УДК 511.42

О совместных приближениях нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R}^k$

М. В. Ламчановская Беларусь, Минск, Институт информационных технологий БГУИР
Н. И. Калоша Беларусь, Минск, Институт математики НАН Беларуси
Н. В. Шамукова Беларусь, Минск, Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь
lammv@mail.ru, kalosha@im.bas-net.by, shamukova_n@mail.ru

On simultaneous approximation of zero by values of integer polynomials in the space $\mathbb{R}^k$

M. V. Lamchanovskaya Belarus, Minsk, Information Technology Institute of BSUIR
N. I. Kalosha Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
N. V. Shamukova Belarus, Minsk, University of Civil Protection of the Republic of Belarus
lammv@mail.ru, kalosha@im.bas-net.by, shamukova_n@mail.ru

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторые промежутки $I_j \subset \mathrm{R}$ длины $|I_j| = Q^{-v}$, $0 < v < \frac{1}{k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим многочлен с целыми коэффициентами $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Под высотой многочлена $P(x)$ будем подразумевать величину $H(P) = \max|a_i|$. Степень многочлена $P(x)$ будем обозначать как $\deg P = n$. Определим множество многочленов с целыми коэффициентами ограниченной степени и высоты:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}.$$

Пусть далее $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \Pi = I_1 \times I_2 \times ... \times I_k$ - вещественный вектор. Через μB будем обозначать меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathrm{R}^k$, $k \in \mathrm{N}$, для элементов которого неравенство $\prod_{i=1}^{k} |P(x_i)| < Q^{-\omega}$, $\omega > n - k + 1$ верно хотя бы для одного полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ на множестве $B \subset \Pi$.

Теорема 1. $\mu B < \frac{1}{4}\mu\Pi$.

Доказательство теоремы основано на методе В. Г. Спринджука, разработанного при решении проблемы Малера [1], [2]. Следующие леммы обосновывают переход от множества всех целочисленных многочленов $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ к множеству неприводимых в поле рациональных чисел многочленов, имеющих определенную структуру коэффициентов и корней, при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть все координаты вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ трансцендентны и B_1, B_2 — множества $\bar{x} \in \Pi$, для которых соответственно неравенства*

$$\prod_{i=1}^{k} |P(x_i)| < Q^{-\lambda_1}, \qquad \prod_{i=1}^{k} |F(x_i)| < Q^{-\lambda_1}$$

имеют решение в целочисленных полиномах $P(x)$ степени не выше n и целочисленных неприводимых полиномах $F(x)$ степени не выше n соответственно. Тогда если $\mu B_2 < c_1(n)\mu\Pi$, $0 < c_1 < 1$, то $\mu B_1 < c_2(n)\mu\Pi$, где $c_1 < c_2 < 1$.

Лемма 2. *При некотором* $\lambda_2 > 0$ *неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} |F_1(x_i)| < Q^{-\lambda_2}$$

имеет решение для множества B_1, $\mu B_1 < c_3(n)\,\mu\Pi$, *в целочисленных неприводимых многочленах* $F_1(x)$ *степени не выше* n. *Тогда неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} |F_2(x_i)| < Q^{-\lambda_2}$$

имеет решение для некоторого множества B_2, $\mu B_2 < c_4(n)\,\mu\Pi$, *в целочисленных неприводимых многочленах* $F_2(x)$ *степени не выше* n, *подчиненных условию*

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |a_i(F_2)| \leqslant a_n(F_2) = H(F_2)\,,$$

где $a_i(F_2)$ — *коэффициенты многочлена* $F_2(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.

2. Baker A. On a theorem of Sprindžuk // Proc. Royal Soc. 1966. Vol. 292. P. 92–104.

———————————————————————————

УДК 511.32

О количестве алгебраических точек ограниченной степени и высоты на плоскости

А. В. Луневич Беларусь, г. Минск, Институт математики Национальной Академии Наук Беларуси

Н. В. Сакович Беларусь, г. Могилев, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

LunevichAV@gmail.com, SakovichNV@tut.by

On the number of algebraic points of bounded degree and height in the plane

A. V. Lunevich Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus

N. V. Sakovich Belarus, Mogilev, Mogilev State A. Kuleshov University

LunevichAV@gmail.com, SakovichNV@tut.by

Впервые понятие регулярной системы было введено Р. Бейкром и В. Шмидтом [1]. С помощью свойств регулярных систем можно доказывать аналоги теоремы Хинчина в случае расходимости и находить оценку снизу для размерности Хаусдорфа различных множеств [2, 3, 4, 5, 6, 7]. В данной работе дано определение регалярной системы точек на плоскости и доказана регулярность алгебраических точек на плоскости, что обобщает результаты Р. Бейкера, В. Шмидта, В. И. Берника, В. В. Бересневича.