Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (108), 2018

УДК 514.765.1

Нередуктивные однородные пространства и нормальные связности на них

Н.П. Можей

Приведено локальное описание трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих нормальную связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны и кручения указанных связностей. Исследованы алгебры голономии и определено, когда инвариантная связность нормальна.
Ключевые слова: нормальная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра Ли, редуктивное пространство.

A local description of three-dimensional nonreducible homogeneous spaces with an unsolvable group of transformations admitting a normal connection is given. A local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of Lie algebra and its subalgebra. All explicit invariant affine connections on the homogeneous spaces found are explicitly described, as well as the curvature and torsion tensors of the indicated connections. The holonomy algebras are studied and determined when the invariant connection is normal.
Keywords: normal connection, homogeneous space, transformation group, Lie algebra, reductive space.

Введение. Теория связностей играет важную роль во многих областях математики и физики, например, в физических моделях связность позволяет определить ковариантную производную, которая используется для записи ковариантных уравнений; поля Янга-Миллса (калибровочные поля), лежащие в основе моделей математической физики, представляют собой компоненты локальной формы связности. Связность является нормальной, если каждый элемент группы преобразований отображает расслоение голономии в себя, тогда любое тензорное поле на многообразии инвариантно под действием этой группы. Исследование нормальной связности, наряду с другими условиями, позволяет получить далеко идущие результаты об излучаемых многообразиях (см., например, работы К. Яно, Ш. Исихара, Ж. Эрбахера, Б. Чена и др., обзор исследований этого направления дан в [1]). Нормальные связности эрмитовых и келеровых многообразий, их операторы кривизны и группы голономии рассматривали С. Акиба, И. Исихара, К. Сакамото и другие, изучением плоской нормальной связности занимались, например, Т. Оцуки, Х. Рекцигель, А.И. Фирсов, Б. Чен, Л. Верстрелен, Г. Врэнчану, подробнее с обзором работ по теории связностей можно ознакомиться в [2].

Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность (см., например, [3]). Трехмерные нередуктивные однородные пространства изучались автором в работах [4], [5], где приведен более подробный тематический обзор, а также дано обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нередуктивные пространства, но внимание сосредоточено на пространствах, допускающих нормальную связность.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [3]. Опишем локально однородные пространства и связности на них. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Однородное пространство *редуктивно*, если существует разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, в противном случае пространство не является редуктивным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. *Тензор кручения* $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Тензоры кривизны и кручения играют важную роль в геометрии, их обращение в ноль является критерием локальной тривиальности связности и существования такой системы координат, в которой репер совпадает с координатным базисом касательного пространства.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. *Алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}$ равной подалгебре в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x) \mid x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Связность *нормальна*, если $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$ (например, [3]).

Классификация нередуктивных пространств, допускающих нормальные связности. Будем описывать пару ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$), причем $\{e_1, \ldots, e_{n-3}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$). В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются после таблицы умножения, в противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Любое трехмерное нередуктивное однородное пространство, допускающее нормальную связность, такое, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *и* $\mathfrak{g}$ *неразрешимы, локально имеет вид*

5.3.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	e_1	$-3e_1$	$-(1/2)e_5+(1/2)u_1$	$-e_4$
e_2	0	0	0	e_1	$-e_2$	$-3e_2$	$-e_3$	$(1/2)e_5+(1/2)u_1$
e_3	$-e_2$	0	0	e_5	$-2e_3$	0	0	u_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_5$	0	$2e_4$	0	u_3	0
e_5	$-e_1$	e_2	$2e_3$	$-2e_4$	0	0	u_2	$-u_3$
u_1	$3e_1$	$3e_2$	0	0	0	0	$-3u_2$	$-3u_3$
u_2	$(1/2)e_5-(1/2)u_1$	e_3	0	$-u_3$	$-u_2$	$3u_2$	0	0
u_3	e_4	$-(1/2)e_5-(1/2)u_1$	$-u_2$	0	u_3	$3u_3$	0	0

.

Для получения указанного результата найдены все трехмерные нередуктивные пары с неразрешимыми $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ (с подробным описанием можно ознакомиться в [4]) и определена пара, допускающая нормальную связность.

Действительно, пусть $\mathfrak{g}$ имеет вид 5.3, т. е.

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & x & y \\ 0 & u & z \\ 0 & t & -u \end{matrix}}\,.$$

Переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры выберем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ порождена вектором e_5. Имеем $\mathfrak{g}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1$, $\mathfrak{g}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, $\mathfrak{g}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\mathfrak{g}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4$, $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5$, $U^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$, $U^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$, $U^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$. Тогда $[u_1, u_2] = a_2e_2 + \alpha_2u_2$, $[u_1, u_3] = b_1e_1 + \beta_3u_3$, $[u_2, u_3] = c_5e_5 + \gamma_1u_1$. Пусть $[e_1, u_3] = pe_4$, в силу тождества Якоби $a_2 = -3p\gamma_1/2$, $\alpha_2 = 0$, $b_1 = 3p\gamma_1/2$, $\beta_3 = 3p$, $c_5 = 3p\gamma_1/2$. При p=0 отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)$=e_i, $i=\overline{1,5}$, $\pi(u_1)$=u_1, $\pi(u_2)$=u_2–γ_1e_2, $\pi(u_3)$=u_3+γ_1e_1, покажет, что пара является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс, при $p \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 5.3.2 посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)$=$(1/3)e_1$, $\pi(u_1)$=$-(p/2)u_1 - (3p/2)e_5$, $\pi(e_2)$=$(1/3)e_2$, $\pi(u_2)$=$3pu_2$+$(1/3)e_2$, $\pi(e_3)$=e_3, $\pi(u_3)$=$3pu_3$–$(p/6)e_1$, $\pi(e_4)$=e_4, $\pi(e_5)$=e_5. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста, а $\bar{\mathfrak{g}}_1$ нет, найденные пары не эквивалентны. В случае 5.3.2 найдем инвариантные аффинные связности. Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix},\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix},\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i,j=\overline{1,3}$). Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1,u_1]) \Rightarrow$ $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)] = -3\Lambda(e_1)$, имеем $p_{2,2} = p_{1,1} - 3$, $p_{2,3} = p_{2,1} = p_{3,1} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2,u_1]) \Rightarrow$ $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)] = -3\Lambda(e_2)$, $p_{3,3} = p_{1,1} - 3$, $p_{3,2} = 0$. Так как $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)] = 0$, то $p_{1,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_1)] = 0$, то $p_{1,3} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)] = -\Lambda(e_3)$, $q_{3,1} = q_{3,2} = 0$, $q_{3,3} = q_{1,1}$, $q_{2,1} = 2$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)] =$ $(1/2)\Lambda(u_1) - (1/2)\Lambda(e_5)$, $q_{1,1} = 2$, $q_{2,2} = q_{1,1}$, $q_{2,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{1,2} = 0$. Поскольку $[\Lambda(e_4),\Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$, $r_{1,1} = 0$, $r_{1,2} = q_{1,3}$, $r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = 0$, $r_{3,1} = 2$, $r_{3,2} = r_{3,3} = 0$. Так как $[\Lambda(e_5),\Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$, $p_{1,1} = 0$. Получим, что аффинная связность имеет вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{1,2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для любого $r_{12} \in \mathbb{R}$ (для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензор кривизны –

$$R(u_1,u_2) = \left[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)\right] - \Lambda(\left[u_1,u_2\right]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6r_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3) = \left[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)\right] - \Lambda(\left[u_1,u_3\right]) = \begin{pmatrix} 0 & 6r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3) = \left[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)\right] - \Lambda(\left[u_2,u_3\right]) = \begin{pmatrix} -4r_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 2r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 2r_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения – $T(u_1,u_2)=T(u_1,u_3)=0$, $T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}}-\left[u_2,u_3\right]_{\mathfrak{m}}=(-2r_{1,2},0,0)$. При $r_{1,2} \neq 0$ алгебра, порожденная множеством $V = \{[\Lambda(x),\Lambda(y)] - \Lambda([x,y]) \mid x,y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, т. е. $R(u_i,u_j)$, имеет вид $\begin{pmatrix} 2p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$, она не совпадает с алгеброй голономии (не является совершенной), так как алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. В данном случае $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} = \Lambda(\bar{\mathfrak{g}})$ и $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$, т. е. связность нормальна (при $r_{1,2} \neq 0$). При $r_{1,2} = 0$ алгебра голономии нулевая и связность не является нормальной. Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных неразрешимых пар, допускающих нормальную связность, не существует.

Теорема 2. *Все трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, а $\mathfrak{g}$ разрешима, локально имеют следующий вид:*

1.5.19.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	u_1
u_1	$-e_1$	0	0	u_3
u_2	0	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	0	0

,

2.8.7 (λ=0).	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	0	u_1

2.17.27.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_1$	e_2	u_1

e_2	0	0	0	u_2	0 ,	e_2	0	0	e_2	0	u_2 ,
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3	u_1	$-2e_1$	$-e_2$	0	u_2	$2u_3$
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	u_2	$-e_2$	0	$-u_2$	0	0
u_3	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0	u_3	$-u_1$	$-u_2$	$-2u_3$	0	0

3.25.30.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	0
e_2	0	0	0	0	e_2	u_1
e_3	e_2	0	0	e_2	$2e_3$	u_2 ,
u_1	0	0	$-e_2$	0	$-u_1$	0
u_2	$-u_1$	$-e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-2u_3$	0

3.13.6 (μ=0,-1).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-\mu e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	0	μu_3
e_2	μe_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	e_3	u_1 ,
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

4.21.11 (μ=0).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	0	e_4	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0
e_3	0	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2 .
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	0	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0

Для получения указанного результата найдены все трехмерные нередуктивные пары с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$ (с подробным описанием можно ознакомиться в [5]) и определены пары, допускающие нормальную связность.

Будем выписывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Аффинные связности на парах из теоремы 2 имеют вид, приведенный в таблице 1.

Таблица 1 – Аффинные связности

Пара	Аффинная связность
4.21.11, μ=0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 1 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.13.6, μ=0	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & -1 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.13.6, μ=−1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.25.30	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & -1 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & -1 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.8.7, λ=0	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ -1/2 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.17.27	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ -1 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3} & r_{2,3} \\ -1 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
1.5.19	$\begin{pmatrix} -1/2 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,1}+1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ -1/2 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix}$

Далее тензоры кривизны R описаны через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензоры кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. В случаях 3.25.30, 2.17.27, 1.5.19 $\bar{\mathfrak{g}}$ не является полупростой, ее радикал коммутативен, в случаях 4.21.11 ($\mu=0$), 3.13.6 ($\mu=0$, -1), 2.8.7 ($\lambda=0$) $\bar{\mathfrak{g}}$ также не является полупростой, ее радикал некоммутативен, в этих случаях тензоры кривизны и кручения имеют вид, приведенный в таблицах 2 и 3 соответственно.

Таблица 2 – Тензоры кривизны

Пара	Тензор кривизны
3.25.30	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -p_{1,3} & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2r_{1,1} & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3}-3r_{1,3} \\ 0 & -p_{1,3}-2r_{1,1} & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & -p_{1,3}-2r_{1,1} \end{pmatrix}$
2.17.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}-2q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,3}-2r_{1,1} & 3q_{1,3} & -4r_{1,3}+p_{1,3}^2+q_{1,3}p_{2,3} \\ 0 & -2r_{1,1}-2p_{1,3}+2q_{2,3} & p_{2,3}p_{1,3}+p_{2,3}q_{2,3}-3r_{2,3} \\ 0 & 0 & -p_{1,3}-2r_{1,1} \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -2q_{1,3} & 0 & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}q_{2,3} \\ p_{1,3}-2q_{2,3} & q_{1,3} & -r_{1,3}+q_{1,3}p_{2,3}+q_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & q_{1,3} \end{pmatrix}$
1.5.19	$\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,2}/2+p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2} & -q_{1,3}+p_{1,2}q_{2,3}-q_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-q_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3}-p_{1,3}/2-r_{1,1} & -3r_{1,2}/2+p_{1,2}r_{2,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}p_{1,2} & A \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3}-r_{2,2} & B \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$ $A=-2r_{1,3}+p_{1,2}r_{2,3}+p_{1,3}^2-r_{1,2}p_{2,3}$, $B=p_{2,3}r_{1,1}+2p_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}p_{2,3}-3r_{2,3}/2$, $C=-p_{1,2}p_{2,3}-p_{1,3}/2-r_{1,1}$, $\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{2,3}-q_{1,3}/2 & q_{1,1}r_{1,2}+q_{1,2}r_{2,2}+ & D \\ & +q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}q_{1,2}-r_{1,2}q_{2,2} & \\ p_{2,3}q_{1,1}-q_{2,2}p_{2,3}-q_{2,3}/2 & p_{1,2}q_{2,3}+q_{1,2}p_{2,3} & H \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}+q_{1,2}/2-p_{1,2}q_{2,2} & q_{1,3}/2-p_{1,2}q_{2,3} \end{pmatrix},$ $D=q_{1,2}r_{2,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}q_{2,3}$, $H=q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}+p_{2,3}q_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3}-r_{2,3}q_{1,1}$
4.21.11, $\mu=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,3} & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+2r_{1,1} & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & p_{1,3}+2r_{1,1} \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -q_{2,3}+2p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2p_{1,3}+q_{2,3} & -r_{2,3}+p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} -2r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,3}-2r_{1,1}-2p_{1,3} & -4r_{2,3}+q_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & q_{2,3}-2r_{1,1}-2p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание таблицы 2

2.8.7, $\lambda=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,3}/2-r_{1,1} & 0 & -2r_{1,3}+p_{1,3}^2 \\ 0 & -r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,3}/2-r_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -q_{2,3}/2 & 0 & q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 3 – Тензоры кручения

Пара	Тензор кручения
3.25.30	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),\left(2q_{1,3},p_{1,3}-r_{1,1},0\right)$
2.17.27	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0\right),\left(2q_{1,3},2q_{2,3}-r_{1,1}-p_{1,3},0\right)$
1.5.19	$\left(p_{1,2}-q_{1,1},0,0\right),\left(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0\right),\left(q_{1,3}-r_{1,2},q_{2,3}-r_{2,2},q_{1,1}-p_{1,2}\right)$
4.21.11, $\mu=0$	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),\left(0,p_{1,3}-r_{1,1},0\right)$
3.13.6, $\mu=0$	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),\left(0,2q_{2,3}-r_{1,1}-p_{1,3},0\right)$
3.13.6, $\mu=-1$	$(0,0,0),\left(0,2p_{2,3},0\right),(0,0,0)$
2.8.7, $\lambda=0$	$(0,0,0),\left(p_{1,3}-r_{1,1},0,0\right),\left(0,q_{2,3}-r_{2,2},0\right)$

Для пары 4.21.11 ($\mu=0$) связность нормальна, если $p_{1,3}=-2r_{1,1}\neq0$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_4 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_4 \end{pmatrix}$. У пары 3.13.6 ($\mu=0$) связность является нормальной при $q_{2,3}=2r_{1,1}+2p_{1,3}$, $r_{1,1}\neq0$, $r_{2,3}\neq(q_{2,3}^2+q_{1,3}^2)/4$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_4 & p_5 \\ 0 & p_6 & -p_4 \end{pmatrix}$, при $\mu=-1$ связность нормальна, если $p_{2,3}\neq0$, алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$. У пары 3.25.30 связность нормальна, если $p_{1,3}\neq0$, $\gamma=2r_{1,1}/p_{1,3}$, алгебра голономии – $\begin{pmatrix} \gamma p_6 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_4+(1+\gamma)p_6 & p_3 \\ 0 & p_5 & -p_4+(1+\gamma)p_6 \end{pmatrix}$.
В случае 2.8.7 связность является нормальной при $p_{1,3}=-2r_{1,1}$, $r_{2,2}\neq0$, $r_{1,3}\neq1/2p_{1,3}^2$, $q_{2,3}=0$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & 0 \\ p_4 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$, либо при $p_{1,3}=-2r_{1,1}$, $r_{2,2}\neq0$, $r_{1,3}\neq1/2p_{1,3}^2$, $q_{2,3}\neq0$, тогда алгебра голономии $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_3 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$. Для пары 2.17.27 связность нормальна при $q_{1,3}\neq0$, $q_{2,3}=2p_{1,3}+3r_{1,1}$, тогда алгебра голономии – $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$; либо при $q_{1,3}\neq0$, $q_{2,3}\neq2p_{1,3}+3r_{1,1}$, алгебра голономии – $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$; либо при $q_{1,3}=0$, $r_{1,3}\neq p_{1,3}^2/4$, $r_{1,1}=-q_{2,3}$, $p_{1,3}=-2r_{1,1}$, алгебра голоно-

мии – $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ p_3 & 0 & p_4 \\ p_5 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}$; либо при $q_{1,3}=0$, $r_{1,3}\neq p_{1,3}^{\ 2}/4$, $r_{1,1}\neq -q_{2,3}$, $p_{1,3}=-2r_{1,1}$, алгебра голономии – $\begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ p_3 & 0 & p_4 \\ p_5 & 0 & p_6 \end{pmatrix}$; либо при $q_{1,3}=0$, $\gamma=(p_{1,3}+2r_{1,1})/(2r_{1,1}+2p_{1,3}-2q_{2,3})$, $r_{1,3}\neq p_{1,3}^{\ 2}/4$, $r_{1,1}+p_{1,3}-q_{2,3}\neq 0$, алгебра голономии – $\begin{pmatrix} p_5+\gamma p_6 & 0 & p_1 \\ p_3 & p_6 & p_2 \\ p_4 & 0 & -p_5+\gamma p_6 \end{pmatrix}$.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередуктивных пар с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$ и разрешимой $\mathfrak{g}$, допускающих нормальную связность, не существует.

Заключение. Приведено локальное описание всех трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих нормальную связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Описаны в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, а также тензоры кривизны и кручения указанных связностей. Исследованы алгебры голономии и определено, когда инвариантная связность нормальна. Полученные результаты могут быть использованы при решении математических и физических задач, требующих изучения инвариантных объектов на однородных пространствах.

Литература

1. Лумисте, Ю.Г. Дифференциальная геометрия подмногообразий / Ю.Г. Лумисте // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1975. – Т. 13. – С. 273–340.

2. Евтушик, Л.Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. – 1979. – Т. 9. – С. 5–247.

3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т. – 416 с.

4. Можей, Н.П. Трехмерные нередуктивные однородные пространства неразрешимых групп Ли / Н.П. Можей // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 20–26.

5. Можей, Н.П. Связности на нередуктивных однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований / Н.П. Можей // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 5. – С. 7–16.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 01.02.2018