

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХ ТИПОВ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пилипчук Л. А., Лагуто А. А., Пилипчук А. С.

Кафедра компьютерных технологий и систем, кафедра методов оптимального управления
Факультет прикладной математики и информатики

Белорусский государственный университет

Минск, Республика Беларусь

E-mail: pilipchuk@bsu.by, lagutoa@yahoo.com, an.pilipchuk@gmail.com

Рассматривается недоопределённая система, возникающая в задаче об оптимальном расположении сенсоров в узлах графа с целью оценки потоков на ненаблюдаемой части графа. Для двух типов разреженности недоопределённых систем приводятся общие решения. Представлены технологические аспекты построения численных решений разреженных систем указанных типов.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основой для моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части графа [1] является недоопределённая система линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ 0, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \quad (1)$$

где $G = (I, U)$ – связный ориентированный двунаправленный граф с множеством узлов I и множеством дуг U , определенных на прямом произведении $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$, $I_i^+(U) = \{j : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j, i) \in U\}$. I^* – множество узлов с переменной интенсивностью x_i , $I^* \subseteq I$. Двунаправленный граф G обладает следующим свойством: если существует дуга $(i, j) \in U$ с дуговым потоком x_{ij} , то существует и дуга $(j, i) \in U$ с дуговым потоком x_{ji} , который в общем случае может не совпадать с x_{ij} . Для наблюдения за потоками в узлах графа устанавливаются сенсоры. На основе учёта полученной априорной информации от сенсоров система (1) может быть преобразована к следующему виду:

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = \begin{cases} x_i + b_i, & i \in \bar{I}^*, \\ b_i, & i \in \bar{I} \setminus \bar{I}^*, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \lambda_{ij}^t x_{ij} = 0, t \in T = \{1, \dots, q\}, \quad (3)$$

где b_i , λ_{ij}^t – параметры системы, q – число дополнительных уравнений (3), \bar{I}^* – множество узлов с переменной интенсивностью, $\bar{I}^* \subseteq \bar{I}$. Заметим, что множество T может быть пустым. Граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ с множеством узлов \bar{I} и множеством дуг \bar{U} может быть несвязным и/или не двунаправленным. Граф \bar{G} состоит из m связных компонент $\bar{G}_n = (\bar{I}_n, \bar{U}_n)$, $n = \bar{1}, \bar{m}$, \bar{I}_n^* – множество узлов с переменной интенсивностью, $\bar{I}_n^* \subseteq \bar{I}^*$. Определим множества $I_i^+(\bar{U}_n)$, $I_i^-(\bar{U}_n)$ как $I_i^+(\bar{U}_n) = \{j : (i, j) \in \bar{U}_n\}$, $I_i^-(\bar{U}_n) =$

$\{j : (j, i) \in \bar{U}_n\}$. Отметим, что некоторые компоненты связности \bar{G}_n могут не содержать узлов из множества \bar{I}^* , т.е. $\bar{I}_n^* = \emptyset$. Неизвестными системы (2)–(3) являются дуговые потоки x_{ij} , $(i, j) \in \bar{U}$, и переменные интенсивности узлов x_i , $i \in \bar{I}^*$, $\bar{I}^* \subseteq \bar{I}$. Для решения системы (2)–(3) применяются методы декомпозиции разреженной части системы уравнений и её дополнительной части [2]. Матрица разреженной системы (2) имеет блочно-диагональную структуру с различными типами разреженности блоков. Рассмотрим типы разреженности и структуру опоры графа для системы (2) [2,3].

II. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДВУХ ТИПОВ РАЗРЕЖЕННЫХ НЕДООПРЕДЕЛЁННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Тун 1. Если $\bar{I}_n^* = \emptyset$, то система (2) для компоненты связности \bar{G}_n имеет вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U}_n)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U}_n)} x_{ji} = b_i, i \in \bar{I}_n. \quad (4)$$

Опорой $R_n = \bar{U}_R^n$ графа $\bar{G}_n = (\bar{I}_n, \bar{U}_n)$ для системы (4) является покрывающее дерево [2,3]. Общее решение разреженной системы (4) имеет следующий вид [4]:

$$x_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in \bar{U}_n \setminus \bar{U}_R^n} x_{\tau\rho} \delta_{ij}^{\tau\rho} + \tilde{x}_{ij}, (i, j) \in \bar{U}_n, \quad (5)$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij}, (i, j) \in \bar{U}_n)$ – некоторое частное решение системы (4), построенное по правилам [5], $\delta(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i, j) \in \bar{U}_n)$ – характеристический вектор, порожденный дугой $(\tau, \rho) \in \bar{U}_n \setminus \bar{U}_R^n$, относительно покрывающего дерева [5].

Тун 2. Если $\bar{I}_n^* \neq \emptyset$, то система (2) для компоненты связности \bar{G}_n имеет вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U}_n)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U}_n)} x_{ji} = \begin{cases} x_i + b_i, & i \in \bar{I}_n^*, \\ b_i, & i \in \bar{I}_n \setminus \bar{I}_n^*. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что в этом случае опорой графа \bar{G} для системы (2) является лес деревьев, где $\bigcup_{n=1}^m \bar{I}_n = \bar{I}$. Каждое дерево леса содержит ровно один узел из множества опорных узлов $\bar{I}_R^* \neq \emptyset$, $\bar{I}_R^* \subseteq \bar{I}^*$ [2]. Следовательно, опорой графа \bar{G}_n для системы (6) является покрывающее дерево, которое содержит единственный опорный узел с переменной интенсивностью, $|\bar{I}_R^{*n}| = 1$. Общее решение разреженной системы (6) имеет следующий вид [4]:

$$x_{ij} = \sum_{(\tau, \rho) \in \bar{U}_n \setminus \bar{U}_R^n} x_{\tau\rho} \delta_{ij}^{\tau\rho} + \sum_{\gamma \in \bar{I}_n^* \setminus \bar{I}_R^{*n}} x_{\gamma} \delta_{ij}^{\gamma} + \tilde{x}_{ij}, (i, j) \in \bar{U}_R^n, \quad (7)$$

$$x_i = \sum_{(\tau, \rho) \in \bar{U}_n \setminus \bar{U}_R^n} x_{\tau\rho} \delta_i^{\tau\rho} + \sum_{\gamma \in \bar{I}_n^* \setminus \bar{I}_R^{*n}} x_{\gamma} \delta_i^{\gamma} + \tilde{x}_i, i \in \bar{I}_R^{*n}, \quad (8)$$

где вектор $\delta(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^{\tau\rho}, (i, j) \in \bar{U}_n; \delta_i^{\tau\rho}, i \in \bar{I}_n^*)$, $(\tau, \rho) \in \bar{U}_n \setminus \bar{U}_R^n$ – характеристический вектор, порождённый дугой $(\tau, \rho) \in \bar{U}_n \setminus \bar{U}_R^n$, относительно покрывающего дерева графа \bar{G}_n ; вектор $\delta(\gamma) = (\delta_{ij}^{\gamma}, (i, j) \in \bar{U}_n; \delta_i^{\gamma}, i \in \bar{I}_n^*)$, $\gamma \in \bar{I}_n^* \setminus \bar{I}_R^{*n}$ – характеристический вектор, порождённый узлом γ , относительно покрывающего дерева графа \bar{G}_n [5].

III. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ

Технологии и алгоритмы построения численных решений системы с типом разреженности 1 (с матрицей инцидентности графа) приведены в [6]. Вычисление компонент характеристических векторов, соответствующих дугам покрывающего дерева, основаны на применении биективного отображения между множеством узлов графа (за исключением одного узла) и множеством дуг покрывающего дерева. В результате применения биекции получено корневое дерево, для хранения которого применяются следующие списковые структуры: список предков узлов ($pred$), список направлений дуг в соответствии с биективным отображением (dir), список династического обхода корневого дерева (d), которое соответствует покрывающему дереву графа, список уровней узлов ($depth$). Корень дерева выбирается произвольным образом.

Технологии и алгоритмы построения численных решений системы с типом разреженности 2 (система полного ранга) основаны на биекции узлов и дуг дерева, поскольку в этом случае число опорных элементов (дуг и узлов) $|\bar{U}_R^n| + |\bar{I}_R^{*n}| = |\bar{U}_R^n| + 1$ совпадает с числом узлов $|\bar{I}_n|$ соответствующего дерева леса для компоненты связности \bar{G}_n . Корнем дерева является единственный узел, входящий в множество \bar{I}_R^{*n} , $|\bar{I}_R^{*n}| = 1$.

Приведём пример базисного графа (рис.1) для системы (2) с двумя компонентами связности $\bar{G}_1 = (\bar{I}_1, \bar{U}_1)$ и $\bar{G}_2 = (\bar{I}_2, \bar{U}_2)$ и типом разреженности 2, $\bar{I}_1^* = \{2, 4, 5\}$, $\bar{I}_2^* = \{6\}$. В результате биективного отображения получен лес корневых деревьев, изображённых на рисунке 2. Списковые структуры хранения леса корневых деревьев приведены в таблице 1.

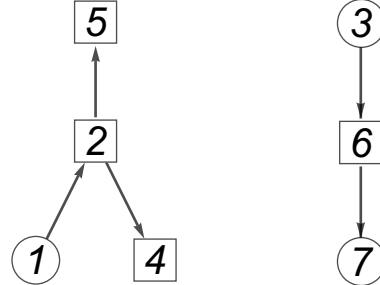


Рис. 1 – Базисный граф для системы (2) с двумя компонентами связности \bar{G}_1 и \bar{G}_2 и типом разреженности 2, $\bar{I}_R^* = \{2, 6\}$

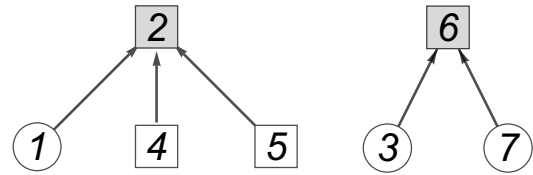


Рис. 2 – Лес корневых деревьев, $\bar{I}_R^{*1} = \{2\}$, $\bar{I}_R^{*2} = \{6\}$

Таблица 1 – Списковые структуры представления леса корневых деревьев для базисного графа системы (2) в случае разреженности типа 2

i	1	2	3	4	5	6	7
$pred[i]$	2	0	6	2	2	0	6
$depth[i]$	1	0	1	1	1	0	1
$dir[i]$	1	0	1	-1	-1	0	-1
$d[i]$	4	1	7	5	2	3	6

1. Пилипчук, А. С. Расположение минимального числа обрезаемых узлов в обобщенном графе для оценки трафика его ненаблюдаемой части / А. С. Пилипчук // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. - 2015. - № 1. - с. 108-111.
2. Пилипчук, Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л. А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2012. – 260 с.
3. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кирилова. Минск: БГУ, 1980. Ч. 3: Специальные задачи. - 368 с.
4. Pilipchuk, L. A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L. A. Pilipchuk, O. V. German, A. S. Pilipchuk // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – №2. -с. 91-96.
5. Pilipchuk L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L. A. Pilipchuk - Minsk: BSU, 2013. - 235 p.
6. Пилипчук, Л. А. Алгоритмы и технологии построения решений разреженных недоопределенных линейных систем в Wolfram Mathematica / Л. А. Пилипчук, А. А. Лягуто // Технологии информатизации и управления: сб. науч. ст. в 2 кн. – Минск, 2017. – Вып. 3, кн. 2. – с. 264–272.