ческой модификацией. Ангиология и сосудистая хирургия. 2012. Том 18 №2. С. 21 – 24.
4. Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А., Борисов В.Г. и др. Моделирование гемодинамики сосудистых протезов «КемАнгипротез» in silico. Мат. биол. и биоинф. 2017;12(2):559-569 doi: 10.17537/2017.12.559
5. Wen J, Zheng TH, Jiang WT, Deng XY, Fan YB. 2011. A comparative study of helical-type and traditional-type artery bypass grafts: numerical simulation. ASAIO J. 57 (5):399–406.
6. J. Casacuberta E. Soudah P. J. Gamez-Montero G. Raush R. Castilla J.S. Perez. 2015. Hemodynamics in the Thoracic Aorta using OpenFOAM: 4D PCMRI versus CFD.
7. С.В.Валландер. Лекции по гидродинамике Л.: Изд. ЛГУ, 1978, С. 255.
8. Caro, C., Pedley, T., Schroter, R., Seed, W., & Parker, K. (2011). The Mechanics of the Circulation. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139013406.
9. SALOME, Open source integration platform for numerical simulation. URL: http://www.salome-platform.org/
10. ParaView, open-source, multi-platform data analysis and visualization application. URL: https://www.paraview.org/

УДК 514.76

АЛГЕБРЫ ГОЛОНОМИИ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.П. Можей
БГУИР

Симметрическое пространство (в смысле Э. Картана) – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [2]. Инвариантные аффинные связности на трехмерных симметрических однородных пространствах изучались в статье [3]. В данной работе изучаются алгебры голономии инвариантных аффинных связностей на трехмерных симметрических однородных пространствах.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, такое, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [4].

Симметрическое пространство есть тройка ($\bar{G}$, G, σ), состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G для $\bar{G}$ и инволютивного автоморфизма σ, такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$, где s_o – симметрия для M в o. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Если $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1, то разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением*, тогда для симметрической алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Тензоры кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x) y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y) x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathrm{P})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{P})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{P})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ [4].

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{P})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$.

Теорема. Все трехмерные симметрические однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима ($\mathfrak{g} \neq \{0\}$), локально имеют следующий вид:

1.1.5.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1	0
u_2	u_2	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.5.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0
u_3	0	0	0	0

,

1.3.6.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	e_1	0	0
u_3	0	0	0	0

,

2.1.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	$-u_2$	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	$-u_1$	0	0	e_1	0

,

2.3.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	e_1	0

,

u_2	u_2	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

u_2	$-u_1$	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

2.3.3.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	0	e_1	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

,

2.9.12.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0
u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

,

3.8.8.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	u_1	0	0
e_2	0	0	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_3	0
u_2	0	$-u_2$	0	$-e_3$	0	$2e_2-e_1$
u_3	0	u_3	$-u_1$	0	e_1-2e_2	0

,

3.21.7.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	u_3	$-u_1$	0	e_2	0	$-e_1$
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	e_3	e_1	0

,

3.19.14.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_3	e_2
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	e_1
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-e_2$	$-e_1$	0

,

3.21.6.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	$-u_3$	u_2
e_2	e_3	0	0	0	u_1	0
e_3	$-e_2$	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	u_3	$-u_1$	0	$-e_2$	0	e_1
u_3	$-u_2$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_1$	0

,

4.11.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_4	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_4$	0	e_2
u_3	0	u_3	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_2$	0

,

4.13.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

4.13.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	e_2	0	$-e_4$
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_3	e_4	0

.

Замечание. В дальнейшем предполагается, что параметры, появляющиеся в процессе классификации, принадлежат Р , если не оговорено противное.

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности имеют вид:

Пара	Аффинная связность
3.19.14	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&r_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.21.6 3.21.7	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&q_{1,2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\q_{3,1}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&0&0\\0&r_{2,2}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}$
1.3.5 1.3.6	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&p_{2,3}\\p_{3,1}&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}\\-p_{3,2}&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&0\\-r_{1,2}&r_{1,1}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}$

В случаях 2.9.12, 4.11.2, 4.13.2, 4.13.3, 3.8.8, 2.1.2, 2.3.2, 2.3.3 аффинная связность тривиальная (нулевая).

Алгебры голономии указанных связностей:

Пара	Алгебра голономии	Пара	Алгебра голономии
4.11.2	$\begin{pmatrix}0&p_2&p_1\\0&-p_3&0\\0&0&p_3\end{pmatrix}$	4.13.2 4.13.3	$\begin{pmatrix}0&p_1&p_2\\0&0&-p_3\\0&p_3&0\end{pmatrix}$
3.8.8	$\begin{pmatrix}p_2&0&-p_1\\0&-2p_2&0\\0&0&2p_2\end{pmatrix}$	2.1.2	$\begin{pmatrix}p_1&0&0\\0&-p_1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.3.2	$\begin{pmatrix}0&-p_1&0\\p_1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	2.3.3	$\begin{pmatrix}0&-p_1&0\\p_1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.19.14	$\begin{pmatrix}0&p_2&p_1\\0&p_3&0\\0&0&-p_3\end{pmatrix}$	2.9.12	$\begin{pmatrix}p_2&0&p_1\\0&-2p_2&0\\0&0&2p_2\end{pmatrix}.$
3.21.6,3.21.7	$\begin{pmatrix}0&p_1&p_2\\0&0&-p_3\\0&p_3&0\end{pmatrix}$		

Таким образом, проведено описание трехмерных симметрических однородных пространств, всех инвариантных аффинных связностей на таких пространствах и алгебр голономии указанных связностей.

Список литературы

1. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Москов. ун-т, 1960. 307 с.
2. Широков, П.А. Симметрические пространства первого класса // Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. С. 366–383.
3. Можей, Н. П. Канонические связности на симметрических пространствах с неразрешимой группой преобразований // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2017, № 2 (95), С. 5–14.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1981. 2 т.

УДК 372.851

РОЛЯТА НА ИНФОРМАЦИОННИТЕ ТЕХНОЛОГИИ ЗА ПОВИШАВАНЕ ЕФЕКТИВНОСТТА НА ОБУЧЕНИЕТО

Т. Лилова, А. Петрова

ВТУ „Св. Св. Кирил и Методий“, Педагогически колеж – Плевен

Научен ръководител: доц.д-р Мариана Петрова

Abstract: The comprehensive, all-encompassing digital reality challenges education to constantly develop and look for new ways of achieving adequate education for children. One of the important problems of contemporary didactics - the implementation of e-learning in the Bulgarian school system - is discussed in the scientific article.

Keywords: ICT in education, primary school, didactic modeling, training tools, educational process, carriers of information.

Динамиката в развитието на компютърните технологии и добрите възможности, които те предлагат, са предпоставка за широкото им използване и прилагане в различни сфери на живота. Обучението не трябва да изоставя в това отношение. Необходимо е то да следва новостите, за да може да подготвя кадри, готови да се справят с изискванията на новото време [2, 3, 7, 8, 9, 10]. Развитието на всяко общество е функция на неговото образование. XXI век се характеризира с все по-бързото навлизане на информационните технологии и интернет в живота и в образованието [6, 12, 13].

На дневен ред пред образователната система и училище стои абсолютната необходимост от нов тип обучение, промяна на учебни програми, учебници, учебни помагала, начини и средства, прилагането на нови и различни стратегии на обучение.

Качествените изменения в процеса на преподаване и учене изискват непременно и нови методи, средства и компетенции. Все по-наложително е