

УДК 621.372.512

СИНТЕЗ СОГЛАСУЮЩИХ ЦЕПЕЙ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПЕРЕДАЧИ МОЩНОСТИ ЗАДАННОГО УРОВНЯ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ЛЕВЕНБЕРГА–МАРКВАРДТА

Д.В. ПЕГАСИН

Военная академия Республики Беларусь
пр. Независимости, 220, Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 11 января 2010

Рассматривается методика расчета цепей, согласующих импедансы источника сигналов и нагрузки, основанная на алгоритме Левенберга–Марквардта. Характеристики передачи мощности рассчитанных схем имеют заданный уровень в диапазоне согласования и обладают конечными нулями передачи вне этого диапазона. Методика использует исходные данные, представленные как в непрерывной, так и в дискретной формах. Эффективность алгоритма проверяется на примере тестовой задачи Фано. Приводится характеристика передачи мощности рассчитанной схемы согласования.

Ключевые слова: алгоритм Левенберга–Марквардта, согласующие цепи, характеристика передачи мощности.

Введение

Проблема синтеза систем передачи сигналов с характеристиками передачи мощности заданного уровня занимает важное место в теории оптимального синтеза линейных цепей [1]. Особенно это касается вопроса синтеза согласующих цепей (СЦ) для активных четырехполюсников, таких как транзисторные модули, которые обладают существенной неравномерностью собственного коэффициента усиления по мощности. В настоящей статье рассматривается возможный метод решения этой задачи, основанный на хорошо известном из математики и теории оптимизации алгоритме Левенберга–Марквардта (АЛМ) [2, 3]. АЛМ решает задачу нелинейной минимизации целевой функции методом наименьших квадратов и находит достаточно широкое применение при обучении нейронных сетей.

Первая часть настоящей статьи посвящена общему описанию алгоритма. Во второй части приводится приложение этого алгоритма к решению нетривиальной задачи синтеза СЦ с характеристикой передачи мощности заданного уровня в диапазоне согласования и конечными нулями передачи вне этого диапазона. Работоспособность методики проверяется на примере тестовой задачи Фано [4].

Описание алгоритма

Задана регрессионная выборка — N пар $D = \omega_i, y_i$ свободной переменной ω и зависимой переменной y . Также задана регрессионная модель — функция $f(x, \omega_i)$, непрерывно дифференцируемая в области $N \times k$. Требуется найти такие значения координат вектора параметров $x = [x_1, \dots, x_k]^T$, где k — размерность вектора, которые бы доставляли локальный минимум функции ошибки

$$E_D = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x, \omega_i))^2. \quad (1)$$

Расчет вектора параметров является итерационным. Для первой итерации задается начальный вектор параметров x_0 , который заменяется вектором

$$x = x_0 + \Delta x. \quad (2)$$

Каждая последующая итерация использует в качестве начального вектора параметров вектор x , рассчитанный на предыдущем этапе. Это означает, что в качестве x_0 для второй итерации используется вектор параметров x , вычисленный на первом шаге, для третьей итерации — на втором шаге и т.д.

Для оценки приращения Δx используется линейное приближение функции, характеризующееся двумя первыми членами ее разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x :

$$f(x + \Delta x, \omega) \approx f(x, \omega) + J \Delta x,$$

где J — якобиан функции $f(x, \omega_i)$ в точке x .

Матрица J размером $(N \times k)$ имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, \omega_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(x, \omega_1)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x, \omega_N)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(x, \omega_N)}{\partial x_k} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Приращение Δx в точке x , доставляющей минимум показателя оптимальности (1), равно нулю. Поэтому для нахождения искомого значения приращения Δx приравняем к нулю вектор частных производных E_D по x . Для этого (1) представим в виде:

$$E_D = |y - f(x + \Delta x)|^2,$$

где $y = [y_1, \dots, y_N]^T$ и $f(x + \Delta x) = [f(x + \Delta x, \omega_1), \dots, f(x + \Delta x, \omega_N)]^T$; знак "T" означает транспонирование.

Преобразовывая это выражение

$$|y - f(x + \Delta x)|^2 = (y - f(x + \Delta x))^T (y - f(x + \Delta x)) = f^T(x + \Delta x) f(x + \Delta x) - 2y^T f(x + \Delta x) + y^T y,$$

и дифференцируя, получим

$$\frac{\partial E_D}{\partial x} = J^T J \Delta x - J^T (y - f(x)), \quad (4)$$

где $f(x) = [f(x, \omega_1), \dots, f(x, \omega_N)]^T$.

Приравняв (4) к нулю, получим систему линейных уравнений, из которой определим искомое значение приращения Δx :

$$\Delta x = J^T J^{-1} J^T (y - f(x)). \quad (5)$$

Расчеты показывают, что матрица $J^T J$ в формуле (5) часто оказывается вырожденной. Это устраняется введением параметра регуляризации $\lambda \geq 0$ [2]:

$$\Delta x = (J^T J + \lambda E)^{-1} J^T (y - f(x)), \quad (6)$$

где E — единичная матрица размером $k \times k$. Параметр регуляризации назначается на каждой итерации. Его значение должно быть как минимум на порядок больше, чем самый большой элемент матрицы $J^T J$.

Постановка задачи согласования

Условимся считать известными в диапазоне частот, в который входит полоса частот согласования, параметры согласуемых двухполосников — источника сигналов (ИС) с сопротивлением $\dot{Z}_s = R_s + jX_s$ и нагрузки с сопротивлением $\dot{Z}_n = R_n + jX_n$ (соответствующие им проводимости $\dot{Y}_s = 1/\dot{Z}_s = G_s + jB_s$ и $\dot{Y}_n = 1/\dot{Z}_n = G_n + jB_n$). Такое представление позволяет использовать в качестве исходных данных дискретный набор параметров согласуемых импедансов для нагрузок разных типов в независимости от их структуры. Требуется синтезировать СЦ, которая реализует характеристику передачи мощности заданного уровня в частотном диапазоне $\omega = [\omega_{\min}, \dots, \omega_{\max}]$ и имеет при этом конечные нули передачи вне этого диапазона.

Следует отметить, что с помощью существующих аналитических подходов затруднительно выполнить синтез СЦ с вещественными конечными нулями передачи. Аналитическая теория Фано–Юлы [4, 5] для таких цепей приводит к сложным уравнениям. Аналитическое решение этой задачи синтеза для разных типов нагрузок в известной автору литературе отсутствует. Кроме того, здесь имеет место усложнение задачи: требования предъявляются не только к форме передаточной характеристики, но и к ее уровню в полосе частот согласования.

Базовые соотношения. Расчет согласующих каскадов

В качестве структуры СЦ выберем известную из [6] структуру, соответствующую полосовому фильтру, реализующему изоэкстремальную функцию передачи мощности. Это означает, что решение поставленной задачи согласования сводится к расчету необходимого для достижения критерия оптимальности количества включенных между заданными двухполосниками согласующих каскадов: параллельного с проводимостью

$$B = \omega C - \omega^{-1} L^{-1}, \quad (7)$$

и последовательного с сопротивлением

$$X = \frac{-1}{\omega C - \omega^{-1} L^{-1}}, \quad (8)$$

где C, L — элементы согласующих каскадов.

Поставленная задача решается как совокупность задач наилучшего приближения (1), в которых в качестве регрессионных моделей выберем функции рабочего коэффициента потерь мощности [7] (РКПМ). Так, при включении между согласуемыми ДП каскада с сопротивлением (8) регрессионная модель будет следующей:

$$f(x, \omega_i) = \frac{R_{s_i} + R_{n_i}^2 + X_{s_i} + X_{n_i} + X^2}{4R_{s_i} R_{n_i}}, \quad (9)$$

где индекс "i" обозначает номер отсчета частоты из диапазона согласования, общее количество которых равно N . Формула для регрессионной модели при включении в схему каскада с проводимостью (7) аналогична (9) после замен:

$$X \rightarrow B; R \rightarrow G. \quad (10)$$

В выражении (9) $x = [C, L]^T$ — вектор искомых параметров.

В терминах задачи (1) y_i — зависимая переменная, определяемая набором чисел, характеризует требования к РКПМ на отдельных отсчетах частоты диапазона согласования; $f(x, \omega_i)$ — регрессионная модель, которая может определяться либо выражением (9), либо этим же выражением после замен (10). Важной особенностью является то, что требуемая зависимость характеристики усиления мощности в диапазоне согласования, определяемая дискретными значениями переменной y_i , может иметь заданный уклон или вовсе являться некоторой произвольной кривой.

Якобиан (3) для расчета приращения (6) вычисляется следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial C} x, \omega_1 & \frac{\partial f}{\partial L} x, \omega_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial C} x, \omega_N & \frac{\partial f}{\partial L} x, \omega_N \end{bmatrix}, \quad (11)$$

элементы которого для регрессионной модели (9) определяются на каждой частоте:

$$\frac{\partial f}{\partial C} x, \omega_i = \frac{1}{2} \frac{\omega_i}{R_{s_i} R_{n_i}} \frac{X_{s_i} + X_{n_i} - 1 / \omega_i C - \omega_i^{-1} L^{-1}}{\omega_i C - \omega_i^{-1} L^{-1}{}^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} x, \omega_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_i L^2 R_{s_i} R_{n_i}} \frac{X_{s_i} + X_{n_i} - 1 / \omega_i C - \omega_i^{-1} L^{-1}}{\omega_i C - \omega_i^{-1} L^{-1}{}^2}. \quad (13)$$

После замен (10) элементы якобиана вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial C} x, \omega_i = \frac{1}{2} \frac{\omega_i}{G_{s_i} G_{n_i}} B_{s_i} + B_{n_i} + \omega_i C - \omega_i^{-1} L^{-1}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} x, \omega_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_i L^2 G_{s_i} G_{n_i}} B_{s_i} + B_{n_i} + \omega_i C - \omega_i^{-1} L^{-1}. \quad (15)$$

Ниже приводятся методики расчета значений элементов элементарных согласующих каскадов, которые будут использованы при синтезе СЦ в целом.

Для расчета согласующего каскада с сопротивлением (8) последовательность вычислений следующая:

а) задается начальное приближение вектора искомых параметров. Обозначим вектор начального приближения $x = [C_0, L_0]^T$, в котором C_0, L_0 — нормированные значения элементов;

б) по формуле (6) рассчитываем приращение Δx . Для этого в качестве регрессионной модели используем выражение (9), в которое подставляются параметры согласуемых сопротивлений; элементы якобиана рассчитываются согласно (12), (13). В соотношениях (9), (12), (13) C, L есть C_0, L_0 , соответствующие начальному приближению. С помощью формулы (2) учитываем изменение вектора параметров на данном шаге;

в) в качестве начального приближения для следующей итерации используем значения C, L , рассчитанные на предыдущем этапе. С учетом этого в том же порядке, что и в п. б), определяются очередное приращение вектора параметров и новые значения элементов. Такие вычисления проводятся заданное количество раз. Они могут быть прекращены в случае, если приращение Δx в последующей итерации меньше заданного значения, либо если параметры C, L доставляют ошибку E_D , меньшую заданной величины. Значения элементов C, L на последней итерации считаются искомыми.

В том случае, когда оба значения C, L либо одно из них в результате расчетов окажется отрицательным, т.е. физически нереализуемым, необходимо увеличивать допустимое значение функции ошибки (тем самым сознательно ухудшая качество решения) до получения положительных, физически реализуемых значений элементов. Такой подход позволяет определить близкие к потенциальным возможности выбранной структуры каскада при положительности его элементов по соответствию заданному критерию оптимальности.

Естественно, что порядок расчета элементов каскада с проводимостью (7) аналогичен п.п. а)–в) после замен (10) в выражении (9), а также формул:

$$12 \rightarrow 14 ; 13 \rightarrow 15. \quad (16)$$

Синтез согласующей цепи

Расчет СЦ в целом иллюстрируется рис. 1.

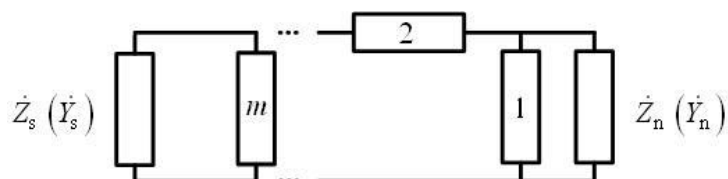


Рис. 1. Порядок расчета согласующих каскадов

Цифрами обозначен принятый порядок расчета каскадов СЦ, количество которых в общем случае равно некоторому целому числу m . Методика синтеза СЦ следующая.

1. Выполняя п.п. а)–в) предыдущего подраздела после замен (10), (16), определяем значения элементов каскада 1 с проводимостью (7). При этом в выражения (9), (14) и (15) подставляем исходные параметры источника сигналов и нагрузки. Для дальнейших расчетов включение в схему данного каскада учитывается пересчетом по очевидным формулам его сопротивления (проводимости) к сопротивлению (проводимости) нагрузки $\dot{Z}_n (\dot{Y}_n)$.

2. Вновь следуя п.п. а)–в), вычисляем значения элементов следующего каскада 2 с сопротивлением (8). Причем в формулы (9), (12), (13) подставляем параметры ИС и нагрузки, пересчитанной с учетом каскада 1.

3. После подключения каскада 2 производим повторный расчет каскада 1 уже с учетом 2, затем снова 2 с учетом 1 и т.д. до сходимости функции ошибки (1) к требуемому значению. При очередном пересчете каскада 1 влияние каскада 2 учитывается пересчетом импеданса последнего к импедансу ИС.

Порядок расчета элементов последующих добавляемых каскадов аналогичен пунктам 1–3. Присоединение, расчет и оптимизация каскадов производится необходимое количество раз, которое может быть наперед заданным. Если оно не является таковым, то критерием окончания решения является сходимость функции ошибки к требуемым значениям.

Отметим, что в основе описанной выше методики лежит неочевидное в контексте поставленной задачи соотношение (6), в котором для расчета элементов якобиана (11) впервые предлагается использовать формулы (12)–(15), что позволяет учесть значение функции ошибки на каждой частоте диапазона согласования.

Пример решения задачи согласования

Рассмотрим известную тестовую задачу Фано [4]: согласовать RLC-нагрузку с нормированными значениями $R_n=1$ Ом, $L_n=2,3$ Гн, $C_n=1,2$ Ф в полосе частот $\omega=0\dots 1$ рад/с. Рис. 2, на котором для большей наглядности элементы нормированы к уровню импеданса 50 Ом и частоте $2\pi \cdot 10^9$ Гц, иллюстрирует данную задачу. Синтезируем СЦ (на рис. 2 — МС — "matching chain") с уровнем коэффициента передачи мощности 0,9 в диапазоне $0\dots 1$ ГГц и конечным нулем передачи вне этого диапазона. Сопротивление ИС равно 100 Ом.

На основе методики предыдущего раздела статьи разработан алгоритм, реализованный в среде программирования C#.NET. Полученное с помощью данной программы решение задачи приведено на рис. 3, а характеристика передачи мощности этой схемы $K_p(\omega)$ — на рис. 4. В качестве критерия остановки расчетов был выбран критерий достижения функцией ошибки (1) значения, меньшего 0,8 при 100 дискретах частоты в полосе согласования; начальное значение вектора нормированных параметров для каждого из каскадов принималось равным [1, 1]. Численное значение функции ошибки (1) для данной схемы составило 0,7991, и дальнейшее увеличение количества согласующих каскадов не привело к ее существенному уменьшению. Значения параметров регуляризации для трех каскадов СЦ следующие: $\lambda_1=1,4 \cdot 10^{24}$; $\lambda_2=1,2 \cdot 10^{25}$; $\lambda_3=2,1 \cdot 10^{25}$. Здесь номера индексов совпадают с очередностью расчета каскадов (рис. 1).

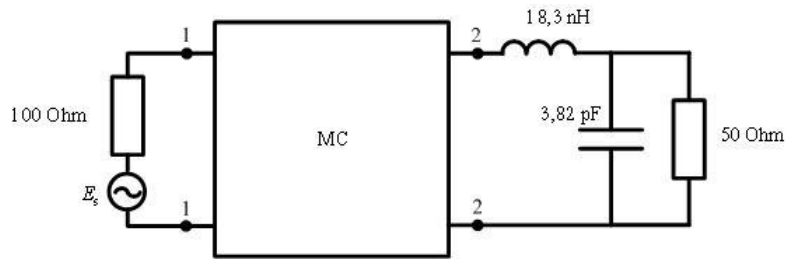


Рис. 2. Задача согласования Фано

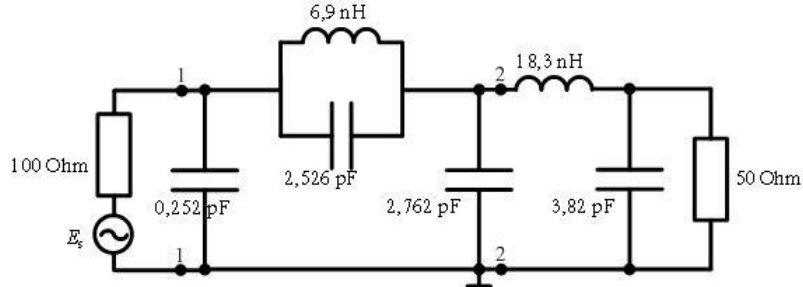


Рис. 3. Полученное решение задачи согласования

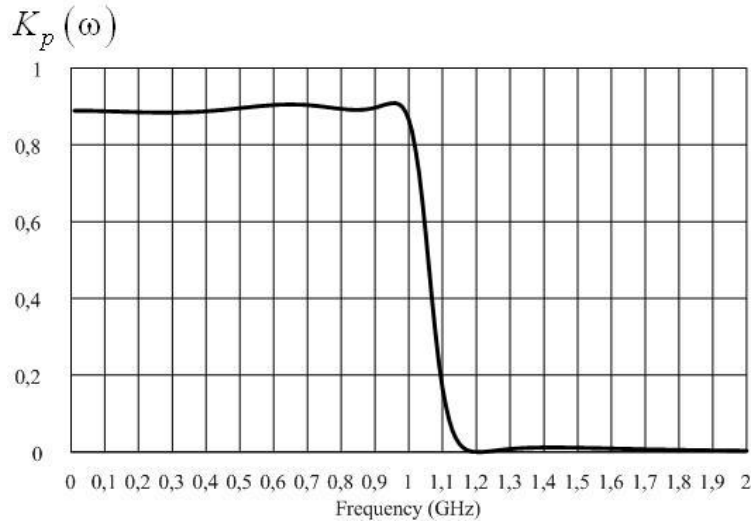


Рис. 4. Характеристика передачи мощности разработанной схемы

Заключение

Приведенная методика предоставляет возможность синтезировать СЦ со структурой, позволяющей реализовать характеристики передачи мощности заданного уровня. При этом структуры каскадов СЦ могут быть как самыми простыми, реализующими характеристики передачи, близкие к функциям Баттерворта или Чебышева, так и более сложными, реализующими, как показано в примере, зависимость коэффициента передачи, близкую к эллиптической.

Полученное решение достаточно сложной задачи подтверждает работоспособность и эффективность приведенного алгоритма. Можно показать, что выбор более сложных целевых функций, а также соответствующих регрессионных моделей, определяющих структуру элементарных каскадов, делает данную методику применимой к расчету СЦ для схем, содержащих активные элементы. Эти факты определяют практическую значимость полученных в статье новых результатов.

SYNTHESIS OF MATCHING CHAINS WITH PRESCRIBED LEVEL OF TRANSDUCER POWER CHARACTERISTICS ON BASIS OF THE LEVENBERG–MARQUARDT ALGORITHM

D.V. PEGASIN

Abstract

The method of the calculation of the chains, matching of source signals and load impedances, on basis of the Levenberg–Marquardt algorithm is considered. Calculated chains transducer power characteristics have prescribed level within the matching range and possess the final zero outside of this range. The method uses the row data, presented both in continuous and discrete forms. Efficiency of the algorithm is checked on example of the Fano test problem. Calculated matching chain transducer power characteristic is presented.

Литература

1. Ланнэ А.А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. М., 1969.
2. Levenberg K. // Quart. Appl. Math. 1944. Vol. 2. P. 164.
3. Marquardt D. // SIAM J. Appl. Math. 1963. Vol. 11. P. 431.
4. Фано Р. Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов. М., 1965.
5. Youla D.C. // IEEE Trans. Circuit Theory. 1964. № 3. P. 30–50.
6. Хотунцев Ю.Л. Полупроводниковые СВЧ устройства. М., 1978.
7. Маттей Д.Л., Янг Л., Джонс Е.М.Т. Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи. М., 1971.