{e}_3 = (2; 1; 4), \quad \bar{y} = (-3; -9; -1);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = (x - 1)^2, \quad f_4(x) = (x - 1)^3,$$

$$Y(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3.$$

$$9) \text{ a) } \bar{e}_1 = (-2; 3; 5), \quad \bar{e}_2 = (1; -4; 2), \quad \bar{e}_3 = (0; 1; 3), \quad \bar{y} = (5; -8; 22);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 2, \quad f_2(x) = x + 3, \quad f_3(x) = x^2 - 3x + 4, \quad f_4(x) = x^3 - 2x^2 + x,$$

$$Y(x) = 2x^3 - 4x + 12.$$

$$10) \text{ a) } \bar{e}_1 = (7; 0; -8), \quad \bar{e}_2 = (1; -3; 4), \quad \bar{e}_3 = (0; 1; -1), \quad \bar{y} = (-7; 13; -5);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = -3, \quad f_2(x) = 3x + 1, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = 2x^3 - x + 6,$$

$$Y(x) = 4x^3 - 5x^2 + x + 7.$$

$$11) \text{ a) } \bar{e}_1 = (1; -2; 4), \quad \bar{e}_2 = (-3; 5; 4), \quad \bar{e}_3 = (1; 0; -2), \quad \bar{y} = (-6; 14; 9);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = -x + 5$, $f_3(x) = x^2 + x + 1$, $f_4(x) = x^3 - 2x^2 + x$,
 $Y(x) = 2x^3 - 4x + 6$.

12) а) $\bar{e}_1 = (5; -1; 0)$, $\bar{e}_2 = (1; 3; -2)$, $\bar{e}_3 = (4; 1; -1)$, $\bar{y} = (3; 8; -7)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -32 & 23 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = x + 2$, $f_3(x) = (x + 2)^2$, $f_4(x) = (x + 2)^3$,
 $Y(x) = -2x^3 - 4x^2 + 8x + 3$.

13) а) $\bar{e}_1 = (1; -6; 3)$, $\bar{e}_2 = (-2; 1; -5)$, $\bar{e}_3 = (-1; 4; -7)$, $\bar{y} = (-3; 6; 13)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = -x + 2$, $f_3(x) = x^2 - 4$, $f_4(x) = x^3 + x^2 - x - 1$,
 $Y(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 1$.

14) а) $\bar{e}_1 = (-2; 3; 7)$, $\bar{e}_2 = (1; 6; 5)$, $\bar{e}_3 = (0; 2; -3)$, $\bar{y} = (11; -6; 5)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = 4$, $f_2(x) = -x + 1$, $f_3(x) = -x^2 - 1$, $f_4(x) = x^3 - x + 1$,
 $Y(x) = x^3 + 5x^2 - x + 2$.

15) а) $\bar{e}_1 = (-5; 2; -3)$, $\bar{e}_2 = (1; -1; 0)$, $\bar{e}_3 = (-4; 1; 6)$, $\bar{y} = (1; -7; -6)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 4 & 17 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = -2x + 1$, $f_3(x) = x^2 - 2x - 3$, $f_4(x) = x^3 - 1$,
 $Y(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 15$.

16) а) $\bar{e}_1 = (1; 7; -5)$, $\bar{e}_2 = (2; -3; -6)$, $\bar{e}_3 = (0; 4; -1)$, $\bar{y} = (1; -1; -2)$;

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 2, f_2(x) = -x, f_3(x) = x^2 + 2x - 4, f_4(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1,$$

$$Y(x) = 5x^3 + 3x^2 - 16x - 7.$$

$$17) \text{ а) } \bar{e}_1 = (4; 5; 1), \bar{e}_2 = (1; -1; -3), \bar{e}_3 = (2; 7; 5), \bar{y} = (-1; 1; 2);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = -3, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x^2 - x - 2, f_4(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3,$$

$$Y(x) = 2x^3 + 7x^2 - x + 8.$$

$$18) \text{ а) } \bar{e}_1 = (3; 0; -5), \bar{e}_2 = (6; -1; 1), \bar{e}_3 = (1; -2; 0), \bar{y} = (-4; -8; -7);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 1, f_2(x) = 2x - 3, f_3(x) = x^2 + 1, f_4(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2,$$

$$Y(x) = -3x^3 + x^2 - 5x - 1.$$

$$19) \text{ а) } \bar{e}_1 = (1; -1; -7), \bar{e}_2 = (8; 0; -3), \bar{e}_3 = (2; 1; 4), \bar{y} = (-1; 0; 9);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 13 & 12 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = -1, f_2(x) = x - 3, f_3(x) = (x - 3)^2, f_4(x) = (x - 3)^3,$$

$$Y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$$

$$20) \text{ а) } \bar{e}_1 = (7; 0; 3), \bar{e}_2 = (1; 4; -2), \bar{e}_3 = (-2; 3; -5), \bar{y} = (12; -2; 11);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 1, f_2(x) = 5x + 3, f_3(x) = 2x^2 - x + 4, f_4(x) = x^3 - x + 2,$$

$$Y(x) = -x^3 + 4x^2 - 6x + 5.$$

$$21) \text{ a) } \bar{e}_1 = (-9; 0; -1), \quad \bar{e}_2 = (3; -7; 1), \quad \bar{e}_3 = (6; 2; 1), \quad \bar{y} = (6; 0; -3);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = -x - 2, \quad f_3(x) = x^2 - 3x + 5,$$

$$f_4(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1, \quad Y(x) = -2x^3 + 4x^2 - 7x - 11.$$

$$22) \text{ a) } \bar{e}_1 = (0; -6; -8), \quad \bar{e}_2 = (1; -7; -9), \quad \bar{e}_3 = (-3; -5; 1), \quad \bar{y} = (-9; 3; 1);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 2, \quad f_2(x) = x + 1, \quad f_3(x) = -x^2 + 2x - 1, \quad f_4(x) = 2x^3 + 5x - 6,$$

$$Y(x) = -4x^3 + 2x^2 - 8x + 16.$$

$$23) \text{ a) } \bar{e}_1 = (5; -4; 3), \quad \bar{e}_2 = (0; 1; -5), \quad \bar{e}_3 = (1; 0; -9), \quad \bar{y} = (-6; -6; 0);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = -1, \quad f_2(x) = x + 5, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4,$$

$$Y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1.$$

$$24) \text{ a) } \bar{e}_1 = (-1; 2; -8), \quad \bar{e}_2 = (3; 7; -5), \quad \bar{e}_3 = (0; -3; 1), \quad \bar{y} = (3; -9; -12);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 4 & 12 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 3, \quad f_2(x) = -x + 1, \quad f_3(x) = 2x^2 + x - 1,$$

$$f_4(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3, \quad Y(x) = -3x^3 + x^2 + 2x + 7.$$

$$25) \text{ a) } \bar{e}_1 = (1; -6; -5), \quad \bar{e}_2 = (8; -3; 1), \quad \bar{e}_3 = (2; 1; 0), \quad \bar{y} = (15; 1; -5);$$

$$\text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix};$$

В) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 3$, $f_3(x) = x^2 - 4x + 5$, $f_4(x) = x^3 - 3x^2 + 6$,
 $Y(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 12$.

26) а) $\bar{e}_1 = (3; -1; -1)$, $\bar{e}_2 = (-1; 7; 0)$, $\bar{e}_3 = (2; 0; -1)$, $\bar{y} = (5; -3; 2)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix};$$

В) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = -x + 4$, $f_3(x) = x^2 - x + 3$,
 $f_4(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$, $Y(x) = x^3 + 9x^2 - 2x + 6$.

27) а) $\bar{e}_1 = (7; -8; 1)$, $\bar{e}_2 = (1; -3; 0)$, $\bar{e}_3 = (2; 5; -3)$, $\bar{y} = (9; 9; -3)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 11 & 20 \end{pmatrix};$$

В) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2x + 1$, $f_3(x) = -x^2 - x + 2$,
 $f_4(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$, $Y(x) = -2x^3 + x^2 - 4x - 3$.

28) а) $\bar{e}_1 = (4; -1; 5)$, $\bar{e}_2 = (3; 1; 1)$, $\bar{e}_3 = (-1; 3; -1)$, $\bar{y} = (-13; -3; 5)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

В) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = -3x$, $f_3(x) = x^2 + x + 2$,
 $f_4(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, $Y(x) = 2x^3 + 7x + 5$.

29) а) $\bar{e}_1 = (-7; 2; -1)$, $\bar{e}_2 = (3; 0; -4)$, $\bar{e}_3 = (1; -2; 5)$, $\bar{y} = (-9; 0; 12)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};$$

В) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 5$, $f_3(x) = x^2 + 3x - 2$,
 $f_4(x) = -4x^3 + 5x^2 - x + 1$, $Y(x) = 8x^3 - 11x^2 + 3x - 12$.

30) а) $\bar{e}_1 = (-1; 0; 3)$, $\bar{e}_2 = (-2; -6; -1)$, $\bar{e}_3 = (3; 5; 1)$, $\bar{y} = (11; 0; -8)$;

$$6) A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) f_1(x) = -2, f_2(x) = x+1, f_3(x) = -2x^2 + x - 3,$$

$$f_4(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2, Y(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10.$$

Задание 5

Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

Варианты

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -13, \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ 6x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 9. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 1. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 2, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 7, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 5, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 1. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = -1, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 2. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 3. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - x_5 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 37. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -3. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 = 1. \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 1, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 1. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = -6, \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 + x_5 = -8. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 16x_1 - 7x_2 + 16x_3 + 18x_4 = 20, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 29. \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 - 7x_3 + 11x_4 = -1. \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -1. \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = -17, \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = -18. \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$$

Задание 6

Выясните, являются ли линейными операторы $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданные условиями а)–в).

В случае положительного ответа найдите:

- 1) матрицу линейного оператора f в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
- 2) собственные векторы оператора f .

Варианты

1) а) $f(\vec{x}) = (2x_1 + x_2 - 3x_3; 1; x_1 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = (\vec{i}, \vec{x}) \cdot \vec{j}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

2) а) $f(\vec{x}) = (3x_1 - x_2 + x_3; 2x_2; -x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$;

в) f – оператор поворота векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

3) а) $f(\vec{x}) = (x_1^2; x_1 - x_3; x_2 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (1; -1; 0)$, $\vec{b} = (2; 1; 4)$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости Oxz .

4) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3; x_1 + x_2; -3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

$$\text{б) } f(\vec{x}) = 2 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}, \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} = (1; 0; -1);$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$.

$$5) \text{ а) } f(\vec{x}) = (5x_1; -x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 + 4x_3), \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}], \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k};$$

в) f – оператор поворота векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно оси Oy в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$6) \text{ а) } f(\vec{x}) = (2x_1 - x_3; x_2; x_3^2), \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = (\vec{j}, \vec{x}) \cdot \vec{i}, \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $x - y = 0$.

$$7) \text{ а) } f(\vec{x}) = (1; x_1 - x_2 - x_3; 2x_3), \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = 3 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}, \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} = (1; -1; 1);$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $x + y = 0$.

$$8) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_2 - 3x_3; x_1 + 2x_2; x_1 + x_2 - x_3), \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}, \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} = (2; 1; 3), \quad \vec{b} = (-1; 0; 1);$$

в) f – оператор поворота векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно оси Oz в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$9) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1 + 2 - x_3; x_2 + 4x_3; x_1 - x_2 + x_3), \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = (\vec{i}, \vec{x}) \cdot \vec{k}, \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $x - z = 0$.

$$10) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1 + x_2 - 4x_3; x_2 + 3x_3; x_3^2), \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = 3 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - 2\vec{x}, \quad \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} = (1; 2; -2);$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость Oxy .

$$11) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_2 + x_3; x_1 - x_2; x_1 + 2x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = (\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{i}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

в) f – оператор поворота векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно оси Oy в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$12) \text{ а) } f(\vec{x}) = (2x_1^2; x_2 + x_3; 3x_1 - 5x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}] \cdot \vec{x}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k};$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на ось Ox .

$$13) \text{ а) } f(\vec{x}) = (6x_1 - 2x_2 + x_3; x_2 - 3x_3; x_1 + 2x_2), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \vec{x} - 6 \cdot (\vec{x}, \vec{a}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = (-1; -2; 1);$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость Oyz .

$$14) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1 + x_2; x_2 + 5; x_1 + 3x_2 - 2x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = 5 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = (0; -4; 3);$$

в) f – оператор поворота векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно оси Ox в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$15) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_2; -x_1 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = (\vec{j}, \vec{x}) \cdot \vec{k}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости Oyz .

$$16) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1 + x_2^2; x_1 - x_2; x_2 + x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (-3; 2; -1);$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на ось Oy .

17) а) $f(\vec{x}) = (x_3; x_2 - x_3; x_1 + x_2)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = (\vec{k}, \vec{x}) \cdot \vec{j}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость Oxz .

18) а) $f(\vec{x}) = (3x_1 - x_3; x_2^2 + x_3; x_1 + x_2)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

в) f – оператор поворота векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно оси Ox в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

19) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_2; -4)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = -3 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + 2\vec{x}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (-1; -2; 2)$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $x + z = 0$.

20) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + 2; x_2 - x_3; x_1 + 4x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}] \cdot \vec{x}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на ось Oz .

21) а) $f(\vec{x}) = (-2x_2; x_1 + 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = -2\vec{x} + [\vec{a}, \vec{x}] \cdot \vec{x}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$.

22) а) $f(\vec{x}) = (2x_1 - 3x_2; -7; x_1 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = 6 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \vec{x}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $y - z = 0$.

23) а) $f(\vec{x}) = (x_1 + 5x_3; -x_2; x_1)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}] \cdot \vec{x}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$;

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $y - \sqrt{3}x = 0$.

$$24) \text{ а) } f(\vec{x}) = (-2x_3; x_2 + x_3; x_1^2), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = (-1; 3; 2), \vec{b} = (2; 1; 0);$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $x + z = 0$.

$$25) \text{ а) } f(\vec{x}) = (-3x_2; x_1 + 4x_3; x_2 - 2x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a} + \vec{x}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}, \vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k};$$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $y + z = 0$.

$$26) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - 5x_3; 0; x_2 + x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \vec{x} - 3 \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{x})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}, \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k};$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $x + \sqrt{3}z = 0$.

$$27) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1 + x_3^2; -x_2 + x_3; x_1 + x_2 + 4x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}] \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k};$$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $y - \sqrt{3}z = 0$.

$$28) \text{ а) } f(\vec{x}) = (3x_2; x_1 + 4x_3; 5x_2), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k};$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $y - z = 0$.

$$29) \text{ а) } f(\vec{x}) = (x_1; 2x_3 - 3; x_2 + 5x_3), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}] - (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}, \vec{a} = \vec{i} - \vec{k};$$

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости $x + \sqrt{3}y = 0$.

$$30) \text{ а) } f(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2; x_1 + 2x_3; 0), \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б) } f(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}, \vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3, \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j};$$

в) f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства \mathbb{R}^3 на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$.

Задание 7

Для данной квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$:

- 1) составьте ее матрицу;
- 2) исследуйте знакоопределенность;
- 3) приведите квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (выделения полных квадратов) и укажите невырожденное линейное преобразование, которое позволяет это сделать;
- 4) используя результат задачи 3, определите тип поверхности второго порядка, имеющей уравнение $Q(x_1, x_2, x_3) = a$, где a – заданное число.

Варианты

- 1) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 6x_3^2, a = 4.$
- 2) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3 + 5x_3^2, a = 9.$
- 3) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 6x_1x_3 - 10x_2x_3 + 8x_3^2, a = 4.$
- 4) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3, a = 3.$
- 5) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 4x_3^2, a = 4.$
- 6) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_3^2, a = 16.$
- 7) $Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2, a = 18.$
- 8) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, a = 2.$
- 9) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1x_3 - 28x_2x_3 - 28x_3^2, a = 8.$
- 10) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 7x_2x_3, a = 49.$
- 11) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_3^2, a = 18.$
- 12) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 11x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 36x_3^2, a = 2.$
- 13) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2, a = 8.$
- 14) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2, a = 6.$
- 15) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2, a = 2.$
- 16) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - x_3^2, a = 0.$
- 17) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3, a = 2.$
- 18) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_3^2, a = 6.$
- 19) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2, a = 3.$

- 20) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_3^2, a = 16.$
 21) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_3^2, a = 4.$
 22) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3, a = 8.$
 23) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, a = 0.$
 24) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_3^2, a = 16.$
 25) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 6x_3^2, a = 16.$
 26) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_3^2, a = 4.$
 27) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 3x_3^2, a = 9.$
 28) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3, a = 6.$
 29) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 5x_3^2, a = 8.$
 30) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3, a = 0.$

Задание 8*

Напишите уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, M_4 с указанными координатами, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 & e_1 & c_1 \\ f_1^2 & e_1^2 & c_1^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & f_2 & e_2 \\ f_2 & b & c_2 \\ e_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} d & e_3 & f_3 \\ e_3 & d & f_3 \\ e_3 & f_3 & d \end{vmatrix}.$$

Варианты

- 1) $M_1(0; \Delta), M_2(1; -\Delta_1), M_3(-1; \Delta_2), M_4(2; 3\Delta_3),$
 $a = 1, b = 1, d = 1,$
 $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = 0, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -1, c_3 = 0.$
- 2) $M_1(0; \Delta_2), M_2(1; \Delta_1), M_3(2; \Delta), M_4(-1; -\Delta_3),$
 $a = 1, b = 0, d = -1,$
 $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = -1, c_2 = 4, f_3 = 2, e_3 = 0, c_3 = -1.$
- 3) $M_1(\Delta; 1), M_2(1; 2\Delta_3), M_3(-1; \Delta_2), M_4(-2; -3\Delta_1),$
 $a = -1, b = 1, d = 0,$
 $f_1 = 0, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = 1, e_2 = 1, c_2 = -1, f_3 = 2, e_3 = 1, c_3 = 1.$
- 4) $M_1(\Delta; 2), M_2(1; \Delta_1), M_3(-1; \Delta_3), M_4(2; 3\Delta_2), a = 0, b = 1, d = 1,$
 $f_1 = 1, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = -1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -2, c_3 = 1.$
- 5) $M_1(-1; \Delta), M_2(1; 2 \cdot \Delta_1), M_3(0; \Delta_2), M_4(2; 2\Delta_3),$
 $a = 1, b = 1, d = 0,$

- 6) $f_1 = 2, e_1 = 1, c_1 = 1, f_2 = 1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 2, e_3 = -1, c_3 = 1.$
 $M_1(\Delta; -1), M_2(1; 2\Delta_3), M_3(2; 21 \cdot \Delta_1), M_4(-1; -2\Delta_2),$
 $a = 1, b = 1, d = 1,$
- 7) $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = 0, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -1, c_3 = 0.$
 $M_1(\Delta; 7), M_2(1; 2\Delta_3), M_3(-1; \Delta_2), M_4(2; 7\Delta_1),$
 $a = 1, b = 0, d = -1,$
- 8) $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = -1, c_2 = 4, f_3 = 2, e_3 = 0, c_3 = -1.$
 $M_1(0; 3\Delta_1), M_2(1; \Delta_2), M_3(-1; \Delta), M_4(2; \Delta_3),$
 $a = -1, b = 1, d = 0,$
- 9) $f_1 = 0, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = 1, e_2 = 1, c_2 = -1, f_3 = 2, e_3 = 1, c_3 = 1.$
 $M_1(\Delta; 3), M_2(1; 4\Delta_1), M_3(-1; 3\Delta_2), M_4(2; \Delta_3),$
 $a = 0, b = 1, d = 1,$
- 10) $f_1 = 1, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = -1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -2, c_3 = 1.$
 $M_1(1; \Delta), M_2(0; -2 \cdot \Delta_1), M_3(-1; -\Delta_2), M_4(-2; -2\Delta_3),$
 $a = 1, b = 1, d = 0,$
- 11) $f_1 = 2, e_1 = 1, c_1 = 1, f_2 = 1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 2, e_3 = -1, c_3 = 1.$
 $M_1(0; 3), M_2(1; 2\Delta_3), M_3(-1; 2\Delta_2), M_4(2; 3\Delta_1),$
 $a = 1, b = 1, d = 1,$
- 12) $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = 0, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -1, c_3 = 0.$
 $M_1(1; \Delta), M_2(0; -2\Delta_1), M_3(-1; -\Delta_2), M_4(-2; -14\Delta_3),$
 $a = 1, b = 0, d = -1,$
- 13) $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = -1, c_2 = 4, f_3 = 2, e_3 = 0, c_3 = -1.$
 $M_1(-1; \Delta), M_2(0; 3\Delta_1), M_3(1; 2\Delta_2), M_4(2; 5\Delta_3),$
 $a = 0, b = 1, d = 1,$
- 14) $f_1 = 1, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = -1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -2, c_3 = 1.$
 $M_1(1; \Delta), M_2(0; -2\Delta_1), M_3(-1; -\Delta_2), M_4(-2; -2\Delta_3),$
 $a = -1, b = 1, d = 0,$
- 15) $f_1 = 0, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = 1, e_2 = 1, c_2 = -1, f_3 = 2, e_3 = 1, c_3 = 1.$
 $M_1(-1; \Delta), M_2(0; \Delta_1), M_3(1; \Delta_2), M_4(2; 7\Delta_3),$
 $a = 1, b = 1, d = 0,$
- 16) $f_1 = 2, e_1 = 1, c_1 = 1, f_2 = 1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 2, e_3 = -1, c_3 = 1.$
 $M_1(\Delta; 4), M_2(1; 2\Delta_2), M_3(-1; -\Delta_3), M_4(2 \cdot \Delta_1; 10),$
 $a = 1, b = 1, d = 1,$
- $f_1 = 1, e_1 = 2, c_1 = 2, f_2 = 2, e_2 = 0, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -1, c_3 = 0.$

- 17) $M_1(0; \Delta), M_2(1; 3\Delta_1), M_3(-1; -\Delta_3), M_4(2; 6\Delta_2),$
 $a=1, b=0, d=-1,$
 $f_1=1, e_1=2, c_1=2, f_2=2, e_2=-1, c_2=4, f_3=2, e_3=0, c_3=-1.$
- 18) $M_1(0; \Delta_2), M_2(1; \Delta), M_3(-1; 2\Delta_1), M_4(-2; 2\Delta_3),$
 $a=-1, b=1, d=0,$
 $f_1=0, e_1=1, c_1=2, f_2=1, e_2=1, c_2=-1, f_3=2, e_3=1, c_3=1.$
- 19) $M_1(\Delta; 2), M_2(-1; -\Delta_1), M_3(2; 2\Delta_2), M_4(1; \Delta_3),$
 $a=0, b=1, d=1,$
 $f_1=1, e_1=1, c_1=2, f_2=-1, e_2=-1, c_2=1, f_3=1, e_3=-2, c_3=1.$
- 20) $M_1(1; \Delta), M_2(2; -\Delta_1), M_3(-1; -2\Delta_2), M_4(0; \Delta_3),$
 $a=1, b=1, d=0,$
 $f_1=2, e_1=1, c_1=1, f_2=1, e_2=-1, c_2=1, f_3=2, e_3=-1, c_3=1.$
- 21) $M_1(0; \Delta), M_2(1; 5\Delta_1), M_3(-1; -\Delta_2), M_4(2; 6\Delta_3),$
 $a=1, b=1, d=1,$
 $f_1=1, e_1=2, c_1=2, f_2=2, e_2=0, c_2=1, f_3=1, e_3=-1, c_3=0.$
- 22) $M_1(0; -3\Delta_1), M_2(1; \Delta), M_3(-1; -\Delta_2), M_4(-2; -\Delta_3),$
 $a=1, b=0, d=-1,$
 $f_1=1, e_1=2, c_1=2, f_2=2, e_2=-1, c_2=4, f_3=2, e_3=0, c_3=-1.$
- 23) $M_1(\Delta; 1), M_2(1; 2\Delta_1), M_3(-1; -3\Delta_2), M_4(2; 7\Delta_3),$
 $a=-1, b=1, d=0,$
 $f_1=0, e_1=1, c_1=2, f_2=1, e_2=1, c_2=-1, f_3=2, e_3=1, c_3=1.$
- 24) $M_1(\Delta; -3), M_2(1; -2\Delta_1), M_3(-1; -3\Delta_2), M_4(2; \Delta_3),$
 $a=0, b=1, d=1,$
 $f_1=1, e_1=1, c_1=2, f_2=-1, e_2=-1, c_2=1, f_3=1, e_3=-2, c_3=1.$
- 25) $M_1(1; \Delta), M_2(0; \Delta_2), M_3(-1; -6\Delta_1), M_4(2; 2\Delta_3),$
 $a=1, b=1, d=0,$
 $f_1=2, e_1=1, c_1=1, f_2=1, e_2=-1, c_2=1, f_3=2, e_3=-1, c_3=1.$
- 26) $M_1(0; \Delta), M_2(1; -2\Delta_1), M_3(-1; \Delta_3), M_4(-3; -10\Delta_2),$
 $a=1, b=1, d=1,$
 $f_1=1, e_1=2, c_1=2, f_2=2, e_2=0, c_2=1, f_3=1, e_3=-1, c_3=0.$
- 27) $M_1(\Delta; 2), M_2(1; \Delta_3), M_3(-1; -5\Delta_1), M_4(2; 11\Delta_2),$
 $a=1, b=0, d=-1,$
 $f_1=1, e_1=2, c_1=2, f_2=2, e_2=-1, c_2=4, f_3=2, e_3=0, c_3=-1.$

- 28) $M_1(\Delta; -6), M_2(1; -\Delta_3), M_3(-1; -5\Delta_1), M_4(-2; -3\Delta_2),$
 $a = -1, b = 1, d = 0,$
 $f_1 = 0, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = 1, e_2 = 1, c_2 = -1, f_3 = 2, e_3 = 1, c_3 = 1.$
- 29) $M_1(1; \Delta), M_2(0; \Delta_1), M_3(-1; -\Delta_2), M_4(-2; -3\Delta_3),$
 $a = 0, b = 1, d = 1,$
 $f_1 = 1, e_1 = 1, c_1 = 2, f_2 = -1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 1, e_3 = -2, c_3 = 1.$
- 30) $M_1(1; \Delta), M_2(-1; -12 \cdot \Delta_1), M_3(0; -\Delta_2), M_4(2; 10\Delta_3),$
 $a = 1, b = 1, d = 0,$
 $f_1 = 2, e_1 = 1, c_1 = 1, f_2 = 1, e_2 = -1, c_2 = 1, f_3 = 2, e_3 = -1, c_3 = 1.$

Задание 9*

Дана матрица $A_{4 \times 3}$.

1. Замените элементы матрицы, обозначенные «*», числами так, чтобы ранг полученной матрицы стал равным: а) 1; б) 2; в) 3.

В каждом из случаев а)–в) укажите базисный минор полученной матрицы.

2. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – столбец неизвестных. Сколько решений будет иметь однородная система линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей A , составленной в п. а)–в) задачи 1?

Укажите, сколько свободных неизвестных будет содержать общее решение системы в каждом из указанных случаев.

Варианты

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$ 2) $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & -3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$ 3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$
- 4) $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & -1 & 2 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$ 5) $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$ 6) $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
- 7) $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -3 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$ 8) $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1/2 & 1/3 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$ 9) $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & -2 & -2 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$

$$\begin{array}{lll}
 10) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix} & 11) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1/4 & -1/5 & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 12) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -5 & -2 & 7 \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
 13) A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 14) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} & 15) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \\
 16) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 7 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 17) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & -5 & 8 \\ * & * & * \end{pmatrix} & 18) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 7 & 6 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
 19) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 20) A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 21) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 7 & 3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
 22) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 8 & 2 & -6 \\ * & * & * \end{pmatrix} & 23) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} & 24) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\
 25) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -5 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 26) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 6 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 27) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -3 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
 28) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} & 29) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} & 30) A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Задание 10*

1. Выясните, является ли пространство \mathbb{R}^2 евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x} = (x_1; x_2)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2)$ поставлено в соответствие число (\vec{x}, \vec{y}) , заданное условиями а), б).

2. В случае положительного ответа найдите длины векторов $\vec{a} = (1; -1)$ и $\vec{b} = (2; 3)$, их скалярное произведение и косинус угла между ними.

Варианты

- 1) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.
- 2) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.
- 3) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.
- 4) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.
- 5) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.
- 6) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.
- 7) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.
- 8) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_2y_1$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.
- 9) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
- 10) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2$.
- 11) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$.
- 12) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.
- 13) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.
- 14) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$;
б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

- 15) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 5x_2 y_1 + x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$.
- 16) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- 17) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1 y_1 + x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 7x_2 y_2$.
- 18) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + 5x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.
- 19) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 10x_2 y_2$.
- 20) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + x_2 y_2$.
- 21) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.
- 22) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2$.
- 23) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1 y_1 + 5x_2 y_1 + x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- 24) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_1 + 5x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$.
- 25) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2$.
- 26) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- 27) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 8x_2 y_2$.
- 28) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1 y_1 + 4x_2 y_1$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 5x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- 29) a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 5x_2 y_1 + 4x_2 y_2$;

- б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 7x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
- 30) а) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;
 б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 6x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$.

Задание 11*

Выясните, можно ли матрицы A и B в действительном пространстве привести к диагональному виду. В случае положительного ответа найдите:

- 1) диагональный вид этой матрицы;
- 2) матрицу T , диагонализующую эту матрицу.

Варианты

- 1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$
- 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$
- 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$
- 4) $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$
- 5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$
- 6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ 18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$
- 7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$
- 8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ -11 & -8 & -9 \end{pmatrix}.$

$$9) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$12) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$15) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$16) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll}
20) & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \\
21) & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \\
22) & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \\
23) & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \\
24) & A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \\
25) & A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \\
26) & A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}. \\
27) & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}. \\
28) & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \\
29) & A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \\
30) & A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Задание 12

Дано уравнение второго порядка относительно переменных x и y .

1. Выпишите его квадратичную форму.
2. Составьте матрицу квадратичной формы и приведите ее к каноническому виду.
3. Укажите базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.
- 4.* В системе координат Oxy постройте кривую второго порядка, которую задает исходное уравнение (если она существует).

Варианты

- 1) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.
- 2) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$.
- 3) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.
- 4) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.
- 5) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.
- 6) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 9 = 0$.
- 7) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.
- 8) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.
- 9) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$.
- 10) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.
- 11) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.
- 12) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.
- 13) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.
- 14) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.
- 15) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.
- 16) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.
- 17) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.
- 18) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.
- 19) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.
- 20) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$.
- 21) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 10x + 55y = 0$.
- 22) $x^2 - 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$.

- 23) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 15x + 20y + 6 = 0.$
 24) $4x^2 - 8\sqrt{8}xy + 12y^2 + 4\sqrt{6}x + 4\sqrt{3}y - 9 = 0.$
 25) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 1 = 0.$
 26) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$
 27) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9 = 0.$
 28) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 116 = 0.$
 29) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0.$
 30) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 4y + 1 = 0.$

2.2. Образцы решений заданий по теме «Линейная алгебра»

Задание 1

Для данных матриц $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \\ 9 & 1 & 15 \end{pmatrix}$

вычислите коэффициенты $\alpha = \det(L^{-1})$ и $\beta = \det(L^7)$, найдите матрицы $A = M^T \cdot N$ и $B = L$, с помощью которых составьте матрицу $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Проверьте, является ли матрица C вырожденной и определите ее ранг.

Решение

Найдем сначала числа $\alpha = \det(L^{-1})$ и $\beta = \det(L^7)$.

Вычислим определитель матрицы L , разлагая его по элементам второго столбца: $\det L = l_{12} \cdot L_{12} + l_{22} \cdot L_{22} + l_{32} \cdot L_{32}$, где l_{i2} – элемент второго столбца матрицы L ; L_{i2} – алгебраическое дополнение элемента l_{i2} , $i = 1, 2, 3$.

Поскольку $l_{12} = l_{22} = 0$, остается лишь найти алгебраическое дополнение:

$$L_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 14) = -1.$$

Тогда $\det L = 0 \cdot L_{12} + 0 \cdot L_{22} + 1 \cdot (-1) = -1$, т. е. матрица L – невырожденная. Так как для любой невырожденной матрицы L справедливы равенства $\det(L^{-1}) = \frac{1}{\det L}$; $\det(L^n) = (\det L)^n$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\alpha = \det(L^{-1}) = \frac{1}{\det L} = -1, \quad \beta = \det(L^7) = (\det L)^7 = (-1)^7 = -1.$$

Найдем транспонированную матрицу M^T , которая получается из M заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером:

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $A = M^T \cdot N$:

$$A = M^T \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$, $a_{12} = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4$, $a_{13} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$,
 $a_{21} = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$, $a_{22} = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -1$, $a_{23} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -3$,
 $a_{31} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$, $a_{32} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 1$, $a_{33} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1$.

Значит, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Зная матрицы A и $B = L$ и вычислив числа α и β , найдем матрицу C :

$$C = 2\alpha \cdot A + \beta \cdot B = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \\ 9 & 1 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -8 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -7 & 0 & -5 \\ -9 & -1 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -2 \\ -11 & 2 & 1 \\ -11 & -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить, является ли полученная матрица C вырожденной, вычислим определитель матрицы C , совершая над строками элементарные операции, не меняющие величину определителя.

$$\det C = \begin{vmatrix} -5 & -8 & -2 \\ -11 & 2 & 1 \\ -11 & -3 & -13 \end{vmatrix} + 2S_2 = \begin{vmatrix} -27 & -4 & 0 \\ -11 & 2 & 1 \\ -154 & 23 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим последний определитель по элементам третьего столбца:

$$\det C = 0 \cdot C_{13} + 1 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} = - \begin{vmatrix} -27 & -4 \\ 154 & 23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 27 & 4 \\ 154 & -23 \end{vmatrix} =$$

$$= 154 \cdot 4 + 27 \cdot 23 = 1237.$$

Так как $\det C \neq 0$, то матрица C невырожденная. Поскольку существует ненулевой минор третьего порядка, равный $\det C$, то ранг матрицы C равен 3.

Задание 2

Решив матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$,

найдите матрицу X и вычислите ее ранг.

Решение

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Тогда данное матричное уравнение примет вид

$$A \cdot X \cdot B = C. \quad (1)$$

Найдем определитель матрицы A , разлагая его по элементам первой строки: $\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$, где a_{1j} — элемент первой строки матрицы A ; A_{1j} — алгебраическое дополнение элемента a_{1j} , $j = 1, 2, 3$.

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 12 = 8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(16 - 15) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 25 = -9.$$

Тогда $\det A = 3 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-9) = 24 - 3 - 18 = 3$.

Найдем определитель матрицы B : $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1$.

Так как $\det A = 3 \neq 0$ и $\det B = 1 \neq 0$, то для матриц A и B существуют обратные матрицы A^{-1} и B^{-1} . Умножив обе части матричного уравнения (1) на обратную матрицу A^{-1} слева и обратную матрицу B^{-1} справа, получим

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) \cdot B^{-1} &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot (B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}, \text{ так как } A^{-1} \cdot A = E_3, B \cdot B^{-1} = E_2. \end{aligned}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Поскольку A_{11}, A_{12}, A_{13} были вычислены ранее, остается найти алгебраические дополнения A_{2j} и A_{3j} , $j = 1, 2, 3$.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 8) = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 15) = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 8) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3.$$

$$\text{Значит, } A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы B найдем обратную матрицу $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$, где

B_{ij} – алгебраическое дополнение элемента b_{ij} матрицы B , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-4) = -4, \quad B_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3,$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

$$\text{Тогда } B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти искомую матрицу X :

$$\begin{aligned} X &= (A^{-1} \cdot C) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить ранг матрицы X , приведем эту матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, которые не изменяют ранг матрицы.

Обозначим S_1, S_2, S_3 – строки матрицы X . Выполнив преобразования

$$S_2 + S_1, S_3 + (-1) \cdot S_1, \text{ получим } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + S_1 \\ - S_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

К последней матрице применим преобразование: $S_3 + 3 \cdot S_2$.

$$\text{Окончательно получим } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 3S_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как существует минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то ранг матрицы X равен 2.

Задание 3

Выясните, образуют ли линейное пространство данные множества:

а) множество всех натуральных делителей числа 198;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,5}$;

в) множество всех плоских векторов, ортогональных данной прямой, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число.

В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

Решение

а) Обозначим V – множество всех натуральных делителей числа 198.

Очевидно, что число 198 делится на 2 и на 3, т. е. $\{2; 3\} \in V$. Но сумма 5 этих чисел не является делителем числа 198, т. е. число $5 \notin V$. Поскольку множество V не является замкнутым относительно операции сложения векторов, то V не является линейным пространством.

б) Обозначим V – множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где

$\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,5}$. Заметим, что множество V состоит из матриц, у которых

элементы $a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ равны 0, а остальные элементы могут быть как нулями, так и любыми другими действительными числами.

$$\text{Так как для любых матриц } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,5}$, их сумма

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 & 0 & \alpha_5 + \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

сохраняет нули в позициях $(2;2), (3;1), (3;2), (3;3)$, то $A + B$ есть матрица из множества V .

Значит, множество V замкнуто относительно операции сложения двух векторов.

$$\text{Поскольку для любого } c \in \mathbb{R} \text{ и любой матрицы } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ из}$$

$$\text{множества } V \text{ матрица } cA = \begin{pmatrix} c\alpha_1 & c\alpha_2 & c\alpha_3 \\ c\alpha_4 & 0 & c\alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ сохраняет нулевые элементы в}$$

тех же позициях, то множество V является замкнутым и относительно операции умножения вектора на действительное число.

Проверим справедливость известных восьми аксиом линейного пространства.

1) Так как

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 & 0 & \alpha_5 + \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 + \alpha_1 & \beta_2 + \alpha_2 & \beta_3 + \alpha_3 \\ \beta_4 + \alpha_4 & 0 & \beta_5 + \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B + A \text{ для любых } A, B \text{ из } V, \text{ то первая}$$

аксиома выполняется.

2) Возьмем произвольные матрицы A, B, C из множества V , где

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 0 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Найдем суммы этих матриц } (A + B) + C \text{ и } A + (B + C):$$

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 & 0 & \alpha_5 + \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 0 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 & 0 & \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A+(B+C) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 + \gamma_1 & \beta_2 + \gamma_2 & \beta_3 + \gamma_3 \\ \beta_4 + \gamma_4 & 0 & \beta_5 + \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 & 0 & \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Так как $(A+B)+C=A+(B+C)$ для любых A, B, C из V , то вторая аксиома выполняется.

3) Поскольку нулевая матрица O третьего порядка содержит нули в интересующих нас позициях, то $O \in V$, при этом

$$A+O = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A, \text{ значит, третья аксиома выполняется.}$$

4) Для любой матрицы A из множества V существует противоположная матрица $-A = (-1) \cdot A$, такая, что $-A \in V$ и $A+(-A)=O$. Следовательно, аксиома 4 выполняется.

5) Возьмем любые числа c_1, c_2 и матрицу A из V . Покажем справедливость равенства $c_1 \cdot (c_2 \cdot A) = (c_1 \cdot c_2) \cdot A$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
c_1 \cdot (c_2 \cdot A) &= c_1 \cdot \begin{pmatrix} c_2 \alpha_1 & c_2 \alpha_2 & c_2 \alpha_3 \\ c_2 \alpha_4 & 0 & c_2 \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 \alpha_1 & c_1 c_2 \alpha_2 & c_1 c_2 \alpha_3 \\ c_1 c_2 \alpha_4 & 0 & c_1 c_2 \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= (c_1 c_2) \cdot A.
\end{aligned}$$

Значит, пятая аксиома тоже справедлива.

6) Так как для числа $1 \in \mathbb{R}$ и любой матрицы A из множества V имеет место равенство $1 \cdot A = A$, то шестая аксиома выполняется.

7) Так как для любого $c \in \mathbb{R}$ и любых матриц A, B из множества V справедливо равенство $c(A+B) = cA + cB$, то седьмая аксиома выполняется.

8) С учетом того, что для любых чисел c_1, c_2 и любой матрицы A из V выполняется равенство $(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 A + c_2 \cdot A$, последняя, восьмая, аксиома тоже является справедливой.

Таким образом, множество V является линейным пространством относительно указанных операций.

Чтобы построить базис пространства V , придадим переменным $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ последовательно следующие наборы значений:

- 1) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$;
- 2) $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$;
- 3) $\alpha_3 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$;
- 4) $\alpha_4 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$;
- 5) $\alpha_5 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Получим соответственно матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что система векторов E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 является базисом пространства V .

Для этого достаточно установить, что матричное равенство $c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 + c_3 \cdot E_3 + c_4 \cdot E_4 + c_5 \cdot E_5 = O$ выполняется только при $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$.

Действительно,

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & 0 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда следует, что}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Значит, множество матриц E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 образует систему линейно независимых векторов пространства V .

Поскольку любая матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ пространства V

однозначно линейно выражается через матрицы $E_i, i = \overline{1,5}$: $A = \alpha_1 \cdot E_1 + \alpha_2 \cdot E_2 + \alpha_3 \cdot E_3 + \alpha_4 \cdot E_4 + \alpha_5 \cdot E_5$, то указанные пять векторов образуют базис пространства V , при этом количество векторов в базисе определяет размерность пространства V , которая равна 5.

в) Пусть данная прямая l задана уравнением $Ax + Bx + C = 0$; $A^2 + B^2 \neq 0$; $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Обозначим V – множество всех плоских векторов, ортогональных прямой l . Поскольку вектор $\vec{n} = (A; B)$ ортогонален прямой l , то множество V состоит из векторов, коллинеарных вектору \vec{n} , т. е. $V = \{\vec{x} = k(A; B) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Сумма двух векторов \vec{x}_1, \vec{x}_2 множества V принадлежит V :

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = k_1(A; B) + k_2(A; B) = (k_1 + k_2)(A; B) \in V, \text{ так как } k_1 + k_2 = k \in \mathbb{R}.$$

Произведение вектора $\vec{x} \in V$ на действительное число α тоже принадлежит V : $\alpha\vec{x} = \alpha \cdot k(A; B) = (\alpha k)(A; B) \in V$, так как $\alpha k \in \mathbb{R}$. Значит, V является замкнутым относительно указанных операций.

Проверим справедливость аксиом линейного пространства.

Во множестве V существует нулевой вектор $\vec{0}$ вида $k \cdot (A; B)$, где $k = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = (0; 0)$, для которого равенство $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ выполняется $\forall \vec{x} \in V$.

Для любого $\vec{x} = k(A; B) \in V$ существует вектор $-\vec{x} = (-k) \cdot (A; B)$, противоположный вектору \vec{x} , такой, что $-\vec{x} \in V$ и $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

Справедливость остальных аксиом следует из свойств линейных операций над векторами.

Значит, V является линейным пространством с указанными операциями.

Найдем базис этого пространства.

Обозначим $\vec{e} = (A; B)$.

Так как по условию задачи $A^2 + B^2 \neq 0$, то $\vec{e} \neq \vec{0}$. Система, состоящая из одного ненулевого вектора \vec{e} , является линейно независимой системой векторов.

В силу того, что любой вектор $\vec{x} \in V$ можно записать в виде $\vec{x} = k \cdot (A; B) = k \cdot \vec{e}$, то \vec{x} однозначно линейно выражается через \vec{e} . Это означает, что \vec{e} – базис пространства V , размерность которого равна 1.

Задание 4

Докажите, что данный упорядоченный набор векторов а)–в) образует базис линейного пространства V , и найдите координаты вектора \vec{y} в этом базисе.

а) $\vec{e}_1 = (0; 1; 2), \vec{e}_2 = (1; 0; 1), \vec{e}_3 = (-1; 2; 4), \vec{y} = (-2; 4; 5),$
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{y} \in V = \mathbb{R}^3;$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$
 $Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 47 & 49 \end{pmatrix}, A_1, A_2, A_3, A_4, Y \in$ пространству V всех матриц второго порядка;

в) $f_1(x) = 1, f_2(x) = x + 1, f_3(x) = (x + 1)^2, f_4(x) = (x + 1)^3,$
 $y(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4, f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), y(x) \in$ пространству V всех многочленов, степень которых не превосходит 3.

Решение

а) Известно, что базисом пространства \mathbb{R}^3 является любая тройка некопланарных векторов. Поэтому проверим компланарность векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Для этого найдем их смешанное произведение:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (4 + 1) + 2 \cdot (2 + 0) = -5 + 4 = -1.$$

Так как $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = -1 \neq 0$, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некопланарны и, следовательно, образуют базис в пространстве \mathbb{R}^3 .

Найдем координаты вектора \vec{y} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Для этого представим вектор \vec{y} в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{y} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 + y_3 \cdot \vec{e}_3. \quad (2)$$

Тогда тройка чисел $(y_1; y_2; y_3)$ и будет являться координатами вектора \vec{y} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Чтобы найти координаты y_1, y_2, y_3 , запишем векторное равенство (2) в координатной форме:

$$y_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 - y_3 = -2, \\ y_1 + 2y_3 = 4, \\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 = 5. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow S_1 \\ \downarrow S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2S_3 \\ -S_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Полученной матрице соответствует система линейных уравнений

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 = 4, \\ y_2 - y_3 = -2, \\ y_3 = -1, \end{cases}$$

из которой снизу вверх находим $y_3 = -1$, $y_2 = -3$, $y_1 = 6$.

Значит, $\vec{y} = 6\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

б) Покажем, что матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 образуют базис в пространстве V матриц второго порядка. Проверим линейную независимость векторов A_1, A_2, A_3, A_4 по определению. Для этого составим матричное равенство $\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \alpha_3 \cdot A_3 + \alpha_4 \cdot A_4 = O$, которое запишем в координатной форме:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 9\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем ранг основной матрицы системы:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 9 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3S_1 \\ 2S_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5S_2 \\ -S_3 \end{matrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow S_3 \\ S_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 5S_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как ранг последней матрицы равен 4 и число неизвестных системы (3) равно 4, то система (3) имеет единственное нулевое решение: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Значит, матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 образуют систему линейно независимых векторов пространства V .

в) Покажем, что многочлены $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$ образуют базис в пространстве V всех многочленов, степень которых не превосходит 3.

Докажем линейную независимость векторов f_1, f_2, f_3, f_4 по определению. Для этого выясним, при каких значениях коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ линейная комбинация f_1, f_2, f_3, f_4 равна 0 для любых $x \in \mathbb{R}$ (заметим, что нулевым вектором пространства V является многочлен 0).

Составим равенство:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \alpha_3 \cdot f_3(x) + \alpha_4 \cdot f_4(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (x+1) + \alpha_3 \cdot (x+1)^2 + \alpha_4 \cdot (x+1)^3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (x+1) + \alpha_3 \cdot (x^2 + 2x + 1) + \alpha_4 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_4 \cdot x^3 + \alpha_3 + 3\alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 \cdot x + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой части этого равенства, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^3 : \alpha_4 = 0, \\ x^2 : \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ x : \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ x^0 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $\alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$.

Значит, многочлены $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ образуют систему линейно независимых векторов пространства V .

Так как размерность пространства V всех многочленов, степень которых не превосходит 3, равна 4, то четыре линейно независимых многочлена $f_i(x), i = \overline{1,4}$, образуют базис в этом пространстве.

Найдем теперь координаты многочлена $y(x)$ в базисе $f_i(x), i = \overline{1,4}$. Для этого представим многочлен $y(x)$ в виде линейной комбинации многочленов базиса:

$$\begin{aligned} y_1 \cdot f_1(x) + y_2 \cdot f_2(x) + y_3 \cdot f_3(x) + y_4 \cdot f_4(x) &= y(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot (x+1) + y_3 \cdot (x+1)^2 + y_4 \cdot (x+1)^3 &= x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_1 \cdot 1 + y_2 x + y_2 \cdot 1 + y_3 x^2 + 2y_3 x + y_3 \cdot 1 + y_4 x^3 + 3y_4 x^2 + 3y_4 x + y_4 \cdot 1 &= \\ = x^3 - 2x^2 + 3x - 4, & \\ x^3 \cdot y_4 + x^2(y_3 + 3y_4) + x(y_2 + 2y_3 + 3y_4) + 1 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) &= \\ = x^3 - 2x^2 + 3x - 4. & \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_4 = 1, \\ y_3 + 3y_4 = -2, \\ y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 3, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -4, \end{cases}$$

из которой последовательно находим $y_4 = 1$, $y_3 = -5$, $y_2 = 10$, $y_1 = -10$.

Значит, $y(x) = -10f_1(x) + 10f_2(x) - 5f_3(x) + 1 \cdot f_4(x) \Leftrightarrow$
 $y(x) = (-10; 10; -5; 1)$ – координаты вектора $y(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$.

Задание 5

Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Решение

Составим расширенную матрицу \bar{A} системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-2S_1]{-S_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-S_2]{-S_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Так как ранг r матриц A и \bar{A} равен 2 (т. е. числу ненулевых строк последней матрицы), то по теореме Кронекера – Капелли система линейных уравнений (4) совместна. С учетом того, что число n неизвестных системы равно 4, а ранг $r = 2 < 4$, система (4) имеет бесконечно много решений.

Если взять в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, то переменные x_1, x_2 будут базисными переменными, а $x_3 = c_3, x_4 = c_4$ – свободными переменными, $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Составим систему линейных уравнений, соответствующую преобразованной расширенной матрице системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + c_3 - c_4 = 2, \\ 3x_2 - 7c_3 + 2c_4 = 1. \end{cases}$

Поскольку свободные переменные могут принимать любые действительные значения c_3, c_4 , выразим базисные переменные x_1, x_2 через

$$\text{свободные переменные } c_3, c_4: \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}c_3 - \frac{2}{3}c_4, \\ x_1 = \frac{7}{3} + \frac{4}{3}c_3 + \frac{1}{3}c_4. \end{cases}$$

Таким образом, получено общее решение системы (4):

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} + \frac{4}{3}c_3 + \frac{1}{3}c_4 \\ \frac{1}{3} + \frac{7}{3}c_3 - \frac{2}{3}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c_3 + \frac{1}{3}c_4 \\ \frac{7}{3}c_3 - \frac{2}{3}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \tilde{X} + X_0,$$

где c_3, c_4 – любые действительные числа.

Теперь рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Зная общее решение системы (4), составим общее решение

$$\text{соответствующей ей однородной системы: } X_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c_3 + \frac{1}{3}c_4 \\ \frac{7}{3}c_3 - \frac{2}{3}c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Размерность пространства решений однородной системы равна $n - r = 4 - 2 = 2$. Базис этого пространства, называемый фундаментальной системой решений (ФСР), состоит из $n - r = 2$ решений.

Найдем фундаментальную систему решений, исходя из общего решения

$$X_0. \text{ Полагая } c_3 = 1, c_4 = 0, \text{ получим первый базисный вектор } E_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая далее $c_3 = 0$, $c_4 = 1$, получим второй базисный вектор $E_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, векторы E_1, E_2 образуют базис пространства решений однородной системы (т. е. фундаментальную систему решений). Любое другое решение этой системы является линейной комбинацией векторов E_1, E_2 с некоторыми числовыми коэффициентами.

Поэтому общее решение соответствующей однородной системы имеет вид $X_0 = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2$, где c_1, c_2 – любые действительные числа.

Задание 6

Выясните, являются ли линейными операторы $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданные условиями:

а) $f(\vec{x}) = (x_1 - x_3; x_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$.

б) $f(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости Oxy .

В случае положительного ответа найдите:

1) матрицу линейного оператора f в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

2) собственные векторы оператора f .

Решение

а) Рассмотрим оператор $f(\vec{x}) = (x_1 - x_3; x_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
 $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Известно, что оператор $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ является линейным, если он удовлетворяет двум условиям:

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ для любых векторов $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$ пространства \mathbb{R}^3 .

2. $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$ для любого действительного числа λ и любого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Проверим, выполняется ли первое условие. Найдем $f(\vec{x} + \vec{y})$ и $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Учитывая, что $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$, получим:

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x} + \vec{y}) &= (x_1 + y_1 - (x_3 + y_3); (x_2 + y_2)^2; x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3)) = \\
 &= (x_1 + y_1 - x_3 - y_3; x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2; x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 + 3x_3 + 3y_3), \\
 f(\vec{x}) + f(\vec{y}) &= (x_1 - x_3; x_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (y_1 - y_3; y_2^2; y_1 + 2y_2 + 3y_3) = \\
 &= (x_1 - x_3 + y_1 - y_3; x_2^2 + y_2^2; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 + 2y_2 + 3y_3).
 \end{aligned}$$

Сравнивая по координатам векторы $f(\vec{x} + \vec{y})$ и $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$, легко убедиться, что их первые и третьи координаты совпадают, тогда как вторые различны: $x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2 \neq x_2^2 + y_2^2$, если $x_2y_2 \neq 0$. Таким образом равенство $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ выполняется не для всех векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Значит, оператор f не является линейным.

б) Рассмотрим оператор $f(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

Возьмем любые векторы \vec{x}, \vec{y} пространства \mathbb{R}^3 и любое действительное число λ . Проверим, выполняются ли условия из определения линейного оператора. В силу свойств векторного произведения векторов получим $f(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}] = [\vec{x}, \vec{a}] + [\vec{y}, \vec{a}] = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$;
 $f(\lambda \cdot \vec{x}) = [\lambda \cdot \vec{x}, \vec{a}] = \lambda \cdot [\vec{x}, \vec{a}] = \lambda \cdot f(\vec{x})$.

Значит, оператор $f(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$ для любого вектора \vec{a} является линейным.

1) Составим матрицу оператора f в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Для этого найдем образы базисных векторов:

$$f(\vec{i}) = [\vec{i}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (0; -5; -1);$$

$$f(\vec{j}) = [\vec{j}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (5; 0; -2);$$

$$f(\vec{k}) = [\vec{k}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (1; 2; 0).$$

Столбцами матрицы A этого оператора в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются координаты образов базисных векторов $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Чтобы найти собственные векторы оператора, найдем собственные значения матрицы A этого оператора.

Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, корнями которого являются собственные значения λ матрицы A :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 1 \\ -5 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \cdot (\lambda^2 + 4) - 5 \cdot (5\lambda + 2) + 1 \cdot (10 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 - 4\lambda - 25\lambda - 10 + 10 - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 30\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 + 30) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Для каждого собственного значения λ составим и решим однородную систему уравнений $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 1 \\ -5 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы A с собственным значением λ .

Для $\lambda = 0$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_1 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ \updownarrow \\ S_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} -5S_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} -\frac{1}{2}S_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует однородная система $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0, \\ 10x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Выберем базисными неизвестными x_1 и x_3 , а свободной неизвестной $-x_2$. Тогда $x_3 = -5x_2$, $x_1 = -2x_2$. Полагая $x_2 = c_2 \neq 0$, получим собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ -5c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot c_2,$$

где c_2 – произвольное число, отличное от 0.

Заметим, что все ненулевые собственные векторы этого оператора коллинеарны данному вектору $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

в) f – оператор зеркального отражения векторов пространства \mathbb{R}^3 относительно плоскости Oxy .

Линейность данного оператора следует из свойств линейных операций над векторами.

1) Найдем матрицу оператора f в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Так как $f(\vec{i}) = \vec{i} = (1; 0; 0)$, $f(\vec{j}) = \vec{j} = (0; 1; 0)$, $f(\vec{k}) = -\vec{k} = (0; 0; -1)$, то

матрица оператора f имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Найдем собственные векторы оператора f (они же – собственные векторы матрицы A этого оператора).

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, корнями которого являются собственные значения матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Собственные векторы матрицы A с собственным значением λ являются

решениями однородной системы уравнений $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_1 = 1$ указанная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0,$$

при этом переменные x_1, x_2 принимают любые действительные значения.

Полагая $x_1 = c_1, x_2 = c_2$, получим собственные векторы \vec{X}_1 , соответствующие

$$\lambda_1 = 1: \quad \vec{X}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные числа, не равные 0 одновременно, что равносильно условию $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Для $\lambda_2 = -1$ имеем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0,$$

при этом x_3 – произвольное число, отличное от 0. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственные векторы \vec{X}_2 , соответствующие $\lambda_2 = -1$:

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_3, \text{ где } c_3 \in \mathbb{R}, c_3 \neq 0.$$

Отметим геометрический смысл полученных собственных векторов: все векторы \vec{X}_1 плоскости Oxy являются собственными векторами с собственным значением $\lambda_1 = 1$ (они неподвижны при этом отображении). Векторы $\vec{X}_2 = c_3 \cdot \vec{k}$, лежащие на оси Oz , которые отображаются в противоположные векторы, тоже являются собственными векторами этого оператора с собственными значениями $\lambda_2 = -1$.

Задание 7

Для данной квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2:$$

- 1) составьте ее матрицу;
- 2) исследуйте знакоопределенность;
- 3) приведите квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (выделения полных квадратов) и укажите невырожденное линейное преобразование, которое позволяет это сделать;
- 4) используя результат задачи 3, определите тип поверхности второго порядка, имеющей уравнение $Q(x_1, x_2, x_3) = 3$.

Решение

1) Составим матрицу A квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$ по следующему правилу: на место элемента a_{ij} ($i \neq j$) запишем половину коэффициента при произведении $x_i x_j$, а на место элемента a_{ii} – коэффициент

при x_i^2 . В результате получим $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Исследуем знакоопределенность квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$ в соответствии с критерием Сильвестра. Найдем главные миноры матрицы A :

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае имеем:

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -3,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 4) - 2 \cdot (2 - 4) + 2(4 - 2) = -3 + 4 + 4 = 5.$$

Так как $D_1 = 1 > 0$, а $D_2 = -3 < 0$, то квадратичная форма не является знакоопределенной.

3) Приведем квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Сгруппируем все члены, содержащие x_1 , и, выделив в полученной сумме полный квадрат, приходим к выражению $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3$.

После такого преобразования квадратичная форма примет вид $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3$.

Действуя аналогично, сгруппируем теперь все члены, содержащие x_2 , вынесем за скобку коэффициент (-3) при x_2^2 и, выделив полный квадрат, получим

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3\right) - 3x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{4}{3}x_3^2 - 3x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{5}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

Обозначим $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3$, $y_3 = x_3$.

Таким образом, получен канонический вид квадратичной формы Q в новых координатах:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2.$$

Преобразование переменных x_1, x_2, x_3 , приводящее квадратичную форму к каноническому виду, можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

4) Уравнение поверхности второго порядка в новых переменных y_1, y_2, y_3 примет вид

$$y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_2^2}{1} - \frac{y_3^2}{\frac{9}{5}} = 1.$$

Полученное уравнение в системе координат $Y_1 Y_2 Y_3$ определяет двуполостный гиперболоид.

Задание 8*

Напишите уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки $M_1(0; \Delta_1)$, $M_2(1; \Delta)$, $M_3(-1; -\Delta_2)$, $M_4(2; -\Delta_3)$, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 & e_1 & c_1 \\ f_1^2 & e_1^2 & c_1^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & f_2 & e_2 \\ f_2 & b & c_2 \\ e_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} d & e_3 & f_3 \\ e_3 & d & f_3 \\ e_3 & f_3 & d \end{vmatrix},$$

$$a=1, \quad b=2, \quad d=3, \quad f_1=0, \quad e_1=-1, \quad c_1=1, \quad f_2=2, \quad e_2=0, \quad c_2=-2, \quad f_3=2, \quad e_3=-1, \quad c_3=1.$$

Решение

Найдем сначала координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 . Для этого в соответствии с условием задачи составим и вычислим определители $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Совершая элементарные преобразования над строками, не меняющие величину определителя, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2S_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

так как первая и третья строки пропорциональны;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2S_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3S_1 \\ 2S_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{12} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 40 = 16.$$

Отметим особенности определителей Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 .

1) Δ – определитель так называемой кососимметрической матрицы третьего порядка, у которой $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$; $a_{ij} = -a_{ji}$ для $\forall i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Можно доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка всегда равен 0.

2) Определитель Δ_1 известен как определитель Вандермонда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \text{ величину которого можно также вычислить по готовой}$$

формуле:
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b).$$

Докажем справедливость этого равенства. Совершая элементарные преобразования над строками, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -aS_1 \\ -a^2S_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Разложим теперь последний определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta_1 = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель $(b-a)$ элементов первого столбца и общий множитель $(c-a)$ элементов второго столбца за знак последнего определителя:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (b-a) \cdot (c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c+a - (b+a)) = \\ &= (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b). \end{aligned}$$

3) Δ_2 – определитель симметрической матрицы, обладающей свойством $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

4) Δ_3 – определитель специального вида, для которого можно вывести общую формулу, позволяющую вычислить Δ_3 для произвольных значений d , e_3 , f_3 его элементов (попробуйте это сделать самостоятельно).

Возвращаясь к решению задания 8, запишем найденные координаты точек $M_1(0; \Delta_1) = M_1(0; -2)$, $M_2(1; \Delta) = M_2(1; 0)$, $M_3(-1; -\Delta_2) = M_3(-1; 6)$, $M_4(2; -\Delta_3) = M_4(2; -16)$.

Уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, M_4 , будем искать в виде $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d – искомые действительные коэффициенты.

Поскольку координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 , лежащих на параболы, удовлетворяют уравнению этой параболы, имеет место следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -2, \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0, \\ a \cdot (-1) + b \cdot 1 + c \cdot (-1) + d = -1, \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2, \\ a + b + c + d = 0, \\ -a + b - c + d = 6, \\ 8a + 4b + 2c + d = -16. \end{cases}$$

Это система четвертого порядка, которую, как и любую другую линейную систему, можно решать методом Гаусса. Однако, учитывая простоту полученной системы, решим ее методом сложения уравнений.

Подставим $d = -2$ в остальные уравнения системы:

$$\begin{cases} d = -2, \\ a + b + c = 2, \\ -a + b - c = 8, \\ 8a + 4b + 2c = -14. \end{cases}$$

Найдем b , сложив второе и третье уравнения: $2b = 10 \Leftrightarrow b = 5$.

Подставив $b = 5$ во второе и четвертое уравнения, получим $\begin{cases} a + c = -3, \\ 4a + c = -17, \end{cases}$ откуда после вычитания уравнений находим $a = -\frac{14}{3}$, $c = \frac{5}{3}$.

Таким образом, $a = -\frac{14}{3}$, $b = 5$, $c = \frac{5}{3}$, $d = -2$, а значит, уравнение искомой параболы третьей степени, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, M_4 , имеет вид $y = -\frac{14}{3}x^3 + 5x^2 + \frac{5}{3}x - 2$.

Задание 9*

Дана матрица $A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

1. Замените элементы матрицы, обозначенные «*», числами так, чтобы ранг полученной матрицы стал равным: а) 1; б) 2; в) 3.

В каждом из случаев а)–в) укажите базисный минор полученной матрицы.

2. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – столбец неизвестных. Сколько решений будет иметь однородная система линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей A , составленной в п. а)–в) задачи 1?

Укажите, сколько свободных неизвестных будет содержать общее решение системы в каждом из указанных случаев.

Решение

1. а) Заменяем элементы матрицы A , обозначенные «*», числами так, чтобы полученная матрица имела ранг $r = 1$.

Так как ранг матрицы равен наибольшему порядку ее ненулевого минора, то в качестве второй, третьей и четвертой строк матрицы A можно взять одну из следующих строк: 1) нулевую строку; 2) строку, равную данной строке; 3) строку, пропорциональную данной строке.

Рассмотрим, например, матрицу A , у которой вторая, третья и четвертая строки получены из первой строки умножением на 2, 3 и 4

соответственно: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Так как существует минор первого порядка $M_1 = 1$, отличный от 0, а все миноры второго порядка равны 0, то ранг r матрицы A равен 1.

Учитывая, что базисным минором матрицы является любой ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы, то любой элемент матрицы A можно взять в качестве ее базисного минора.

2. а) Запишем однородную систему линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей A , составленной в задаче 1а:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Так как ранг r матрицы A равен 1, а число переменных n равно 3, то система имеет бесконечно много решений, при этом количество свободных переменных равно $n - r = 3 - 1 = 2$.

Возьмем в качестве базисного минора $M_1 = 1 \neq 0$, тогда переменная x_1 является базисной переменной, а переменные x_2, x_3 – свободными. Выражая базисную переменную x_1 через свободные переменные x_2, x_3 , получим $x_1 = x_2 - 2x_3$.

Полагая $x_2 = c_2, x_3 = c_3, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, получим общее решение однородной системы $X = \begin{pmatrix} c_2 - 2c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, содержащее две свободные переменные $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

1. б) Составим матрицу A ранга 2. Для этого возьмем вторую строку, непропорциональную первой, а третью и четвертую – пропорциональные первой с коэффициентами 2 и 3 соответственно. В результате получаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как существует минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, отличный от 0, а все миноры третьего порядка равны 0, то ранг r матрицы A равен 2 и минор M_2 можно взять в качестве базисного минора.

2. б) Запишем однородную систему линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей A :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг r матрицы A равен 2, а число переменных n равно 3, то система имеет бесконечно много решений, при этом количество свободных переменных равно $n - r = 3 - 2 = 1$.

Возьмем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, тогда переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная x_3 – свободной.

Выражая базисные переменные x_1, x_2 через свободную переменную x_3 , получим $x_1 = -2x_3, x_2 = 0$.

Полагая $x_3 = c_3, c_3 \in \mathbb{R}$, получим общее решение однородной системы $X = \begin{pmatrix} -2c_3 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}$, содержащее одну свободную переменную $c_3 \in \mathbb{R}$.

1. в) Составим матрицу следующего вида: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как

максимальный порядок миноров этой матрицы равен 3 и существует минор

третьего порядка $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, отличный от 0, то ранг r матрицы A

равен 3, поэтому минор M_3 можно взять в качестве базисного минора.

2. в) Однородная система линейных уравнений $A \cdot X = O$ с матрицей A имеет единственное нулевое решение, так как ранг матрицы A равен числу n неизвестных $r = n = 3$. Все переменные этой системы являются базисными переменными, свободные переменные отсутствуют.

Задание 10*

1. Выясните, является ли пространство \mathbb{R}^2 евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x} = (x_1; x_2)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2)$ поставлено в соответствие число (\vec{x}, \vec{y}) :

а) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2$; б) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

2. В случае положительного ответа найдите длины векторов $\vec{a} = (1; 2)$ и $\vec{b} = (-3; 4)$, их скалярное произведение и косинус угла между этими векторами.

Решение

Как известно, линейное пространство \mathbb{R}^2 является евклидовым пространством, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ определена операция скалярного умножения (\vec{x}, \vec{y}) , удовлетворяющая следующим аксиомам для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

2) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;

$$3) (\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z});$$

$$4) (\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}).$$

1. а) Пусть $\vec{x} = (x_1; x_2)$, $\vec{y} = (y_1; y_2)$, $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2$.

Вычислим (\vec{x}, \vec{x}) и проверим, верно ли $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 2x_1x_1 + 7x_1x_2 + 3x_2x_1 + x_2x_2 = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2.$$

Так как существует вектор, например, $\vec{x}_0 = (1; -1) \in \mathbb{R}^2$, такой, что $(\vec{x}_0, \vec{x}_0) = 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1)^2 = -7 < 0$, то первая аксиома выполняется не для всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Значит, число (\vec{x}, \vec{y}) не является скалярным произведением векторов в пространстве \mathbb{R}^2 , поэтому \mathbb{R}^2 с указанной операцией (\vec{x}, \vec{y}) евклидовым пространством не является.

1. б) Покажем, что число (\vec{x}, \vec{y}) , определенное в п. б), удовлетворяет четырем аксиомам скалярного произведения.

1) По правилу $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ найдем (\vec{x}, \vec{x}) :

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{x}) &= 2x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + 3x_2x_2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \\ &= x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 2x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0 \quad \text{для любого} \\ \vec{x} &= (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2. \text{ При этом} \end{aligned}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}. \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

Значит, первая аксиома выполняется.

2) Найдем и сравним (\vec{x}, \vec{y}) и (\vec{y}, \vec{x}) :

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2,$$

$$(\vec{y}, \vec{x}) = 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 3y_2x_2.$$

Так как $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, то вторая аксиома выполняется.

3) Пусть $\vec{z} = (z_1; z_2)$ – произвольный вектор пространства \mathbb{R}^2 .

Найдем $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z})$, (\vec{x}, \vec{z}) и (\vec{y}, \vec{z}) . Учтывая, что

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2),$$

$$(\vec{x}, \vec{z}) = 2x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 3x_2z_2,$$

$$(\vec{y}, \vec{z}) = 2y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 3y_2z_2,$$

получим

$$\begin{aligned}
 (\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) &= 2 \cdot (x_1 + y_1) \cdot z_1 + (x_1 + y_1) \cdot z_2 + (x_2 + y_2) \cdot z_1 + 3 \cdot (x_2 + y_2) \cdot z_2 = \\
 &= 2x_1z_1 + 2y_1z_1 + x_1z_2 + y_1z_2 + x_2z_1 + y_2z_1 + 3x_2z_2 + 3y_2z_2 = \\
 &= (2x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 3x_2z_2) + (2y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 3y_2z_2) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}).
 \end{aligned}$$

Так как равенство $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ справедливо при любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$, то третья аксиома выполняется.

4) Найдем $(\lambda\vec{x}, \vec{y})$ и $\lambda(\vec{y}, \vec{x})$. Учитывая, что $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2)$, получим $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = 2(\lambda x_1) \cdot y_1 + (\lambda x_1) \cdot y_2 + (\lambda x_2) \cdot y_1 + 3(\lambda x_2) \cdot y_2 = \lambda \cdot (2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2) = \lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y})$ при любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ и любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Значит, четвертая аксиома выполняется.

Следовательно, пространство \mathbb{R}^2 становится евклидовым пространством после определения в нем операции скалярного произведения по правилу $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

2. Найдем длины векторов $\vec{a} = (1; 2)$ и $\vec{b} = (-3; 4)$ по формуле $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2} = \sqrt{2 + 4 + 12} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b}, \vec{b})} = \sqrt{2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot 4^2} = \sqrt{18 - 24 + 48} = \sqrt{42}.$$

Найдем скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} по формуле $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot 4 = -6 + 4 - 6 + 24 = 16.$$

Найдем косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} по формуле $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

$$\text{В нашем случае } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{16}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{42}} = \frac{16 \cdot \sqrt{84}}{3 \cdot 84} = \frac{8 \cdot \sqrt{21}}{63}.$$

Задание 11*

Выясните, можно ли матрицы A и B в действительном пространстве привести к диагональному виду.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае положительного ответа найдите:

- 1) диагональный вид этой матрицы;
- 2) матрицу T , диагонализующую эту матрицу.

Решение

Ответ на вопрос о возможности диагонализировать матрицу опирается на следующий теоретический результат.

Теорема (критерий диагоналируемости матрицы)

Матрица A порядка n приводится к диагональному виду в действительном пространстве тогда и только тогда, когда ее различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ имеют кратность m_1, m_2, \dots, m_k соответственно ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$), при этом кратность m_i каждого собственного значения λ_i совпадает с числом $n - r_i$, где r_i – ранг матрицы $A - \lambda_i E$, $i = 1, 2, \dots, k$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, корнями которого являются собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (2-\lambda) \cdot ((3+\lambda)(2+\lambda) - 3 \cdot 0) + 5 \cdot (-2-\lambda) + 3 + 2 \cdot (5 \cdot 0 - 3 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (4 - \lambda^2) \cdot (3 + \lambda) - 10 - 5\lambda + 3 - 6 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1. \end{aligned}$$

Значит, матрица A имеет одно собственное значение $\lambda = -1$, кратность m которого равна 3.

Найдем ранг r матрицы $A - \lambda E$ при $\lambda = -1$:
 $A + (-1)E = A + E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для этого приведем матрицу к

ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, не изменяющих ее ранг:

$$A + E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 \rightarrow S_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3S_1 \sim 5S_1} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2S_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как существует минор M_2 второго порядка, такой, что $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, а минор M_3 третьего порядка равен 0, то ранг матрицы $A + E$ равен 2.

Учитывая, что кратность m собственного значения $\lambda = -1$ матрицы A равна 3 и отлична от числа $n - r = 3 - 2 = 1$, в соответствии с критерием диагонализруемости можно сделать вывод о невозможности приведения матрицы A к диагональному виду.

Найдем теперь собственные значения матрицы $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Для

этого составим характеристическое уравнение $\det(B - \lambda E) = 0$, корнями которого являются собственные значения матрицы B :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda) \cdot ((5-\lambda)(1-\lambda) + 3) - 3 \cdot (-3 \cdot (1-\lambda) - 3) - 1 \cdot (-9 + 3 \cdot (5-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 8) + 18 - 9\lambda - 6 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 4) + 6 \cdot (2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) \cdot (6 + (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 4)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) = 0.$$

Значит, матрица B имеет собственное значение $\lambda_1 = 2$ кратностью $m_1 = 2$ и собственное значение $\lambda_2 = 1$ кратностью $m_2 = 1$.

Для $\lambda_1 = 2$ найдем ранг r_1 матрицы $B - \lambda_1 E = A - 2E$ методом элементарных преобразований:

$$B - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_1} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как существует минор M_1 первого порядка, такой, что $M_1 = -3 \neq 0$, все миноры M_2 второго порядка равны 0, то ранг r_1 матрицы $B - 2E$ равен 1. Значит, кратность $m_1 = 2$ собственного значения $\lambda_1 = 2$ совпадает с числом $n - r_1 = 3 - 1 = 2$.

Для $\lambda_2 = 1$ найдем ранг r_2 матрицы $B - \lambda_2 E = B - E$:

$$B - E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3S_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как существует минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, а минор M_3 третьего порядка равен 0, то ранг r_2 матрицы $B - E$ равен 2. Следовательно, кратность $m_2 = 1$ собственного значения $\lambda_2 = 1$ совпадает с числом $n - r_2 = 3 - 2 = 1$.

Таким образом, в соответствии с приведенной выше теоремой, матрицу B можно привести к диагональному виду. Найдем ее диагональный вид.

1) Известно, что диагональным видом матрицы B называется подобная ей диагональная матрица D , главная диагональ которой заполнена собственными значениями матрицы B .

В нашем случае $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. При этом матрицу D можно получить

по формуле $D = T^{-1} \cdot B \cdot T$, где T – матрица, первые два столбца которой образуют координаты линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 2$, третий – координаты собственного вектора с собственным значением $\lambda_2 = 1$.

2) Найдем матрицу T , диагонализующую матрицу B . Как отмечалось ранее, для этого нам понадобятся собственные векторы матрицы B , которые являются решениями однородной системы уравнений $(B - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

Пусть $\lambda_1 = 2$. Решим однородную систему $(B - 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$(B - 2E)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Выберем x_3 базисной неизвестной, а x_1, x_2 – свободными неизвестными. Тогда $x_3 = -3x_1 + 3x_2$. Полагая $x_1 = c_1, x_2 = c_2$, получим собственный вектор,

соответствующий $\lambda_1 = 2$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -3c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}$, где c_1, c_2 – произвольные числа,

среди которых хотя бы одно не равно 0, т. е. $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Полагая поочередно $c_1 = 1, c_2 = 0$ и $c_1 = 0, c_2 = 1$, получим два линейно независимых собственных вектора $\vec{e}_1 = (1; 0; -3)$ и $\vec{e}_2 = (0; 1; 3)$, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Аналогично для $\lambda_2 = 1$ составим и решим однородную систему уравнений $(B - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$:

$$(B - E)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$B - E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3S_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Выберем x_1, x_2 базисными неизвестными, а x_3 — свободной неизвестной. Тогда $x_2 = x_3, x_1 = x_3$. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственный вектор,

соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$, где c_3 — произвольное число, отличное от 0.

Полагая $c_3 = 1$, получим собственный вектор $\vec{e}_3 = (1; 1; 1)$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$. Легко проверить, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы, поэтому их координатные столбцы,

взятые в указанном порядке, образуют искомую матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 12

Дано уравнение второго порядка относительно переменных x и y :

$$x^2 + 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + 6 = 0.$$

1. Выпишите его квадратичную форму.
2. Составьте матрицу квадратичной формы и приведите ее к каноническому виду.
3. Укажите базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

4.* В системе координат Oxy постройте кривую второго порядка, которую задает исходное уравнение (если она существует).

Решение

1. Запишем квадратичную форму данного уравнения:
 $Q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$.

2. Составим матрицу A квадратичной формы $Q(x, y)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы A . Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, корнями которого являются собственные значения матрицы A :

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) = 0.$$

Значит, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ – собственные значения матрицы A .

Для каждого собственного значения λ_1, λ_2 составим и решим однородную систему уравнений $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$, решениями которой являются собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению λ .

Для $\lambda_1 = 3$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Выберем x_1 – базисной переменной, а x_2 – свободной переменной, тогда $x_1 = x_2$. Полагая $x_2 = c_1 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий

$\lambda_1 = 3$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, где c_1 – произвольное число, отличное от 0.

Пусть $c_1 = 1$, тогда нормированный собственный вектор,

соответствующий $\lambda_1 = 3$, имеет вид $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Найдем теперь собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению $\lambda_2 = -1$, получим $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$.

Выберем x_1 базисной переменной, а x_2 – свободной переменной, тогда $x_1 = -x_2$. Полагая $x_2 = c_2$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -1$: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, где c_2 – произвольное, число отличное от 0.

Пусть $c_2 = 1$, тогда нормированный собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -1$, имеет вид $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Таким образом, ортогональный оператор с матрицей $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ приводит квадратичную форму $Q(x, y)$ к каноническому виду $Q(x', y') = 3(x')^2 - (y')^2$ с помощью невырожденного линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'. \end{cases} \quad (5)$$

3. Квадратичная форма $Q(x, y)$ имеет канонический вид $Q(x', y')$ в базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 , составленном из нормированных собственных векторов матрицы A , т. е.

в базисе $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

4.* Для построения кривой упростим ее уравнение путем последовательного перехода от переменных x, y к переменным x', y' , а затем от них – к переменным x'', y'' . Переход к переменным x', y' выполним с помощью линейного преобразования (5):

$$\begin{aligned} 3(x')^2 - (y')^2 + 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' \right) + 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \right) + 6 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(x')^2 - (y')^2 + 6x' + 6 = 0. \end{aligned}$$

Геометрически переход от переменных x, y к переменным x', y' означает замену первоначальной системы координат Oxy с ортонормированным базисом $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ на новую систему координат $O'x'y'$ с базисом $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ из нормированных собственных векторов матрицы A и началом в точке O' , совпадающей с точкой O .

Заметим, что поскольку $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, то новый базис $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ является ортонормированным, он получается из старого базиса $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ поворотом на 45° против часовой стрелки.

На следующем этапе, выделив полный квадрат по переменной x' , получим уравнение $3(x'+1)^2 - (y')^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x'+1)^2}{1} - \frac{(y')^2}{3} = -1$, в котором, полагая $x'' = x' + 1$, $y'' = y'$, окончательно получаем каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x'')^2}{1} - \frac{(y'')^2}{3} = -1$ с полуосями $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, вершины которой расположены на новой оси ординат $O''y''$.

Учитывая, что начало координат O'' системы $O''x''y''$ в системе Oxy имеет координаты $O''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, можно построить график гиперболы, изображенный на рис. 26.

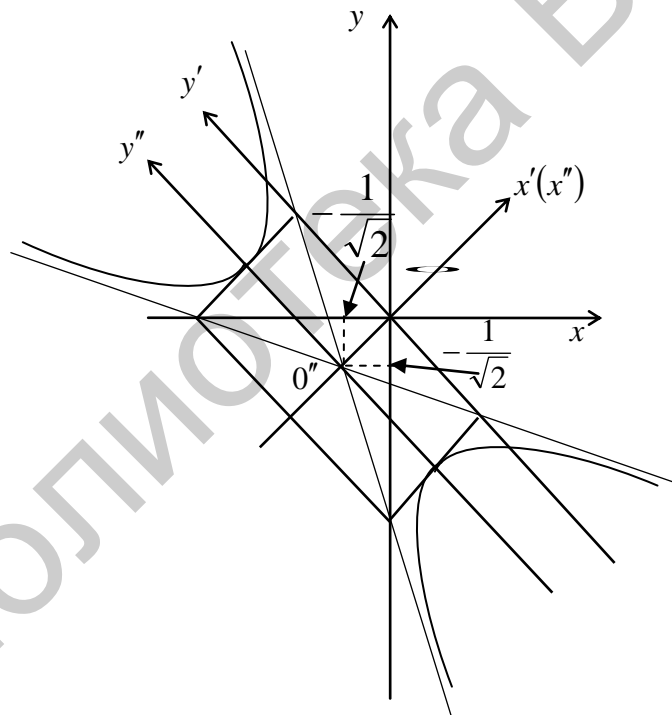


Рис. 26

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Задания по теме

«Введение в математический анализ»

Задание 1

Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Варианты

$$1) x_n = \frac{3n+2}{2n+1}, \quad a = \frac{3}{2}.$$

$$3) x_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$$

$$5) x_n = \frac{2+3n^2}{4n^2-1}, \quad a = \frac{3}{4}.$$

$$7) x_n = \frac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$$

$$9) x_n = \frac{3+8n^2}{1+4n^2}, \quad a = 2.$$

$$11) x_n = \frac{3n^2-5}{n^2+1}, \quad a = 3.$$

$$13) x_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$$

$$15) x_n = \frac{3-n^3}{1+n^3}, \quad a = -1.$$

$$17) x_n = \frac{5n-3}{n+1}, \quad a = 5.$$

$$19) x_n = \frac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$$

$$21) x_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\frac{3}{5}.$$

$$23) x_n = -\frac{7n^3}{3-n^3}, \quad a = 7.$$

$$25) x_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$2) x_n = \frac{4n^2+1}{n^2+2}, \quad a = 4.$$

$$4) x_n = \frac{3n+1}{n+6}, \quad a = 3.$$

$$6) x_n = -\frac{n^3-9}{1+2n^3}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$8) x_n = \frac{2n}{n-3}, \quad a = 2.$$

$$10) x_n = \frac{3-5n}{2+10n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$12) x_n = -\frac{6n^2}{n^2+1}, \quad a = -6.$$

$$14) x_n = \frac{n-1}{2n+4}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$16) x_n = \frac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$$

$$18) x_n = \frac{2-3n^2}{6n^2+5}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$20) x_n = \frac{2n+7}{n-4}, \quad a = 2.$$

$$22) x_n = \frac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$$

$$24) x_n = \frac{2n+6}{2n+7}, \quad a = 1.$$

$$26) x_n = \frac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \frac{3}{5}.$$

27) $x_n = \frac{4n+1}{2n+1}, a = 2.$

28) $x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, a = \frac{4}{3}.$

29) $x_n = \frac{n-3}{2n+1}, a = \frac{1}{2}.$

30) $x_n = -\frac{2n^2-1}{n^2+3}, a = -2.$

Задание 2*

Для данной последовательности x_n подберите такие значения параметров a и b , при которых $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ равен: а) 0; б) ∞ ; в) заданному числу k .

Затем докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

Варианты

1) $x_n = \frac{an-2}{bn+5}, k = \frac{4}{5}.$

2) $x_n = \frac{bn^2+n-1}{an^2-3n+2}, k = \frac{1}{2}.$

3) $x_n = \frac{4-bn}{an+1}, k = 2.$

4) $x_n = \frac{an^2-5}{bn^2+7n-1}, k = \frac{5}{7}.$

5) $x_n = \frac{an+25}{1-bn}, k = 25.$

6) $x_n = \frac{bn^2-4n}{8-an^2}, k = -3.$

7) $x_n = \frac{5-bn}{1+an}, k = 5.$

8) $x_n = \frac{an^2-9}{bn^2-4}, k = \frac{9}{4}.$

9) $x_n = \frac{2an+3}{4-bn}, k = \frac{3}{2}.$

10) $x_n = \frac{an^2-5n+1}{bn^2+8}, k = \frac{1}{4}.$

11) $x_n = \frac{-an+4}{bn+2}, k = 2.$

12) $x_n = \frac{an^2+2}{bn^2-n-1}, k = -2.$

13) $x_n = \frac{an+12}{4-bn}, k = 3.$

14) $x_n = \frac{4-2bn^2}{an^2+n+3}, k = 2.$

15) $x_n = \frac{4-3bn}{2an+5}, k = 6.$

16) $x_n = \frac{7-an}{bn-4}, k = \frac{4}{7}.$

17) $x_n = \frac{n-an^2}{bn^2+5n+6}, k = -\frac{1}{6}.$

18) $x_n = \frac{an+1}{bn-2}, k = \frac{4}{3}.$

19) $x_n = \frac{bn^2+8}{4-n-an^2}, k = 5.$

20) $x_n = \frac{a-bn}{an+b}, k = -2.$

21) $x_n = \frac{an^2+5n-3}{bn^2-4}, k = \frac{3}{4}.$

22) $x_n = \frac{an+6}{3-bn}, k = 2.$

$$23) x_n = \frac{bn^2 - 1}{an^2 + 2n - 5}, k = \frac{1}{5}. \quad 24) x_n = \frac{bn - 5}{3an + 4}, k = -\frac{5}{4}.$$

$$25) x_n = \frac{an^2 + 3n}{bn^2 + 8 + 4n}, k = 3. \quad 26) x_n = \frac{an - 11}{4 + bn}, k = \frac{11}{2}.$$

$$27) x_n = \frac{an^2 + 8n + 4}{3 - bn^2}, k = -\frac{2}{3}. \quad 28) x_n = \frac{bn + 13}{an - 1}, k = 13.$$

$$29) x_n = \frac{an^2 + n - 8}{7n - 2bn^2}, k = 1. \quad 30) x_n = \frac{5an - 1}{7 + 2bn}, k = \frac{1}{7}.$$

Задание 3

Из последовательностей a_n , приведенных в таблице, выберите такие, которые обладают свойствами, указанными в соответствующем варианте (1–30):

$1 - \frac{1}{2n}$	3^n	$\frac{(-1)^n}{n}$	$n^2 - 2n$	$(-1)^n$	$\frac{n+1}{n}$	$-3n^3 + 4$	$\frac{3^n}{3n!}$	$2^n - 5$
$\frac{1}{n}$	$\frac{2^n}{n!}$	$\frac{n+1}{n}$	$2n - 1$	$\frac{1}{2n}$	$n^3 + 2n$	$7n - 2$	$\frac{5n - 2}{n + 1}$	$\frac{3^n}{n^2}$
\sqrt{n}	$\frac{5}{n+2}$	$-n$	$4n^2 - 1$	$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$\ln n$	$1 - \frac{1}{2^n}$	$\arctg n$	$\log_2(n^2 + n)$
$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n^2}$	$\cos \frac{\pi n}{2}$	n	$4 - 5n$	$\frac{1}{n^3}$	$(-1)^n n$	$\frac{n-1}{n}$	$\left(\frac{1}{7}\right)^n$
$(-1)^n 2^n$	$-2n - 3$	$\sin \frac{\pi n}{2}$	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{n}{n^2 + 1}$	$1 + \frac{1}{3n}$	$\frac{n+7}{n}$	$\frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 1}}$	$n^{(-1)^n}$
$\frac{5n}{2n^2 + 1}$	$[\sqrt{n}]$	$-\frac{n^2}{n+1}$	$n - \frac{1}{n}$	$\frac{5n}{n+1}$	9^n	$-n^3 + 8$	$\sin \frac{1}{n}$	5^{4-2n}
-2^n	$5n^2 - 3$	$2n + 1$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{7}{4n!}$	$\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$	4^{n-3}	$\log_7 n$	$[\sqrt{n+1}]$
2, 2, 2, ...			-1, -1, -2, -2, -3, -3, ...			1, 1, 2, 2, 3, 3, ...		

Вариант	Свойства последовательности a_n	
1	а) возрастающая	б) неограниченная
2	а) убывающая	б) бесконечно большая
3	а) бесконечно малая	б) ограниченная
4	а) возрастающая	б) ограниченная сверху
5	а) убывающая	б) неограниченная
6	а) неубывающая	б) не являющаяся монотонной
7	а) бесконечно большая	б) ограниченная

Вариант	Свойства последовательности a_n	
8	а) монотонная	б) возрастающая
9	а) ограниченная	б) неубывающая
10	а) возрастающая	б) немонотонная
11	а) ограниченная снизу	б) неубывающая
12	а) убывающая	б) ограниченная
13	а) возрастающая	б) постоянная
14	а) ограниченная снизу числом 1	б) бесконечно малая
15	а) бесконечно большая	б) убывающая
16	а) возрастающая	б) неограниченная
17	а) неограниченная	б) бесконечно большая
18	а) монотонная	б) ограниченная сверху числом 2
19	а) бесконечно большая	б) неограниченная
20	а) неубывающая	б) ограниченная снизу
21	а) ограниченная сверху числом 0	б) бесконечно малая
22	а) немонотонная	б) ограниченная сверху числом π
23	а) неубывающая	б) неограниченная
24	а) бесконечно малая	б) ограниченная снизу
25	а) невозрастающая	б) неограниченная
26	а) ограниченная сверху числом 1	б) бесконечно малая
27	а) убывающая	б) немонотонная
28	а) постоянная	б) ограниченная
29	а) бесконечно малая	б) ограниченная сверху числом e
30	а) ограниченная	б) бесконечно большая

Задание 4

Для данной последовательности a_n вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (1–15 вариант) и

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ (16–30 вариант).

Варианты

$$1) a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)5^n}.$$

$$2) a_n = \frac{n!}{2^n(2n+1)!}.$$

$$3) a_n = \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n-5)}{5^{n+2}}.$$

$$4) a_n = \frac{3^n}{(n+2)!4^n}.$$

$$5) a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$$

$$6) a_n = \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}.$$

$$7) a_n = \frac{9^n}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}.$$

$$9) a_n = \frac{n! + (n+2)!}{n!(5n^2+1)}.$$

$$11) a_n = \frac{7^n \cdot (n+2)!}{n^n}.$$

$$13) a_n = \frac{(3n+1)!}{(2n+3)!}.$$

$$15) a_n = \frac{3^{n+1}(2n^3+1)}{(n+2)!}.$$

$$17) a_n = \frac{n}{\ln^n(n+5)}.$$

$$19) a_n = \frac{(n+1)^n}{5^n \cdot n}.$$

$$21) a_n = \left(\frac{8n+1}{4n}\right)^{2n} \sin^n \frac{6}{n+1}.$$

$$23) a_n = \frac{1}{e^n} \left(\frac{7n-3}{2n+1}\right)^{n+1}.$$

$$25) a_n = \frac{2^n}{5^{3n}(7n+2)}.$$

$$27) a_n = n^3 \cdot \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{2n}.$$

$$29) a_n = \frac{6^n}{(\sqrt{3})^n \cdot (n+2)^n}.$$

$$8) a_n = \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{n! 6^n}.$$

$$10) a_n = \frac{5n!}{2^n + 1}.$$

$$12) a_n = \frac{(n+2)!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}.$$

$$14) a_n = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(n-1)2^n}.$$

$$16) a_n = \left(\frac{5n+2}{n+1}\right)^{2n+1}.$$

$$18) a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{2n^2+7n+5}{2\sqrt{3n^2+4n+1}}.$$

$$20) a_n = \left(\frac{2n^2+5}{n^2+1}\right)^{8n^2}.$$

$$22) a_n = \frac{\log_2^n \left(\frac{16n^2+2n+1}{2n^2-1}\right)}{7^n}.$$

$$24) a_n = n \cdot \left(\frac{4n+1}{5n+1}\right)^n.$$

$$26) a_n = \frac{3^n \cdot \left(1 - \cos \frac{2}{n+1}\right)^n}{8^n}.$$

$$28) a_n = \left(\frac{8n-1}{2n+1}\right)^{3n-2}.$$

$$30) a_n = 10 \cdot \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{5n}.$$

Задание 5*

Даны последовательности x_n, y_n, z_n . Для каждой последовательности найдите предел при $n \rightarrow \infty$ и укажите, является ли последовательность сходящейся (расходящейся); бесконечно малой (бесконечно большой); ни той, ни другой; ограниченной (неограниченной).

Варианты

- 1) $x_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) \cdot \sqrt[n]{5n^4 + 2n^3 - 3}, \quad y_n = \left(\frac{1+5n}{5n-2} \right)^{4-3n},$
 $z_n = \frac{4n(n-3)! + (n-2)!}{2(n-1)! - 5(n-2)!}.$
- 2) $x_n = \frac{3+6+\dots+3n}{5-4n-2n^2}, \quad y_n = \left(\frac{3n-4}{3n+5} \right)^{2-7n}, \quad z_n = \frac{(n-1)! + n^2(n-2)!}{2n! - (n-1)!}.$
- 3) $x_n = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}{\sqrt[2n]{3n^2 + 7n - 4}}, \quad y_n = \left(\frac{9n^2 + 5n - 4}{9n^2 + 5n + 10} \right)^{1-4n}, \quad z_n = \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n! + 2(n+1)!}.$
- 4) $x_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}, \quad y_n = \left(\frac{3n^2 - n + 1}{3n^2 + 2n - 4} \right)^{1+n},$
 $z_n = \frac{(n+3)!}{2(n+1)! - (n+2)!}.$
- 5) $x_n = \frac{3^n - 4 \cdot 5^n}{5 + 25 + \dots + 5^n}, \quad y_n = \left(\frac{2n^2 + 3n + 3}{2n^2 + 3n - 4} \right)^{n-2}, \quad z_n = \frac{2n \cdot n! - 3(n-1)!}{(n+1)! - 4n!}.$
- 6) $x_n = \frac{5+7+9+\dots+(2n+3)}{11n+7n^2-12}, \quad y_n = \left(\frac{4n^2 + 5n - 1}{4n^2 - n + 3} \right)^{-n^3},$
 $z_n = \frac{n! - (n+2)!}{(n+3)n! + (n+1)!}.$
- 7) $x_n = \frac{\sqrt[n]{3n^8 + 4n^6 - 2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}}, \quad y_n = \left(\frac{6n^2 + 2n - 1}{6n^2 + 5} \right)^{3+2n},$
 $z_n = \frac{(n-1)! + n^2 \cdot (n-2)!}{2n! - (n-1)!}.$

- 8) $x_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$, $y_n = \left(\frac{3n^2-2n+1}{3n^2+5n-4}\right)^{1-2n}$,
 $z_n = \frac{n(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$.
- 9) $x_n = \left(\frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \dots + \frac{2(n-2)}{n^3}\right) \cdot \sqrt[5]{3n^5+2n^4-1}$, $y_n = \left(\frac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{2-n^3}$,
 $z_n = \frac{n!(n+2)-(n-2)!}{(n-1)!+n!}$.
- 10) $x_n = \frac{1+2n+3n^2}{2+7+12+\dots+(5n-3)}$, $y_n = \left(\frac{7n+3}{7n+2}\right)^{3n-4}$,
 $z_n = \frac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}$.
- 11) $x_n = \frac{2+\sqrt[n]{4n^3+10n^2-7n+1}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{36}+\dots+\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}}$, $y_n = \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+4}\right)^{n^3}$,
 $z_n = \frac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$.
- 12) $x_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}+\sqrt[3]{3n^2+n-1}}$, $y_n = \left(\frac{3n+15}{3n-1}\right)^{4n-3}$,
 $z_n = \frac{n(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$.
- 13) $x_n = \frac{9+3-3-\dots-(3n-12)}{12+5n^2-8n^3}$, $y_n = \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+n-1}\right)^{n^2+2}$,
 $z_n = \frac{(n-1)!+(n-3)!}{2n^2(n-3)!+(n-2)!}$.
- 14) $x_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n$, $y_n = \left(\frac{3n^2-n+4}{3n^2+2n-1}\right)^{n^3+n}$,
 $z_n = \frac{(n+1)!+n!(n+3)}{(n+2)!+(n+1)!}$.
- 15) $x_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}+\sqrt{5n+1}}$, $y_n = \left(\frac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{2-n^3}$,

$$z_n = \frac{(n+3)!+(n+2)!}{2n^2(n+1)!-(n+2)!}.$$

$$16) \quad x_n = \frac{\frac{1}{7} + 1 + 7 + \dots + 7^{n-2}}{4 \cdot 3^n + 5 \cdot 7^{n-1}}, \quad y_n = \left(\frac{6n^2 + 5n + 1}{6n^2 + 2n + 3} \right)^{n^2-1},$$

$$z_n = \frac{(n+1)!-n \cdot n!(n-4)}{2(n+2)!}.$$

$$17) \quad x_n = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}, \quad y_n = \left(\frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + 3n + 4} \right)^{n^2},$$

$$z_n = \frac{(n+5)!(n-3) + 2(n+4)!}{3n^2(n+4)!-(n+5)!}.$$

$$18) \quad x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}, \quad y_n = \left(\frac{2n^2-4n}{2n^2+n-5} \right)^{7-n},$$

$$z_n = \frac{3n(n+3)!+(n+4)!}{2(n+1)!-8(n+4)!}.$$

$$19) \quad x_n = \left(\frac{1}{n^4} + \frac{5}{n^4} + \frac{9}{n^4} + \dots + \frac{4n-11}{n^4} \right) \cdot \sqrt[3]{8n^6+11}, \quad y_n = \left(\frac{3n^2+4}{3n^2-n} \right)^{5n+8},$$

$$z_n = \frac{(n-2)!+n^2(n-3)!}{4(n-1)!-(n-2)!}.$$

$$20) \quad x_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{\sqrt[5n]{3n^4+5n^3+2+7}}, \quad y_n = \left(\frac{4n^2-5n+1}{4n^2+n} \right)^{8-6n},$$

$$z_n = \frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!+2(n+2)!}.$$

$$21) \quad x_n = \frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3}, \quad y_n = \left(\frac{5n^2-6}{5n^2+n-2} \right)^{n^2+n}, \quad z_n = \frac{(n+1)!}{3(n-1)!+n!}.$$

$$22) \quad x_n = \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2+7+12+\dots+(5n-3)}, \quad y_n = \left(\frac{8n^2-3n+5}{8n^2-7} \right)^{n^2-n^3},$$

$$z_n = \frac{3n(n+1)!-8n!}{(n+2)!-5(n+1)!}.$$

$$23) \quad x_n = \frac{-3+5+13+\dots+(8n-11)}{13+4n}, \quad y_n = \left(\frac{2-n-n^2}{5n-n^2} \right)^{2n-3},$$

$$z_n = \frac{(n-1)!-(n+1)!}{n \cdot (n-1)!+5n!}.$$

$$24) \quad x_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{5 \cdot 2^{n-1}}}{5-10+\dots+5 \cdot (-2)^{n-1}}, \quad y_n = \left(\frac{7n^2+3n+5}{7n^2+6n-1} \right)^{4-5n},$$

$$z_n = \frac{(n+1)!+n^2 \cdot n!}{(n+2)!-5(n+1)!}.$$

$$25) \quad x_n = \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2}, \quad y_n = \left(\frac{6n^2+n-3}{6n^2+4n} \right)^{n^2+3n},$$

$$z_n = \frac{(n+3)!+7(n+4)!}{(n+9)(n+3)!-(n+2)!}.$$

$$26) \quad x_n = \frac{17-13n+11n^2}{-1-4-7-\dots-(3n-2)}, \quad y_n = \left(\frac{n^2-n-9}{n^2+3n} \right)^{1-n^3},$$

$$z_n = \frac{(n-1)n!+(n+1)!}{(n+2)!-n!}.$$

$$27) \quad x_n = \frac{-20+2+4+\dots+2^{n-1}}{13+9n+10 \cdot 2^{n-1}}, \quad y_n = \left(\frac{9n^2+5}{n-3+9n^2} \right)^{18n+4},$$

$$z_n = \frac{(n-2)!+(n-4)!}{8n^2(n-4)!+5(n-3)!}.$$

$$28) \quad x_n = \left(\frac{2+4+\dots+2n}{n+3} - n \right) \cdot \sqrt[n]{n^2+n+2}, \quad y_n = \left(\frac{2n^2+9n-1}{2n^2+7n} \right)^{8n-5},$$

$$z_n = \frac{(n-5)!+(n-4)!}{5n^3(n-7)!+(n-6)!}.$$

$$29) \quad x_n = \frac{\frac{2n\sqrt{25+9n+16n^2}-3}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}}}{1}, \quad y_n = \left(\frac{3n^2+5n+9}{3n^2+4} \right)^{2n^2},$$

$$z_n = \frac{(n-2)!}{2(n-4)!-(n-3)!}.$$

$$30) \quad x_n = \frac{3+6+9+\dots+3n}{5n^2+3n+3}, \quad y_n = \left(\frac{4n^2+3n}{4n^2+8n-1} \right)^{2n^3},$$

$$z_n = \frac{n^4 \cdot n! - (n+3)!}{6(n+5)(n+2)! - (n+4)!}.$$

Задание 6

Найдите пределы функций.

Варианты

1) а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(\sqrt{x-1} - 3)}{-x + 10}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x+3} \right)^{4x+5}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x + 4x^2}{5x^2 + 2x(x+3) + 1}$.

2) а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{4(x^2 - 8x + 12)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{x^2 - 7x + 5}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{\sqrt{x+9} - 3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+4)(\ln(2x+7) - \ln(2x-3))$;

д) $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{1}{x^2-9}}$.

3) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 3x - 9}{7x^2 + x - 8}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x \sin 3x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2x+3} - 3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + x - 5x^4}{12x + 3x^4 + 1}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-4} \right)^{1-6x}$.

4) а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{3}{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{3-2x} \right)^{x+1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 9x}{2x \operatorname{tg} 7x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + 3x + 1}{2x^2 - 5x^5 + 7}$.

- 5) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x} \right)^{\frac{1}{2}x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1 - \cos 4x}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 4x^4 + 9x^5}{3x^5 - 2(x+7) + 1}$.
- 6) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{x \operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x})$;
- в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2)^2 + 3x^4}{2x^4 - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{2+x}{7x}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$.
- 7) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{x+3}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x^3 - 27}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x(x+1)(2x+1)}{x^3 - 2}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$.
- 8) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x^2 + 5x^3}{(2+x)^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 3x \cdot \operatorname{ctg}^2 5x$;
- в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{5x^2 + 16x + 3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$.
- 9) а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 - 9x + 2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{2x+3}$.
- 10) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{5(x^2 + x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{3x^2}$;

- в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{3x - 6}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 5x}{\sin 3x}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 7x})$.
 11) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^2 - (1-2x)^2}{3x^2 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{3(x^2 + x - 20)}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{1}{3}x}{\sqrt{4+x-2}}$; г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+3} - e}{x+2}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{3+x}$.
 12) а) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - \frac{1}{2}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^2 + 5x^2}{12x^2 - 1}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2})$.
 13) а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{4x^2 + 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{7-x} \right)^{5x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x-3}}$; г) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\operatorname{arctg}(x+4)}{x^2 + 4x}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3x + \frac{x^3}{2x+3} \right)$.
 14) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 + 3x) - 2}{3x^2(7 - 4x)}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{3(x+2)}{x^2}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{2x+1} - 3}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{5x^2 + 16x + 3}$.
 15) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^2 + x - 9}{9x^2 + x - 10}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 3x^2 + 1}{4x^2 - 1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \sin 2x \operatorname{ctg}^2 3x$; г) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{5(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{2x-2} - 4}$

- д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.
- 16) а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9+x}}{\arcsin 2x}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 \ln(8-x)}{x-7}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+5} \right)^{4-x}$.
- 17) а) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{6}{9-x^2} \right)$;
- б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2-1) - x^3 + 5x}{x^2-1}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{5 \sin 4x}{x^2 + \pi x}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{3x - x^2}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x}$.
- 18) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x-1}{2x^4 + 3x^3 + 5}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+7x}{5+7x} \right)^{x+4}$.
- 19) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{2(x^3 - 125)}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin^2(3x-3)}{1 + \cos \pi x}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 7}$.
- 20) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^{2x+1}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^{2-x^2}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^3 - 1)}{2x^2 - x - 1}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 + x^4 - 2x^3}{-2x^4 + 3x^2 + 1}$.

- 21) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 2}{x^2 - x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x-1} \right)$.
- 22) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 5x - 12}{12x^2 + x - 13}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{3x^2}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22-x}}{1 - \sqrt{4+x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{7-x}{x} \right)$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.
- 23) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-5} \right)^{x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+16} - 4}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\arcsin(x-5)}{x^2 - 25}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x^2-2}}{7x-1}$.
- 24) а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^7 + 6x^3 + 1}{-(x^2 + 2)^3 + 3x^7}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{3x}}$;
- д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{4(\sqrt{x} - 1)}$.
- 25) а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^8 + 4x^4 + 1}{3x^7 + 5}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - e^{2-x}}{\ln(x-1)}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right)$;
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+4} \right)^{2x-5}$.
- 26) а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 + x^{10} + 3x^{12})^3}{(2x^3 + 1)^{12}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$;

$$\begin{array}{ll}
\text{в) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{2x}}; \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x+9} - 5}{3(x-8)}. & \\
27) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{7x + \sqrt[3]{x}}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{7(x-2)}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{2 \operatorname{tg} 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{3+4x} \right)^{7x+3}; \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6})}{\sqrt{3x-5} - \sqrt{x+1}}. & \\
28) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4 - x - 3x^2}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(\sqrt{(x+2)(x+3)} + x); \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{3x-2}. & \\
29) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{x} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1}}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{2x-2} - 4}; \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 - x}{x^3 - x}. & \\
30) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2 - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x} \right)^{3x+1}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}; \\
\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x+2) - x^3 + 2x^6}{(2x^2 + 3)^3 - 1}. &
\end{array}$$

Задание 7

Выделите главную часть функции $f(x) = g(x) + h(x)$ вида Ax^k при $x \rightarrow 0$, используя данные, приведенные ниже.

Вариант	$g(x)$	$h(x)$
1	$7^{2x} - 5^{3x}$	$2x - \arctg 3x$
2	$\sqrt{\cos x} - 1$	$\sin^2 2x$
3	$1 + x \sin x - \cos 2x$	x^3
4	$\sqrt{1 + x \sin x} - 1$	$e^{x^2} - 1$
5	$\ln(1 + 4x)$	$\sqrt{1 + 2x} - 1$
6	$\ln(2 - \cos 2x)$	$e^{\sin^2 x} - 1$
7	$(1 + 5x^4)^2 - 1$	$e^{2x} - 1$
8	$2^{3x} - 3^{2x}$	$x + \arcsin x^3$
9	$\sqrt{x} + x + \sqrt[7]{x}$	$\sin \sqrt[7]{x}$
10	$3^{x+1} - 3$	$\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})$
11	$x^4 - \sin x + \operatorname{tg} 5x$	$e^{x^3} - 1$
12	$\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} - 1$	x^3
13	$e^{4x} - 1$	$\arcsin 5x - \operatorname{arctg} x$
14	$1 - \cos^2 \sqrt{x}$	$\operatorname{tg} 2x$
15	$\operatorname{tg} 2x - \sin 4x$	$7 \ln(1 + 8x)$
16	$5 \arcsin^2 2x$	$e^{1-x^2} - e$
17	$(1 - \cos 3x)2x$	$x \arcsin^2 5x$
18	$e^{3x} - 1$	$\sqrt{1 + \sin 2x} - 1$
19	$\sqrt[5]{1 + 5x^7} - 1$	$(1 - \cos 3x)^3$
20	$\lg\left(1 - \frac{1}{2} \sin x\right)$	$e^{5\sqrt{x}} - 1$
21	$\operatorname{arctg} 3x^2 + 2x$	$e^{\sin 2x \operatorname{tg} x} - 1$
22	$1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$	$x \sin 3x$
23	$\operatorname{tg}(\sin x)$	$\ln(1 + \arcsin x)$
24	$\log_5(1 - \sin^5 2x)$	$3x^5$
25	$e^x + e^{-x} - 2$	$1 - \cos 2x$
26	$1 - \cos 4x$	$\ln(1 + \arcsin^2 2x)$

Вариант	$g(x)$	$h(x)$
27	$6^{2x} - 7^{-2x}$	$\operatorname{tg} 3x^2 - 2x$
28	$7^{x^2} - 1$	$\ln(1 + \sin^2 4x)$
29	$\sqrt[3]{x^3 + 2x^6}$	$\operatorname{tg} 2x$
30	$\sin 2x + \arcsin^2 x + \operatorname{arctg} x^2$	$5x$

Задание 8*

Для функции $f(x) + g(x)$ при $x \rightarrow 0$ выделите главную часть вида Ax^k , используя данные, приведенные ниже.

Варианты

- 1) $f(x) = e^{7x} - e^{-2x}$; $g(x) = 5 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{2x} - 2x^2 + 3 \sin \frac{x}{2}$.
- 2) $f(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1} - 6 + e^{\operatorname{tg} x}$; $g(x) = 5 \operatorname{arctg} 4x - 2x^2 + 3 \sin \frac{x}{2}$.
- 3) $f(x) = 4 \ln(1 - \sqrt{x^7}) + \arcsin^3 x$; $g(x) = e^{8x} - 2^{x^2 - 3x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x^7}$.
- 4) $f(x) = 3^{x^2 - 2x + 1} - 3 + 5 \operatorname{arctg} 3x$; $g(x) = 1 - \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^3(x^4)} + 2 \sin 7x$.
- 5) $f(x) = e^{9x} + 5(9 - 3^{x^2 + 2}) - 1$; $g(x) = \arcsin^4 \sqrt[3]{x^9} + \ln(1 + 4x) + x$.
- 6) $f(x) = \log_2(1 + \operatorname{tg}^2 x^3)^5 + \sqrt{\sin 9x^3}$; $g(x) = e^{(x+1)^2 + 1} - e^2 + 6 \operatorname{tg}^3 x$.
- 7) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg}^2 x^3} - 1 - \ln(1 + 9x^7 - 8x^9)$; $g(x) = -e^{4x^7} + e^{3x^8} + 4x^3$.
- 8) $f(x) = 3 \operatorname{arctg} 4x^2 + 2 \sin x^2 \sqrt{x}$; $g(x) = \log_3(\cos x^3)^{-2} + 1 - 5^{2 \operatorname{arctg} x^3}$.
- 9) $f(x) = \sin^5(x^2) + 3 \operatorname{tg}^4\left(\frac{x^2}{5}\right)$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{\sqrt{x^3 - x^2 + 1}} - 2 + e^{\operatorname{tg} x^3}$.
- 10) $f(x) = \sqrt[4]{1 + 3x^5 + x^6} - 2 + e^{\sin^5 x}$; $g(x) = \arcsin x^7 + \ln(1 + 2 \arcsin \sqrt[3]{x})$.
- 11) $f(x) = -2x^5 + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; $g(x) = 7^{2x^2 - 3x + 1} - 8 + e^{\sin x} + \ln(1 + x + 8x^4)$.
- 12) $f(x) = 0,5 \cdot 2^{\sqrt{x^3 - x^2 + 1}} - 2 + e^{\sin x^3}$; $g(x) = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^4 - e^{-1} + e^{(x-1)^2 - 2}$.
- 13) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(3x^9)} + 1 - 1$; $g(x) = \sin 3x^{11} - \log_2(1 + 5x^{12}) + 5x^2$.
- 14) $f(x) = -3 + 3^{x^2 - x + 1} + \ln(1 + 2 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x})$; $g(x) = 2^{\sin x^3} - \sqrt[3]{1 + x^3 + 5x^5}$.
- 15) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg}^3(x^2)} - 1 + \sin^4 \sqrt[3]{x^8}$;
 $g(x) = 5 \ln(1 - \sqrt[3]{x^{10}}) + 4e^{\sin x^3} - (x - 2)^2$.

- 16) $f(x) = 5 \arcsin \sqrt[3]{x} - (2^{3x} - 1)^2$; $g(x) = x^3 + 4 \ln(1 - \sqrt{x^9}) + \operatorname{arctg}^3 x$.
- 17) $f(x) = \sqrt{1 + 5x^2 - 4x^3} - 2 + e^{x^5 - \sin^3 3x}$;
 $g(x) = 7^{2x^2 - 3x} + \ln(1 + x + 5x^2) - \cos 5x$.
- 18) $f(x) = 5 \arcsin \sqrt[3]{4x} + 8 \operatorname{tg}^3 \left(\frac{3x}{2} \right)$; $g(x) = \ln(1 - \sqrt{x} + x) - 2^{7x} + 1$.
- 19) $f(x) = 4^{x-x^2+1} + \sqrt[3]{1+x^2-3x^5} - 5$; $g(x) = 5 \sin x^2 \sqrt{x} - 8(3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^3}} - 1)$.
- 20) $f(x) = 7 \sin x^3 \sqrt{x} + \operatorname{arctg}(e^{x^7} - 1)$; $g(x) = \log_2(1 + \sin^2 x) - e^{x^3+3x^4} + 1$.
- 21) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{\sqrt{x^4+2x^5+1}} - 1 + 2 \arcsin^4(\sqrt{x^3})$; $g(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^3(x^4)} + 2x^3 - e^{3x^2+x}$.
- 22) $f(x) = 3^{x^2-2x} - e^{\sin^3 x}$; $g(x) = 4 \ln(1 + 2\sqrt{x} - x) - 8 \arcsin^3(x^2) + \operatorname{tg} 4x$.
- 23) $f(x) = \sqrt[4]{1+x-8x^2} - 1 + 5 \sin^5 \left(\frac{x}{4} \right)$; $g(x) = e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1+x+5x^2) - 2^{x^2}$.
- 24) $f(x) = \ln(2 - \cos(\sin x^2)) + \operatorname{arctg}(x^7)$; $g(x) = 3^{x^2+1} + e^{\sin^3 x} - 4 + 2 \sin 6x$.
- 25) $f(x) = -3 \sin^5 \left(\frac{x}{4} \right) + 4x^3$; $g(x) = \sqrt[6]{1-8x^2+4x^5} + \arcsin^2(x^3) - \cos 7x$.
- 26) $f(x) = \log_5(1 + \sin^2 x) - e^{4x^4} + 1$; $g(x) = e^{\sin 3x^3} + \operatorname{arctg}(x^4) - 3^{3 \arcsin x^5}$.
- 27) $f(x) = (x+1)^2 - e^{\operatorname{tg} 3x} + 4 \ln(1 + \sqrt[3]{x^7})$; $g(x) = 4^{x-x^2} - \sqrt[3]{1+x^2-3x^5}$.
- 28) $f(x) = e^{3x^4} - 2^{5 \operatorname{tg}^2(x^3)}$; $g(x) = \cos x + \sin^3(x^2) - e^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}}$.
- 29) $f(x) = e^{(x-2)^2-3} - e + \operatorname{arctg} x$; $g(x) = 5^{3x^2-2x} - e^{\sin x} + \ln(1+2x-3x^2)$.
- 30) $f(x) = -2 \log_3(\cos x^4) + 2x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{1+x^4-2x^5} - 1 + \arcsin^4 \left(\frac{x^9}{3} \right)$.

Задание 9

Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$, где $g(x)$ и $h(x)$ – функции из задания 7.

Задание 10*

Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции из задания 8*.

Исходя из полученного результата, определите, какое из следующих трех утверждений верно при $x \rightarrow 0$:

- 1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости;
- 2) $f(x) = o(g(x))$;
- 3) $g(x) = o(f(x))$.

Задание 11

1. Выясните, является ли указанная точка x_0 точкой разрыва или точкой непрерывности функции $f(x)$. В случае разрыва уточните его тип.

2. Исследуйте поведение функции $f(x)$ при $x_0 \rightarrow \infty$, вычислив $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, если они существуют.

Варианты

1) $f(x) = 2^{\frac{3}{x-5}}$, $x_0 = 5$.

2) $f(x) = \frac{1}{x + 3^{\frac{1}{3-x}}}$, $x_0 = 3$.

3) $f(x) = \arctg \frac{7}{x+2}$, $x_0 = -2$.

4) $f(x) = 5^{\frac{x}{1-x}}$, $x_0 = 1$.

5) $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$.

6) $f(x) = 27^{\frac{3}{x-5}}$, $x_0 = 5$.

7) $f(x) = 1 + 3^{\frac{1}{x-4}}$, $x_0 = 4$.

8) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{4}{x-1}$, $x_0 = 1$.

9) $f(x) = 4^{\frac{3}{1-3x}}$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

10) $f(x) = 3^{-\frac{1}{4x-1}} - 1$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

11) $f(x) = 9^{\frac{1}{x+2}}$, $x_0 = -2$.

12) $f(x) = \arctg \frac{x}{1-x}$, $x_0 = 1$.

13) $f(x) = e^{\frac{4}{2x+1}}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$.

14) $f(x) = -1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{1-5x}}}$, $x_0 = \frac{1}{5}$.

15) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{2x-1}$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

16) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$, $x_0 = -3$.

$$17) f(x) = \frac{3}{2^x - 1}, x_0 = 0.$$

$$18) f(x) = 8^{\frac{5}{x+2}}, x_0 = -2.$$

$$19) f(x) = \frac{1}{\arctg(x-1)}, x_0 = 1.$$

$$20) f(x) = 7^{\frac{2}{-x+2}}, x_0 = 2.$$

$$21) f(x) = \arctg \frac{2}{x-5}, x_0 = 5.$$

$$22) f(x) = 2 - 5^{\frac{x+1}{x}}, x_0 = 0.$$

$$23) f(x) = \frac{1}{3^x - 1}, x_0 = 0.$$

$$24) f(x) = \left(1 + 8^{\frac{1}{1-x}}\right)^{-1}, x_0 = 1.$$

$$25) f(x) = 5^{\frac{2}{3-x}}, x_0 = 3.$$

$$26) f(x) = 3 + \frac{1}{\frac{1}{1+7^{4x+1}}}, x_0 = -\frac{1}{4}.$$

$$27) f(x) = \frac{2}{\arctg x}, x_0 = 0.$$

$$28) f(x) = \frac{1}{\frac{1}{1+5^{1-x}}}, x_0 = 1.$$

$$29) f(x) = 9^{\frac{4x+1}{x}}, x_0 = 0.$$

$$30) f(x) = e^{\frac{3}{x-4}}, x_0 = 4.$$

Задание 12

Найдите точки разрыва функции и определите их тип. Постройте график функции.

Варианты

$$1) f(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ 1-x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq -1, \\ x, & \text{если } -1 < x \leq 2, \\ \ln(x-2), & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{если } x < 0, \\ \text{ctg } x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4-x, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, & \text{если } x < -1, \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < -1, \\ x+2, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1, & \text{если } x \leq 1, \\ \log_2(x-1), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ x+1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{если } x < 0, \\ 1 + \sqrt{2x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{2-x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 - 2x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ \lg(x-2), & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{2}{2-x}, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x+1}, & \text{если } x < -1, \\ \arcsin x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{если } x < -1, \\ -1-x, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 2x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \log_2(-x), & \text{если } x < 0, \\ 2(x-1)^2, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ 3-x, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \leq 0, \\ 1-x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} - 1, & \text{если } x < -2, \\ \sqrt{7-x}, & \text{если } -2 \leq x \leq 3, \\ 3(x-2), & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{если } x < -3, \\ \log_2(-x-1), & \text{если } -3 \leq x < -1, \\ x^2 - 2x, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} -(x+3), & \text{если } x \leq -2, \\ \frac{2}{x+2}, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2\sqrt{x+1}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{если } x \leq 0, \\ 2\sin x, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ 4-x, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ 1-x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ \ln x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$21) f(x) = \begin{cases} -(x+1), & \text{если } x < -1, \\ \arcsin x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{1-x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$22) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{если } x < 0, \\ 2x-x^2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ x+3, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} \lg(-x-2), & \text{если } x < -2, \\ x^2+2x, & \text{если } -2 \leq x < 0, \\ 3-2x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{если } x \leq 0, \\ x-\pi, & \text{если } 0 < x \leq \pi, \\ \frac{1}{x-\pi}, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+2}, & \text{если } x < -2, \\ -x^3, & \text{если } -2 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} 2 - (x+1)^2, & \text{если } x < 0, \\ e^x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x+1}{2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{если } x \leq -2, \\ 2(x+1)^2, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ \log_2 x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ x-1, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} -(x+3), & \text{если } x \leq -3, \\ -x^2 - 2x, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Задание 13*

При каком значении a функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 , если в некоторой окрестности этой точки $f(x)$ задана следующим образом:

Варианты

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\ln x}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}, & x \neq \frac{\pi}{4}, \\ a, & x = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}, & x \neq 2\pi, \\ a, & x = 2\pi, \end{cases} \quad x_0 = 2\pi;$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}, & x \neq 2, \\ a, & x = 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}, & x \neq \frac{\pi}{3}, \\ a, & x = \frac{\pi}{3}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{3};$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x - 9} - 1}, & x \neq 10, \\ a, & x = 10, \end{cases} \quad x_0 = 10;$$

$$10) f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3\sqrt{2+x+x^2} - 9}, & x \neq -2, \\ a, & x = -2, \end{cases} \quad x_0 = -2;$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}, & x \neq \pi, \\ a, & x = \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi;$$

$$13) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}, & x \neq \frac{\pi}{6}, \\ a, & x = \frac{\pi}{6}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$14) f(x) = \begin{cases} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}, & x \neq 3, \\ a, & x = 3, \end{cases} \quad x_0 = 3;$$

$$15) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos 2x}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2}, & x \neq \pi, \\ a, & x = \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi;$$

$$16) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}, & x \neq \pi, \\ a, & x = \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi;$$

$$17) f(x) = \begin{cases} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}, & x \neq \pi, \\ a, & x = \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi;$$

$$18) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$19) f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}, & x \neq 4, \\ a, & x = 4, \end{cases} \quad x_0 = 4;$$

$$20) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}, & x \neq 2, \\ a, & x = 2, \end{cases} \quad x_0 = 2;$$

$$21) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}, & x \neq 3, \\ a, & x = 3, \end{cases} \quad x_0 = 3;$$

$$22) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1} + 5}}{x^3 - 1}, & x \neq 1, \quad x_0 = 1; \\ a, & x = 1, \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}, & x \neq \pi, \quad x_0 = \pi; \\ a, & x = \pi, \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} \frac{(x - 2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}, & x \neq 2\pi, \quad x_0 = 2\pi; \\ a, & x = 2\pi, \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}, & x \neq 1, \quad x_0 = 1; \\ a, & x = 1, \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}, & x \neq \pi, \quad x_0 = \pi; \\ a, & x = \pi, \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} \frac{\lg \operatorname{tg} x}{\cos 2x}, & x \neq \frac{\pi}{4}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \\ a, & x = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}, & x \neq 1, \quad x_0 = 1; \\ a, & x = 1, \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos 2x}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2}, & x \neq \pi, \quad x_0 = \pi; \\ a, & x = \pi, \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}, & x \neq \pi, \quad x_0 = \pi. \\ a, & x = \pi, \end{cases}$$

3.2. Образцы решений заданий по теме «Введение в математический анализ»

Задание 1

Дана последовательность $x_n = \frac{n+11}{3n+5}$. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$.

Решение

В соответствии с определением, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой натуральный номер $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех членов последовательности x_n , номера которых $n > N$, будет выполняться неравенство $|x_n - A| = \left| \frac{n+11}{3n+5} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$.

Выясним, при каких n справедливо это неравенство. Для этого решим его относительно n , предварительно упростив подмодульное выражение:

$$\left| \frac{n+11}{3n+5} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3(n+11) - (3n+5)}{3 \cdot (3n+5)} \right| = \left| \frac{3n+33-3n-5}{3 \cdot (3n+5)} \right| = \left| \frac{28}{3 \cdot (3n+5)} \right| = \frac{28}{3 \cdot (3n+5)}.$$

Таким образом, выполняя равносильные преобразования неравенства, получаем

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{28}{3 \cdot (3n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{28}{3\varepsilon} < 3n+5 \Leftrightarrow \frac{28}{3\varepsilon} - 5 < 3n \Leftrightarrow n > \frac{28}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}.$$

Последнее неравенство означает, что в качестве искомого номера $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{28}{9\varepsilon} - \frac{5}{3}$, т. е. $N = \left[\frac{28}{9\varepsilon} - \frac{5}{3} \right]$.

Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности x_n с номерами $n > N$ будут удовлетворять неравенству $\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$, т. е. находиться от числа $A = \frac{1}{3}$ на расстоянии меньшем, чем ε .

Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+11}{3n+5} = \frac{1}{3}$.

Задание 2*

Для последовательности $x_n = \frac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2}$ подберите такие значения a и b , при которых $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ равен: а) 0; б) ∞ ; в) заданному числу $k = \frac{4}{3}$.

Затем докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

Решение

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2} = 0.$$

Это равенство будет верным, если $a = 0$, при этом b может быть любым числом, отличным от 0. Возьмем $a = 0$, $b = 1$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 4}{n^2 + 2} = 0$.

Докажем справедливость этого равенства в соответствии с определением предела числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n| < \varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение

$$|x_n| = \left| \frac{7n - 4}{n^2 + 2} \right| = \frac{7n - 4}{n^2 + 2} \quad (|7n - 4| = 7n - 4, \text{ поскольку } 7n - 4 > 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}).$$

Остается лишь указать такой натуральный номер $N(\varepsilon)$, чтобы неравенство $\frac{7n - 4}{n^2 + 2} < \varepsilon$ выполнялось для любого натурального $n > N(\varepsilon)$.

Найдем этот номер $N(\varepsilon)$, решая относительно n неравенство

$$\frac{7n - 4}{n^2 + 2} < \varepsilon \Leftrightarrow 7n - 4 < \varepsilon n^2 + 2\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n^2 - 7n + (4 + 2\varepsilon) > 0.$$

$$D = 49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon).$$

Очевидно, что $D > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и неравенство будет выполняться для

$$n \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon)}}{2\varepsilon} \right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon)}}{2\varepsilon}; +\infty \right).$$

Поскольку $n \in \mathbb{N}$, то $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 4\varepsilon(4 + 2\varepsilon)}}{2\varepsilon} \right\rceil$, что и требовалось

доказать.

Можно решить эту задачу по-другому, используя следующее замечание. Чтобы доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, нужно, взяв $\forall \varepsilon > 0$, указать номер N такой,

что неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ выполняется, как только $n > N$. Такой номер определяется неоднозначно, поэтому необязательно находить наименьшее возможное значение этого номера. Достаточно указать любой номер N , который гарантирует выполнение неравенства $|x_n - A| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Отмеченный факт позволяет найти искомым номер N .

В силу очевидных неравенств $7n-4 < 7n$, $n^2 \geq n^2$ получаем $|x_n - 0| = \frac{7n-4}{n^2+2} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и решим более сильное неравенство $\frac{7}{n} < \varepsilon$. Отсюда $n > \frac{7}{\varepsilon}$ и искомым номером тогда будет $N = \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} \right\rceil$. Поскольку $|x_n - 0| < \frac{7}{n} < \varepsilon$ при любом $n > N$, то в соответствии с определением это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Для наглядности возьмем, например, $\varepsilon = 0,01$. Тогда $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{7}{0,01} \right\rceil = 700$.

Это означает, что все члены последовательности x_n , начиная с номера 701, будут находиться в интервале $(-0,01; 0,01)$, т. е. в ε -окрестности радиусом 0,01 предела $A = 0$.

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2} = \infty.$$

Это равенство будет верным, если $b = 0$, при этом a может быть любым числом, отличным от 0. Возьмем $b = 0$, $a = 1$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n - 4}{2} = \infty$.

Покажем по определению, что последовательность $x_n = \frac{1}{2}(n^2 + 7n - 4)$ будет бесконечно большой. Это означает, что для любого сколь угодно большого положительного числа A существует номер N , зависящий от этого числа A , такой, что для всех членов последовательности x_n с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$ (или символически: $\forall A > 0 \exists N = N(A): \forall n > N \Rightarrow |x_n| > A$).

Зададим произвольное сколь угодно большое число $A > 0$ и запишем неравенство $|x_n| > A$. В нашем случае $\left| \frac{n^2 + 7n - 4}{2} \right| > A$.

Поскольку $n^2 + 7n - 4 \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\left| \frac{n^2 + 7n - 4}{2} \right| = \frac{n^2 + 7n - 4}{2}$, поэтому

$$\left| \frac{n^2 + 7n - 4}{2} \right| > A \Leftrightarrow n^2 + 7n - (4 + 2A) > 0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена $D = 49 + 4(4 + 2A) = 65 + 8A > 0$, поэтому

$$n \in \left(-\infty; \frac{-7 - \sqrt{65 + 8A}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{65 + 8A} - 7}{2}; +\infty \right).$$

Но так как $n \geq 1$, то $N(A) = \left\lceil \frac{\sqrt{65 + 8A} - 7}{2} \right\rceil$.

Поскольку для $\forall A > 0$ указан такой номер $N(A)$, что для всех $n > N(A)$ выполняется неравенство $|x_n| > A$, то в соответствии с определением это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 7n - 4}{bn^2 + 2} = \frac{4}{3}$.

Это равенство справедливо при условии $a:b = 4:3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a = 4k, b = 3k, k \neq 0$. Например, при $a = 4, b = 3$ равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 7n - 4}{3n^2 + 2} = \frac{4}{3} \text{ верно.}$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству, приведенному в задании 1.

$$\left| x_n - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{4n^2 + 7n - 4}{3n^2 + 2} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{21n - 20}{3(3n^2 + 2)} \right| = \frac{21n - 20}{9n^2 + 6} \quad (21n - 20 > 0 \text{ для } n \in \mathbb{N}).$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $\left| x_n - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{21n - 20}{9n^2 + 6} < \varepsilon$.

Поскольку $21n - 20 < 21n$, $9n^2 + 6 > 9n^2$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\frac{21n - 20}{9n^2 + 6} < \frac{21n}{9n^2} = \frac{7}{3n}$, при этом $\frac{7}{3n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{3\varepsilon} \Rightarrow N = \left\lceil \frac{7}{3\varepsilon} \right\rceil$.

В результате для $\forall \varepsilon > 0$ указан такой номер $N = \left\lceil \frac{7}{3\varepsilon} \right\rceil$, что неравенство

$$\left| x_n - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon \text{ выполняется для всех } n > N. \text{ В соответствии с определением}$$

предела последовательности это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{4}{3}$.

Задание 3

Среди приведенных ниже последовательностей a_n выберите последовательности с указанными свойствами: а) возрастающие; б) убывающие; в) не являющиеся монотонными; г) ограниченные только снизу; д) ограниченные; е) бесконечно малые; ж) бесконечно большие.

$\frac{(-1)^n}{7n}$	5^{-n}	$n^2 + 8$	$\frac{n}{n+1}$
---------------------	----------	-----------	-----------------

Решение

Рассмотрим каждую из последовательностей.

$$1) a_n = \frac{(-1)^n}{7n}.$$

Последовательность $\left\{ \frac{(-1)^n}{7n} \right\} = \left\{ -\frac{1}{7}, \frac{1}{14}, -\frac{1}{21}, \frac{1}{28}, \dots \right\}$ не является

монотонной, так как $a_1 < a_2$, но $a_2 > a_3$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{7n} = 0$, то a_n – бесконечно малая последовательность, которая является сходящейся, а следовательно, ограниченной: $-\frac{1}{7} \leq a_n \leq \frac{1}{14}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$2) a_n = 5^{-n}.$$

Очевидно, что $\{5^{-n}\} = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots \right\}$ – убывающая

последовательность, так как $a_n = \frac{1}{5^n} > a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{\infty} = 0$, то она является бесконечно малой. Сходящаяся, монотонно убывающая последовательность a_n всегда ограничена: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. В нашем

случае $0 < a_n \leq \frac{1}{5}$.

$$3) a_n = n^2 + 8.$$

$\{n^2 + 8\} = \{9, 12, 17, 24, \dots\}$ – возрастающая, ограниченная снизу последовательность, так как $a_n \geq 9$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 8) = \infty$, то a_n – бесконечно большая последовательность.

$$4) a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$ является возрастающей,

так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{(n^2+2n)+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Данная последовательность ограничена снизу своим первым членом $a_1 = \frac{1}{2}$.

Так как $a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, то a_n также ограничена сверху числом 1,

т. е. a_n является ограниченной последовательностью.

Ответ: а) $\{n^2 + 8\}$; б) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; в) $\{5^{-n}\}$; г) $\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\}$; д) $\{n^2 + 8\}$;

е) $\{5^{-n}\}$; ж) $\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\}$; з) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; и) $\left\{\frac{(-1)^n}{7n}\right\}$; к) $\{5^{-n}\}$; л) $\{n^2 + 8\}$.

Задание 4

Вычислите:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, если: а) $a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}$; б) $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{(2n-1)!}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, если: а) $a_n = 4^n \cdot \left(\frac{9n+1}{3n-2}\right)^{3n-1} \cdot 7n$;

б) $a_n = \arccos^n \frac{6n^3 - 2n}{5n^2 - 12n^3}$.

Решение

1) а) Запишем $(n+1)$ -й член последовательности:

$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)(4n+2)} = a_n \cdot \frac{3n+4}{4n+2}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{3n+4}{4n+2} \cdot \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4};$$

б) так как $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2(n+1)-1)!} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+1)!}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (2n-1)!}{(2n+1)! \cdot 3^n \cdot n!} = \\ &= \left[\begin{array}{l} n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \\ (n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1), \\ (2n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1), \\ (2n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1) = (2n-1)! \cdot 2n \cdot (2n+1) \end{array} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1)}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot (2n+1)} \cdot \frac{(2n-1)!}{3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (n+1)}{2n \cdot (2n+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4n} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: а) $\frac{3}{4}$; б) 0.

$$\begin{aligned} 2) \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n \cdot \left(\frac{9n+1}{3n-2} \right)^{3n-1} \cdot 7n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{9n+1}{3n-2} \right)^{\frac{3n-1}{n}} \cdot \sqrt[n]{7n} = \\ &= 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n+1}{3n-2} \right)^{3-\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{7} \cdot \sqrt[n]{n} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Используем эталонные пределы: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = a^b, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{array} \right] = \\ &= 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n+1}{3n-2} \right)^{3-\frac{1}{n}} \cdot 1 \cdot 1 = \left[\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n+1}{3n-2} = \frac{9}{3} = 3, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3 - 0 = 3 \end{array} \right] = 4 \cdot 3^3 = 108; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arccos^n \frac{6n^3 - 2n}{5n^2 - 12n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{6n^3 - 2n}{5n^2 - 12n^3} = \\ &= \arccos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 2n}{5n^2 - 12n^3} \right) = \arccos \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{6n^3}{-12n^3} = \\ &= \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: а) 108; б) $\frac{2\pi}{3}$.

Задание 5*

Даны последовательности:

$$1) x_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n+3)}{n+1} - \frac{2n-1}{2}; \quad 2) y_n = \left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1} \right)^{2n^3-3};$$

$$3) z_n = \frac{(n-1)! - n(n-4)!}{(n-2)! - (n-3)!}.$$

Для каждой последовательности найдите предел при $n \rightarrow \infty$ и укажите, является ли последовательность сходящейся (расходящейся); бесконечно малой (бесконечно большой); ни той, ни другой; ограниченной (неограниченной).

Решение

1) Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Заметим, что $1+3+5+\dots+(2n+3)$ – сумма членов арифметической прогрессии, первый член которой $a_1=1$, последний член $2n+3 = a_{n+2}$, $d=2$.

Вспользуемся формулой $S_k = \frac{a_1+a_k}{2} \cdot k$ суммы k первых членов арифметической прогрессии. В соответствии с этой формулой

$1+3+5+\dots+(2n+3) = \frac{1+2n+3}{2} \cdot (n+2)$, тогда

$$x_n = \frac{\frac{1+2n+3}{2} \cdot (n+2)}{n+1} - \frac{2n-1}{2} = \frac{2(n+2)^2 - (2n-1)(n+1)}{2(n+1)} = \frac{7n+9}{2(n+1)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+9}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+\frac{9}{n}}{2+\frac{2}{n}} = \frac{7+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n}}{2+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}} = \frac{7}{2}.$$

Таким образом, x_n – сходящаяся, а значит, ограниченная последовательность.

Ответ: Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{7}{2}$, то x_n – сходящаяся, ограниченная последовательность, которая не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой.

2) Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+5n-2}{7n^2+5n+1} \right)^{2n^3-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{v_n}.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 5n - 2}{7n^2 + 5n + 1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - 3) = \infty$, то исходный предел содержит неопределенность вида (1^∞) . Этот вид неопределенности раскрывается с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{или} \quad \lim_{f(n) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e.$$

Воспользуемся этим фактом для вычисления данного предела:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 5n - 2}{7n^2 + 5n + 1}\right)^{2n^3 - 3} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{7n^2 + 5n - 2}{7n^2 + 5n + 1} - 1\right)\right)^{2n^3 - 3} = \\ &= \left[\frac{7n^2 + 5n - 2}{7n^2 + 5n + 1} - 1 = \frac{-3}{7n^2 + 5n + 1} \rightarrow -\infty\right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{7n^2 + 5n + 1}\right)^{\frac{7n^2 + 5n + 1}{-3} \cdot (2n^3 - 3)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3(2n^3 - 3)}{7n^2 + 5n + 1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^3}{7n^2}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n}{7}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, то y_n – бесконечно малая, а значит, сходящаяся и ограниченная последовательность.

3) Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - n(n-4)!}{(n-2)! - (n-3)!}.$$

В каждом из слагаемых в выражении для z_n выделим множитель $(n-4)!$, а затем сократим дробь на общий множитель:

$$(n-1)! = (n-4)!(n-3)(n-2)(n-1),$$

$$(n-2)! = (n-4)!(n-3)(n-2),$$

$$(n-3)! = (n-4)!(n-3), \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{(n-1)! - n(n-4)!}{(n-2)! - (n-3)!} = \frac{(n-4)!(n-3)(n-2)(n-1) - n(n-4)!}{(n-4)!(n-3)(n-2) - (n-4)!(n-3)} = \\ &= \frac{(n-4)!((n-3)(n-2)(n-1) - n)}{(n-4)!(n-3)(n-2-1)} = \frac{(n-4)!((n-3)(n-2)(n-1) - n)}{(n-4)!(n-3)^2} = \\ &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1) - n}{(n-3)^2}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(n-2)(n-1) - n}{(n-3)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Ответ: Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, то z_n – бесконечно большая, а значит, расходящаяся и неограниченная числовая последовательность.

Задание 6

Найдите пределы функций.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{2x^3}{4x^2+3} \right).$$

Решение

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{4x^2+3} = \infty$, то под знаком искомого предела содержится неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Для раскрытия этой неопределенности приведем дроби к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{2x^3}{4x^2+3} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(4x^2+3) - 2x^3(2x-1)}{(2x-1)(4x^2+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 3x^2 - 4x^4 + 2x^3}{(2x-1)(4x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2}{(2x-1)(4x^2+3)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{2x \cdot 4x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 \sqrt{5}x}.$$

Решение

Подставляя $x=0$ в функцию, стоящую под знаком искомого предела, получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0} \right)$.

$$\text{Так как } 1 - \cos 3x = 2 \sin^2 \left(\frac{3}{2}x \right), \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 \sqrt{5}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{3}{2}x \right)}{\sin^2 \sqrt{5}x}.$$

Заменим бесконечно малые функции $\sin^2 \left(\frac{3}{2}x \right)$ и $\sin^2 \sqrt{5}x$ эквивалентными им функциями при $x \rightarrow 0$:

$$\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) = \left(\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)^2 \sim \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{9x^2}{4},$$

$$\sin^2 \sqrt{5}x = (\sin \sqrt{5}x)^2 \sim (\sqrt{5}x)^2 = 5x^2.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 \sqrt{5}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{5x^2} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

Ответ: 1,8.

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{4x^2 - 7x - 2}.$$

Решение

Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (8 - x^3) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 7x - 2) = 0$, то искомый предел содержит неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Число $x = 2$ является корнем как числителя $8 - x^3$, так и знаменателя $4x^2 - 7x - 2$. Разложим эти многочлены на множители. Используя формулу «разность кубов», получим $8 - x^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$. Используя разложение квадратного трехчлена $4x^2 - 7x - 2$ с корнями $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{1}{4}$, получим

$$4x^2 - 7x - 2 = 4(x - 2)\left(x + \frac{1}{4}\right) = (x - 2)(4x + 1), \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{4x^2 - 7x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(4x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{4x + 1} = \\ &= - \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{4 \cdot 2 + 1} = - \frac{12}{9} = - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x + 7}}.$$

Решение

Подставляя $x = 2$ в функцию, стоящую под знаком предела, получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности числитель

разложим на множители: $2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1)$. Затем

умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7}$, сопряженное знаменателю. В результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7})}{(2x+5) - (x+7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+7}) = \\ &= (2 \cdot 2 - 1)(\sqrt{9} + \sqrt{9}) = 3 \cdot 6 = 18. \end{aligned}$$

Ответ: 18.

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{4}.$$

Решение

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{4} = \infty$, то под знаком предела содержится неопределенность $(0 \cdot \infty)$.

Сделаем замену переменной $x-2 = u$, откуда $x = u+2$. Очевидно, что $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 2$. Получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{4} &= \lim_{u \rightarrow 0} (-u) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4}(u+2) \right) = - \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4}u + \frac{3}{2}\pi \right) = \\ &= - \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \left(-\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}u \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} \frac{3\pi u}{4}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\operatorname{tg} \frac{3\pi u}{4} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{3\pi u}{4} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{3\pi u}{4}} = \frac{4}{3\pi}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3\pi}$.

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+4} \right)^{4+9x}.$$

Решение

Данный предел содержит неопределенность вида (1^∞) , так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{3x+4} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (4+9x) = \infty$. Для раскрытия неопределенности будем

использовать второй замечательный предел $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha = e$.

Сначала преобразуем выражение $\frac{3x+2}{3x+4}$ к виду $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4-2}{3x+4} \right)^{4+9x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{3x+4} \right)^{4+9x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+4}{-2}} \right)^{4+9x}.$$

Затем, домножив показатель степени на две взаимно обратные дроби $\alpha = \frac{3x+4}{-2}$ и $\frac{1}{\alpha} = \frac{-2}{3x+4}$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3x+4}{-2}} \right)^{\frac{3x+4}{-2}} \right)^{\frac{-2}{3x+4} \cdot (4+9x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+4}{-2}} \right)^{\frac{3x+4}{-2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(4+9x)}{3x+4}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(4+9x)}{3x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-18x-8}{3x+4}} = e^{-\frac{18}{3}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{e^6}$.

7) $\lim_{x \rightarrow -\pi} (\cos 4x)^{\frac{2}{x \sin 6x}}$.

Решение

Поскольку $\lim_{x \rightarrow -\pi} \cos 4x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\pi} x \sin 6x = 0$, то $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{2}{x \sin 6x} = \infty$, а значит, искомый предел содержит неопределенность вида (1^∞) , которая раскрывается с помощью второго замечательного предела.

Чтобы привести данный предел к стандартному для второго замечательного предела виду $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1^\infty) = e$, сделаем замену переменной:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi} (\cos 4x)^{\frac{2}{x \sin 6x}} &= \left[\begin{array}{l} x + \pi = u, \quad x = u - \pi, \\ u \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\pi, \\ \cos 4x = \cos 4(u - \pi) = \cos 4u, \\ \sin 6x = \sin 6(u - \pi) = \sin 6u \end{array} \right] = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} (\cos 4u)^{\frac{2}{(u-\pi) \sin 6u}} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + (\cos 4u - 1))^{\frac{2}{(u-\pi) \sin 6u}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ (\cos u - 1) \rightarrow 0}} \left(\left((1 + (\cos 4u - 1))^{\frac{1}{\cos 4u - 1}} \right)^{\cos 4u - 1} \right)^{\frac{2}{(u - \pi) \sin 6u}} = A.$$

Так как $\cos 4u - 1 \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$, то $\lim_{u \rightarrow 0} (1 + (\cos 4u - 1))^{\frac{1}{\cos 4u - 1}} = e$.

Тогда

$$A = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\cos 4u - 1) \cdot 2}{(u - \pi) \sin 6u}} = \left[\begin{array}{l} 1 - \cos 4u \sim \frac{(4u)^2}{2} \\ \sin 6u \sim 6u \end{array} \right]_{u \rightarrow 0} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{16u^2}{3u(u - \pi)}} = e^{-\frac{8}{3} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u - \pi}} = e^{-\frac{8}{3} \cdot 0} = 1.$$

Ответ: 1.

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{x^2 + 3}.$$

Решение

Так как $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 2}{11x + 3} \right)^{1 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 2}{11x + 3} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 5x)} = \left(\frac{7}{11} \right)^{+\infty} = 0.$$

Ответ: 0.

Задание 7

Выделите главную часть функции $f(x) = 2 \sin 5 \sqrt[3]{x} + \ln(1 + 3x^2) + \sqrt[3]{x}$ вида Ax^k при $x \rightarrow 0$.

Решение

При решении задания будем опираться на следующие известные факты.

1) Главной частью бесконечно малой функции $f(x)$ в точке x_0 называется эквивалентная ей степенная функция $A(x-x_0)^n$ (таким образом, $f(x) \sim A(x-x_0)^n$ при $x \rightarrow x_0$ равносильно условию $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{A(x-x_0)^n} = 1$).

2) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции в точке x_0 , причем $\alpha(x)$ имеет меньший порядок малости по сравнению с $\beta(x)$, то $\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

3) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = C$, где $C \neq 0$, $C \neq \infty$, то $g(x) \sim C$ при $x \rightarrow x_0$.

4) Если в точке x_0 $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$, то $f(x) \cdot g(x) \sim f_1(x) \cdot g_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

В нашем случае функции $2 \sin 5\sqrt[3]{x}$, $\ln(1+3x^2)$, $\sqrt[3]{x}$ являются бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow 0$. Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых величин: $2 \sin 5\sqrt[3]{x} \sim 10\sqrt[3]{x}$, $\ln(1+3x^2) \sim 3x^2$. Тогда при $x \rightarrow 0$ $f(x) \sim 10\sqrt[3]{x} + 3x^2 + \sqrt[3]{x} \sim 11\sqrt[3]{x}$, т. е. главная часть функции $f(x)$ равна $11\sqrt[3]{x}$.

Ответ: $11\sqrt[3]{x}$.

Задание 8*

Выделите главную часть функции $f(x)$ вида Ax^k при $x \rightarrow 0$, если $f(x) = 4 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x} + 9 \sin(x^3) \cdot \cos(x^6) + x^2 \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{3}\right)$.

Решение

При решении задания будем руководствоваться известными фактами, приведенными в решении задания 7. Обозначим $g_1(x) = 4 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x}$, $g_2(x) = 9 \sin(x^3) \cdot \cos(x^6)$, $g_3(x) = x^2 \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{3}\right)$. В соответствии с условием задачи $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.

Все эти функции являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Найдем для каждой из них главную часть степенного вида Ax^k .

Начнем с $g_1(x) = 4 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x}$. Обозначим $u = \sqrt{x}$. Так как $\operatorname{arctg} u \sim u$ при $u \rightarrow 0$, то $\operatorname{arctg}^3 u \sim u^3$. Значит $g_1(x) \sim 4u^3 = 4 \cdot (\sqrt{x})^3 = 4x^{\frac{3}{2}}$.

Перейдем к $g_2(x) = 9 \sin(x^3) \cdot \cos(x^6)$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^6) = 1$, при $x \rightarrow 0$ $\sin(x^3) \sim x^3$, то $g_2(x) \sim 9 \cdot x^3 \cdot 1 = 9x^3$.

И наконец, $g_3(x) = x^2 \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{3}\right)$. Поскольку $\operatorname{tg} \frac{x}{3} \sim \frac{x}{3}$ при $x \rightarrow 0$, то $g_3(x) \sim x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{x^5}{27}$.

Значит, при $x \rightarrow 0$ $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) \sim 4x^{\frac{3}{2}} + 9x^3 + \frac{1}{27}x^5 \sim 4x^{\frac{3}{2}}$, т. е. $Ax^k = 4x^{\frac{3}{2}}$ – главная часть функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

Ответ: $4x^{\frac{3}{2}}$.

Задание 9*

Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{1-7x^2} + e^{\operatorname{tg}^2 x^2} - 5 + 3 \arcsin(4x^2)}{2^{\sin^3 x} - 2 + \sqrt[3]{1+x^3} - 2x^4 + \log_2(\cos^{-2} x)}$.

Решение

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, то под знаком предела имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых величин, выделим главные части функций $f(x)$ и $g(x)$ степенного вида Ax^k и Bx^n .

$$\begin{aligned} f(x) &= 4^{1-7x^2} + e^{\operatorname{tg}^2 x^2} - 5 + 3 \arcsin(4x^2) = \\ &= 4 \cdot 4^{-7x^2} + e^{\operatorname{tg}^2 x^2} - 4 - 1 + 3 \arcsin(4x^2) = \\ &= (4 \cdot 4^{-7x^2} - 4) + (e^{\operatorname{tg}^2 x^2} - 1) + 3 \arcsin(4x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 4(4^{-7x^2} - 1) + \operatorname{tg}^2(x^2) + 3 \cdot 4x^2 \sim \\ &\sim 4 \cdot (-7x^2) \ln 4 + (x^2)^2 + 12x^2 = 4(3 - 7 \ln 4)x^2 + x^4 \sim 4(3 - 7 \ln 4)x^2. \end{aligned}$$

Итак, $f(x) \sim 4(3 - 7 \ln 4)x^2$ при $x \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2^{\sin^3 x} - 2 + \sqrt[3]{1+x^3} - 2x^4 + \log_2(\cos^{-2} x) = \\ &= (2^{\sin^3 x} - 1) + (\sqrt[3]{1+(x^3 - 2x^4)} - 1) - 2 \log_2(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \end{aligned}$$

$$\sim \sin^3 x \cdot \ln 2 + \frac{1}{3}(x^3 - 2x^4) - 2 \log_2(1 + (\cos x - 1)) \sim x^3 \ln 2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2(\cos x - 1)}{\ln 2} =$$

$$= x^3 \left(\ln 2 + \frac{1}{3} \right) + \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2}}{\ln 2} \sim x^3 \left(\ln 2 + \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{\ln 2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 \sim \frac{x^2}{\ln 2} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Итак, $g(x) \sim x^2 / \ln 2$.

Окончательно получаем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(3 - 7 \ln 4)x^2}{x^2 / \ln 2} = 4(3 - 7 \ln 4) \ln 2$.

Ответ: $4(3 - 7 \ln 4) \ln 2$.

Задание 10*

Определите, какое из следующих трех утверждений верно при $x \rightarrow 0$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ из задания 9*:

- 1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости;
- 2) $f(x) = o(g(x))$;
- 3) $g(x) = o(f(x))$.

Решение

Ответы на вопросы 1)–3) можно дать исходя из следующих известных определений.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, тогда говорят, что:

1) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции одного порядка в окрестности точки x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$;

2) $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (это обозначают $\alpha(x) = o(\beta(x))$), если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$;

3) $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x)$ (это обозначают $\beta(x) = o(\alpha(x))$), если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Как следует из решения задания 9*, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 4(3 - 7 \ln 4) \ln 2 \neq 0$, тогда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые

функции одинакового порядка малости. Поскольку при $x \rightarrow 0$ $f(x) \sim A \cdot x^2$,

где $A = 4(3 - 7 \ln 4)$, $g(x) \sim B \cdot x^2$, где $B = \frac{1}{\ln 2}$, то $k = 2$ – общий порядок малости функций $f(x)$ и $g(x)$.

Ответ: $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости.

Задание 11

1. Выясните, является ли точка $x_0 = 1$ точкой разрыва или точкой непрерывности функции $f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-1}} - 3}{\frac{1}{5^{x-1}} + 1}$. В случае разрыва уточните его тип.

2. Исследуйте поведение функции $f(x) = e^{3x+2}$ на бесконечности, вычислив $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Решение

1. Вычислим левый предел функции в точке $x_0 = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{5^{\frac{1}{x-1}} - 3}{\frac{1}{5^{x-1}} + 1} = \frac{5^{1-0-1} - 3}{\frac{1}{5^{1-0-1}} + 1} = \frac{5^{-0} - 3}{\frac{1}{5^{-0}} + 1} = \frac{5^{-\infty} - 3}{\frac{1}{5^{-\infty}} + 1} = \frac{\frac{1}{\infty} - 3}{\frac{1}{0} + 1} = \frac{0 - 3}{0 + 1} = -3.$$

Вычислим правый предел функции в точке $x_0 = 1$:

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{5^{\frac{1}{x-1}} - 3}{\frac{1}{5^{x-1}} + 1} = \frac{5^{1+0-1} - 3}{\frac{1}{5^{1+0-1}} + 1} = \frac{5^0 - 3}{\frac{1}{5^0} + 1} = \frac{5^{+\infty} - 3}{5^{+\infty} + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{5^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{3}{5^{\frac{1}{x-1}}} \right)}{5^{\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{1}{5^{\frac{1}{x-1}}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1 - \frac{3}{5^{\frac{1}{x-1}}}}{1 + \frac{1}{5^{\frac{1}{x-1}}}} = \frac{1 - \frac{3}{5^{+\infty}}}{1 + \frac{1}{5^{+\infty}}} = \frac{1 - \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Так как полученные односторонние пределы конечны, но различны, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва I рода (точкой конечного скачка).

2. Исследуем поведение функции $f(x) = e^{3x+2}$ при $x \rightarrow \infty$. Для этого вычислим $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x+2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x+2} = e^{+\infty} = \infty.$$

Ответ: 1. Точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва I рода. 2. При $x \rightarrow -\infty$ функция является бесконечно малой, при $x \rightarrow +\infty$ – бесконечно большой.

Задание 12

Найдите точки разрыва функции $y = f(x)$ и определите их тип. Постройте график функции.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ -\operatorname{ctg} x, & \text{если } x \in (0; \frac{\pi}{2}], \\ \frac{3\pi - 2x}{8}, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

Очевидно, что область определения данной функции $D(f) = \mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}; +\infty)$, так как на каждом из них она является

элементарной. Точки «стыка» $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ могут быть точками разрыва.

Исследуем поведение функции в этих точках.

Вычислим односторонние пределы в точке $x = 0$:

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \sqrt{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (-\operatorname{ctg} x) = -\infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то $x = 0$ является точкой разрыва II рода.

Вычислим односторонние пределы в точке $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (-\operatorname{ctg} x) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \left(\frac{3\pi - 2x}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Так как односторонние пределы конечны, но различны, точка $x = \frac{\pi}{2}$ является точкой разрыва I рода.

График заданной функции изображен на рис. 27.

Ответ: $x = 0$ – точка разрыва II рода; $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва I рода.

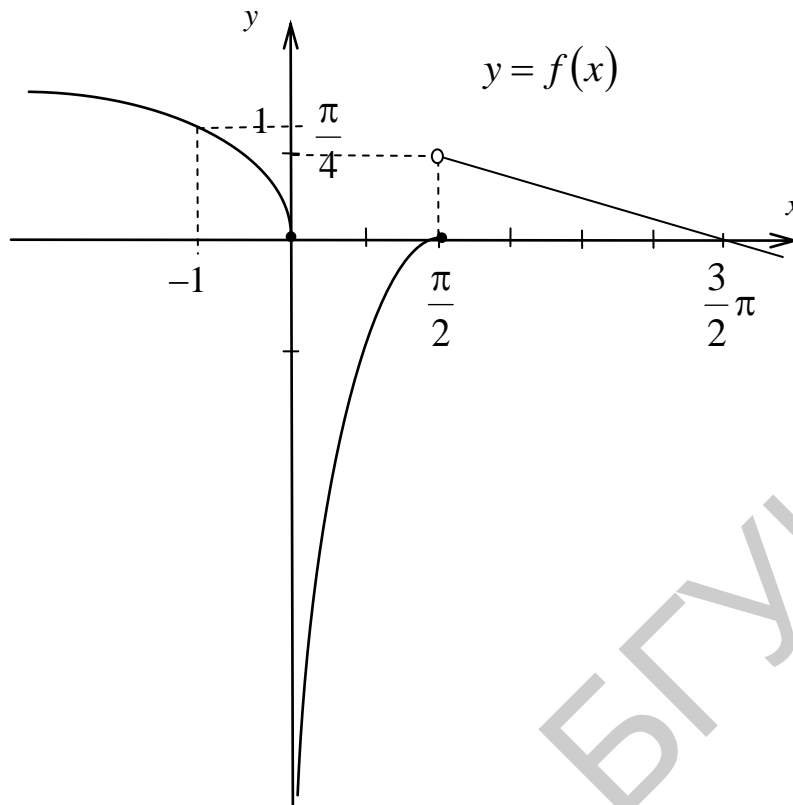


Рис. 27

Задание 13*

В некоторой окрестности точки $x = 1$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3x-2)}{e^{\sin \pi x} - 1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1. \end{cases}$$

При каком значении a функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 1$?

Решение

Функция, определенная в точке $x = 1$ и некоторой ее окрестности, будет непрерывной в этой точке, если $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Вычислим $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x-2)}{e^{\sin \pi x} - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\begin{array}{l} u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1, \\ u \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 1, \\ \ln(3x-2) = \ln(3u+1) \sim 3u \text{ при } u \rightarrow 0, \\ e^{\sin \pi x} - 1 = e^{\sin(\pi u + \pi)} - 1 = e^{-\sin \pi u} - 1 \sim -\pi u \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3u}{-\pi u} = -\frac{3}{\pi}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{3}{\pi}$, то непрерывность функции в точке $x=1$ обеспечивается следующим условием: значение функции в точке $x=1$ равно пределу функции в этой же точке. Поскольку $f(1) = a$ (условие задачи), $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{3}{\pi}$, то должно выполняться равенство $a = -\frac{3}{\pi}$.

Ответ: $a = -\frac{3}{\pi}$.

Библиотека БГУИР

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. Задания по теме

«Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения»

Задание 1

а) Используя определение производной, найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

б)* Проверьте, дифференцируема ли функция $f(x)$ в точке x_0 . Если она дифференцируема, то найдите $f'(x_0)$. Постройте график функции $y = f(x)$.

Варианты

$$1) \quad \text{а) } f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(5x \cos \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -4x - 13, & \text{если } x < -4, \\ x^2 + 4x + 3, & \text{если } x \geq -4, \end{cases} \quad x_0 = -4.$$

$$2) \quad \text{а) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x < 0, \\ -x^2 + 2x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$3) \quad \text{а) } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{3}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & \text{если } x \leq 3, \\ 6 - 2x, & \text{если } x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3.$$

$$4) \quad \text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(5 - 2x), & \text{если } x < 1, \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3, & \text{если } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

5) а) $f(x) = \begin{cases} 3x - x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 3x + 12, & \text{если } x \leq -4, \\ 4 - \frac{1}{4}x^2, & \text{если } x > -4, \end{cases} \quad x_0 = -4.$

6) а) $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{3}{2x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x + 2, & \text{если } x \leq 1, \\ 4 - x, & \text{если } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

7) а) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{4}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5, & \text{если } x < 6, \\ 2x - 7, & \text{если } x \geq 6, \end{cases} \quad x_0 = 6.$

8) а) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{9}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x - 8, & \text{если } x < 0, \\ 16x - 4x^2 - 8, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

9) а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \sin \frac{3}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 8x - 20, & \text{если } x < 3, \\ 32x - 4x^2 - 56, & \text{если } x \geq 3, \end{cases} \quad x_0 = 3.$

10) а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccos}\left(x^2 \sin \frac{3}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8, & \text{если } x \leq -1, \\ x + 4, & \text{если } x > -1, \end{cases} \quad x_0 = -1.$

$$\begin{aligned}
11) \quad \text{а) } f(x) &= \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \sin \frac{1}{8x^2}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases} \\
\quad \text{б) } f(x) &= \begin{cases} -2x^2 - 4x + 2, & \text{если } x < 0, \\ 2 - 4x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0. \\
12) \quad \text{а) } f(x) &= \begin{cases} 2x + x^2 \cos \frac{3}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \\
\quad \text{б) } f(x) &= \begin{cases} 2x - \frac{1}{2}x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ -2x, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0. \\
13) \quad \text{а) } f(x) &= \begin{cases} \sin\left(x^2 \sin \frac{7}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \\
\quad \text{б) } f(x) &= \begin{cases} -x^2 + 6x - 6, & \text{если } x < 4, \\ 14 - 3x, & \text{если } x \geq 4, \end{cases} \quad x_0 = 4. \\
14) \quad \text{а) } f(x) &= \begin{cases} \sin\left(x^2 \cos \frac{3}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \\
\quad \text{б) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x, & \text{если } x \leq 3, \\ x - 4,5, & \text{если } x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3. \\
15) \quad \text{а) } f(x) &= \begin{cases} \sin\left(x \sin \frac{3}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \\
\quad \text{б) } f(x) &= \begin{cases} 4x - \frac{1}{2}x^2 + 1, & \text{если } x \leq 3, \\ 10 - 2x, & \text{если } x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3. \\
16) \quad \text{а) } f(x) &= \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \\
\quad \text{б) } f(x) &= \begin{cases} 2x + 6, & \text{если } x < -3, \\ -2x^2 - 8x - 6, & \text{если } x \geq -3, \end{cases} \quad x_0 = -3.
\end{aligned}$$

17) а) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{3}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}, & \text{если } x \leq -1, \\ x+1, & \text{если } x > -1, \end{cases} \quad x_0 = -1.$

18) а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}\left(x \cos \frac{1}{3x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3, & \text{если } x < 6, \\ 2x - 12, & \text{если } x \geq 6, \end{cases} \quad x_0 = 6.$

19) а) $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^2 \sin \frac{3}{x}\right)\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

20) а) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}, & \text{если } x < 0, \\ -\frac{1}{2}(2x + 3), & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

21) а) $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{5x}{2} - x \sin \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8, & \text{если } x \leq 3, \\ 3x - 7, & \text{если } x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3.$

22) а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{5}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 4x + 1, & \text{если } x < 0, \\ 1 - 4x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

$$23) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x + x^2 \sin \frac{3}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}, & \text{если } x < 1, \\ 2x + 3, & \text{если } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

$$24) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 \cos \frac{1}{7x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & \text{если } x \leq 3, \\ 6 - x, & \text{если } x > 3, \end{cases} \quad x_0 = 3.$$

$$25) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \operatorname{arctg}\left(x \sin \frac{1}{3x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{если } x < -4, \\ -x^2 - 6x - 8, & \text{если } x \geq -4, \end{cases} \quad x_0 = -4.$$

$$26) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^2 - 6x), & \text{если } x \leq 6, \\ \frac{1}{3}(x - 6), & \text{если } x > 6, \end{cases} \quad x_0 = 6.$$

$$27) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x - 1), & \text{если } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

$$28) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsctg}\left(x^2 \sin \frac{1}{2x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}, & \text{если } x < 3, \\ 8 - 2x, & \text{если } x \geq 3, \end{cases} \quad x_0 = 3.$$

$$29) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{3}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -4x - 15, & \text{если } x < -4, \\ 2x^2 + 12x + 17, & \text{если } x \geq -4, \end{cases} \quad x_0 = -4.$$

$$30) \text{ а) } f(x) = \begin{cases} \arctg\left(x^2 \sin^2 \frac{3}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 19, & \text{если } x < 4, \\ 3(x - 3), & \text{если } x \geq 4, \end{cases} \quad x_0 = 4.$$

Задание 2

Даны кривая L и прямая l , заданные своими уравнениями.

Составьте уравнение такой касательной к кривой, которая параллельна прямой l . Укажите координаты точки касания $(x_0; y_0)$.

Варианты

$$1) L: y = \sqrt{x+2}, \quad l: 2x - 8y + 1 = 0.$$

$$2) L: y = \frac{1}{2x-3}, \quad l: 4x + 2y - 11 = 0, \quad x_0 \in (1,5; +\infty).$$

$$3) L: y = \cos^2 x, \quad l: 3x + 3y + 7 = 0, \quad x_0 \in (0; \pi).$$

$$4) L: y = \ln \sqrt{x-1}, \quad l: -3x + 6y - 1 = 0.$$

$$5) L: y = 1 + \operatorname{tg} 2x, \quad l: -12x + 3y + 10 = 0, \quad x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

$$6) L: y = -(2x-3)^3, \quad l: 6x + y - 4 = 0, \quad x_0 \in (-\infty; 1,5).$$

$$7) L: y = e^{x^2-1}, \quad l: 4x - 2y - 3 = 0.$$

$$8) L: y = \frac{1}{2}(2x+1)^2, \quad l: 4x + 2y - 13 = 0.$$

$$9) L: y = \sqrt[3]{1-3x}, \quad l: -3x - 12y + 5 = 0, \quad x_0 \in [0; +\infty).$$

$$10) L: y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}, \quad l: -4x + y + 1 = 0.$$

$$11) L: y = \sqrt{5-x^2}, \quad l: 8x + 4y + 9 = 0.$$

- 12) $L: y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \quad l: 4x - 4y - 3 = 0, \quad x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
- 13) $L: y = \frac{1}{3-x}, \quad l: -x + 4y + 2 = 0, \quad x_0 \in (-\infty; 1].$
- 14) $L: y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}, \quad l: 7x - 14y - 4 = 0.$
- 15) $L: y = \sqrt[3]{5x-2}, \quad l: 5x - 12y - 2 = 0, \quad x_0 \in (-\infty; 0).$
- 16) $L: y = \ln(2x^2 - 1), \quad l: 8x - 2y + 9 = 0.$
- 17) $L: y = x^3 - 2x, \quad l: -20x + 2y + 17 = 0, \quad x_0 \in (-\infty; 0].$
- 18) $L: y = -(4-x)^2, \quad l: 8x + 4y + 11 = 0.$
- 19) $L: y = -\sqrt{3x-3}, \quad l: x + 2y + 5 = 0.$
- 20) $L: y = \frac{1}{x-2}, \quad l: x + 9y - 7 = 0, \quad x_0 \in [0; +\infty).$
- 21) $L: y = \sin^2(2x), \quad l: 8x - 4y + 5 = 0, \quad x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$
- 22) $L: y = \ln(x^3 + 2), \quad l: -3x + y - 2 = 0.$
- 23) $L: y = \sqrt[3]{x+4}, \quad l: 3x - 9y - 7 = 0, \quad x_0 \in [-4; +\infty).$
- 24) $L: y = \frac{1}{2}e^{2-4x}, \quad l: 4x + 2y + 5 = 0.$
- 25) $L: y = \frac{2}{5-x^2}, \quad l: 2x - 8y - 7 = 0, \quad x_0 \in (-\infty; 2).$
- 26) $L: y = \ln\sqrt{5-x^2}, \quad l: -2x + 8y + 3 = 0.$
- 27) $L: y = 2 - x - x^4, \quad l: 9x + 6y + 5 = 0.$
- 28) $L: y = \frac{4}{1-2x}, \quad l: 8x - 9y + 2 = 0, \quad x_0 \in (0; +\infty).$
- 29) $L: y = \sqrt[3]{3-4x}, \quad l: 4x + 3y - 1 = 0, \quad x_0 \in [0, 9; +\infty).$
- 30) $L: y = \frac{1}{\sqrt{x-7}}, \quad l: 6x + 12y - 1 = 0.$

Задание 3

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

Варианты

$$1) f(x) = \frac{x-1}{2x^2+1}, \quad x_0 = 1.$$

$$3) f(x) = \frac{x-2}{x^3-1}, \quad x_0 = -1.$$

$$5) f(x) = \frac{x^3+3}{x^2-2}, \quad x_0 = -1.$$

$$7) f(x) = \frac{2x}{x^2-x-1}, \quad x_0 = -1.$$

$$9) f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}, \quad x_0 = -1.$$

$$11) f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1}, \quad x_0 = -2.$$

$$13) f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2+1}, \quad x_0 = 0.$$

$$15) f(x) = \frac{x}{x^2-x+2}, \quad x_0 = 1.$$

$$17) f(x) = \frac{-x}{x^4+1}, \quad x_0 = -1.$$

$$19) f(x) = \frac{x}{3-x^4}, \quad x_0 = -1.$$

$$21) f(x) = \frac{x-1}{x^3-3x}, \quad x_0 = 2.$$

$$23) f(x) = \frac{x+1}{1-5x-x^2}, \quad x_0 = 0.$$

$$25) f(x) = \frac{2-5x}{4x^2+1}, \quad x_0 = 0.$$

$$27) f(x) = \frac{x+1}{x^4-2}, \quad x_0 = 1.$$

$$29) f(x) = \frac{2x^3-6x}{x-4}, \quad x_0 = 2.$$

$$2) f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}, \quad x_0 = -2.$$

$$4) f(x) = \frac{x+2}{2-x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$6) f(x) = \frac{x-2}{x^3-1}, \quad x_0 = 0.$$

$$8) f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+2}, \quad x_0 = 0.$$

$$10) f(x) = \frac{x^3-1}{x+1}, \quad x_0 = -2.$$

$$12) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}, \quad x_0 = 1.$$

$$14) f(x) = \frac{x^3+x}{1-x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$16) f(x) = \frac{1}{x^5+2}, \quad x_0 = -1.$$

$$18) f(x) = \frac{x^2}{7-x^3}, \quad x_0 = 2.$$

$$20) f(x) = \frac{x-x^2}{2-x^3}, \quad x_0 = -1.$$

$$22) f(x) = \frac{x+1}{x^3-x+2}, \quad x_0 = 0.$$

$$24) f(x) = \frac{1-x}{x^2-3x+1}, \quad x_0 = 2.$$

$$26) f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+2}, \quad x_0 = 0.$$

$$28) f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-2}, \quad x_0 = 3.$$

$$30) f(x) = \frac{x^3}{x^4-2}, \quad x_0 = -1.$$

Задание 4*

Найдите угол между параболой в той точке их пересечения, которая имеет наибольшую абсциссу (в вариантах 1–15) и наименьшую абсциссу (в вариантах 16–30).

Варианты

1) $y_1 = 3x^2 - 4x + 2,$
 $y_2 = 2x^2 - 2x + 5.$

3) $y_1 = 3x^2 - 2x - 6,$
 $y_2 = 2x^2 - 2x - 5.$

5) $y_1 = -x^2 + 6x + 3,$
 $y_2 = -2x^2 + 7x + 5.$

7) $y_1 = 3x^2 + 8x + 3,$
 $y_2 = 2x^2 + 11x + 1.$

9) $y_1 = 4x^2 + 3x - 2,$
 $y_2 = 3x^2 - 4.$

11) $y_1 = -3x^2 + x,$
 $y_2 = -2x^2 - 3x + 3.$

13) $y_1 = -2x^2 - 5x + 10,$
 $y_2 = -x^2 - 8x + 6.$

15) $y_1 = 7x^2 + 6x,$
 $y_2 = 6x^2 + 7x + 6.$

17) $y_1 = x^2 - 16x + 14,$
 $y_2 = 2x^2 - 13x + 16.$

19) $y_1 = 3x^2 + 4,$
 $y_2 = 4x^2 + 3x + 6.$

21) $y_1 = -2x^2 - 3x - 7,$
 $y_2 = -3x^2 - x - 4.$

23) $y_1 = 4x^2 + 4x - 3,$
 $y_2 = 5x^2 + 8x.$

2) $y_1 = 4x^2 + x - 2,$
 $y_2 = 3x^2 + 3x + 1.$

4) $y_1 = -2x^2 + 3x - 1,$
 $y_2 = -x^2 + 3x - 2.$

6) $y_1 = 3x^2 - x - 9,$
 $y_2 = 2x^2 + 2x - 11.$

8) $y_1 = 2x^2 - 13x + 5,$
 $y_2 = x^2 - 16x + 3.$

10) $y_1 = 2x^2 - 7x + 5,$
 $y_2 = x^2 - 3x + 2.$

12) $y_1 = 5x^2 + 8x + 3,$
 $y_2 = 4x^2 + 4x.$

14) $y_1 = 3x^2 - x,$
 $y_2 = 2x^2 - 3x + 3.$

16) $y_1 = -2x^2 + 7x + 5,$
 $y_2 = -x^2 + 6x + 3.$

18) $y_1 = 2x^2 + 2x - 21,$
 $y_2 = 3x^2 - x - 19.$

20) $y_1 = x^2 - 3x - 7,$
 $y_2 = 2x^2 - 7x - 4.$

22) $y_1 = 3x^2 + 3x + 10,$
 $y_2 = 4x^2 + x + 7.$

24) $y_1 = 2x^2 - 2x + 15,$
 $y_2 = 3x^2 - 4x + 12.$

$$25) \quad y_1 = -x^2 - 8x + 9, \\ y_2 = -2x^2 - 5x + 13.$$

$$27) \quad y_1 = 6x^2 + 7x + 7, \\ y_2 = 7x^2 + 6x + 1.$$

$$29) \quad y_1 = -2x^2 + 3x - 11, \\ y_2 = -x^2 + 3x - 12.$$

$$26) \quad y_1 = 2x^2 - 3x + 12, \\ y_2 = 3x^2 - x + 9.$$

$$28) \quad y_1 = 2x^2 + 11x + 11, \\ y_2 = 3x^2 + 8x + 13.$$

$$30) \quad y_1 = 2x^2 - 2x - 15, \\ y_2 = 3x^2 - 2x - 16.$$

Задание 5

Найдите производную функции $f(x)$.

Варианты

$$1) \quad f(x) = 6x \arcsin(4x - 3) + \cos \frac{1}{2} \cdot \ln(2x + 3) - \frac{x^2 - x}{2x + 1}.$$

$$2) \quad f(x) = \arccos \frac{x^2}{3 - x} - \cos 3x \cdot \ln(4x - 1) + \frac{1}{3}.$$

$$3) \quad f(x) = \sin 5x \cdot \frac{\operatorname{arctg}(9x - 2)}{3} - \ln 2 \cdot \cos(3x^2 - 2) - \arcsin \frac{1}{4}.$$

$$4) \quad f(x) = \cos \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 1} + \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) \cdot \ln \frac{5x}{4x - 3} + \frac{1}{5}.$$

$$5) \quad f(x) = \operatorname{sh}(5x - 3) \cdot \sqrt{7x + 2} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \cdot \ln \frac{x^2 - 2}{2x + 1} - \operatorname{ch} \frac{1}{2}.$$

$$6) \quad f(x) = \frac{\operatorname{th}(2x - 3)}{3x^2 + 4} - \arcsin \frac{2}{5} \cdot \ln \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1}{3} + \cos \frac{2}{7}.$$

$$7) \quad f(x) = \sin \frac{1}{3x} \cdot \ln(2x^2 + 3) + \operatorname{tg} 10 + \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1}}.$$

$$8) \quad f(x) = \sin \frac{1}{5x} + \ln(7x - 2) \cdot \operatorname{tg} \frac{3 - x}{x} + \arcsin \frac{1}{4} \cdot \operatorname{ch}(5x + 1).$$

$$9) \quad f(x) = \cos 5x \cdot \sin \frac{1}{5x} + \ln(2e) - \frac{\sqrt{4x + 6}}{x^2 - x - 1}.$$

$$10) \quad f(x) = \frac{1}{3} \ln(5x^3 + x) + e^{x+2} \cdot \arcsin \sqrt{5x - 1} - \operatorname{ch} \frac{1}{4}.$$

$$11) \quad f(x) = \sin 1 \cdot \sqrt[4]{2x^3 + x - 1} - \operatorname{sh} \frac{2}{3} + \frac{e^{x^2 - x + 2}}{x^4 - 4x^2 + 4}.$$

$$12) \quad f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2x} \cdot \ln(2x + 3) + \arcsin \frac{3}{4} - \cos \frac{1}{3} \cdot \frac{5x - \sqrt{2x}}{x^2 - 1}.$$

- 13) $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{\ln 2} - \arcsin(4x+7) \cdot \ln(2x^2 - 3).$
- 14) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} 4} + \frac{1}{\operatorname{ch} 4} \ln \frac{7x+2}{1-2x^2} - \operatorname{arctg}(3x+1) \cdot \cos(1-x^2).$
- 15) $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt[4]{2x + \sin 2x} - \frac{3}{7e} + e^{3x^2-5x} \cdot \arccos(2x+5).$
- 16) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3x^5 + 2x^3 - x} + \frac{\operatorname{ch} 3}{8} - \sin(7x^2 + 4) \cdot \ln(1-6x).$
- 17) $f(x) = \frac{2}{7x} \operatorname{sh}(x^3 + 2) + \operatorname{th} \frac{2}{7} + \frac{\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{x+2}}{4x^3}.$
- 18) $f(x) = \cos(2x+9) \cdot \ln(1+x^2) - \operatorname{sh} \frac{3}{2} \cdot \sqrt[5]{\ln x + \frac{3}{2x}} - \operatorname{ch} \frac{3}{2}.$
- 19) $f(x) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2x+1}{1-3x^3} + \ln 5^{x^2-1} + \cos x \cdot \sqrt{7x-1}.$
- 20) $f(x) = \frac{x}{3} \operatorname{arctg}(x^3 - 7x + 1) + \operatorname{ctg} \frac{7}{3} - \frac{\sin 2x - \sqrt{x}}{x^2}.$
- 21) $f(x) = \frac{\arcsin 7x}{\sqrt[3]{5x}} - \operatorname{tg} \frac{3}{4} + (4x^3 - 7x + 2) \operatorname{ch}(3x - 2).$
- 22) $f(x) = \frac{\ln(4x+1)}{2x} - \operatorname{sh} 2 \cdot \sqrt{1 + \ln x} + (x^2 - 3x + 1) \sin(1 - 4x).$
- 23) $f(x) = x \sin(2x + 3x^2 + 4x^3) + \cos(\pi^2) + \frac{\operatorname{arctg}(1-6x)}{x^2}.$
- 24) $f(x) = x \sqrt[4]{x^2 - 3x + 2} + \cos^2(\pi) - \frac{\operatorname{arcctg}(2x+3)}{x+1}.$
- 25) $f(x) = x \sin 2x \cdot \ln(x^2 - 2) + \frac{4x^3 - 2x + 1}{\sqrt[5]{1-x^3}} + 2 \arcsin \frac{1}{2}.$
- 26) $f(x) = 2x \cos 3x \cdot \ln(3-x) - \frac{2x^5 - x + 4}{x^3 \sqrt{x}} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- 27) $f(x) = \frac{1}{3} \ln(3x+1) \cdot \cos(2-x) + \frac{\sqrt[3]{4\pi} \cdot \arcsin(4x+5)}{\sqrt{2x}} - \operatorname{tg} \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$
- 28) $f(x) = e^{2x^2+3x} \cdot \sin(1-5x) + \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{2x} + \sqrt{x}}{4x} + \arccos(3x) + \cos(\operatorname{arctg} 3).$
- 29) $f(x) = e^{3-x^2} \cdot \cos(4x^2) - \arcsin(2x) - \frac{4x^3 - 1}{x - \sqrt{x}} - \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{3}{4} \right).$
- 30) $f(x) = -\arccos \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sqrt[3]{\sin x - 4x} - \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt{x^3}}{4x^2 - 3} - \ln(\pi^2 + 1).$

Задание 6

Найдите производную функции $f(x)$.

Варианты

$$1) f(x) = \operatorname{tg} \left(\ln^2 \frac{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}}{2} \right).$$

$$3) f(x) = \sin^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{4-7x}}{3} \right).$$

$$5) f(x) = \operatorname{tg}^2 \left(\arcsin \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} \right).$$

$$7) f(x) = \left(\frac{1}{4} \right)^{\operatorname{tg}(\sin 2x - \cos 3x)}.$$

$$9) f(x) = (\operatorname{tg} 3)^{\sin^2(2x^2 + 3x^3)}.$$

$$11) f(x) = \cos^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x^5 + x^3 + x}{4} \right).$$

$$13) f(x) = \arccos(\ln^3(2 + 4x + 8x^3)).$$

$$15) f(x) = \ln^2 \left(\arcsin \sqrt{\frac{10x + 2}{x^2 - 6}} \right).$$

$$17) f(x) = (2e)^{\cos^2(\ln(6x-1))}.$$

$$19) f(x) = \operatorname{arctg} \left(\sin^4 \left(\frac{1}{1+x+x^2} \right) \right).$$

$$21) f(x) = \sin^3 \left(\frac{\ln x + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{2\pi}} \right).$$

$$23) f(x) = e^{\operatorname{tg}^2 \ln(5+3x)}.$$

$$25) f(x) = \operatorname{arcctg} \left(\frac{\sin 2x}{x^2} \right)^3.$$

$$27) f(x) = \arccos \left(\operatorname{tg}^2 \left(\sqrt{\frac{4x-1}{x^3}} \right) \right).$$

$$2) f(x) = \cos^3(\sqrt{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{ctg} 7x}).$$

$$4) f(x) = \operatorname{arctg}(\sin(\sqrt{5x} + 16x^2)).$$

$$6) f(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{\cos^3(x + \ln x)}.$$

$$8) f(x) = \ln \left(\sin^4 \left(\frac{x^3 - 2x}{3x+1} \right) \right).$$

$$10) f(x) = \sin(\ln^2(\sqrt[5]{5x} + \sqrt[3]{3x} + 1)).$$

$$12) f(x) = \operatorname{tg}^3 \left(\arccos \frac{3+2x}{4x^2-1} \right).$$

$$14) f(x) = \sin \left(\operatorname{arctg}^2 \left(\sqrt{\frac{x^2+4x}{3x-1}} \right) \right).$$

$$16) f(x) = \cos^4(e^{\operatorname{arctg}(7x^3)}).$$

$$18) f(x) = \sin^3(e^{\operatorname{arctg}(4-5x^4)}).$$

$$20) f(x) = \cos^2(\sqrt[3]{\operatorname{tg} 4x + x^4}).$$

$$22) f(x) = (\sin \sqrt{\pi})^{\operatorname{arctg} 2(1+3x^4)}.$$

$$24) f(x) = \operatorname{tg} \left(\sin^3 \left(\frac{7x^2 - 1}{4x} \right) \right).$$

$$26) f(x) = (4e)^{\operatorname{arctg} \sqrt{2+3x+4x^2}}.$$

$$28) f(x) = \sin \left(\operatorname{arctg}^2 \left(\frac{x^3 - x^2 - x}{2x+1} \right) \right).$$

$$29) f(x) = (\cos 2)^{\sqrt[3]{\ln(4x+10x^2)}}. \quad 30) f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5x-1}{2x^2+1}\right)\right).$$

Задание 7

Найдите производную функции $f(x)$.

Варианты

$$1) f(x) = (\operatorname{tg} 4x)^{\ln x}.$$

$$2) f(x) = (\arcsin 3x)^{x^2+1}.$$

$$3) f(x) = (\sqrt{x})^{\sin 10x}.$$

$$4) f(x) = (\sin x)^{\sqrt[3]{x}}.$$

$$5) f(x) = (\cos 5x)^{\ln(2x)}.$$

$$6) f(x) = (\sin 3x)^{\sqrt[4]{x}}.$$

$$7) f(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^{x-x^3}.$$

$$8) f(x) = (\arccos 7x)^{\sqrt{2x}}.$$

$$9) f(x) = (\ln 3x)^{\sin 4x}.$$

$$10) f(x) = (\sqrt[3]{x})^{\cos(x^2)}.$$

$$11) f(x) = (\operatorname{tg} 7x)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12) f(x) = (\arcsin 2x)^{4e^x}.$$

$$13) f(x) = (\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} 3x}.$$

$$14) f(x) = (x^2 - x)^{\cos x}.$$

$$15) f(x) = (2 - x^2)^{\operatorname{tg}(2x)}.$$

$$16) f(x) = (2x)^{\operatorname{arctg}(5x)}.$$

$$17) f(x) = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x}}.$$

$$18) f(x) = (\ln 4x)^{x^3}.$$

$$19) f(x) = (\cos 2x)^{e^{3x}}.$$

$$20) f(x) = (x^2 - 1)^{\sin(3x)}.$$

$$21) f(x) = (\arccos x)^{\sqrt[3]{4x}}.$$

$$22) f(x) = (\operatorname{tg} 4x)^{e^{5x}}.$$

$$23) f(x) = (\arcsin 2x)^{x^3-2x}.$$

$$24) f(x) = (\sqrt[3]{2x})^{\sin(5x)}.$$

$$25) f(x) = (x+4)^{\cos(x^4)}.$$

$$26) f(x) = (\operatorname{arctg} 3x)^{\ln \operatorname{arctg} 3x}.$$

$$27) f(x) = (\cos 8x)^{x-x^3}.$$

$$28) f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{5x}}.$$

$$29) f(x) = (6x)^{\operatorname{ctg} 4x}.$$

$$30) f(x) = (\sqrt{x^3})^{\arcsin(2x)}.$$

Задание 8

Для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

найдите $\frac{dy}{dx}$. Вычислите $\frac{dy}{dx}(t_0)$ для заданного значения t_0 . Определите, под каким углом касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, пересекает ось Ox .

Варианты

- 1) $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$
- 2) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 2, \quad M_0(0; -2).$
- 3) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \pi, \quad M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right).$
- 4) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}, \quad M_0\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$
- 5) $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}, \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$
- 6) $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{t^2 + 1}, \end{cases} \quad t_0 = 1, \quad M_0\left(1; \frac{1}{2}\right).$
- 7) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1}, \\ y = \sqrt{t}, \end{cases} \quad t_0 = 9, \quad M_0(2; 3).$
- 8) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{2\pi}{3}, \quad M_0\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$
- 9) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t_0 = -2, \quad M_0(-9; 4).$
- 10) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \frac{2\pi}{3}, \quad M_0\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}; 3\right).$
- 11) $\begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}, \quad M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$
- 12) $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = 2t \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}, \quad M_0\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{12}; \frac{\pi}{6}\right).$
- 13) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}, \end{cases} \quad t_0 = 2, \quad M_0\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

- 14) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt{t+1}, \end{cases} \quad t_0 = 8, \quad M_0(2; 3).$
- 15) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{5\pi}{6}, \quad M_0(-\sqrt{3}; 1).$
- 16) $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2 - t - 1, \end{cases} \quad t_0 = -1, \quad M_0(-2; 1).$
- 17) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = -\pi, \quad M_0(-3\pi; 6).$
- 18) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t, \end{cases} \quad t_0 = 0, \quad M_0(2; 0).$
- 19) $\begin{cases} x = 2t \cos t, \\ y = 3t \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right).$
- 20) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{-t+1}}, \end{cases} \quad t_0 = \frac{1}{2}, \quad M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right).$
- 21) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}, \end{cases} \quad t_0 = 2, \quad M_0(1; 2).$
- 22) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos t, \\ y = \frac{3}{2} \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}, \quad M_0\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right).$
- 23) $\begin{cases} x = t^2 - t + 1, \\ y = t^3 + 1, \end{cases} \quad t_0 = 1, \quad M_0(1; 2).$
- 24) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{3}{2}(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}\right).$
- 25) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}, \quad M_0\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right).$
- 26) $\begin{cases} x = 3t \cos t, \\ y = 2t \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}, \quad M_0\left(\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}; \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right).$

$$27) \begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M_0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right).$$

$$28) \begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt[3]{t-1}}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}, \end{cases} \quad t_0 = 0, \quad M_0(0; -1).$$

$$29) \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases} \quad t_0 = -\frac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$30) \begin{cases} x = t^4 - 1, \\ y = t^3 - t^2, \end{cases} \quad t_0 = 1, \quad M_0(0; 0).$$

Задание 9

Для заданной функции $y(x)$ в указанной точке x_0 найдите значения производной и дифференциала k -го порядка (k приводится в условии задачи).

Варианты

$$1) y = \frac{2x-1}{x+3}, \quad k=8, \quad x_0 = -4.$$

$$2) y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}, \quad k=23, \quad x_0 = 0.$$

$$3) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad k=7, \quad x_0 = 3.$$

$$4) y = \sin(x+1), \quad k=12, \quad x_0 = \frac{\pi}{6} - 1.$$

$$5) y = 2^{3x-2}, \quad k=31, \quad x_0 = 1.$$

$$6) y = \ln(1-x-12x^2), \quad k=16, \quad x_0 = 0.$$

$$7) y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \quad k=26, \quad x_0 = 0.$$

$$8) y = \frac{3x-2}{2x-1}, \quad k=21, \quad x_0 = 1.$$

$$9) y = \frac{8}{20-x-x^2}, \quad k=16, \quad x_0 = 0.$$

$$10) y = \log_2(2x+7), \quad k=10, \quad x_0 = -3.$$

$$11) y = \sin(3x+1), \quad k=17, \quad x_0 = \frac{\pi-1}{3}.$$

$$12) y = 3^{2x+3}, \quad k=18, \quad x_0 = -1.$$

$$13) y = \ln(1 + x - 6x^2), \quad k = 23, \quad x_0 = 0.$$

$$14) y = \cos^2 x, \quad k = 10, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$15) y = \frac{5x + 2}{3x - 1}, \quad k = 15, \quad x_0 = 0.$$

$$16) y = \frac{6}{8 + 2x - x^2}, \quad k = 9, \quad x_0 = -1.$$

$$17) y = \ln(5x + 2), \quad k = 14, \quad x_0 = -0,2.$$

$$18) y = \cos(x + 1), \quad k = 19, \quad x_0 = \frac{\pi}{6} - 1.$$

$$19) y = 5^{2x-3}, \quad k = 12, \quad x_0 = 2.$$

$$20) y = \ln(1 + 2x - 8x^2), \quad k = 22, \quad x_0 = 0.$$

$$21) y = \sin^2 x, \quad k = 28, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$22) y = \frac{x - 3}{2 - 3x}, \quad k = 13, \quad x_0 = 1.$$

$$23) y = \frac{5}{6 - x - x^2}, \quad k = 11, \quad x_0 = -2.$$

$$24) y = \log_3(3x + 1), \quad k = 22, \quad x_0 = 0.$$

$$25) y = \cos 5x, \quad k = 10, \quad x_0 = \frac{\pi}{5}.$$

$$26) y = e^{3x-2}, \quad k = 41, \quad x_0 = 1.$$

$$27) y = \ln(1 - x - 20x^2), \quad k = 25, \quad x_0 = 0.$$

$$28) y = \sin 2x, \quad k = 22, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

$$29) y = \frac{2 - 3x}{2 + x}, \quad k = 29, \quad x_0 = -1.$$

$$30) y = \frac{7}{12 - x - x^2}, \quad k = 23, \quad x_0 = 2.$$

Задание 10

Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$ заданному уравнению.

Варианты

$$1) y = x^2 \cos 4x, \quad (4x^3 + 2y)dx - xdy = 0.$$

$$2) y = (1 - x)e^{-x}, \quad (y - x^2 e^{-x} + e^{-x})dx + (1 - x)dy = 0.$$

- 3) $y = x \sin 2x$, $(2x^2 \cos 2x - y)dx + xdy = 0$.
- 4) $y = (x^2 + 1) \ln x$, $(x^2 + 2y + 1)dx - xdy = 0$.
- 5) $y = x(\cos 2x - 1)$, $x(y - 2x^2 \sin 2x)dx - x^2 dy = 0$.
- 6) $y = 3x \cos 3x$, $(9x^2 \sin 3x - y)dx + xdy = 0$.
- 7) $y = x^2(1 + \ln x)$, $xdy - (x^2 + 2y)dx = 0$.
- 8) $y = -xe^{x^2}$, $xy(1 + 2x^2)dx - x^2 dy = 0$.
- 9) $y = 2x \sin x - 1$, $(y - 2x^2 \cos x + 1)dx - xdy = 0$.
- 10) $y = 2x(1 + \sin x)$, $xdy - (2x^2 \cos x + y)dx = 0$.
- 11) $y = x \operatorname{tg} x$, $xdy - \frac{x^2}{\cos^2 x} dx - ydx = 0$.
- 12) $y = x \ln^2 x$, $\frac{2 + \ln x}{\ln x} ydx - xdy = 0$.
- 13) $y = x(2 - \ln x)$, $xydx - x^2 dy = 0$.
- 14) $y = x \sin^2 x$, $(1 + 2x \operatorname{ctg} x)ydx - xdy = 0$.
- 15) $y = (2x - 1) \sin x$, $(y - x \cos x)dx - xdy = 0$.
- 16) $y = (2x + 1)e^x$, $(4x^2 e^x + 3y)dx - 2xdy = 0$.
- 17) $y = x \sin 2x + \cos 2x$, $2x(y \sin 2x - x \sin^2 2x)dx - \sin 2x dy = 0$.
- 18) $y = \sin x + x^2 \cos x$, $(x^2 \sin x - x^2 \cos x + y)dx + dy = 0$.
- 19) $y = \frac{x^2 - x}{2 - x}$, $\left(\frac{x^2 + 2x - 2}{2 - x} - 2y \right) dx + (x - 2)dy = 0$.
- 20) $y = \frac{2}{x} \ln^2 x$, $(4 \ln x - xy)dx - x^2 dy = 0$.
- 21) $y = \frac{\sin x}{x^2}$, $(2x^2 y - x \cos x)dx + x^3 dy = 0$.
- 22) $y = \frac{\cos x}{x}$, $-x^2(y + \sin x)dx - x^3 dy = 0$.
- 23) $y = \frac{x}{\sin x} + 2$, $(y - 1) \operatorname{tg} x dx + \sin^2 x dy = 0$.
- 24) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $(x^2 y - 1)dx + x^3 dy = 0$.
- 25) $y = \frac{x^2}{\cos x}$, $(y \sin 2x + 4x \cos x)dx - 2 \cos^2 x dy = 0$.
- 26) $y = x^2 \operatorname{tg} x$, $(2x \sin x + 4y \operatorname{ctg} x)dx - 2 \cos^2 x dy = 0$.

$$\begin{array}{ll}
27) y = x^2 e^{2x}, & 2y(1-x)dx - xdy = 0. \\
28) y = 2x \cos x, & (2x^3 \sin 2x - y^2)dx + xydy = 0. \\
29) y = x^2 \sin x, & \left(\frac{2}{x} + \operatorname{ctg} x\right)y^2 dx - ydy = 0. \\
30) y = \ln x \cdot \sin x, & (xy - \sin x)dx + xdy = 0.
\end{array}$$

Задание 11

В заданной точке x с помощью дифференциала вычислите приближенное значение функции $y = f(x)$.

Варианты

$$\begin{array}{ll}
1) y = \sqrt{x-10}, & x = 36. \\
2) y = \sqrt{x+11}, & x = 24. \\
3) y = \sqrt{x-2}, & x = 65. \\
4) y = \sqrt[3]{x+3}, & x = 5,25. \\
5) y = \sqrt[3]{x-2}, & x = 9,85. \\
6) y = \sqrt[3]{x+1}, & x = 25,75. \\
7) y = x^5, & x = 0,95. \\
8) y = x^5, & x = 2,05. \\
9) y = x^4, & x = 3,1. \\
10) y = x^6, & x = 1,98. \\
11) y = x^8, & x = 2,11. \\
12) y = \sqrt{1 + \sin 2x}, & x = 0,02. \\
13) y = \sqrt{1 - \sin 3x}, & x = 0,03. \\
14) y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}, & x = 0,04. \\
15) y = \sqrt{1 - \operatorname{tg} 2x}, & x = 0,02. \\
16) y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}, & x = 1,03. \\
17) y = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, & x = 1,97. \\
18) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}, & x = 6,05. \\
19) y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}, & x = 4,45. \\
20) y = \sin(x-1), & x = 1,02. \\
21) y = \arcsin x, & x = 0,04. \\
22) y = \arccos x, & x = 0,05. \\
23) y = \frac{1}{\sqrt{x}}, & x = 24. \\
24) y = \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x = 1,02. \\
25) y = \sqrt[3]{x^2}, & x = 0,98. \\
26) y = \sqrt[3]{2-x^2}, & x = 1,03. \\
27) y = \sin(1-x), & x = 0,97. \\
28) y = \sin(2-x), & x = 1,98. \\
29) y = x^3, & x = 2,05. \\
30) y = (1-x)^4, & x = 3,02.
\end{array}$$

Задание 12

Для заданной функции $y = f(x)$ найдите:

- промежутки монотонности и экстремумы;
- наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a; b]$;

в)* наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) на заданном бесконечном промежутке;

г) промежутки выпуклости и точки перегиба.

Варианты

- | | | |
|--|-------------------|-------------------------|
| 1) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$; | б) $[-2; 0,5]$; | в) $[-0,5; +\infty)$. |
| 2) $y = 16x^2(x-1)^2$; | б) $[-1; 0,75]$; | в) $[-0,25; +\infty)$. |
| 3) $y = 3x - x^3$; | б) $[-3; 1,5]$; | в) $[-1,5; +\infty)$. |
| 4) $y = (x+1)(x-2)^2$; | б) $[-2; 2,5]$; | в) $(-\infty; 4]$. |
| 5) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$; | б) $[-0,25; 2]$; | в) $(-\infty; 1,5]$. |
| 6) $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$; | б) $[-0,01; 1]$; | в) $[-1; +\infty)$. |
| 7) $y = \frac{1}{16}x^2(x-4)^2$; | б) $[0,5; 5]$; | в) $(-\infty; 3]$. |
| 8) $y = (x+1)^2(x-1)^2$; | б) $[-0,5; 2]$; | в) $[-2; +\infty)$. |
| 9) $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$; | б) $[0; 1,25]$; | в) $[0,75; +\infty)$. |
| 10) $y = 16x^2(x+1)^2$; | б) $[-2; 0]$; | в) $(-\infty; 1]$. |
| 11) $y = 12x^2 - 8x^3$; | б) $[-1; 1,1]$; | в) $[-0,1; +\infty)$. |
| 12) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; | б) $[-1,1; 1]$; | в) $(-\infty; 0,1]$. |
| 13) $y = (x-1)(x+2)^2$; | б) $[-2,9; 2]$; | в) $(-\infty; 0,5]$. |
| 14) $y = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$; | б) $[-0,9; 2]$; | в) $(-\infty; 0,5]$. |
| 15) $y = 8x^3 - 12x^2 + 3$; | б) $[-0,5; 2]$; | в) $(-\infty; 1,1]$. |
| 16) $y = 2x^3 + 3x^2 - 4$; | б) $[-2; 0,1]$; | в) $[-1,1; +\infty)$. |
| 17) $y = 8x^3 + 12x^2 - 5$; | б) $[-2; 0,1]$; | в) $[-1,1; +\infty)$. |
| 18) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$; | б) $[-2,1; 0]$; | в) $(-\infty; -0,9]$. |
| 19) $y = 16(x^2 - 4)^2$; | б) $[-1; 3]$; | в) $(-\infty; 1]$. |
| 20) $y = -\frac{1}{8}(x-1)^2(x+3)^2$; | б) $[-4; 0]$; | в) $[-1,1; +\infty)$. |
| 21) $y = \frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$; | б) $[-1,1; 4]$; | в) $(-\infty; 3,1]$. |
| 22) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 6$; | б) $[-6; 0]$; | в) $[-5; +\infty)$. |
| 23) $y = (x+4)(x-1)^2$; | б) $[-3; 3]$; | в) $(-\infty; 1,1]$. |
| 24) $y = 4 - 2x^2 + x^4$; | б) $[-2; 1,1]$; | в) $[-1,1; +\infty)$. |

- | | | |
|---------------------------------|---------------------|------------------------|
| 25) $y = 5 - 3x + x^3$; | б) $[-1,5; 3]$; | в) $(-\infty; 1,1]$. |
| 26) $y = 4(x+1)^2(x+2)^2$; | б) $[-2,1; -1,1]$; | в) $[-1,9; +\infty)$. |
| 27) $y = 7 - 9x + 3x^2 + x^3$; | б) $[-6; 2]$; | в) $[-4; +\infty)$. |
| 28) $y = x^3 + 3x^2 - 12$; | б) $[-2,5; 2]$; | в) $(-\infty; 0,1]$. |
| 29) $y = (2x+3)^2(2x-3)^2$; | б) $[-2; 3]$; | в) $[-1,4; +\infty)$. |
| 30) $y = 6x^3 + 9x^2 - 4$; | б) $[-2; 0,1]$; | в) $[-1,1; +\infty)$. |

Задание 13

Найдите асимптоты графика функции $y = f(x)$.

Варианты

- | | |
|---|---|
| 1) $y = \frac{8x^3}{x^2 - 4}$. | 2) $y = \frac{(x+1)^2}{x-1}$. |
| 3) $y = \frac{3x^3 - x^2}{x^2 - 1}$. | 4) $y = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 2}$. |
| 5) $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$. | 6) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. |
| 7) $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$. | 8) $y = \frac{(2x+1)^3}{(x+1)^2}$. |
| 9) $y = \frac{3x^4 + 2}{x^3}$. | 10) $y = -\frac{x^3}{(x+2)^2}$. |
| 11) $y = \frac{(x+3)^2}{2x-1}$. | 12) $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. |
| 13) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 2x}$. | 14) $y = \frac{3x^2 + 2}{x+5}$. |
| 15) $y = \frac{4x^3 + 2x^2}{x^2 - 9}$. | 16) $y = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - 25}$. |
| 17) $y = \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^2$. | 18) $y = \frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1}$. |
| 19) $y = \frac{5x^2 - x^3}{x^2 - 2x - 3}$. | 20) $y = \frac{3x^2 - 6x - 9}{x^2 - 2x - 15}$. |
| 21) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$. | 22) $y = \frac{x^2}{x+1}$. |

23) $y = \frac{(x+1)^2}{2x}$.

24) $y = \frac{x^3}{3x^2 + 2x}$.

25) $y = \frac{7 - 2x - x^2}{x^2 + 2x - 3}$.

26) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 5x - 6}$.

27) $y = \left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2$.

28) $y = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2$.

29) $y = \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 9}$.

30) $y = \frac{3x^4 + 2x^3 + 1}{x^3}$.

Задание 14

Проведите полное исследование заданной функции и постройте ее график.

Варианты

1) $y = \frac{3x^2 - 12}{x^2 + 10}$.

2) $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

3) $y = \frac{8x}{x^2 + 4}$.

4) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

5) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

6) $y = \frac{3x^2}{x^2 + 2}$.

7) $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$.

8) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

9) $y = \frac{x+1}{x^2}$.

10) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$.

11) $y = \frac{3x+2}{x^3}$.

12) $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.

13) $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$.

14) $y = \frac{x^2(x-2)}{(x+1)^2}$.

15) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

16) $y = \frac{3x^2 + 2}{x^2}$.

17) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

18) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

19) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

20) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

$$21) y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$23) y = \frac{(x+1)^3}{x^4}.$$

$$25) y = \frac{(x+1)^2}{2x}.$$

$$27) y = \frac{7 - 2x - x^2}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$29) y = \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^2.$$

$$22) y = \frac{3x^2 - 6x - 9}{x^2 - 2x + 13}.$$

$$24) y = \frac{x^2}{x+1}.$$

$$26) y = \frac{x^3}{x^2 - 9}.$$

$$28) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x + 4}.$$

$$30) y = \left(\frac{x+2}{x} \right)^2.$$

Задание 15

Вычислите предел по правилу Лопиталья.

Варианты

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x - \sin 3}{x - 3}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right).$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +0} (x+1)^{\ln x}.$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 5x}.$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 + \ln x}{2 - 3 \ln \sin x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin x}{\sin 1} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{lg} \cos 4x}{\operatorname{lg} \cos 2x}.$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +0} x^3 \cdot \ln^2 \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} x^{x-1}.$$

$$22) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}.$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + x \sin \pi x} - 1}{2x^2 - 2}.$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3}{\lg x - \lg 3}.$$

Задание 16

Используя подходящие приемы, разложите заданную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора указанного порядка n с остаточным членом в форме Лагранжа.

Варианты

$$1) y = e^{2x-x^2}, x_0 = 0, n = 5.$$

$$2) y = \sqrt{4x-3}, x_0 = 3, n = 4.$$

$$3) y = \ln(1-x-12x^2), x_0 = 0, n = 13.$$

$$4) y = \operatorname{arctg} x, x_0 = 0, n = 4.$$

$$5) y = (x-1) \operatorname{sh} x, x_0 = 0, n = 17.$$

$$6) y = (x-1) \operatorname{ch} x, x_0 = 0, n = 10.$$

$$7) y = (x-1) \sin 5x, x_0 = 0, n = 12.$$

$$8) y = (2 - e^x)^2, x_0 = 0, n = 24.$$

$$9) y = x^7, x_0 = 2, n = 7.$$

$$10) y = \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}, x_0 = 0, n = 6.$$

$$11) y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, x_0 = -1, n = 4.$$

$$12) y = \ln(1+x-12x^2), x_0 = 0, n = 6.$$

$$13) y = \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}, x_0 = 0, n = 5.$$

$$14) y = \frac{9}{20-x-x^2}, x_0 = 0, n = 16.$$

$$15) y = \sqrt{x}, x_0 = 1, n = 3.$$

$$16) y = \ln(1-x-6x^2), x_0 = 0, n = 9.$$

$$17) y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 4, n = 4.$$

$$18) y = \frac{5}{6-x-x^2}, x_0 = 0, n = 15.$$

- 19) $y = 2x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - x, x_0 = 0, n = 13.$ 20) $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}, x_0 = 0, n = 8.$
- 21) $y = \frac{3}{2-x-x^2}, x_0 = 0, n = 14.$ 22) $y = \operatorname{tg} x, x_0 = 0, n = 5.$
- 23) $y = \arcsin x, x_0 = 0, n = 5.$ 24) $y = x^5, x_0 = 3, n = 5.$
- 25) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x^4}}, x_0 = 0, n = 9.$ 26) $y = 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x, x_0 = 0, n = 57.$
- 27) $y = \frac{6}{8+2x-x^2}, x_0 = 0, n = 15.$ 28) $y = \ln \cos x, x_0 = 0, n = 4.$
- 29) $y = \sin(\sin x), x_0 = 0, n = 3.$ 30) $y = \ln(1-x-20x^2), x_0 = 0, n = 7.$

Задание 17

Для функции из задания 9 составьте многочлен Тейлора второго порядка в указанной точке x_0 и постройте его схематический график в окрестности этой точки.

4.2. Образцы решений заданий по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения»

Задание 1

а) Используя определение производной, найдите в точке $x_0 = 0$ значение

производной функции $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

б)* Проверьте, дифференцируема ли в точке $x_0 = 2$ функция

$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{если } x \leq 2, \\ x-1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$ Если она дифференцируема в этой точке,

вычислите $f'(2)$. Постройте график функции $y = f(x)$.

Решение

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Перейдем из точки $x_0 = 0$ в точку $x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x$. В этой точке

значение функции равно $f(\Delta x) = \frac{e^{(\Delta x)^2} - \cos \Delta x}{\Delta x}$.

Найдем приращение $\Delta f(0; \Delta x)$ функции $f(x)$, которое она получила при переходе из точки $x_0 = 0$ в точку $x_0 + \Delta x = \Delta x$:

$$\begin{aligned} \Delta f(0; \Delta x) &= f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - f(0) = \frac{e^{(\Delta x)^2} - \cos \Delta x}{\Delta x} - 0 = \\ &= \frac{e^{(\Delta x)^2} - \cos \Delta x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Составим отношение:
$$\frac{\Delta f(0; \Delta x)}{\Delta x} = \frac{e^{(\Delta x)^2} - \cos \Delta x}{(\Delta x)^2}.$$

Найдем производную $f'(0)$ по определению, вычислив предел $\frac{\Delta f(0; \Delta x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0; \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{(\Delta x)^2} - \cos \Delta x}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(e^{(\Delta x)^2} - 1) + (1 - \cos \Delta x)}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{(\Delta x)^2} - 1}{(\Delta x)^2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{(\Delta x)^2} = \\ &= \left. \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow (\Delta x)^2 \rightarrow 0, \\ e^{(\Delta x)^2} - 1 \sim (\Delta x)^2, \\ 1 - \cos \Delta x \sim \frac{(\Delta x)^2}{2} \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{(\Delta x)^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $f'(0) = \frac{3}{2}$.

б) * Отметим, что в точке $x_0 = 2$ данная функция непрерывна, поскольку

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 1 = f(2).$$

Для того чтобы в точке x существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функция $y = f(x)$ имела правую $f'_+(x)$ и левую $f'_-(x)$ производные и эти производные были равны между собой:

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x).$$

Для проверки дифференцируемости $f(x)$ в точке $x_0 = 2$ найдем и сравним $f'_-(2)$ и $f'_+(2)$.

Обозначим $y_1 = (x-1)^2$ и $y_2 = x-1$. Тогда $f(x) = \begin{cases} y_1(x), & \text{если } x \leq 2, \\ y_2(x), & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Очевидно, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференцируемы, при этом $y_1' = 2(x-1)$, $y_2' = 1$ для $\forall x \in \mathbb{R}$.

В частности, $y_1'(2) = 2$, значит, левая производная $y_1'(2-0)$ функции y_1 в точке $x_0 = 2$ тоже равна 2. Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$f_-'(2) = y_1'(2-0) = 2.$$

Аналогично поскольку для $\forall x \in \mathbb{R}$ $y_2' = 1$, то $y_2'(2) = 1$. Значит, $y_2'(2+0) = 1$, поэтому правая производная заданной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$ равна 1: $f_+'(2) = y_2'(2+0) = 1$.

Так как $f_+'(2) \neq f_-'(2)$, то в точке $x_0 = 2$ функция не имеет производной, следовательно, недифференцируема в этой точке.

Отсутствие производной у функции в точке $(2; 1)$ соответствует негладкому поведению графика кривой в этой точке (рис. 28).

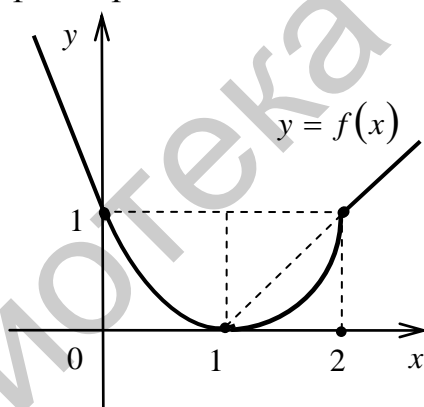


Рис. 28

Ответ: в точке $x_0 = 2$ функция недифференцируема.

Задание 2

Даны: кривая L , имеющая уравнение $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$, и прямая l с уравнением $x + 9y - 5 = 0$. Составьте уравнение такой касательной к кривой L , которая параллельна прямой l . Укажите координаты точки касания $(x_0; y_0)$.

Решение

Как известно, уравнение касательной l_k к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$l_k: y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, где $y_0 = y(x_0)$.

По условию $l_k \parallel l$, значит, угловые коэффициенты прямых l_k и l равны:
 $k_{l_k} = k_l$.

Найдем коэффициент k_l :

$$l: x + 9y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{5}{9}, \quad k_l = -\frac{1}{9}.$$

Поскольку $k_{l_k} = y'(x_0)$, то равенство $k_{l_k} = k_l$ в нашем случае принимает вид $y'(x_0) = -\frac{1}{9}$.

Вычислим $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2} \right)' = (1 - 3x^{-1} + 6x^{-2})' = (1)' + (-3x^{-1})' + (6x^{-2})' = \\ &= 0 - 3 \cdot (x^{-1})' + 6(x^{-2})' = 3x^{-2} - 12x^{-3} = 3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) = 3 \cdot \frac{x-4}{x^3}. \end{aligned}$$

Найдем абсциссу точки касания x_0 , решив уравнение $y'(x_0) = -\frac{1}{9}$:

$$3 \cdot \frac{x-4}{x^3} = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow x^3 + 27(x-4) = 0, \quad x \neq 0.$$

Очевидно, что $x = 3$ – корень этого уравнения: $3^3 + 27(3-4) = 0$.

Будем искать остальные корни уравнения $x^3 - 27x - 108 = 0$, разложив многочлен $x^3 - 27x - 108$ на множители: $x^3 - 27x - 108 = (x-3) \cdot P_2(x)$.

Разделив многочлен $x^3 - 27x - 108$ на $(x-3)$, получим $P_2(x) = x^2 + 3x + 36$. Следовательно, уравнение $x^3 - 27x - 108 = 0$ равносильно уравнению $(x-3)(x^2 + 3x + 36) = 0$.

Уравнение $x^2 + 3x + 36 = 0$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D = 3^2 - 4 \cdot 36 < 0$. Значит, $x = 3$ – единственный корень уравнения, т. е. $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания.

$$\text{Найдем ординату точки касания: } y_0 = y(x_0) = y(3) = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 6}{3^2} = \frac{2}{3}.$$

Итак, $M_0 \left(3; \frac{2}{3} \right)$ – точка касания.

Как показано ранее, $y'(x_0) = y'(3) = -\frac{1}{9}$, поэтому уравнение искомой касательной имеет вид

$$l_k: y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}(x-3) \Leftrightarrow 9y - 6 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x + 9y - 9 = 0.$$

Ответ: $l_k: x + 9y - 9 = 0$; $M_0\left(3; \frac{2}{3}\right)$ – точка касания.

Задание 3

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \frac{4x^2}{3+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение

Составим уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{4x^2}{3+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Для этого последовательно вычислим:

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{4 \cdot 1^2}{3+1^2} = 1;$$

$$y' = f'(x) = \left(\frac{4 \cdot x^2}{3+x^2} \right)' = 4 \left(\frac{(x^2+3)-3}{x^2+3} \right)' = 4 \left(1 - 3 \cdot (x^2+3)^{-1} \right)' =$$

$$= 4(-3) \cdot (-1)(x^2+3)^{-2} \cdot 2x = \frac{24x}{(x^2+3)^2};$$

$$y'(x_0) = f'(1) = \frac{24 \cdot 1}{(1^2+3)^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}.$$

Уравнение касательной l_k к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

В нашем случае получим $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 2y = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{– уравнение касательной } l_k \text{ в отрезках, где } a = \frac{1}{3},$$

$b = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ – длины отрезков, отсекаемых касательной от осей Ox и Oy соответственно.

Так как треугольник, ограниченный осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, является прямоугольным, то его площадь $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, где $a = \frac{1}{3}$, $b = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (ед.²).

Ответ: $S_{\Delta} = \frac{1}{12}$ (ед.²).

Задание 4*

Найдите углы между параболami с уравнениями $y_1 = 3x^2 + x - 8$ и $y_2 = x^2 + 6x - 10$ в точках их пересечения.

Решение

Углом между кривыми, пересекающимися в точке с абсциссой x_0 , называется угол между их касательными, проведенными к кривым в этой точке.

Найдем точки пересечения данных парабол, решив систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 3x^2 + x - 8, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x - 8 = x^2 + 6x - 10, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{1}{2}, \\ y = x^2 + 6x - 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -6\frac{3}{4}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, параболы пересекаются в двух точках: $M_1(2; 6)$ и $M_2\left(\frac{1}{2}; -6\frac{3}{4}\right)$.

Для нахождения тангенса острого угла α между кривыми воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты касательных к данным кривым в точке их пересечения.

В нашем случае

$$k_1 = y_1'(x) = (3x^2 + x - 8)' = 6x + 1, \quad k_2 = y_2'(x) = (x^2 + 6x - 10)' = 2x + 6.$$

Для точки $M_1(2; 6)$ с абсциссой $x_1 = 2$ получаем:

$$k_1 = y_1'(2) = 6x + 1 \Big|_{x=2} = 13, \quad k_2 = y_2'(2) = 2x + 6 \Big|_{x=2} = 10.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{13-10}{1+13 \cdot 10} \right| = \frac{3}{131}$, значит, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{131}$ – острый угол, под которым пересекаются параболы в точке $M_1(2; 6)$.

Рассуждая аналогично, для точки $M_2\left(\frac{1}{2}; -6\frac{3}{4}\right)$ с абсциссой $x_2 = \frac{1}{2}$ получаем:

$k_1 = 4$, $k_2 = 7$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{4-7}{1+28} \right| = \frac{3}{29}$, откуда $\beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{29}$ – острый угол, под которым параболы пересекаются в точке $M_2\left(\frac{1}{2}; -6\frac{3}{4}\right)$.

Ответ: параболы пересекаются в точке $M_1(2; 6)$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{131}$; в точке $M_2\left(\frac{1}{2}; -6\frac{3}{4}\right)$ – под углом $\beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{29}$.

Задание 5

Найдите производную функции

$$f(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \ln(4x-5)^5 - \frac{\arcsin \frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}} + \operatorname{tg}^3 \pi x.$$

Решение

Обозначим $f_1(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \ln(4x-5)^5$, $f_2(x) = -\frac{\arcsin \frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}}$, $f_3(x) = \operatorname{tg}^3 \pi x$.

Тогда $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, следовательно,

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x).$$

Найдем $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, $f_3'(x)$.

1) $f_1(x) = \operatorname{tg} 3 \cdot \ln(4x-5)^5$. Эта функция является произведением числа $\operatorname{tg} 3$ и функции $\ln(4x-5)^5 = 5 \ln(4x-5)$, поэтому

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \operatorname{tg} 3 \cdot (5 \ln(4x-5))' = \operatorname{tg} 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4x-5} \cdot (4x-5)' = \operatorname{tg} 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4x-5} \cdot 4 = \\ &= \frac{20 \operatorname{tg} 3}{4x-5}. \end{aligned}$$

2) $f_2(x) = -\frac{\arcsin \frac{4}{7}x}{\sqrt[3]{4x}}$. Эта функция является частным функций

$u = \arcsin \frac{4}{7}x$ и $v = \sqrt[3]{4x}$ с коэффициентом (-1) . Вычислим $f_2'(x)$, используя правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \\ f_2'(x) &= -\frac{\left(\arcsin \frac{4}{7}x\right)' \cdot \sqrt[3]{4x} - \arcsin \frac{4}{7}x \cdot \left(\sqrt[3]{4x}\right)'}{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{7}x\right)^2}} \cdot \left(\frac{4}{7}x\right)' \cdot \sqrt[3]{4x} + \arcsin \frac{4}{7}x \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' \\ &= \frac{\sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \arcsin \frac{4}{7}x - x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{7} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{49}x^2}} \right)}{\sqrt[3]{16x^2}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \arcsin \frac{4}{7}x - \frac{4x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{49 - 16x^2}} \right) \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{49 - 16x^2} \cdot 3}{\sqrt[3]{4} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{49 - 16x^2} \cdot 3} = \\ &= \frac{\sqrt{49 - 16x^2} \cdot \arcsin \frac{4}{7}x - 12x}{3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{49 - 16x^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $f_2'(x) = \frac{\sqrt{49 - 16x^2} \cdot \arcsin \frac{4}{7}x - 12x}{3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{49 - 16x^2}}$.

3) $f_3(x) = \operatorname{tg}^3 \pi x = (\operatorname{tg} \pi x)^3$. Это сложная степенная функция с основанием $\operatorname{tg} \pi x$ и показателем степени 3, поэтому

$$f_3'(x) = ((\operatorname{tg} \pi x)^3)' = 3 \operatorname{tg}^2 \pi x \cdot (\operatorname{tg} \pi x)' = 3 \operatorname{tg}^2 \pi x \cdot \frac{1}{\cos^2 \pi x} \cdot (\pi x)' =$$

$$= 3\pi \frac{\operatorname{tg}^2 \pi x}{\cos^2 \pi x} = 3\pi \frac{\sin^2 \pi x}{\cos^4 \pi x}.$$

$$\text{Итак, } f'(x) = \frac{20 \operatorname{tg} 3}{4x-5} + \frac{\sqrt{49-16x^2} \cdot \arcsin \frac{4}{7}x - 12x}{3x \cdot \sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt{49-16x^2}} + 3\pi \frac{\sin^2 \pi x}{\cos^4 \pi x}.$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \frac{20 \operatorname{tg} 3}{4x-5} + \frac{\sqrt{49-16x^2} \cdot \arcsin \frac{4}{7}x - 12x}{3x \cdot \sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt{49-16x^2}} + 3\pi \frac{\sin^2 \pi x}{\cos^4 \pi x}.$$

Задание 6

Найдите производную функции $f(x) = \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^{\operatorname{arctg}(\sin(1-3x^2))}$.

Решение

Данная функция является сложной показательной функцией с основанием

$a = \cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0$. Запишем ее в следующем виде:

$$f(x) = F(g(\varphi(u(x)))) ,$$

$$\text{где } u(x) = 1 - 3x^2 ,$$

$$\varphi(u) = \sin u ,$$

$$\varphi(x) = \sin(1 - 3x^2) ,$$

$$g(\varphi) = \operatorname{arctg} \varphi ,$$

$$g(x) = \operatorname{arctg}(\sin(1 - 3x^2)) ,$$

$$F(g) = \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^g ,$$

$$F(x) = \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^{\operatorname{arctg}(\sin(1-3x^2))} .$$

Продифференцируем функцию $f(x)$ в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции:

$$f'(x) = F'_g \cdot g'_\varphi \cdot \varphi'_u \cdot u'_x .$$

В нашем случае

$$F'(g) = \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^g \cdot \ln \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) ,$$

$$g'(\varphi) = (\operatorname{arctg} \varphi)' = -\frac{1}{1+\varphi^2} ,$$

$$\varphi'(u) = (\sin u)' = \cos u ,$$

$$u'(x) = (1 - 3x^2)' = -6x.$$

В итоге, подставив все производные в формулу для $f'(x)$, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^g \cdot \ln \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{1+\varphi^2} \right) \cdot \cos u \cdot (-6x) = \\ &= \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^g \cdot \ln \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{\cos u}{1+\varphi^2} \cdot 6x. \end{aligned}$$

В последнем равенстве заменим функции u , φ , g , F на их выражения через x :

$$f'(x) = \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^{\operatorname{arctg}(\sin(1-3x^2))} \cdot \ln \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{\cos(1-3x^2)}{1+(\sin(1-3x^2))^2} \cdot 6x.$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^{\operatorname{arctg}(\sin(1-3x^2))} \cdot \ln \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{\cos(1-3x^2) \cdot 6x}{1+(\sin(1-3x^2))^2}.$$

Задание 7

Найдите производную функции $f(x) = (x^2 + 1)^{\cos x}$.

Решение

Функция $y = f(x)$ является степенно-показательной, так как имеет вид $f(x) = (u(x))^{v(x)}$, где $u(x) = x^2 + 1$, $v(x) = \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$.

Найдем производную $f'(x)$, используя приведенное ниже правило логарифмического дифференцирования $f(x) = (u(x))^{v(x)}$ ($u(x) > 0$):

$$\ln f(x) = \ln(u(x))^{v(x)} \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = v(x) \cdot \ln u(x) \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' = (v(x) \cdot \ln u(x))' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = f(x) \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Прологарифмируем левую и правую части формулы заданной функции:

$$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1).$$

Продифференцируем левую и правую части полученного равенства. При этом для дифференцирования левой части используем формулу производной сложной функции, правой части – формулу производной произведения:

$$\begin{aligned} (\ln f(x))' &= (\cos x \cdot \ln(x^2 + 1))', \\ \frac{1}{f(x)} f'(x) &= (\cos x)' \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos x \cdot (\ln(x^2 + 1))', \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\sin x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{\cos x}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)', \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2x \cdot \cos x}{x^2 + 1} - \sin x \cdot \ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Производную $f'(x)$ получим в результате умножения обеих частей равенства на $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos x}{x^2 + 1} - \sin x \cdot \ln(x^2 + 1) \right), \\ f'(x) &= (x^2 + 1)^{\cos x} \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos x}{x^2 + 1} - \sin x \cdot \ln(x^2 + 1) \right). \end{aligned}$$

Ответ: $f'(x) = (x^2 + 1)^{\cos x} \cdot \left(\frac{2x \cdot \cos x}{x^2 + 1} - \sin x \cdot \ln(x^2 + 1) \right)$.

Задание 8

Функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = \frac{5t}{1+t^2}, \\ y = \frac{5t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Найдите $\frac{dy}{dx}$ и вычислите $\frac{dy}{dx}(t_0)$ для $t_0 = 3$. Определите, под каким углом пересекает ось Ox касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(2; 4)$.

Решение

Получим формулу для вычисления $\frac{dy}{dx}$. Для этого найдем дифференциалы

$dx = x'_t dt$ и $dy = y'_t dt$ и разделим второе равенство на первое: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Получена формула производной функции, заданной параметрически. В соответствии с этой формулой в нашем случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{5t^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\frac{5t}{1+t^2}\right)'} = \frac{2t(1+t^2) - t^2 \cdot 2t}{t^2 + 1 - t \cdot 2t} = \frac{2t}{1-t^2}, t \neq \pm 1.$$

Для $t_0 = 3$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_0=3} = \frac{2 \cdot 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}.$$

Как известно, касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(2;4)$, пересекает ось Ox под углом α , тангенс которого равен $\frac{dy}{dx}(2)$. Как показано ранее, $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$, т. е. $\frac{dy}{dx}$ является функцией переменной t . Поэтому, чтобы найти $\frac{dy}{dx}$ при $x = 2$, надо определить значение параметра t_0 , соответствующее точке $M_0(2;4)$. Для этого составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x(t_0) = 2, \\ y(t_0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5t_0}{1+t_0^2} = 2, \\ \frac{5t_0^2}{1+t_0^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_0^2 - 5t_0 + 2 = 0, \\ 5t_0^2 - 4 - 4t_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \begin{bmatrix} 2, \\ 1/2 \end{bmatrix}, \\ t_0 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow t_0 = 2.$$

Итак, при $t_0 = 2$ $x(t_0) = 2$ и $\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{dy}{dx}(2) \right|_{t=2} = -\frac{4}{3}$, значит, касательная, проведенная к графику в точке $M_0(2;4)$, пересекает ось абсцисс под тупым углом $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$; $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t_0=3} = -\frac{3}{4}$; $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Задание 9

Для функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в точке $x_0 = -1$ найдите значения производной и дифференциала порядка $k = 28$.

Решение

Подготовим функцию к вычислению производной 28-го порядка. Для этого преобразуем формулу задания функции, выделив в ней целую часть:

$$\begin{aligned} \frac{5x+1}{13(2x+3)} &= \frac{5}{13} \cdot \frac{x+\frac{1}{5}}{2x+3} = \frac{5}{13} \cdot \frac{2\left(x+\frac{1}{5}\right)}{2(2x+3)} = \frac{5}{26} \cdot \frac{2x+\frac{2}{5}+3-3}{2x+3} = \\ &= \frac{5}{26} \cdot \frac{(2x+3)+\left(\frac{2}{5}-3\right)}{2x+3} = \frac{5}{26} \cdot \left(1 - \frac{\frac{13}{5}}{2x+3}\right) = \frac{5}{26} - \frac{1}{2}(2x+3)^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получим $y = -\frac{1}{2}(2x+3)^{-1} + \frac{5}{26}$.

Чтобы получить формулу для производной n -го порядка, попробуем установить закономерность в вычислениях производных y' , y'' , y''' заданной функции:

$$y' = \left(-\frac{1}{2}(2x+3)^{-1} + \frac{5}{26}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (2x+3)^{-2} \cdot 2,$$

$$y'' = -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (2x+3)^{-3} \cdot 2^2,$$

$$y''' = -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (2x+3)^{-4} \cdot 2^3 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что

$$y^{(n)} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-n) \cdot (2x+3)^{-(n+1)} \cdot 2^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot n! \cdot (2x+3)^{-(n+1)}.$$

Воспользовавшись полученным результатом, найдем производную 28-го порядка:

$$y^{(28)} = (-1)^{29} \cdot 2^{27} \cdot 28! \cdot (2x+3)^{-29}.$$

При $x_0 = -1$

$$y^{(28)}(-1) = -2^{27} \cdot 28! \cdot (-1)^{-29} = -2^{27} \cdot 28!.$$

Так как x – независимая переменная, то дифференциал n -го порядка функции $y(x)$ вычисляется по формуле

$$d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Дифференциал 28-го порядка заданной функции имеет следующий вид:

$$d^{28} y = -2^{27} \cdot 28! \cdot (2x+3)^{-29} dx^{28},$$

подставляя в который значение $x_0 = -1$, получаем

$$d^{28} y|_{x=-1} = -2^{27} \cdot 28! dx^{28}.$$

$$\text{Ответ: } y^{(28)}(-1) = -2^{27} \cdot 28!; \quad d^{28} y|_{x_0=-1} = -2^{27} \cdot 28! dx^{28}.$$

Задание 10

Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = \frac{x^3 - x^2 + x}{x - 1}$ уравнению $x(x-1) \cdot y' + y = x^2(2x-1)$.

Решение

Функция $y = f(x)$ будет удовлетворять заданному уравнению, если при подстановке функции и ее производной уравнение обратится в тождество для любого $x \neq 1$.

Найдем $y'(x)$:

$$y' = \left(\frac{x^3 - x^2 + x}{x - 1} \right)' = \left(\frac{x^2(x-1) + (x-1) + 1}{x-1} \right)' = \left(x^2 + 1 + (x-1)^{-1} \right)' = 2x - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Подставим функцию y и ее производную y' в уравнение

$$x(x-1) \cdot \left(2x - \frac{1}{(x-1)^2} \right) + \frac{x^3 - x^2 + x}{x-1} = x^2(2x-1). \quad (6)$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} x(x-1) \cdot \left(2x - \frac{1}{(x-1)^2} \right) + x^2 + \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) &= 2x^2(x-1) - \frac{x}{x-1} + x^2 + \frac{x}{x-1} = \\ &= 2x^2(x-1) + x^2 = x^2(2x-2+1) = x^2(2x-1) \text{ для любого } x \neq 1. \end{aligned}$$

Мы показали, что левая часть уравнения (6) тождественно равна правой части для $\forall x \neq 1$.

Ответ: функция $y = f(x)$ удовлетворяет заданному уравнению.

Задание 11

В точке $x = 0,97$ с помощью дифференциала вычислите приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$.

Решение

Для приближенного вычисления воспользуемся формулой $y(x) \approx y(x_0) + dy(x_0)$, где $x = x_0 + \Delta x$, $dy(x_0) = y'(x_0)dx$.

Очевидно, что в качестве точки x_0 , в которой легко вычисляется значение функции, удобно взять точку $x_0 = 1$, близкую к заданной точке $x = 0,97$.

Тогда $y(0,97) \approx y(1) + y'(1)\Delta x$. Найдем Δx :

$$x = x_0 + \Delta x, \text{ т. е. } 0,97 = 1 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = -0,03.$$

Вычислим последовательно $y(1)$, $y'(x)$, $y'(1)$:

$$y(1) = \sqrt[3]{1^2 + 2 \cdot 1 + 5} = 2,$$

$$y'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5} \right)' = \left((x^2 + 2x + 5)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 2x + 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 2) =$$

$$= \frac{2(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 5)^2}},$$

$$y'(1) = \frac{2 \cdot (1+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(1^2 + 2 \cdot 1 + 5)^2}} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $y(0,97) \approx 2 + \frac{1}{3} \cdot (-0,03) = 1,99$.

Ответ: $y(0,97) \approx 1,99$.

Задание 12

Для функции $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$ найдите:

- а) промежутки монотонности и экстремумы;
- б) наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-3; 5]$;
- в)* наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) на бесконечном промежутке $[-1; +\infty)$;
- г) промежутки выпуклости и точки перегиба.

Решение

а) Найдем промежутки монотонности и экстремумы:

1) $D(y) = \mathbb{R}$;

2) $y' = \left(\frac{1}{8}(-x^3 + 6x^2 - 16) \right)' = \frac{1}{8}(-3x^2 + 12x) = -\frac{3}{8}x(x-4),$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 4 \end{cases}$ – критические точки (точки возможного экстремума);

3) исследуем знак производной на промежутках, на которые критические точки $x = 0$ и $x = 4$ разбивают $D(y) = \mathbb{R}$ (рис. 29).

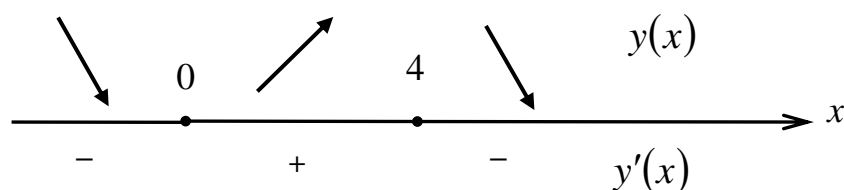


Рис. 29

Результаты исследования внесем в таблицу:

$D(y)$	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$y'(x)$	-	0	+	0	-
$y(x)$	\searrow	-2	\nearrow	2	\searrow
		экстремум (минимум)		экстремум (максимум)	

При $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ $y'(x) < 0$, значит, функция $y = f(x)$ убывает, а при $x \in (0; 4)$ $y'(x) > 0$, значит, функция $y = f(x)$ возрастает.

При переходе через точки $x = 0$ и $x = 4$ производная функции меняет знак, значит, это точки локального экстремума, а именно: $x = 0$ – точка минимума, $x = 4$ – точка максимума.

$$f(0) = \frac{1}{8}(6 \cdot 0^2 - 0^3 - 16) = -2; \quad f(4) = \frac{1}{8}(6 \cdot 4^2 - 4^3 - 16) = 2.$$

Ответ: при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ функция $y = f(x)$ убывает, а при $x \in (0; 4)$ – возрастает; $x = 0$ – точка минимума, $y(0) = -2$; $x = 4$ – точка максимума, $y(4) = 2$.

б) Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции, необходимо:

- 1) найти производную $f'(x)$ и критические точки, принадлежащие данному отрезку;
- 2) вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка;
- 3) сравнить полученные значения функции и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Найденные при решении задачи **а)** критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ принадлежат отрезку $[-3; 5]$. Вычислим значения функции в этих точках и на концах отрезка:

$$f(0) = -2, \quad f(4) = 2,$$

$$f(-3) = \frac{1}{8}(6 \cdot (-3)^2 - (-3)^3 - 16) = 8,125,$$

$$f(5) = \frac{1}{8}(6 \cdot 5^2 - 5^3 - 16) = 1,125.$$

Сравнив найденные значения функции, убеждаемся в том, что наименьшее значение функция достигает в критической точке $x_1 = 0$:

$$\min_{x \in [-3; 5]} f(x) = f(0) = -2,$$

а наибольшее – в концевой точке $x = -3$ отрезка $[-3; 5]$:

$$\max_{x \in [-3; 5]} f(x) = f(-3) = 8,125.$$

Ответ: $\min_{x \in [-3; 5]} f(x) = f(0) = -2$, $\max_{x \in [-3; 5]} f(x) = f(-3) = 8,125$.

в)* Очевидно, что заданная функция $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$ определена в каждой точке бесконечного промежутка $[-1; +\infty)$. Обе критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ принадлежат этому промежутку. Вычислим значения $f(0) = -2$, $f(4) = 2$, $f(-1) = \frac{1}{8}(6 \cdot (-1)^2 - (-1)^3 - 16) = -1,125$.

Чтобы выяснить поведение функции при x , стремящемся к бесконечности, вычислим $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16) = -\infty$.

Это означает, что функция не достигает своего наименьшего значения на промежутке $[-1; +\infty)$, тогда как $\max_{x \in [-1; +\infty)} f(x) = f(4) = 2$.

Ответ: при $x \in [-1; +\infty)$ наименьшее значение не достигается, наибольшее значение равно $f(4) = 2$;

г) Чтобы найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $y = f(x)$, вычислим ее вторую производную:

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(-\frac{3}{8}x(x-4)\right)' = -\frac{3}{8}(x^2 - 4x)' = -\frac{3}{8}(2x - 4) = -\frac{3}{4}(x - 2),$$

$$y''(x) = 0 \text{ при } x = 2.$$

На рис. 30 показаны знаки y'' (снизу) и соответствующий им характер выпуклости кривой (сверху).

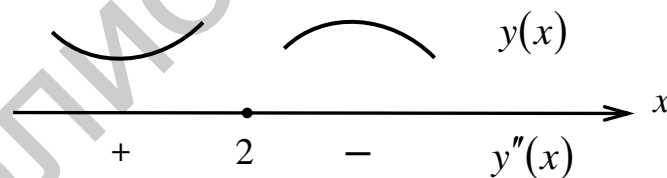


Рис. 30

Поскольку $y''(2) = 0$ и при переходе через точку $x = 2$ вторая производная меняет знак, то $x = 2$ – точка перегиба графика функции.

$y''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 2)$. Значит, кривая выпукла вниз на промежутке $(-\infty; 2)$.

$y''(x) < 0$ при $x \in (2; +\infty)$. Значит, кривая выпукла вверх на промежутке $(2; +\infty)$.

Ответ: при $x \in (-\infty; 2)$ кривая выпукла вниз, при $x \in (2; +\infty)$ – выпукла вверх; $K(2; 0)$ – точка перегиба кривой.

Задание 13

Найдите асимптоты графика функции $y = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$.

Решение

1) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

2) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = -3$, поскольку $\lim_{x \rightarrow -3-0} \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3+0} \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 = +\infty$. Это означает, что прямая $x = -3$ – двусторонняя вертикальная асимптота.

3) Проверим, имеет ли график наклонные асимптоты с уравнениями $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$. Для этого вычислим:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x(x+3)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, $y = 1$ – горизонтальная двусторонняя асимптота (частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$).

Ответ: $x = -3$ – вертикальная асимптота, $y = 1$ – горизонтальная асимптота.

Задание 14

Проведите полное исследование функции $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ и постройте ее график.

Решение

1) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = -\frac{x^3}{3-x^2} = -y(x)$.

Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$, следовательно, ее график симметричен относительно точки начала координат.

3) Функция неперiodическая.

4) Так как $y = 0$ только при $x = 0$, то график пересекает оси координат только в точке $O(0; 0)$.

5) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = \sqrt{3}$, причем

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Очевидно, что прямая $x = \sqrt{3}$ – двусторонняя вертикальная асимптота, аналогично $x = -\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

6) Находим $y' = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}$.

Решим уравнение $y' = 0$: $\frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$

Нанесем на координатную прямую критические точки $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$ и точки разрыва функции $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

В соответствии со знаками производной (рис. 31) заключаем, что функция возрастает на промежутках $(-3; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; 0) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 3)$ и убывает на промежутках $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

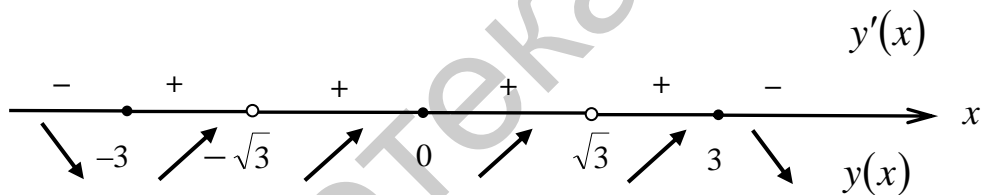


Рис. 31

В точке $x = 3$ функция имеет максимум: $y_{\max}(3) = -\frac{9}{2}$. В точке $x = -3$ функция имеет минимум: $y_{\min}(-3) = \frac{9}{2}$.

7) Вычислим $y'' = (y')' = \left(\frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} \right)' = \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3} = \frac{6x(x^2+9)}{(\sqrt{3}-x)^3(\sqrt{3}+x)^3}$.

Найдем и нанесем на координатную прямую точки, в которых y'' равна 0 или не существует: $x = 0$ – критическая точка второго рода, $x = \pm\sqrt{3}$ – точки разрыва функции. Определим знак y'' на интервалах, на которые эти точки разбивают числовую ось. Как следует из рис. 32, $x = 0$ – точка перегиба.

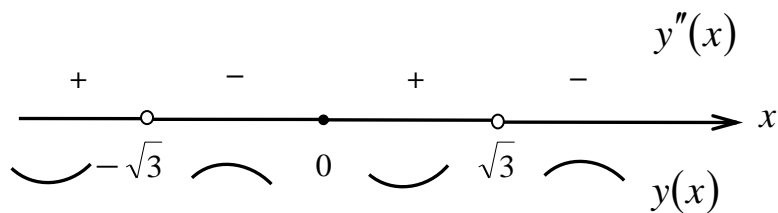


Рис. 32

Отметим, что точки $x = \pm\sqrt{3} \notin D(y)$, поэтому по определению они не являются точками перегиба, хотя кривая имеет различный характер выпуклости по разные стороны от этих точек.

На промежутках $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ кривая выпукла вниз, а на промежутках $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ – вверх.

8) Выясним вопрос об асимптотах. Наличие вертикальных асимптот $x = \pm\sqrt{3}$ установлено ранее. Проверим, существуют ли наклонные (горизонтальные) асимптоты: $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(3-x^2)} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Следовательно, $y = -x$ – наклонная двусторонняя асимптота.

9) Используя результаты исследований, построим график функции $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ (рис. 33).

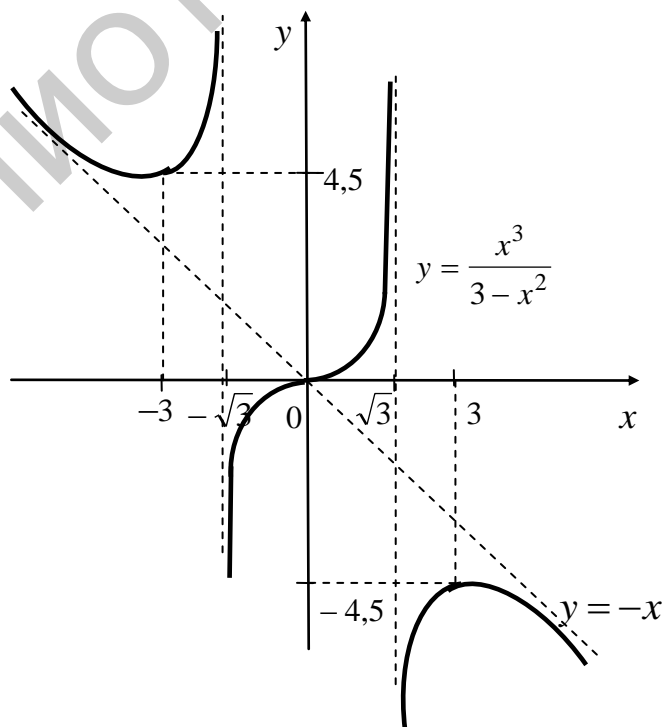


Рис. 33

Задание 15

Вычислите $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 7x}{\lg \cos 6x}$ по правилу Лопиталья.

Решение

Правило Лопиталья – метод нахождения пределов функций, содержащих неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Суть правила: при условиях, указанных в теореме Лопиталья, предел отношения функций равен пределу отношения их производных (если последний предел существует):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталья можно применять неоднократно, если отношение производных снова дает неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Сначала убедимся, что правило Лопиталья в данном случае применимо.

Действительно, при $x \rightarrow \pi$ функции $f(x) = 1 + \cos 7x$ и $g(x) = \lg \cos 7x$ стремятся к 0. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке π , поэтому правило Лопиталья можно использовать:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 7x}{\lg \cos 6x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos 7x)'}{(\lg \cos 6x)'} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-7 \sin 7x}{\frac{1}{\cos 6x \ln 10} \cdot (-6 \sin 6x)} = \\ &= \frac{7 \ln 10}{6} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x \cdot \cos 6x}{\sin 6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{7 \ln 10}{6} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sin 7x \cdot \cos 6x)'}{(\sin 6x)'} = \\ &= \frac{7 \ln 10}{6} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{7 \cos 7x \cdot \cos 6x - 6 \sin 7x \cdot \sin 6x}{6 \cos 6x} = \\ &= \frac{7 \ln 10}{6} \cdot \frac{7 \cos 7\pi \cdot \cos 6\pi - 6 \sin 7\pi \cdot \sin 6\pi}{6 \cos 6\pi} = \\ &= \frac{7 \ln 10}{6} \cdot \frac{7 \cdot (-1) \cdot 1 - 6 \cdot 0 \cdot 0}{6 \cdot 1} = -\frac{49 \ln 10}{36}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{49 \ln 10}{36}$.

Задание 16

Используя подходящие приемы, разложите функцию $f(x) = \ln(2 - 5x)$ в окрестности точки $x_0 = -3$ по формуле Тейлора порядка $n = 4$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Решение

Если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, который можно записать либо в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0; x)$, либо в форме Пеано

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Числа $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, n$ называют коэффициентами Тейлора.

1 способ. Непосредственное разложение.

Для функции $f(x) = \ln(2 - 5x)$ запишем формулу Тейлора 4-го порядка:

$$\ln(2 - 5x) = a_0 + a_1(x + 3) + a_2(x + 3)^2 + a_3(x + 3)^3 + a_4(x + 3)^4 + R_4(x).$$

Коэффициенты Тейлора a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 вычислим по формуле

$$a_n = \frac{f^{(n)}(-3)}{n!};$$

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(-3)}{0!} = f(-3) = \ln(2 - 5 \cdot (-3)) = \ln 17, \quad a_0 = \ln 17;$$

$$a_1 = \frac{f'(-3)}{1!} = (\ln(2 - 5x))' \Big|_{x=-3} = -5 \cdot (2 - 5x)^{-1} \Big|_{x=-3} = -\frac{5}{17}, \quad a_1 = -\frac{5}{17};$$

$$a_2 = \frac{f''(-3)}{2!} = \frac{1}{2} \cdot (-5)^2 \cdot (-1) \cdot (2 - 5x)^{-2} \Big|_{x=-3} = -\left(\frac{5}{17}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\left(\frac{5}{17}\right)^2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$a_3 = \frac{f'''(-3)}{3!} = \frac{1}{6} (-5)^3 (-1)(-2)(2 - 5x)^{-3} \Big|_{x=-3} = -\left(\frac{5}{17}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}, \quad a_3 = -\left(\frac{5}{17}\right)^3 \cdot \frac{1}{3};$$

$$a_4 = \frac{f^{IV}(-3)}{4!} = \frac{1}{24} (-5)^4 (-1)(-2)(-3)(2 - 5x)^{-4} \Big|_{x=-3} = -\left(\frac{5}{17}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}, \quad a_4 = -\left(\frac{5}{17}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}.$$

Для того чтобы записать остаточный член $R_4(x)$ в форме Лагранжа, найдем $f^V(c)$:

$$f^V(c) = (-5)^5 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (2-5c)^{-5} = -\left(\frac{5}{2-5c}\right)^5 \cdot 4!.$$

Итак, искомое разложение по формуле Тейлора имеет вид

$$\ln(2-5x) = \ln 17 - \frac{5}{17}(x+3) - \left(\frac{5}{17}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(x+3)^2 - \left(\frac{5}{17}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}(x+3)^3 - \left(\frac{5}{17}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}(x+3)^4 + R_4(x),$$

где $R_4(x) = -\left(\frac{5}{2-5c}\right)^5 \cdot \frac{1}{5}(x+3)^5$ – остаточный член в форме Лагранжа;

$R_4(x) = o((x+3)^4)$ – остаточный член в форме Пеано.

2 способ. Использование стандартного разложения.

Решим задачу, используя разложение функции $y = \ln(1+u)$ по формуле Маклорена (частный случай формулы Тейлора в точке $u_0 = 0$):

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} + R_n(u), \quad (7)$$

$$R_n(u) = (-1)^n \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

Преобразуем формулу задания данной функции так, чтобы аргумент логарифма имел вид $(1+u)$:

$$\begin{aligned} \ln(2-5x) &= \ln(2-5(x+3)+15) = \ln(17-5(x+3)) = \\ &= \ln 17 \left(1 + \left(-\frac{5}{17}\right)(x+3)\right) = \ln 17 + \ln \left(1 + \left(-\frac{5}{17}\right)(x+3)\right) = \ln 17 + \ln(1+u), \end{aligned}$$

где $u = -\frac{5}{17}(x+3)$.

Для разложения $\ln(1+u)$ по формуле Маклорена 4-го порядка возьмем первые четыре члена формулы (7) при условии $u = -\frac{5}{17}(x+3)$:

$$\begin{aligned} \ln(2-5x) &= \ln 17 + \ln(1+u) = \ln 17 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + R_4(u) = \\ &= \ln 17 + \left(-\frac{5}{17}\right)(x+3) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)^2 \cdot (x+3)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)^3 \cdot (x+3)^3 - \\ &- \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{17}\right)^4 \cdot (x+3)^4 + R_4\left(-\frac{5}{17}(x+3)\right), \end{aligned}$$

где $R_4\left(-\frac{5}{17}(x+3)\right) = (-1)^4 \frac{\left(-\frac{5}{17}\right)^5 (x+3)^5}{5 \cdot (1+c)^5}$.

Ответ: $\ln(2-5x) = \ln 17 - \frac{5}{17} \cdot (x+3) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{17}\right)^2 \cdot (x+3)^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{17}\right)^3 \cdot (x+3)^3 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{17}\right)^4 \cdot (x+3)^4 + R_4(x)$.

Задание 17

Для функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ из задания 9 составьте многочлен Тейлора второго порядка в точке $x_0 = -1$ и постройте его схематический график в окрестности этой точки.

Решение

Многочлен Тейлора $T_2(x)$ второго порядка для функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в точке $x_0 = -1$ имеет вид

$$T_2(x) = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!} (x+1) + \frac{y''(-1)}{2!} (x+1)^2.$$

Вычислим коэффициенты Тейлора: $a_0 = y(-1)$, $a_1 = y'(-1)$, $a_2 = \frac{y''(-1)}{2}$.

$$a_0 = y(-1) = \frac{5 \cdot (-1) + 1}{13 \cdot (2 \cdot (-1) + 3)} = -\frac{4}{13}.$$

При решении задания 9 была получена формула для вычисления производной n -го порядка данной функции:

$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot n! \cdot (2x+3)^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся ей для вычисления $y'(-1)$ и $y''(-1)$:

$$y'(-1) = (-1)^2 \cdot 2^0 \cdot 1! \cdot (-2+3)^{-2} = 1 \Rightarrow a_1 = 1,$$

$$y''(-1) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 2! \cdot (-2+3)^{-3} = -4 \Rightarrow a_2 = -2.$$

Теперь можно выписать искомым многочлен Тейлора $T_2(x)$:

$$T_2(x) = -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2.$$

Для построения схематического графика многочлена $T_2(x)$ заметим, что его линейная часть $-\frac{4}{13} + (x+1)$ совпадает с правой частью уравнения касательной, проведенной к графику $T_2(x)$ в точке $M_0\left(-1; -\frac{4}{13}\right)$.

Действительно, уравнение касательной в указанной точке имеет вид $y_{\text{кас.}} = T_2(-1) + T_2'(-1)(x+1)$.

Но в соответствии со свойствами многочлена Тейлора

$$T_2(-1) = y(-1) = -\frac{4}{13}; \quad T_2'(-1) = y'(-1) = 1.$$

$$\text{Это означает, что } y_{\text{кас.}} = -\frac{4}{13} + (x+1) \Leftrightarrow y_{\text{кас.}} = x + \frac{9}{13}.$$

Отметим тот факт, что график исходной функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ и график ее многочлена Тейлора $T_2(x)$ имеют одну и ту же касательную в точке $M_0\left(-1; -\frac{4}{13}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } T_2(x) = y_{\text{кас.}} - 2(x+1)^2 &\Leftrightarrow T_2(x) - y_{\text{кас.}} = -2(x+1)^2 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_{\text{кас.}} - T_2(x) = 2(x+1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство означает, что график многочлена $T_2(x)$, имея общую точку M_0 с касательной, расположен под этой касательной (для точек из некоторой окрестности точки M_0). Учитывая, что $T_2''(-1) = y''(-1) = -2 < 0$, можно утверждать, что в этой окрестности график $T_2(x)$ является выпуклым вверх.

Учитывая все сказанное, изобразим схематический график многочлена $T_2(x)$ в некоторой окрестности точки $M_0\left(-1; -\frac{4}{13}\right)$ (рис. 34).

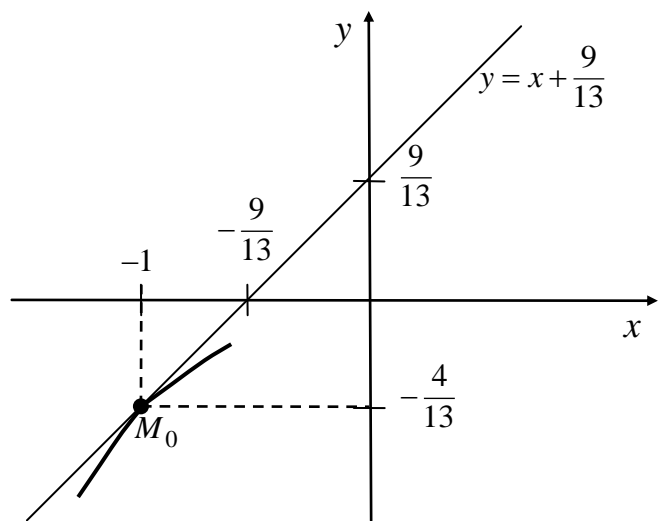


Рис. 34

В заключение отметим, что в соответствии с формулой Тейлора, для любых x из некоторой окрестности точки $x_0 = -1$ исходную функцию можно представить в виде

$$\frac{5x+1}{13(2x+3)} = T_2(x) + R_2(x), \text{ или}$$

$$\frac{5x+1}{13(2x+3)} = -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2 + R_2(x), \text{ или}$$

$\frac{5x+1}{13(2x+3)} = -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2 + o((x+1)^2)$ (если остаточный член $R_2(x)$ записать в форме Пеано).

Тогда с точностью до $o((x+1)^2)$ справедлива приближенная формула

$$\frac{5x+1}{13(2x+3)} \approx -\frac{4}{13} + (x+1) - 2(x+1)^2.$$

Это дает нам основание считать построенный график многочлена $T_2(x)$ приближенным эскизом графика функции $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$ в некоторой малой окрестности точки $M_0\left(-1; -\frac{4}{13}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 288 с.
3. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Астрель, 2003. – 656 с.
4. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 616 с.
6. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 223 с.
7. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – 223 с.
8. Высшая математика : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 391 с.
9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 560 с.
10. Задачи и упражнения по математическому анализу : учеб. пособие / Г. С. Бараненков [и др.] ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Интеграл-пресс, 1997. – 416 с.
11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – 304 с.
12. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
13. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 416 с.
14. Высшая математика: задачник : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 319 с.
15. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.
16. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричилова. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 640 с.

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ**

В трех частях

Часть 1

**Черняк Жанна Альбертовна
Малышева Ольга Николаевна
Примичева Зоя Николаевна и др.**

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*

Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 15.06.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 250 экз. Заказ 21.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6