УДК 517.943

К ВОПРОСУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА С СУММОЙ ЛИНЕЙНОГО И БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРОВ В $\boldsymbol{R}^3$

Н.В. СПИЧЕКОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 12 января 2010

Построен интегрирующий множитель для невырожденного вполне интегрируемого уравнения Пфаффа с суммой линейного и билинейного операторов в $\boldsymbol{R}^3$.

Ключевые слова: вполне интегрируемое уравнение Пфаффа, общий интеграл, частное решение, интегрирующий множитель, линейный и билинейный операторы.

Введение

Уравнения в полных дифференциалах

$$dx = f_1(t, x(t))dt_1 + \ldots + f_m(t, x(t))dt_m \quad (t \in \boldsymbol{R}^m, x(t) \in \boldsymbol{R}^n)$$

широко применяются в дифференциальной геометрии, теоретической физике, электродинамике, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории оптимального управления и др. Систематическое изложение теории таких уравнений и их обобщений в произвольных банаховых пространствах — уравнений в полных производных — дано в [1–5]. Там же приведен подробный обзор литературы.

Уравнение в полных дифференциалах является частным случаем уравнения Пфаффа

$$(F(x), dx) = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ — вектор из области $G \subset \boldsymbol{R}^n, n \geq 3;$ $f_i : G \to \boldsymbol{R},$ $i = \overline{1, n};$ $F = (f_1, ..., f_n) \in C^1(G)$; $(.,.)$ — скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$.

Среди уравнений (1) выделяют класс вполне интегрируемых [6, с. 93] уравнений, обладающих тем свойством, что через каждую неособую точку ζ области G ($F(\xi) \neq 0$) проходит единственное интегральное многообразие размерности $n-1$. Интегрирование таких уравнений сводится [7, с. 355–364] к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае $n = 3$ условие полной интегрируемости может быть записано в виде

$$(F(x), \operatorname{rot} F(x)) = 0. \tag{2}$$

Условие полной интегрируемости (2), в частности, будет выполнено, если

$$\operatorname{rot} F(x) \equiv 0. \tag{3}$$

В этом случае левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом некоторой функции от трех переменных. Поэтому при выполнении условия (3) уравнение (1) называют уравнением в полных дифференциалах. Общий интеграл [8] такого уравнения записывается в виде $\int\limits_{u_0}^{u}(F(v),dv)=c,$ где c — произвольная постоянная.

Таким образом, при выполнении условий (3) нахождение общего интеграла уравнения (1) сводится к вычислению квадратур. Если же условие (3) не выполняется, то, вообще говоря, построение общего интеграла уравнения (1) сопряжено с определенными трудностями. Известно несколько работ, посвященных интегрированию уравнения (1). Так, в работе [8] строится общий интеграл однородного уравнения (1) при условии, что $(F(x),x)$ не равно тождественно нулю.

В работе [9] исследуется ряд случаев, когда уравнение (1) интегрируется либо квадратурами, либо с помощью рядов. В частности, в [9] доказано, что линейное уравнение

$$(Ax,dx)=0,$$

где A — линейный оператор в $\boldsymbol{R}^3$, интегрируется в элементарных функциях. В [9] также показано, что если уравнение (1) линейно относительно одной из переменных, то оно всегда может быть проинтегрировано в квадратурах.

В [10] рассматривается вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$(Au+B(u,u),du)=0\,, \tag{4}$$

где $u=(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3$, A — линейный; B — симметрический билинейный операторы в $\boldsymbol{R}^3$ такие, что выражение $(Au+B(u,u),du)$ нельзя представить в виде произведения двух множителей, каждый из которых отличен от константы. Среди уравнений (4) выделяются [10] три простейших типа – вырожденные и квазиоднородные уравнения, приводящиеся соответственно к обыкновенным дифференциальным уравнением или однородным уравнениям, а также уравнения в полных дифференциалах. Исследование таких уравнений не представляет значительного труда. Показано [10], что невырожденное уравнение (4), не являющееся квазиоднородным уравнением или уравнением в полных дифференциалах, композицией невырожденного линейного преобразования и параллельного переноса приводится к одному из 12 интегрируемых в элементарных функциях канонических видов $\omega_i=0,\quad i=\overline{1,12}$, (здесь и далее значения $\omega_i,\quad i=\overline{1,12}$, заимствованы из [10]). В работе [10] также приведены общие решения уравнений канонических видов.

В данной работе для невырожденного уравнения (4), не являющегося квазиоднородным уравнением или уравнением в полных дифференциалах, построен интегрирующий множитель, после умножения на который (4) становится уравнением в полных дифференциалах. Существование интегрирующего множителя для вполне интегрируемого уравнения (1) при $n=3$ показано в [7, с. 363]. Полученные результаты позволяют интегрировать уравнение (4), не приводя его к каноническому виду.

Интегрирование уравнения (*Au*+*B*(*u*, *u*), *du*)=0

Далее будем полагать, что (4) есть невырожденное вполне интегрируемое уравнение, не являющееся квазиоднородным уравнением или уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 1. *Уравнение (4) может иметь не более двух различных частных решений, задаваемых алгебраическим уравнением первого порядка*

$$ax+by+cz+d=0,\quad a,b,c,d\in\boldsymbol{R}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть уравнение (4) не имеет частных решений вида (5). Тогда оно допускает не более одного частного решения* $\Phi(u)=0,$ *удовлетворяющего следующим условиям:*

1) $\Phi(u)=0$ *есть алгебраическое уравнение второго порядка, т.е.*

$$\Phi(u)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5yz+a_6xz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0,$$
$$a_i\in\boldsymbol{R}, i=\overline{1,10};\quad \sum_{i=1}^{6}a_i^2\neq 0; \qquad (6)$$

2) уравнение (6) определяет многообразие размерности $k\geq 1$.

Для доказательства теорем 1 и 2 достаточно найти частные решения вида (5) и (6) канонических видов $\omega_i=0,\quad i=\overline{1,12}$, уравнения (4). Несложно видеть, что уравнение $\omega_i=0$ при $i=1,6,7,10,11,12$ имеет единственное частное решение вида (5), которое соответственно задается формулой $x=0$, $y=0$, $y=0$, $x=0$, $x=0$, $b_1-a_2x=0$. Уравнение $\omega_3=0$ имеет два решения $x=0$ и $y=0$ вида (5). Уравнения $\omega_4=0$ и $\omega_9=0$ имеют лишь решения вида (6). Эти решения задаются соответственно формулами $c_1x-1,5y^2=0$ и $x^2+z^2=0$ и определяют многообразия размерностей 2 и 1. Уравнение $\omega_2=0$ имеет лишь одно решение $b_1+b_2x=0$ вида (5) при $b_2\neq 0$; имеет два решения $y=0$ и $z=0$ вида (5) при $\lambda=a_1= \ =b_2=0$. Уравнение $\omega_5=0$ имеет лишь одно решение $a_1+a_2y=0$ вида (5) при $a_2\neq 0$. Уравнение $\omega_8=0$ имеет лишь одно решение $a_1+a_2y=0$ вида (5) при $a_2\neq 0$ и одно решение $x^2+z^2=0$ вида (6), определяющее многообразие размерности 1, при $a_2=b_1=\lambda=0$. Если в уравнениях $\omega_2=0$, $\omega_5=0$, $\omega_8=0$ соответственно $\lambda+a_1^2\neq 0, b_2=0;$ $a_2=0;$ $a_2=0,$ $b_1^2+\lambda^2\neq 0,$ то упомянутые уравнения не имеют ни решений вида (5), ни решений вида (6), определяющих многообразия размерности $k\geq 1$.

Теорема 3. *I. Пусть уравнение (4) имеет* ν, $\nu=1$ *или* $\nu=2$*, различных частных решений* $\Phi_\nu(u)=0$ *вида (5). Тогда уравнение (4) допускает интегрирующий множитель* $\mu(u)=\ \Phi_1(u)\Phi_2(u)\ ^{-1}$*, если* $\nu=2$*, и* $\mu(u)=\left|\Phi_1(u)\right|^A$*,* $A\in\boldsymbol{R}$*, если* $\nu=1$.

II. Пусть уравнение (4) не имеет решений вида (5). Тогда если уравнение (4) имеет частное решение $\Phi(u)=0$ *вида (6), которое задает многообразие размерности* $k\geq 1$*, то (4) допускает интегрирующий множитель* $\mu(u)=\left|\Phi(u)\right|^A$*,* $A\in\boldsymbol{R}$*. В противном случае (4) допускает интегрирующий множитель* $\mu(u)=e^{ax+by+cz+d}$*,* $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$.

Доказательство. Так как уравнение (4) композицией невырожденного линейного преобразования и параллельного переноса приводится [10] к одному из 12 канонических видов, то обратный переход — от уравнения канонического вида к уравнению (4) — задается преобразованием такого же вида. Поэтому достаточно доказать теорему для уравнений канонических видов $\omega_i=0,\quad i=\overline{1,12}$.

В [10] для уравнений $\omega_i=0,\quad i=\overline{1,12}$, канонических видов выписаны общие интегралы $\Psi_i(u)=c$ (c — произвольная постоянная). Так как дифференциал $d\Psi_i(u)$ функции $\Psi_i(u)$ удовлетворяет [7, с. 363] соотношению $d\Psi_i(u)=\mu_i(u)\omega_i$, где $\mu_i=\mu_i(u)$ — интегрирующий множитель, то $\mu_i(u)=\dfrac{d\Psi_i(u)}{\omega_i}$. Простые вычисления показывают, что:

$$\mu_1(u)=\left|x\right|^{a_4/b_2-1};\ \mu_2(u)=\begin{cases}\left|b_1+b_2x\right|^{a_2/b_2-1}, \text{если } b_2\neq 0,\\ e^{6x/b_1}, \text{если } b_2=0;\end{cases}\ \mu_3(u)=\ xy\ ^{-1};$$

$$\mu_4(u)=\left|c_1x-1.5y^2\right|^{-5/2};\ \mu_5(u)=\begin{cases}\left|a_1+a_2y\right|^{b_2/a_2-1}, \text{если } a_2\neq 0,\\ e^{3y/a_1}, \text{если } a_2=0;\end{cases}\ \mu_6(u)=\left|y\right|^{b_3/c_1-1};$$

$$\mu_7(u)=|y|^{2b_4/a_2-1};\ \mu_8(u)=\begin{cases}|a_1+a_2y|^{2b_2/a_2-1}, \text{ если } a_2\neq 0,\\ e^{6y/a_1}, \text{ если } a_2=0;\end{cases}\quad \mu_9(u)=\left(x^2+z^2\right)^{-1};$$

$$\mu_{10}(u)=x^{-3};\ \mu_{11}(u)=x^{-3};\ \mu_{12}(u)=(b_1-a_2x)^{-3}.$$

Выразим $\mu_i(u)$, $i=\overline{1,12}$, через левые части выписанных при доказательстве теорем 1 и 2 формул частных решений уравнения $\omega_i=0$ вида (5) или (6), определяющих многообразия размерности $k\geq 1$. Легко видеть, что для уравнения $\omega_i=0$ при $i=1,4,6,7,9,10,11,12,$ имеющего лишь одно частное решение $\Phi_i(u)=0$ вида (5) или (6), выполняется $\mu_i(u)=|\Phi_i(u)|^A$, $A\in\boldsymbol{R}$. Для уравнения $\omega_3=0$, допускающего два решения $\Phi_1(u)=0$ и $\Phi_2(u)=0$ вида (5), имеем $\mu_3(u)=\left(\Phi_1(u)\Phi_2(u)\right)^{-1}$. Уравнение $\omega_i=0$, где $i=2,5,8$ и соответственно $b_2\neq 0$, $a_2\neq 0$, $a_2\neq 0$, имеет одно частное решение $\Phi_i(u)=0$ вида (5) и $\mu_i(u)=|\Phi_i(u)|^A$, $A\in\boldsymbol{R}$. Если же $i=2,5,8$ и соответственно $\lambda+a_1^2\neq 0, b_2=0;$ $a_2=0;$ $a_2=0,$ $b_1^2+\lambda^2\neq 0,$ то уравнение $\omega_i=0$ не имеет решений вида (5) или (6) и допускает интегрирующий множитель $\mu_i(u)=e^{ax+by+cz+d}$, $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что если $\lambda=a_1=b_2=0$, то уравнение $\omega_2=0$, имеющее два решения $\Phi_1(u)=0$ и $\Phi_2(u)=0$ вида (5), допускает интегрирующий множитель $\left(\Phi_1(u)\Phi_2(u)\right)^{-1}$ или $e^{ax+by+cz+d}$, $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$. Также несложно проверить, что при $a_2=b_1=\lambda=0$ уравнение $\omega_8=0$, имеющее решение $\Phi_8(u)=0$ вида (6), допускает интегрирующий множитель $|\Phi_8(u)|^A$, $A\in\boldsymbol{R}$, или $e^{ax+by+cz+d}$, $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$. Теорема доказана

TO THE QUESTION OF INTEGRATION OF THE PFAFF EQUATION WITH THE SUM OF LINEAR AND BILINEAR OPERATIONS IN $\boldsymbol{R}^3$

N.V. SPICHEKOVA

Abstract

Integrating multiplier for non-degenerate completely integrable Pfaff equation in $\boldsymbol{R}^3$ is constructed.

Литература

1. *Амелькин В.В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1985.
2. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.
3. *Гайшун И.В.* Линейные уравнения в полных производных. Минск, 1989.
4. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. Гродно, 2006.
5. *Makarov E.K.* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2003. Vol. 29. P. 47–74.
6. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., 1947.
7. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.
8. *Кожеро М.В.* // Уч. зап. Смоленск. гос. пед. ин-та. 1969. Вып. 8. С. 58–63.
9. *Хаимова П.Л.* // Учен. зап. Сталинаб. пед. ин-та. Сер. физ-мат. 1958. Т. 20. Вып. 3. С. 69–90.
10. *Кожеро М.В., Спичекова Н.В.* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2003. № 2. С. 95–99.