Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра теоретических основ электротехники

М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Под общей редакцией
А. П. Курулёва

*Рекомендовано УМО по образованию в области
информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закреплённых за УМО*

Минск БГУИР 2018

УДК 621.3.011.7(076)
ББК 31.211я73
Б28

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра электротехники и систем электропитания
учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»
(протокол №6 от 06.02.2018);

ведущий инженер-программист отдела научно-технических разработок
и системного сопровождения проектов многопрофильного
научно-производственного
частного унитарного предприятия «Тетраэдр»
кандидат технических наук, доцент Ю. В. Виланский

Батура, М. П.

Б28 Основы теории электрических цепей : учеб.-метод. пособие / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв ; под общ. ред. А. П. Курулёва. – Минск : БГУИР, 2018. – 247 с. : ил.
ISBN 978-985-543-416-1.

Содержит материалы по следующим темам: электрические цепи постоянного и синусоидального тока, трёхфазные и избирательные цепи; классический (временной) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях первого и второго порядка при подключении к источникам постоянного и синусоидального напряжения и операторный метод; четырёхполюсники; особенности активных электрических цепей; электрические фильтры (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ, мостовые и пьезоэлектрические); длинные линии.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Теория электрических цепей».

УДК 621.3.011.7(076)
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-543-416-1

Предисловие

Содержание всех разделов настоящего учебно-методического пособия охватывает круг вопросов, предусмотренных типовой программой по курсу «Теория электрических цепей» для электротехнических специальностей вузов. В первых трёх разделах рассматриваются электрические цепи постоянного и синусоидального тока, трёхфазные и избирательные цепи, свойства последовательного, параллельного и индуктивно связанных контуров.

Четвёртый раздел посвящён классическому (временному) методу анализа переходных процессов в линейных электрических цепях первого и второго порядка при подключении к источникам постоянного и синусоидального напряжения. Подробно рассмотрено применение типовых функций воздействия и временных характеристик (переходной и импульсной) для нахождения отклика линейной электрической цепи на входные сигналы произвольной формы.

Пятый раздел «Операторный метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях» содержит информацию о базовых для этого метода свойствах и теоремах преобразований Лапласа, связях между операторной передаточной функцией цепи и её переходной и импульсной характеристиками, а также примеры использования метода для цепей первого порядка.

В шестом разделе приведены шесть форм записи уравнений четырёхполюсников. Рассмотрена физическая трактовка *Y*-, *Z*-, *A*-, *B*-, *H*- и *F*-параметров, способы их определения; комплексные входные и передаточные функции четырёхполюсников, их характеристические и рабочие параметры. Даны основные виды соединений четырёхполюсников и описывающие их матричные уравнения; формулы расчёта положительной и отрицательной обратной связи и её влияние на основные характеристики цепи: стабильность коэффициента усиления и полосу пропускания.

В седьмом разделе приведены эквивалентные схемы активных электрических цепей: ИТУН, ИНУН, ИНУТ, ИТУТ. Рассмотрены матричный метод анализа, неопределенная матрица проводимостей и её свойства. На примере эквивалентной схемы транзистора с общей базой методом короткого замыкания определены собственные и взаимные проводимости активной и пассивной частей схемы, а затем неопределённая и определённая матрицы проводимостей цепи. Показана возможность имитации индуктивности с помощью активной *rC*-цепи в гираторах. Получена матрица проводимостей гиратора и его эквивалентная схема замещения.

В восьмом разделе рассмотрены эквивалентные схемы замещения, характеристические параметры, полосы пропускания и затухания электрических фильтров типа *k* (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, ЗФ (РФ)), мостовые схемы фильтров и фильтры на пьезоэлектрических резисторах. Дано понятие о фильтрах типа *m* и фильтрах типа *rC*.

В девятом разделе рассматриваются длинные линии (цепи с распределёнными параметрами) с потерями и без потерь. Приведены основные уравнения длинной линии, режимы её работы, методика отыскания неисправности в линии, примеры решения задач.

Новизна и ценность данного учебно-методического пособия состоят в том, что в настоящее время в Республике Беларусь нет издания подобного рода, содержащего в презентационном виде справочную информацию по теории электрических цепей в полном соответствии с типовой и учебной программами данного курса.

Для работы с данным учебно-методическим пособием пользователю необходимо знать высшую математику, физику и основное содержание учебника «Теория электрических цепей» авторов М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв (под общей редакцией А. П. Курулёва) издательства «Вышэйшая школа» г. Минска (издания 2004, 2007 и 2015 гг.).

Авторы благодарны заведующему кафедрой электротехники и систем электропитания учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь» кандидату технических наук, доценту А. Е. Каледе, ведущему инженеру-программисту отдела научно-технических разработок и системного сопровождения проектов многопрофильного научно-производственного ЧУП «Тетраэдр» кандидату технических наук, доценту Ю. В. Виланскому, а также преподавателям кафедры теоретических основ электротехники учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» за ряд ценных замечаний, которые позволили улучшить качество учебно-методического пособия.

Пожелания и предложения направлять по адресу: 220013, Минск, ул. П. Бровки, 6, БГУИР.

Авторы

Список сокращений и условных обозначений

ЧП – четырёхполюсник
ХС – характеристическое сопротивление
ХПП – характеристическая постоянная передачи
Б – бел
дБ – децибел
Нп – непер
ОС – обратная связь
ООС – отрицательная обратная связь
ПОС – положительная обратная связь
A_{jk} – алгебраическое дополнение определителя системы уравнений
$Z_{вх}$ − входное сопротивление четырёхполюсника
$Z_{Н}$ − сопротивление нагрузки четырёхполюсника
$Z_{ХХ}$ ($Z_{Х}$) − сопротивление холостого хода
$Z_{КЗ}$ ($Z_{К}$) − сопротивление короткого замыкания
$Z_{С}$ – согласованное характеристическое сопротивление ЧП
$g_{с}$ − характеристическая постоянная передачи ЧП
$a_{с}$ – характеристическое затухание ЧП
$b_{с}$ – характеристическая фаза ЧП
$K_{U}(j\omega)$ – комплексная передаточная функция четырёхполюсника по напряжению
$K_{I}(j\omega)$ – комплексная передаточная функция четырёхполюсника по току
ch – косинус гиперболический
sh – синус гиперболический
lg – логарифм десятичный
ln – логарифм натуральный
$K_{а}$ − передаточная функция активного четырёхполюсника без обратной связи
$K_{ОС}$ – передаточная функция цепи обратной связи
$U_{ОС}$ – напряжение обратной связи
$K_{а}\,K_{ОС}$ – возвратное отношение
$1 - K_{а}\,K_{ОС}$ − возвратная разность
$|1 \mp K_{а}(j\omega)K_{ОС}(j\omega)|$ − глубина обратной связи
S_{Ka}^{K} − чувствительность четырёхполюсника
$K_{ОС}(j\omega) = K_{ОС}$ − условие жёсткой обратной связи
$\omega_{гр}$ – граничная частота
$\tau_{ц}$ – постоянная времени цепи
ОЭ – общий эмиттер
ОБ – общая база
ОК – общий коллектор
акт. – активная часть транзистора
пасс. – пассивная часть транзистора

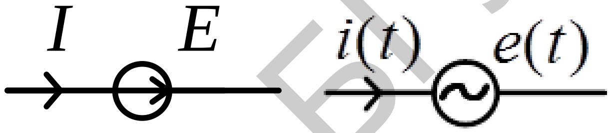
ИТУН – источник тока, управляемый напряжением
ИНУТ – источник напряжения, управляемый током
ИНУН – источник напряжения, управляемый напряжением
ИТУТ – источник тока, управляемый током
ЭКВ – эквивалент
$I_б$ – ток базы транзистора
$I_к$ – ток коллектора транзистора
$I_э$ – ток эмиттера транзистора
$U_{бэ}$ – напряжение база – эмиттер транзистора
$U_{кб}$ – напряжение коллектор – база транзистора
$U_{бк}$ – напряжение база – коллектор транзистора
$[Y_н]$ – неопределённая матрица проводимостей цепей
$[Y]$ – определённая матрица проводимостей цепей
$g_э$ – проводимость эмиттера транзистора
$g_к$ – проводимость коллектора транзистора
$g_б$ – проводимость базы транзистора
α – коэффициент усиления транзистора
ёмк. – ёмкость
инд. – индуктивность
наст. – настройка
ФНЧ – фильтр нижних частот
ФВЧ – фильтр верхних частот
ПФ – полосовой фильтр
ЗФ (РФ) – заграждающий (режекторный) фильтр
Т – Т-образный фильтр
П – П-образный фильтр
$\omega_{с\ (гр)}$ – частота среза (граничная)
$Z_{СТ}$ – характеристическое сопротивление Т-образного фильтра
$Z_{СП}$ – характеристическое сопротивление П-образного фильтра
Arch – ареа-косинус гиперболический
th – тангенс гиперболический
ρ – волновое (характеристическое) сопротивление
$\omega_Н$ ($\omega_{ФНЧ}$) – текущая частота ФНЧ
$\omega_В$ ($\omega_{ФВЧ}$) – текущая частота ФВЧ
$\omega_П$ ($\omega_{ПФ}$) – текущая частота ПФ
$\omega_З$ ($\omega_{ЗФ}$) – текущая частота ЗФ
$\omega_о$ – резонансная частота колебательного контура
Z_1 – сопротивление продольного плеча фильтра
Z_2 – сопротивление поперечного плеча фильтра
$Z_С$ – характеристическое сопротивление фильтра
$a_с$ – характеристическое затухание фильтра
$b_с$ – характеристическая фаза фильтра
f_∞ – частота полосы (максимума) затухания
L_S – динамическая индуктивность пьезоэлектрического резонатора на кварце

C_S – динамическая ёмкость резонатора на кварце
C_P – динамическая ёмкость электронов и пьезоэлектрических пластин резонатора на кварце
R_S – активное сопротивление резонатора на кварце
Q – добротность колебательного контура
f_S – частота последовательного резонатора
f_P – частота параллельного резонатора
$f_\text{о}$ – резонансная частота контура
$C_\text{Н}$ – ёмкость нагрузки
акт. – активное (сопротивление)
реак. – реактивное (сопротивление)
ΔF – резонансный промежуток (полоса пропускания фильтра)
ген. − генератор
пад. – падающая волна
отр. – отражённая волна
КЗ – короткое замыкание
ХХ – холостой ход
КБВ – коэффициент бегущей волны
КСВ – коэффициент стоячей волны
$Z_\text{Н}$ – комплексное сопротивление нагрузки
$r_\text{Н}$ – активное сопротивление нагрузки
$Z_\text{В}$ – комплексное волновое сопротивление линии
$Z_\text{вх}$ – комплексное входное сопротивление линии
$K_\text{б}$ – коэффициент бегущей волны
$K_\text{с}$ – коэффициент стоячей волны
$r_\text{о}$ – погонное сопротивление
$g_\text{о}$ – погонная проводимость
$L_\text{о}$ – погонная индуктивность
$C_\text{о}$ – погонная ёмкость
γ − коэффициент распространения
α – коэффициент ослабления
β – коэффициент фазы
$\upsilon_\text{ф}$ – фазовая скорость
$\mu_\text{о}$ – магнитная проницаемость воздуха
$\varepsilon_\text{о}$ – относительная диэлектрическая проницаемость изоляции воздуха
δ – угол диэлектрических потерь
p_u – коэффициент отражения по напряжению
p_i – коэффициент отражения по току

1. Линейные электрические цепи постоянного тока

1.1. Основные понятия и определения теории электрических цепей

Электрическая цепь – совокупность элементов и устройств, образующих путь для электрического тока, электрические процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), токе и напряжении.

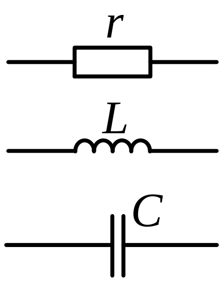
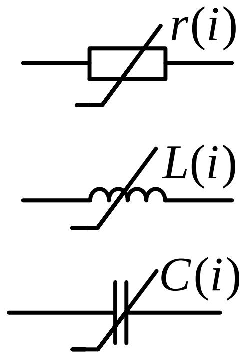
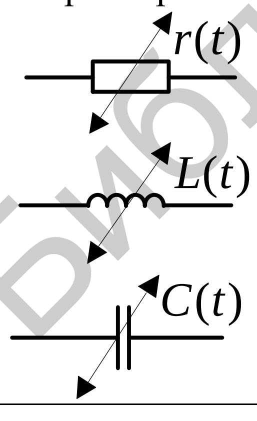
Электрический ток	$i(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta t}=\dfrac{dq}{dt}$; $q[\text{Кл}]$, $t[\text{с}]$, $i[\text{А, мА, мкА}]$; $\text{А}\cdot 10^{-3}$ $\text{А}\cdot 10^{-6}$
ЭДС источника электрической энергии	 $E[\text{В, мВ, кВ, МВ}]$; $\text{В}\cdot 10^{-3}$ $\text{В}\cdot 10^{3}$ $\text{В}\cdot 10^{6}$
Электрическое напряжение	$u(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta q}=\dfrac{dW}{dq}$; $W[\text{Дж}]$, $q[\text{Кл}]$, $u[\text{В, мВ, кВ, МВ}]$; $\text{В}\cdot 10^{-3}$ $\text{В}\cdot 10^{3}$ $\text{В}\cdot 10^{6}$
Электрическое напряжение как разность потенциалов	$u=\varphi_1-\varphi_2$, $\varphi=\dfrac{A}{q}$; $A[\text{Дж}]$, $q[\text{Кл}]$, $\varphi[\text{В, мВ, кВ, МВ}]$; $\text{В}\cdot 10^{-3}$ $\text{В}\cdot 10^{3}$ $\text{В}\cdot 10^{6}$

Элемент электрической цепи – отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи и выполняющее в ней определённую функцию. К числу основных элементов электрической цепи относят резистор, катушку индуктивности и конденсатор. Каждый из этих элементов предназначен для использования соответственно его электрического сопротивления, индуктивности и ёмкости.

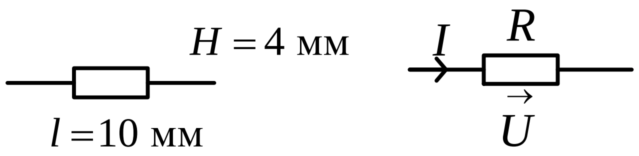
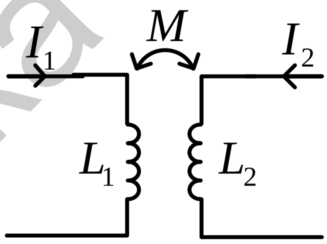
Различают пассивные и активные элементы электрической цепи.

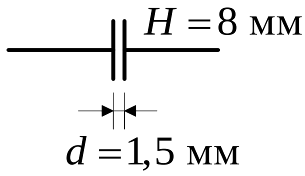
Пассивные элементы – это элементы электрической цепи, в которых рассеивается или накапливается электрическая энергия.

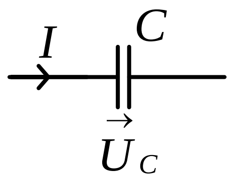
Активные элементы – это источники энергии.

Пассивные элементы электрической цепи	
Линейные 	Параметры *r*, *L* и *C* не зависят от приложенного к ним напряжения и проходящего через них тока
Нелинейные 	Параметры *r*, *L* и *C* зависят от значения или направления действующего напряжения и силы проходящего тока
Элементы с постоянными параметрами	Параметры *r*, *L* и *C* не зависят от времени
Элементы с переменными параметрами 	Параметры *r*, *L* и *C* изменяются во времени по определённому закону

К пассивным элементам электрической цепи относят резистор с сопротивлением *R*, катушку индуктивности с индуктивностью *L* и конденсатор с ёмкостью *C*.

Резистор с сопротивлением R	 $R = \frac{U}{I}\frac{[\text{В}]}{[\text{А}]}$ $R[\text{Ом, кОм, МОм}]$ $\text{Ом}\cdot 10^3, \text{Ом}\cdot 10^6$
Проводимость	$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}\frac{[\text{А}]}{[\text{В}]}$ или $\left[\frac{1}{\text{Ом}}\right] \to [\text{См}]$ – сименс
Катушка индуктивности с индуктивностью L	 r от 1,5 до 4 мм $U_L = L\frac{dI}{dt}$; $L\left[\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\right]$ или $[\text{Ом}\cdot\text{с}]$ $[\text{Гн(Г), мГн(мГ), мкГн(мкГ)}]$; $\text{Гн}\cdot 10^{-3}$ $\text{Гн}\cdot 10^{-6}$
Взаимная индуктивность	 $M = \frac{\psi_{12}}{I_2}$ или $M = \frac{\psi_{21}}{I_1}$; $M[\text{Гн(Г), мГн(мГ), мкГн}]$; $\text{Гн}\cdot 10^{-3}$ $\text{Гн}\cdot 10^{-6}$
Потокосцепление	$\Psi = w\Phi$; $\Phi[\text{Вб}]$ – магнитный поток катушки; w – число витков катушки; $\Phi = Bs$; $B[\text{Тл}]$ – магнитная индукция; $s[\text{м}^2]$ – сечение провода катушки; $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{w\Phi}{I} = \frac{wBs}{I}$

<table>
<tr>
<td>Конденсатор с ёмкостью C</td>
<td>


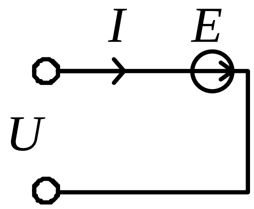


$U_C = \frac{1}{C}\int I dt;$ $C = \frac{q}{U_C}\frac{[\text{Кл}]}{[\text{В}]}[\text{Ф}];$

$I = C\frac{dU_C}{dt} \to C\left[\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}}\right]$ или $[\text{См}\cdot\text{с}]$,

$C[\text{Ф, мкФ, нФ, пФ}];$

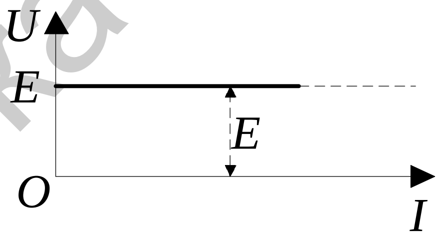
$\text{Ф}\cdot 10^{-6}$, $\text{Ф}\cdot 10^{-9}$, $\text{Ф}\cdot 10^{-12}$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Независимые (автономные) активные элементы электрической цепи</td>
</tr>
<tr>
<td>
Идеальный источник ЭДС E с внутренним сопротивлением $R_i = 0$



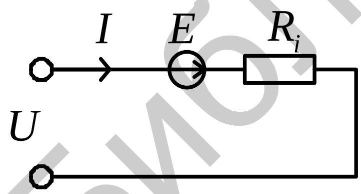
</td>
<td>
При коротком замыкании идеального источника ЭДС

$I \to \max.$

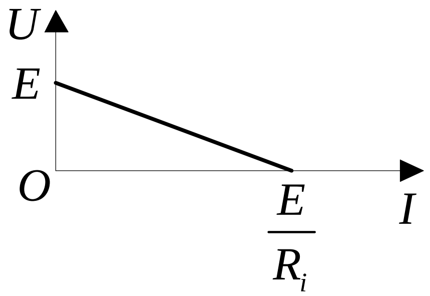
ВАХ (вольт-амперная характеристика) идеального источника ЭДС



</td>
</tr>
<tr>
<td>
Источник ЭДС с внутренним сопротивлением $R_i \neq 0$

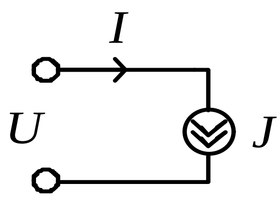


</td>
<td>
ВАХ



</td>
</tr>
<tr>
<td>
Идеальный источник тока J с внутренним сопротивлением

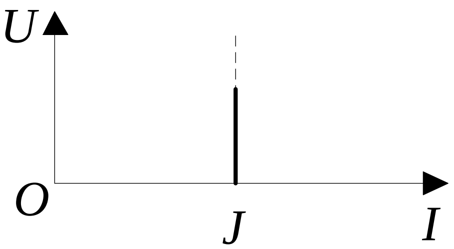
$R_i \to \infty$, $(G_i \to 0)$



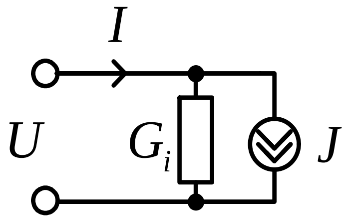
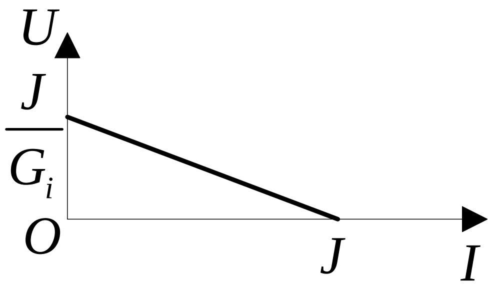
</td>
<td>
При холостом ходе

$U \to \max.$

ВАХ



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Источник тока J
с внутренним
сопротивлением
$R_i \neq \infty, \ (G_i \neq 0)$

</td>
<td>ВАХ

</td>
</tr>
</table>

У зависимых (неавтономных) источников электрической энергии напряжение (сила тока) зависит от значений напряжения или силы тока, действующего на входе или выходе источника электрической энергии.

В зависимости от соотношения геометрических размеров реальной электрической цепи l и длины волны λ, воздействующих на цепь, различают:

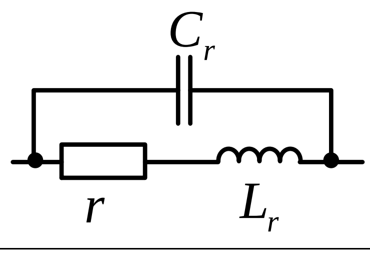
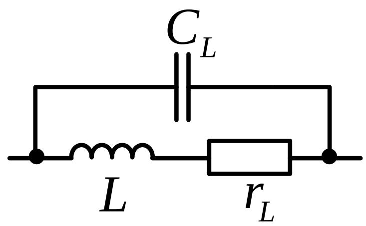
- цепи с сосредоточенными параметрами ($l << \lambda$),
- цепи с распределёнными параметрами ($l >> \lambda$).

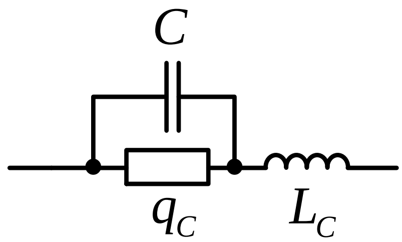
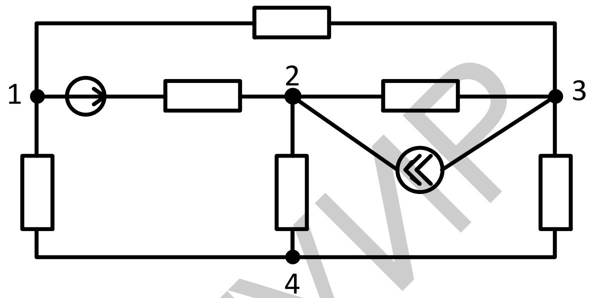
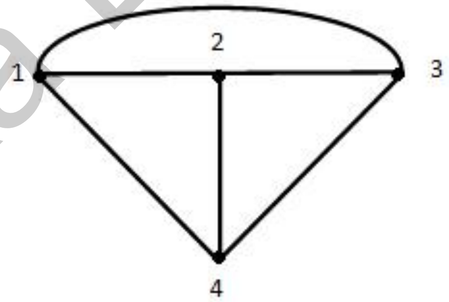
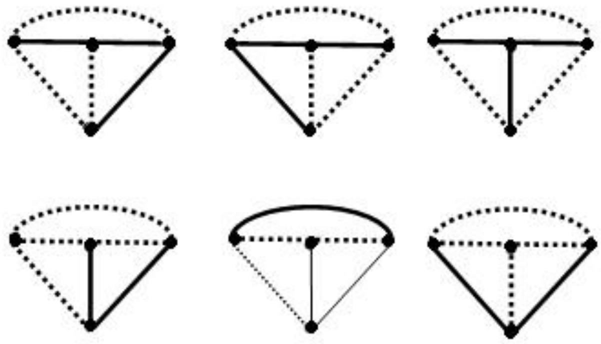
В электрической цепи с сосредоточенными параметрами r, L и C сосредоточены на отдельных её участках.

В электрической цепи с распределёнными параметрами r, L и C распределены вдоль цепи (длинные линии).

Схема электрической цепи – графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения её элементов и показывающее их соединение. В схему включают идеализированные элементы, которые являются математической моделью, описывающей физические явления в реальном элементе.

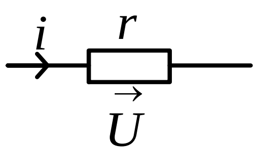
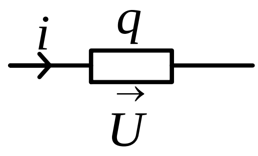
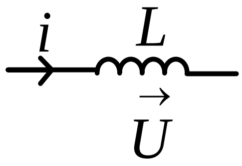
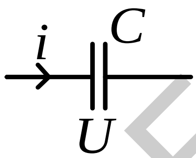
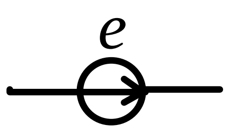
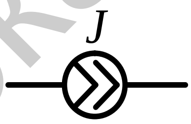
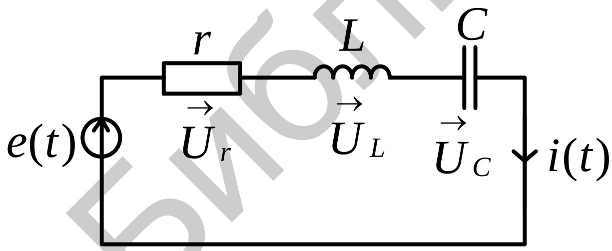
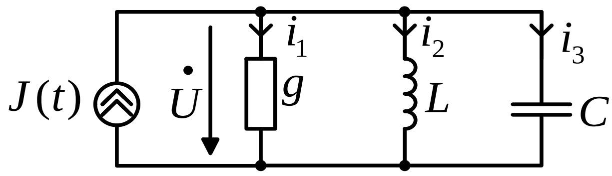
Идеализированная модель резистора – сопротивление r, конденсатора – ёмкость C, катушки индуктивности – индуктивность L.

<table>
<tr>
<td>Эквивалентная схема резистора</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Эквивалентная схема катушки индуктивности</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

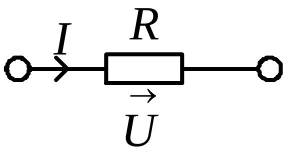
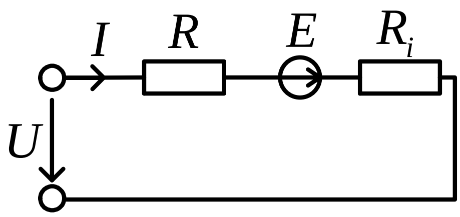
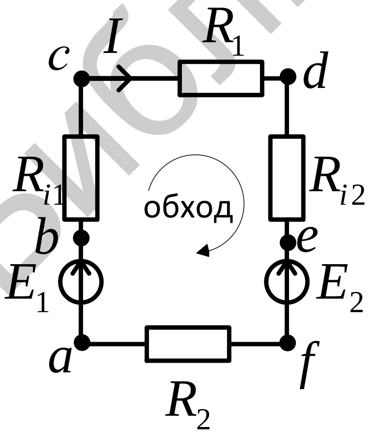
Эквивалентная схема конденсатора	
Элементы топологии (геометрии) электрической цепи	
Ветвь – участок электрической цепи, состоящий из одного или нескольких последовательно соединённых элементов, через которые проходит один и тот же ток	
Узел – место соединения трёх и более ветвей	
Контур – любой замкнутый путь, образованный несколькими ветвями и узлами	12, 23, 14, 24, 34, 13 – ветви; 1, 2, 3, 4 – узлы; 123, 124, 234 – контуры
Граф – изображение схемы электрической цепи, в которой ветви схемы представлены отрезками-вет-вями графа, а узлы – точками-узлами графа	
Дерево графа – любая совокупность ветвей графа, соединяющих все его узлы без образования контуров	
Связь (хорда) графа – это ветвь графа, не принадлежащая его дереву	Сплошные линии – деревья графа, пунктирные – хорды графа
Направленный граф – граф с указанием условно-положительных направлений токов или направлений в виде отрезков со стрелками	

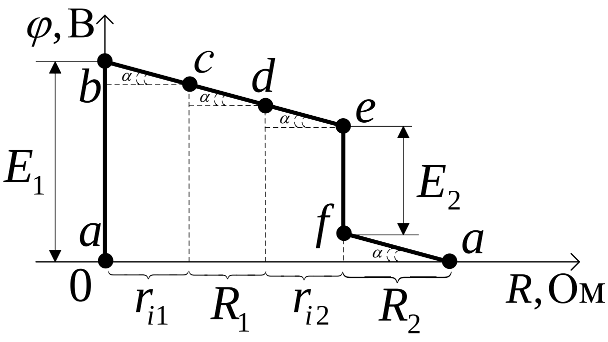
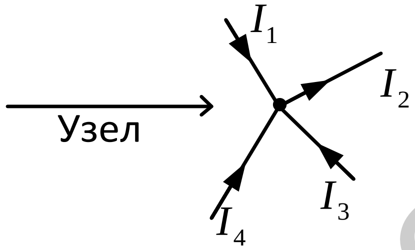
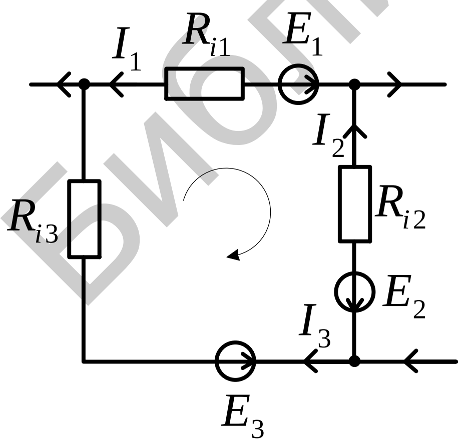
Элементы топологии (геометрии) электрической цепи.
Дуальные элементы и схемы

Условие дуальности – закон изменения напряжения на элементе цепи по форме аналогичен закону изменения тока в другом (дуальном) элементе цепи.

Дуальные элементы	
 $U = r \cdot i$	 $i = q \cdot U$
 $U = L\frac{di}{dt}$; $i = \frac{1}{L}\int U dt$	 $i = C\frac{dU}{dt}$; $U = \frac{1}{C}\int i dt$
 $e(t) = E_m \cos\omega t$	 $J(t) = I_m \cos\omega t$
Дуальные схемы	
 $e(t) = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt$	 $J(t) = qu + C\frac{dU}{dt} + \frac{1}{L}\int U dt$

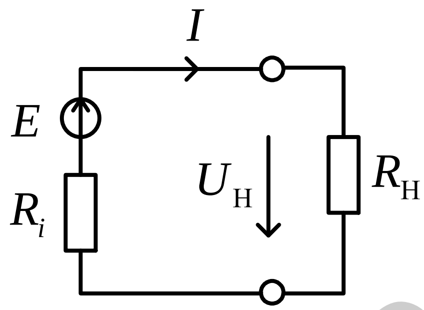
1.2. Законы Ома и Кирхгофа в цепях постоянного тока

Законы Ома	
Закон Ома для участка цепи без ЭДС  	$I=\dfrac{U}{R},\ \ I=UG$
Закон Ома для цепи с ЭДС  	$I=\dfrac{U\pm E}{R+R_i}$. В цепи с неизменными R и E $I=\dfrac{U\pm\sum\limits_{k=1}^{n}E_k}{\sum\limits_{j=1}^{m}R_j}$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}E_k$ – алгебраическая сумма ЭДС; $\sum\limits_{j=1}^{m}R_j$ – арифметическая сумма сопротивлений
Закон Ома для замкнутой цепи  Рис. 1.1	$I=\dfrac{U\pm\sum\limits_{k=1}^{n}E_k}{\sum\limits_{j=1}^{m}R_j}$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}E_k$ – алгебраическая сумма ЭДС; $\sum\limits_{j=1}^{m}R_j$ – арифметическая сумма сопротивлений. Для данной схемы (при $E_1>E_2$) $I=\dfrac{E_1-E_2}{R_1+R_{i1}+R_2+R_{i2}}$

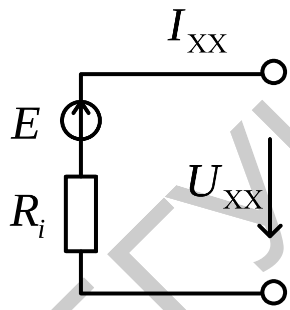
<table>
<tr><td>Потенциальная диаграмма – это график распределения потенциалов в замкнутой цепи (для рис. 1.1)
</td>
<td>Если $\varphi_a = 0$ – базисная точка, то
$$\varphi_b = \varphi_a + E_1 = E_1,$$
$$\varphi_c = \varphi_b - R_{i1}I = E_1 - R_{i1}I,$$
$$\varphi_d = \varphi_c - R_1 I = E_1 - R_{i1}I - R_1 I,$$
$$\varphi_e = \varphi_d - R_{i2}I = E_1 - R_{i1}I - R_1 I - R_{i2}I,$$
$$\varphi_f = \varphi_e - E_2 = E_1 - E_2 - I(R_{i1} + R_{i2} + R_1),$$
$$\varphi_a = \varphi_f - R_2 I = 0.$$
Так как $I = \dfrac{U}{R_{\text{общ}}} \to \text{const}$, то
$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = \text{tg}\alpha,\ \alpha \to \text{const}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Законы Кирхгофа</td></tr>
<tr><td>Первый закон Кирхгофа
</td>
<td>$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$
Алгебраическая сумма токов
$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$
К узлу – «+», от узла – «–»</td></tr>
<tr><td>Второй закон Кирхгофа
</td>
<td>$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} I_k R_k}$$
алгебраическая сумма   алгебраическая сумма
$$E_1 + E_2 - E_3 = -R_{i1}I_1 - R_{i2}I_2 + R_3 I_3$$
ЭДС и ток совпадают с обходом – «+»,
ЭДС и ток направлены навстречу обходу – «–»</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Режимы работы цепи</td></tr>
<tr><td>Режим нагрузки:

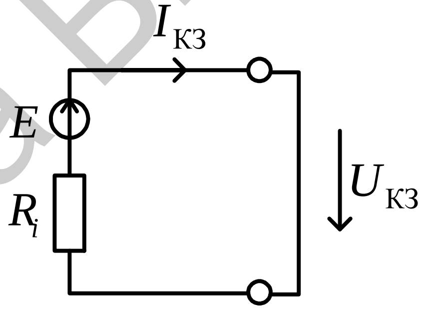
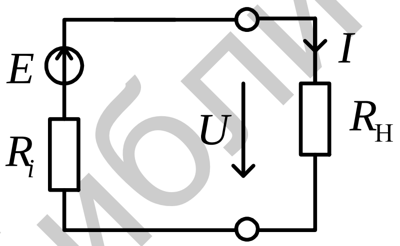
$$I_{Н} = \frac{E}{R_i + R_{Н}};$$

$$U_{Н} = I_{Н} R_{Н} = \frac{E}{R_i + R_{Н}} R_{Н}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Режим холостого хода (ХХ):

$$I_{ХХ} = 0;$$

$$U_{ХХ} = E$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Режим короткого замыкания (КЗ):

$$U_{КЗ} = 0;$$

$$I_{КЗ} = I_{\max} = \frac{E}{R_i}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Баланс мощностей</td></tr>
<tr><td>

$$\left.\begin{aligned} P_{ист} &= EI \\ P_0 &= EI \end{aligned}\right\}$$ – мощность источника (полная мощность);

$P_i = R_i I^2$ – мощность потерь;

$P_{Н} = R_{Н} I^2$ – мощность, потребляемая нагрузкой;

$P_0 = P_i + P_{Н}$;

$EI = R_{Н} I^2 + R_i I^2$</td><td>Активная мощность

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = U^2 G = I^2 R$$

P [Вт, кВт, МВт]

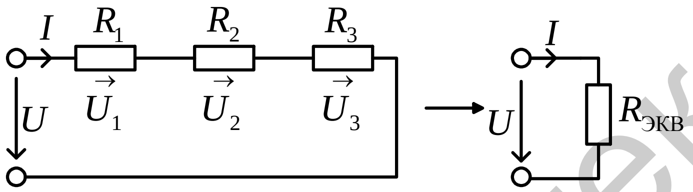
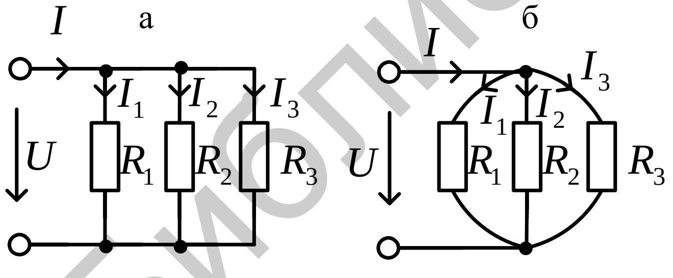
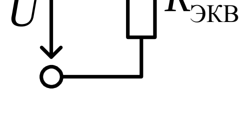
Вт $\cdot 10^3$ Вт $\cdot 10^6$

Уравнение баланса мощностей

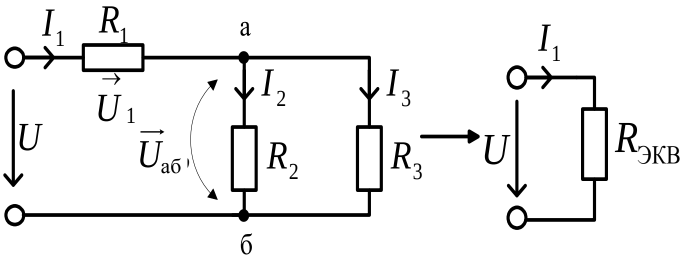
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} E_i I_i}_{\text{алгебраическая сумма}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k}_{\text{арифметическая сумма}}$$</td></tr>
</table>

Условие передачи максимальной активной мощности в нагрузку	
$P = R_{\text{Н}} I^2; I = \dfrac{E}{R_i + R_{\text{Н}}}; P = \dfrac{E^2 R_{\text{Н}}}{(R_i + R_{\text{Н}})^2}.$ Экстремум $\dfrac{dP}{dR_{\text{Н}}} = 0$ при $R_i = R_{\text{Н}}$	Коэффициент полезного действия (КПД) $\eta = \dfrac{P_{\text{Н}}}{P_0} = \dfrac{P_{\text{Н}}}{P_i + P_{\text{Н}}} = \dfrac{R_{\text{Н}}}{R_i + R_{\text{Н}}}$ при $R_i = R_{\text{Н}}$, $\eta = 0{,}5$

1.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей

Последовательное соединение сопротивлений (делитель напряжения) 	$U = U_1 + U_2 + U_3;$ $R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + R_2 + R_3.$ Свойство: напряжение пропорционально сопротивлению $U_1 = R_1 I,\ U_2 = R_2 I,\ U_3 = R_3 I$
Параллельное соединение сопротивлений (делитель тока) а б  в 	$I = I_1 + I_2 + I_3;$ $\dfrac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3};$ $R = \dfrac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$ $G_{\text{ЭКВ}} = G_1 + G_2 + G_3.$ Свойство: ток пропорционален величине, обратной сопротивлению

Смешанное соединение сопротивлений



$$R_{ЭКВ} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3};$$

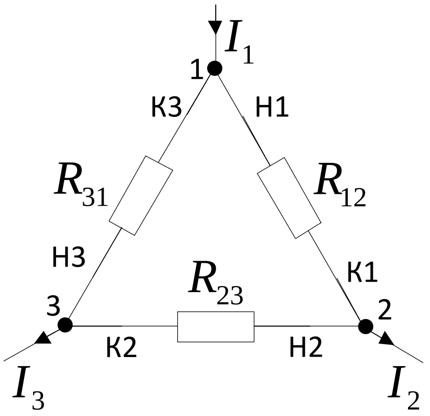
$$U = U_1 + U_{аб}; \; U_{аб} = I_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

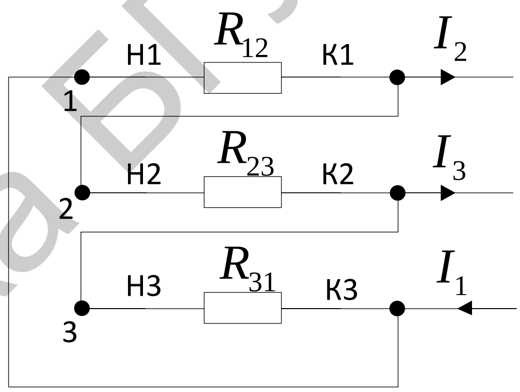
Правило плеч:

$$I_2 = \frac{U_{аб}}{R_2} = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3};$$

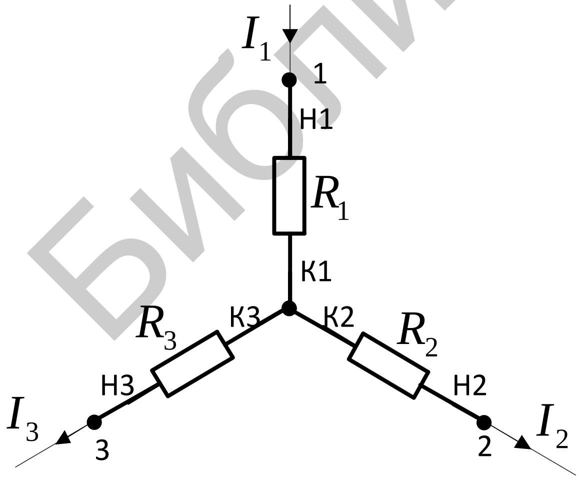
$$I_3 = \frac{U_{аб}}{R_3} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

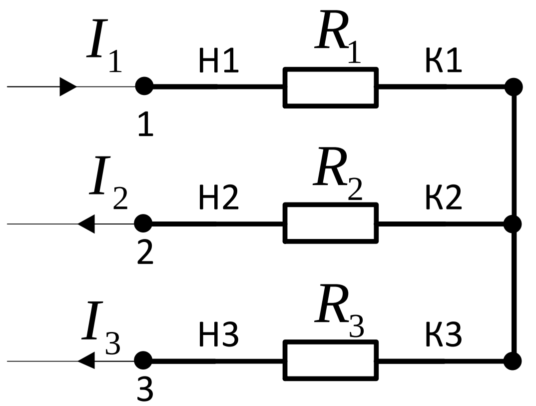
«Треугольник» сопротивлений



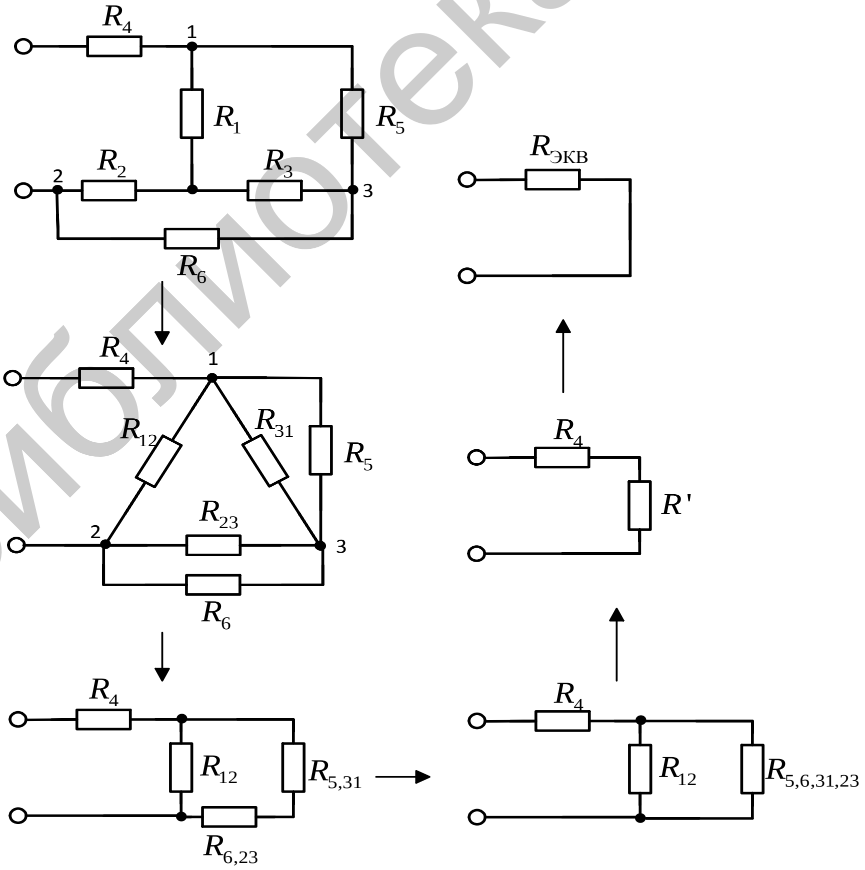


«Звезда» сопротивлений

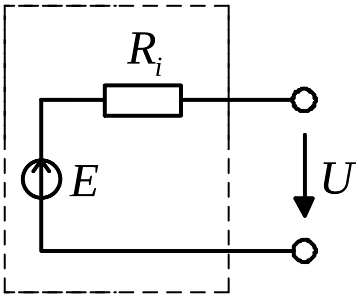




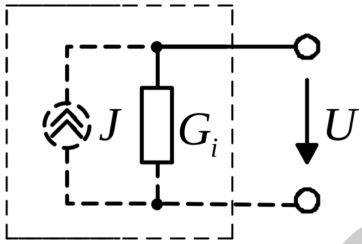
Преобразование $\Delta \longrightarrow \curlywedge$	$R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$; $R_2 = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$; $R_3 = \dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$
Преобразование $\curlywedge \longrightarrow \Delta$	$R_{12} = R_1 + R_2 + \dfrac{R_1R_2}{R_3}$; $R_{23} = R_2 + R_3 + \dfrac{R_2R_3}{R_1}$; $R_{31} = R_3 + R_1 + \dfrac{R_3R_1}{R_2}$
Пример преобразования $\curlywedge \longrightarrow \Delta$	



Эквивалентные преобразования источников электрической энергии



или



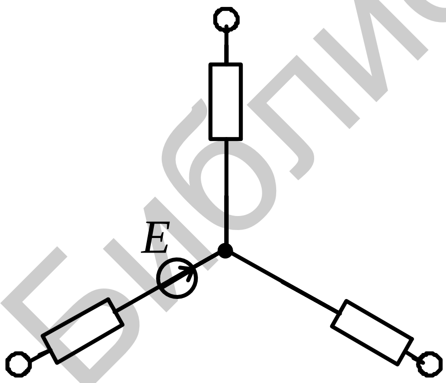
$$E = \frac{J}{G_i}; \qquad R_i = \frac{1}{G_i}$$

источник напряжения

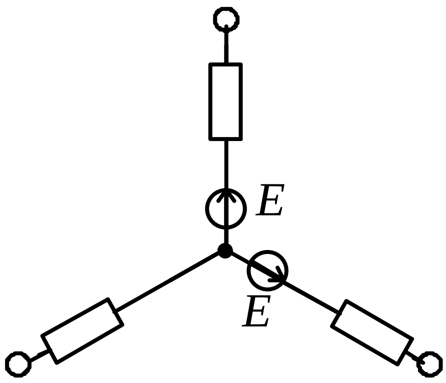
$$J = \frac{E}{R_i}; \qquad G_i = \frac{1}{R_i}$$

источник тока

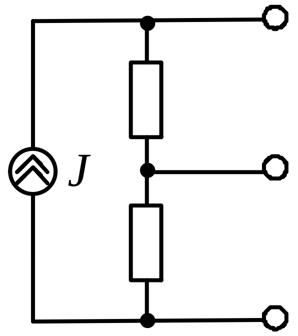
Перенос идеального источника напряжения E



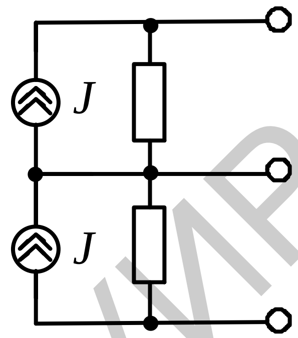
или

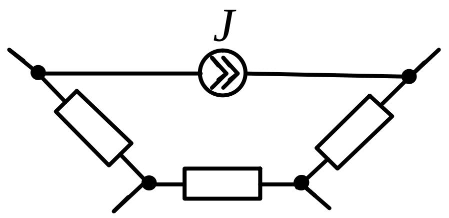


Перенос идеального источника тока J

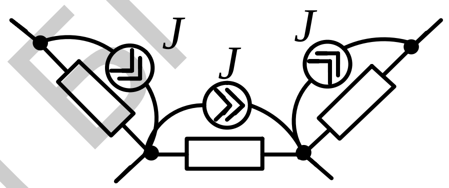


или

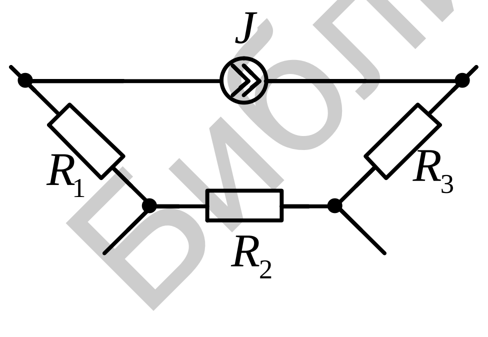


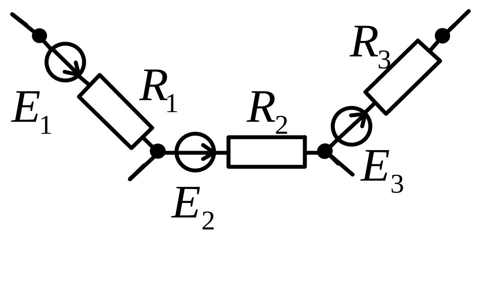


или



Перенос идеального источника тока J с преобразованием в источник напряжения E





$$E_1 = R_1 J; \qquad E_2 = R_2 J; \qquad E_3 = R_3 J$$

1.4. Методы расчёта электрических цепей постоянного тока

Метод уравнений Кирхгофа

Общее число уравнений равно числу ветвей. По 1-му закону Кирхгофа составляется число уравнений, на одно меньше, чем число узлов. По 2-му закону Кирхгофа составляется число уравнений, равное количеству независимых контуров в схеме.

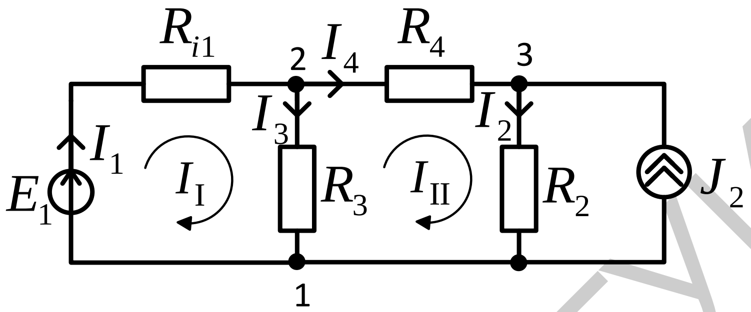


Рис. 1.2

$$\left.\begin{array}{lll} \text{1-й закон} & \text{для 1-го узла:} & I_1 - I_3 - I_4 = 0; \\ \text{Кирхгофа} & \text{для 3-го узла:} & I_4 - I_2 + J_2 = 0; \\ & & \\ \text{2-й закон} & \text{для I контура:} & I_1 R_{i1} + I_3 R_3 = E_1; \\ \text{Кирхгофа} & \text{для II контура:} & -I_3 R_3 + I_2 R_2 + I_4 R_4 = 0. \end{array}\right\}$$

Баланс мощностей:

$$E_1 I_1 + J_2 U_{31} = I_1^2 R_{i1} + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_2^2 R_2, \text{ где } U_{31} = I_2 R_2$$

Метод контурных токов

Число уравнений равно числу независимых контуров. Уравнения составляются только по 2-му закону Кирхгофа.

В общем случае для N независимых контуров система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} R_{11} I_{\mathrm{I}} + R_{12} I_{\mathrm{II}} + \ldots + R_{1n} I_N = E_{\mathrm{I}}; \\ R_{21} I_{\mathrm{I}} + R_{22} I_{\mathrm{II}} + \ldots + R_{2n} I_N = E_{\mathrm{II}}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n1} I_{\mathrm{I}} + R_{n2} I_{\mathrm{II}} + \ldots + R_{nn} I_N = E_N. \end{array}\right\}$$

В системе $R_{11}, R_{22}, ..., R_{nn}$ – собственные сопротивления независимых контуров; $R_{12}, R_{21}, ..., R_{n1}$ – взаимные сопротивления между независимыми контурами; $I_{\mathrm{I}}, I_{\mathrm{II}}, ..., I_{N}$ – контурные токи. Взаимные сопротивления положительны при совпадении направлений проходящих через них контурных токов и отрицательны, если контурные токи встречны. Для схемы, приведённой на рис. 1.2: $\left.\begin{array}{l}(R_{i1}+R_3)I_{\mathrm{I}} - R_3 I_{\mathrm{II}} = E_1; \\ -R_3 I_{\mathrm{I}} + (R_3+R_4+R_2)I_{\mathrm{II}} + R_2 I_2 = 0.\end{array}\right\}$ По найденным контурным токам находим токи в ветвях: $I_1 = I_{\mathrm{I}},\ I_3 = \lvert I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} \rvert,\ I_4 = I_{\mathrm{II}},\ I_2 = I_{\mathrm{II}} + J_2$
Метод узловых потенциалов (напряжений)
Число уравнений равно числу узлов. Для схемы, приведённой на рис. 1.2: $\left.\begin{array}{l}G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + G_{13}\varphi_3 = I_{\mathrm{I}}; \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + G_{23}\varphi_3 = I_{\mathrm{II}}; \\ G_{31}\varphi_1 + G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = I_{\mathrm{III}}.\end{array}\right\}$ В системе G_{11}, G_{33}, G_{33}– собственные проводимости узлов; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$– потенциалы узлов; $G_{12}, G_{21}, G_{13}, G_{31}, G_{23}, G_{32}$ – взаимные проводимости между узлами (взаимные проводимости всегда отрицательны); $I_{\mathrm{I}}, I_{\mathrm{II}}, I_{\mathrm{III}}$– узловые токи (как алгебраическая сумма токов в прилегающих к узлу ветвях). Число уравнений можно сократить, положив равным нулю потенциал одного из узлов. Например, при $\varphi_1 = 0$ из системы удаляется первый столбец и первая строка: $\left.\begin{array}{l}G_{22}\varphi_2 + G_{23}\varphi_3 = I_{\mathrm{II}}; \\ G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = I_{\mathrm{III}}\end{array}\right\}$ или $\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\varphi_2 - \frac{1}{R_4}\varphi_3 = \frac{E}{R_{i1}}; \\ -\frac{1}{R_4}\varphi_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)\varphi_3 = J_2.\end{array}\right\}$

Найдя из последней системы потенциалы узлов φ_2 и φ_3, определяем токи во всех ветвях (учитывая, что $\varphi_1 = 0$):

$$\varphi_2 = \varphi_1 + E_1 - I_1 R_{i1}, \text{ откуда } I_1 = \frac{E_1 - \varphi_2}{R_{i1}};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I_3 R_3, \text{ откуда } I_3 = \frac{\varphi_2}{R_3};$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + I_2 R_2, \text{ откуда } I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_2};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - I_4 R_4, \text{ откуда } I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4}$$

Метод наложения

Позволяет определить токи в ветвях электрической цепи по закону Ома. Основан на принципе наложения (или суперпозиции): ток в любой ветви ЛЭЦ, содержащей несколько источников ЭДС, определяют как алгебраическую сумму частных токов, созданных в этой ветви каждым источником в отдельности.

Пример. Схему, изображённую на рис. 1.2, считая в ней источники E и J идеальными и используя принцип суперпозиции, разбивают на две схемы (рис. 1.3 и 1.4).

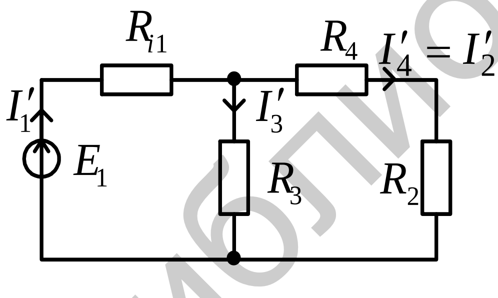


Рис. 1.3

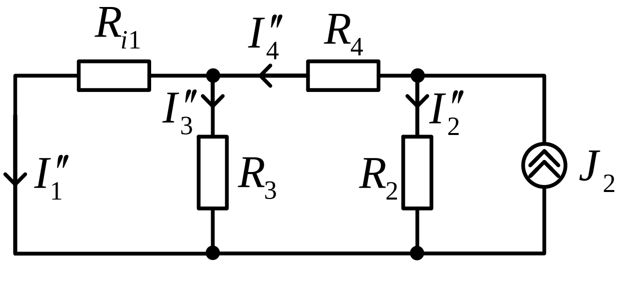


Рис. 1.4

Частичные токи в схеме на рис. 1.3:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_{i1} + \dfrac{R_3(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad I'_4 = I'_2 = I'_1 - I'_3.$$

Частичные токи в схеме на рис. 1.4:

$$I_2'' = J_2 \frac{\left(\dfrac{R_{i1}R_3}{R_{i1}+R_3}+R_4\right)}{R_2+R_4+\dfrac{R_{i1}R_3}{R_{i1}+R_3}};\;\; I_4'' = J_2 - I_2'';\;\; I_3'' = I_4''\frac{R_{i1}}{R_{i1}+R_3}.$$

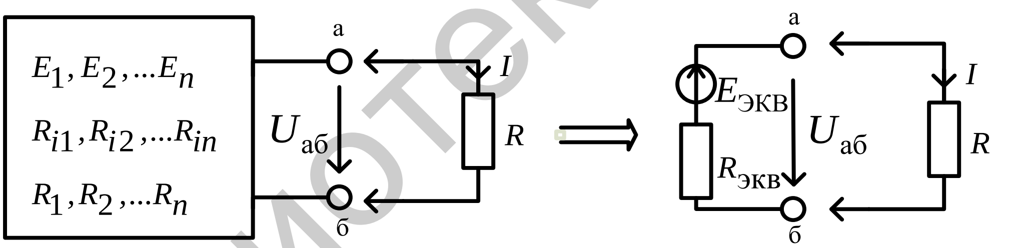
Искомые токи в схеме на рис. 1.2:

$$I_1 = \left|I_1' - I_1''\right|;\;\; I_2 = I_2' + I_2'';$$

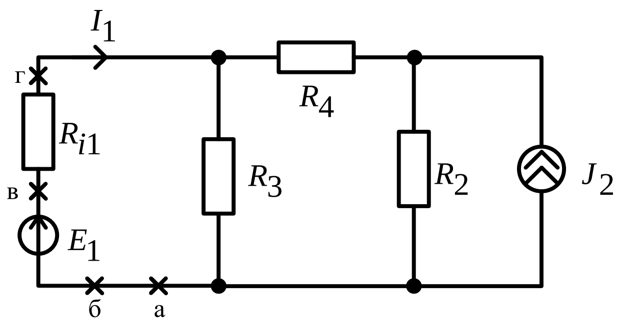
$$I_3 = I_3' + I_3'';\;\; I_4 = \left|I_4' - I_4''\right|$$

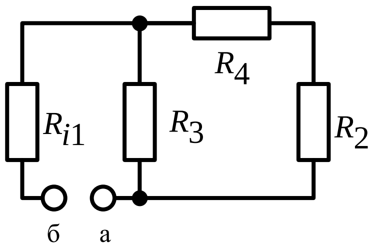
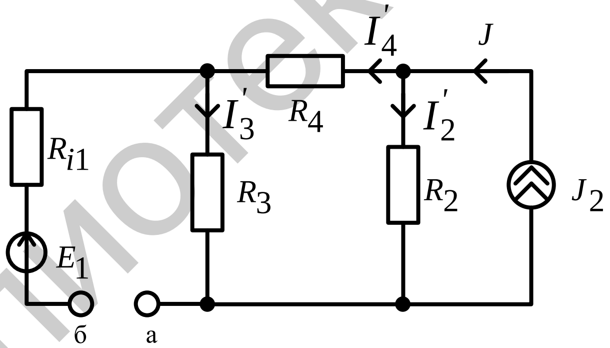
Метод эквивалентного генератора

Применяется для определения тока в одной из ветвей сложной электрической цепи. Метод основан на теореме об эквивалентном генераторе, которая утверждает, что ток I в любой ветви аб не изменится, если остальную часть электрической цепи заменить эквивалентным источником напряжения, ЭДС которого $E_{\text{экв}}$ равна напряжению на зажимах а и б при условии, что источники ЭДС и тока – идеальны, т. е. могут быть заменены соответственно короткозамкнутыми проводниками и разрывами цепи.



Пример. Для нахождения тока в ветви с R_{i1} возможны несколько вариантов её разрыва.

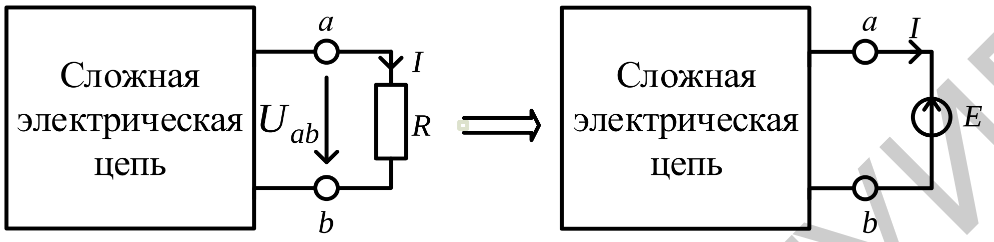


<table>
<tr><td>1) а–б</td><td>$$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{U_{\text{аб}}}{R_{\text{аб}}}$$</td></tr>
<tr><td>2) а–в</td><td>$$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}} \pm E_1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{U_{\text{ав}} \pm E_1}{R_{\text{ав}}}$$</td></tr>
<tr><td>3) а–г</td><td>$$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}} \pm E_1}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{i1}} = \frac{U_{\text{аг}} \pm E_1}{R_{\text{аг}} + R_{i1}}$$</td></tr>
<tr><td>4) в–г</td><td>$$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{i1}} = \frac{U_{\text{вг}}}{R_{\text{вг}} + R_{i1}}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для варианта а–б</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$R_{\text{ЭКВ}} = R_{i1} + \frac{R_3\left(R_2 + R_4\right)}{R_3 + R_2 + R_4}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$U_{\text{аб}} = \varphi_{\text{а}} - \varphi_{\text{б}};$$
$$\varphi_{\text{б}} = \varphi_{\text{а}} + R_3 I_3' - E_1;$$
$$U_{\text{аб}} = E_1 - R_3 I_3', \qquad I_3' = J_2 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$$</td></tr>
</table>

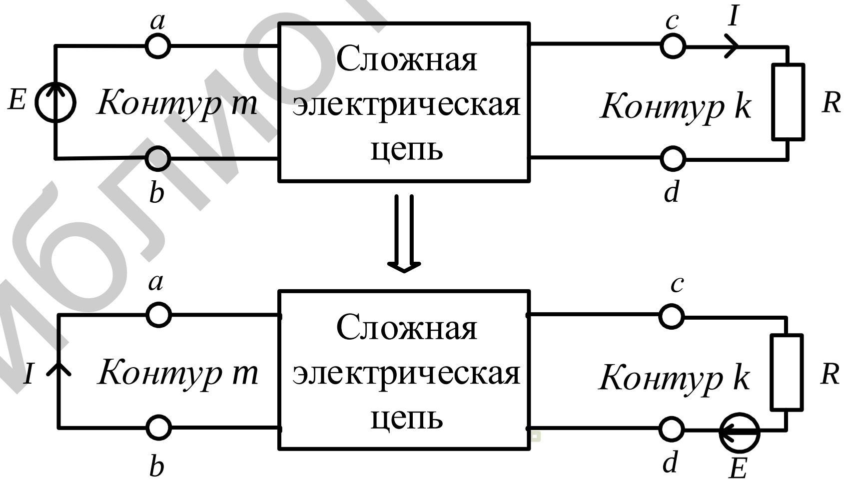
1.5. Теорема компенсации и принцип взаимности

Теорема компенсации утверждает, что любое сопротивление электрической цепи можно заменить идеальным источником ЭДС, у которого значение ЭДС равно падению напряжения на этом сопротивлении, а направление ЭДС противоположно направлению тока, проходящего через это сопротивление



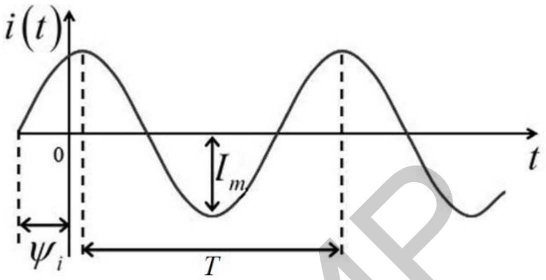
$$E = U_{ab} = RI$$

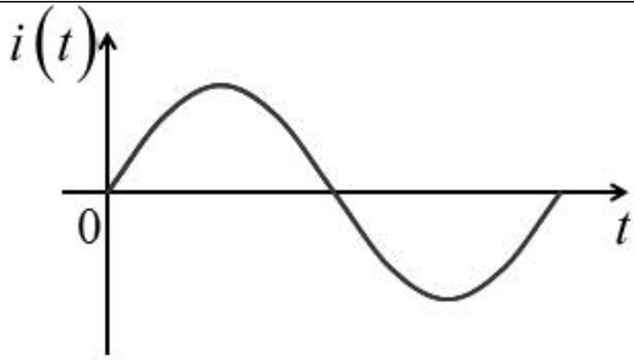
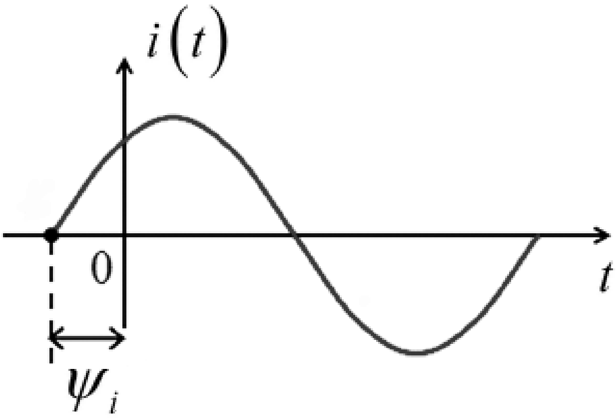
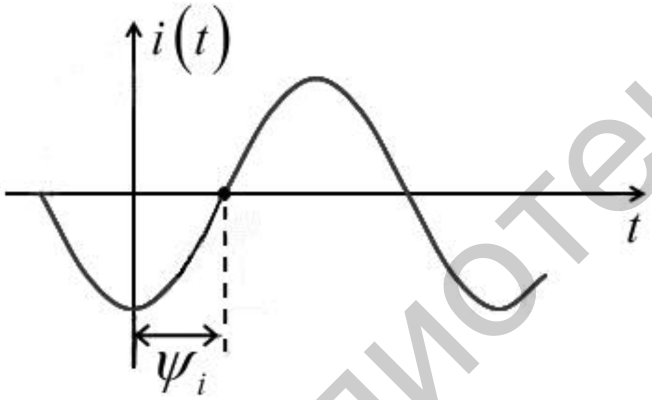
Принцип взаимности утверждает, что если ЭДС E, действуя в ветви *ab* контура *m*, не содержащего других источников ЭДС, создает в ветви *cdc* сопротивлением R (контур *k*) ток I, то эта же ЭДС, действуя в ветви *cd*, вызывает в ветви *ab* такой же ток I

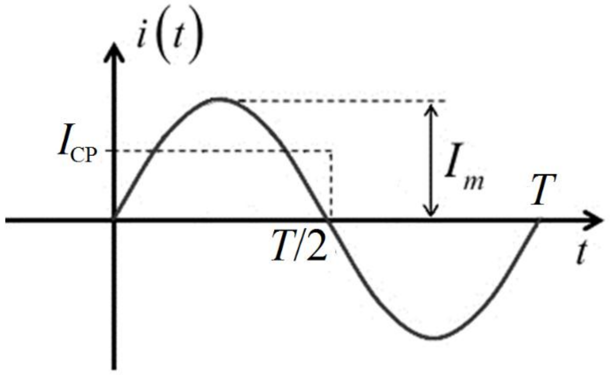


2. Электрические цепи синусоидального тока

2.1. Основные характеристики синусоидального тока

Мгновенное значение синусоидального тока (напряжения) $i(t)=I_m\sin\theta(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$, где $\theta(t)=\omega t+\psi_i$ – полная фаза	
Амплитуда тока (напряжения, ЭДС) – максимальное значение функции	$I_m[\text{А}]$, $U_m[\text{В}]$, $E_m[\text{В}]$
Период – время, за которое совершается одно полное колебание	$T[\text{с, мс, мкс, нс}]$; $\text{с}\cdot10^{-3}$, $\text{с}\cdot10^{-6}$, $\text{с}\cdot10^{-9}$
Частота – число периодов в секунду	$f=\dfrac{1}{T}\left[\text{с}^{-1}\right]$ или $[\text{Гц, кГц, МГц, ГГц}]$; $\text{Гц}\cdot10^{3}$, $\text{Гц}\cdot10^{6}$, $\text{Гц}\cdot10^{9}$
Угловая (круговая) частота – скорость изменения полной фазы тока (напряжения, ЭДС)	$\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}\left[\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$ или $\left[\text{с}^{-1}\right]$ при $f=50$ Гц, $\omega=314\ \text{с}^{-1}$
Полная фаза – аргумент синусоидального тока, отсчитываемый от точки перехода тока через нуль (или максимум) к положительному значению	$\theta(t)=\omega t+\psi_i$ $[\text{рад}]$ или $[\text{град}]$
Начальная фаза – значение фазы синусоидального тока (напряжения, ЭДС) при $t=0$	ψ $[\text{рад}]$ или $[\text{град}]$

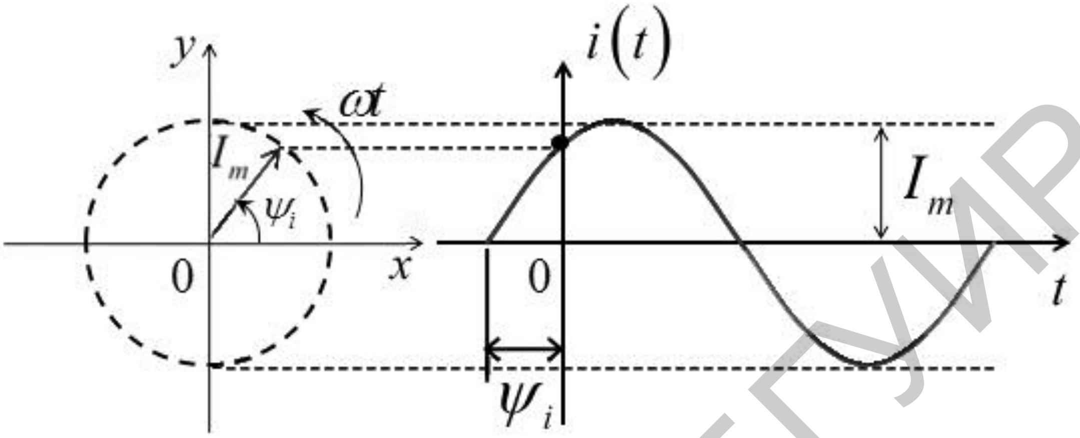
	$\psi_i = 0$
	$\psi_i > 0$ (опережение)
	$\psi_i < 0$ (отставание)
Сдвиг фаз между гармоническими колебаниями – разность начальных фаз	$\varphi = \psi_u - \psi_i$ [рад] или [град]
$\varphi = 0$	совпадение в фазе
$\varphi = \pm\pi$	в противофазе
$\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$	в квадратуре

Среднее значение тока (напряжения, ЭДС) или средневыпрямленное значение, соответствующее полуволне  	$I_{\text{CP}} = 2\left[\dfrac{1}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} i(t)dt\right]$, при $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ и $\psi_i = 0$ $I_{\text{CP}} = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin\omega t dt = \dfrac{4I_m}{T\omega} =$ $= \dfrac{2I_m}{\pi} \approx 0{,}637 I_m$
Действующее значение тока (напряжения, ЭДС) – среднеквадратичное значение тока за период	$I_{\text{Д}}(I) = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T i^2(t)dt}$, при $\psi_i = 0$ $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T {I_m}^2 \sin^2\omega t dt} =$ $= \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 I_m$ $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T U^2(t)dt}$ $E = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T e^2(t)dt}$

Среднее значение синусоидального тока определяется высотой прямоугольника с основанием $T/2$, площадь которого равна площади, ограниченной кривой тока $i(t)$.

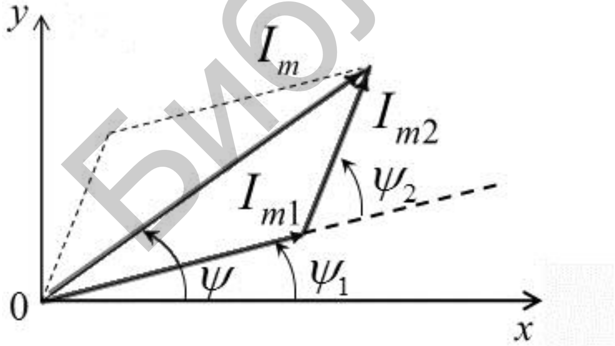
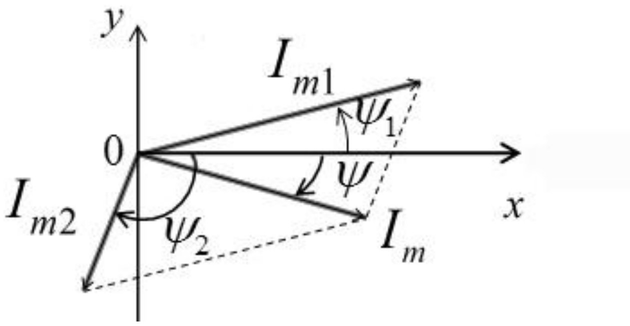
2.2. *Представление синусоидального тока проекциями вращающегося вектора и комплексными величинами*

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

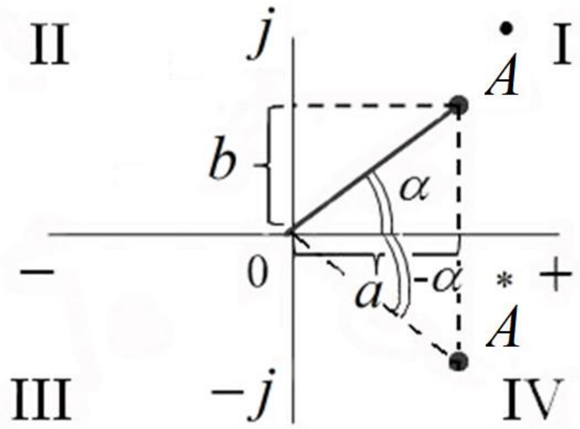


Проекция вектора I_m на вертикальную ось равна $i(t) = I_m \sin\psi_i$, что соответствует мгновенному значению тока $i(t)$ при $t = 0$.

Проекция вектора I_m на горизонтальную ось равна $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, что соответствует мгновенному значению тока $i(t)$ в любой момент времени.

Сложение векторов	Вычитание векторов
$i_1(t) = I_{m1}\sin(\omega t + \psi_1)$, $i_2(t) = I_{m2}\sin(\omega t + \psi_2)$, $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$  I_m – длинная диагональ	$i(t) = i_1(t) - i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$  I_m – короткая диагональ

Комплексные величины



$\dot{A} = a + jb$	Алгебраическая форма записи
$\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ $\overset{*}{A} = Ae^{-j\alpha}$	Показательная форма записи
$\dot{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$	Тригонометрическая форма записи

Основные комплексные величины	
$\dot{A},\ \overset{*}{A}$	Комплексное и комплексно-сопряженное число
$A = \sqrt{a^2 + b^2}$	Модуль комплексного числа
$a,\ b$	Действительная (вещественная) и мнимая части комплексного числа
α	Аргумент комплексного числа
$\alpha = \pm\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$	в I и IV квадрантах
$\alpha = \pi \pm \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$	во II и III квадрантах

<table>
<tr><td colspan="5">$$\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} =$$ $$= \underbrace{I_m \cos(\omega t + \psi_i)}_{\mathrm{Re}\left[\dot{I}_m(t)\right]} + \underbrace{jI_m \sin(\omega t + \psi_i)}_{\mathrm{Jm}\left[\dot{I}_m(t)\right]}$$</td><td>Комплексный мгновенный синусоидальный ток (комплекс мгновенного значения тока)
Re(Real) – проекция на вещественную ось
Jm(Imaginary) – проекция на мнимую ось</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dot{I}_m(t) = \underbrace{I_m e^{j\psi_i}}_{\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\psi_i}} \cdot e^{j\omega t}$$ $$e^{j\omega t}$$</td><td rowspan="3">Комплексная амплитуда тока
Оператор вращения</td></tr>
<tr><td>ωt</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>$e^{j\omega t}$</td><td>1</td><td>j</td><td>-1</td><td>$-j$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$$\frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}$$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$</td><td>Действующий ток</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$\dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$$</td><td>Комплексный действующий ток</td></tr>
</table>

По известному комплексу мгновенного значения тока $\dot{I}_m(t)$ можно записать комплексную амплитуду тока $\dot{I}_m$, комплексный действующий ток $\dot{I}$ и действующий ток I.

2.3. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Комплексное сопротивление	
$Z = r + jx = z \cdot e^{j\varphi_z} =$ $= z\cos\varphi + jz\sin\varphi$	
$z = \dfrac{U_m}{I_m}$	Модуль комплексного сопротивления
$\varphi_z = \psi_u - \psi_i$	Аргумент комплексного сопротивления
r, x	Активная и реактивная части комплексного сопротивления
Комплексная проводимость	
$Y = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{r}{r^2 + x^2} - j\dfrac{x^2}{r^2 + x^2} =$ $= g - jb = y \cdot e^{j\varphi_Y}$	
$y,\ g,\ b$	Модуль, активная и реактивная части комплексной проводимости
$y = \dfrac{I_m}{U_m} = \sqrt{g^2 + b^2}$	
$\varphi_y = -\varphi_z$	Аргумент комплексной проводимости
$g = y \cdot \cos\varphi_y$	Активная проводимость
$b = y \cdot \sin\varphi_y$	Реактивная проводимость
$\varphi_y = \psi_u - \psi_i$	Сдвиг фаз между напряжением и током

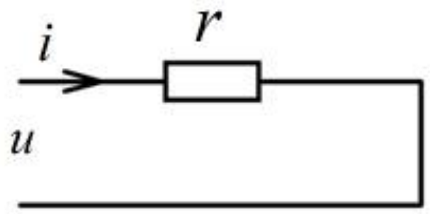
Закон Ома	
$\dot{I}_m = \dfrac{\dot{U}_m}{Z}$	Комплексная амплитуда тока
$Z = z \cdot e^{j\varphi}$	Комплексное сопротивление цепи
$z = \sqrt{r^2 + jx^2}$	Модуль комплексного сопротивления цепи
r, x	Активная и реактивная составляющие комплексного сопротивления цепи
$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{Z}$	Комплекс действующего тока
Законы Кирхгофа	
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_{mk} = 0;\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$	1-й закон Кирхгофа
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{E}_{mk} = \sum\limits_{l=1}^{m} \dot{U}_{ml} = \sum\limits_{l=1}^{m} \dot{I}_{ml} \cdot Z_l$	2-й закон Кирхгофа

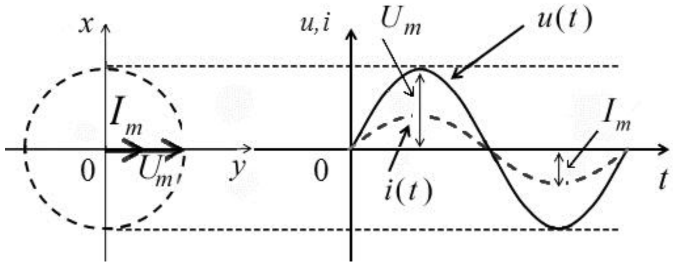
Отношения комплексных амплитуд напряжения и тока $Z = \dot{U}/\dot{I} = \dot{U}_m/\dot{I}_m$ есть закон Ома в комплексной форме, или $\dot{I}_m = \dot{U}_m/Z = \dot{U}_m Y$, $\dot{U}_m = \dot{I}_m Z = \dot{I}_m/Y$, т. е. комплексная амплитуда тока в цепи синусоидального тока равна комплексной амплитуде напряжения, делённой на комплексное сопротивление цепи.

1-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных амплитуд токов в любом узле электрической цепи равна 0.

2-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма комплексных амплитуд ЭДС в любом контуре электрической цепи синусоидального тока равна алгебраической сумме комплексных амплитуд напряжений на элементах контура.

2.4. Элементы R, L и C в цепи синусоидального тока

<table>
<tr><td colspan="2">Активное сопротивление</td></tr>
<tr><td>




</td><td>

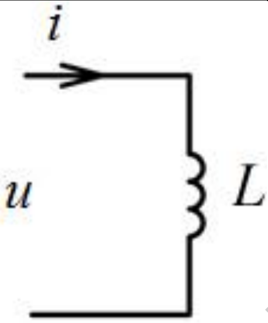
$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$;

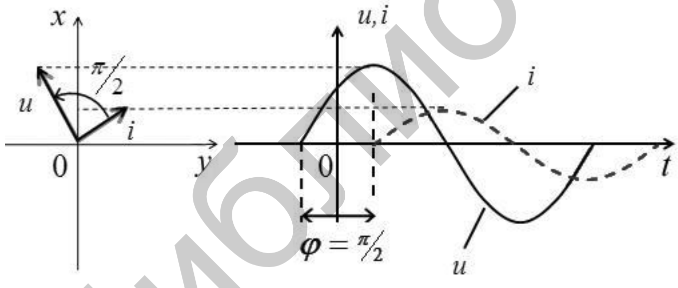
$i(t) = \dfrac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{r}$;

$\dfrac{U_m}{r} = I_m,\ Z = r,\ Y = g$;

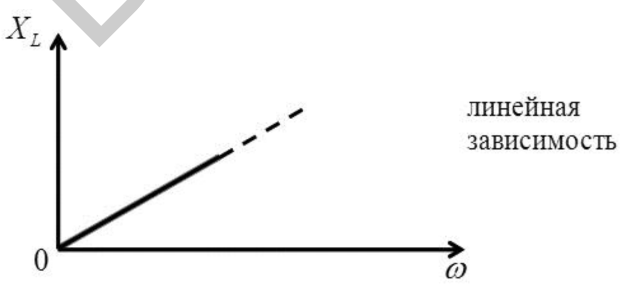
$\psi_u = \psi_i$;

$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Индуктивность</td></tr>
<tr><td>




Частотные свойства



</td><td>

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$;

$u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$;

$U_m = I_m \cdot \omega L$;

$\psi_u = \psi_i + \dfrac{\pi}{2}$;

$\varphi = \psi_u - \psi_i = \dfrac{\pi}{2}$.

Напряжение опережает ток по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$.

$X_L = \omega L = f(\omega)$

при $\omega = 0,\ X_L = 0,\ X_L$ эквивалентно короткозамкнутому (КЗ) проводнику;

при $\omega \to \infty,\ X_L \to \infty,\ X_L$ эквивалентно холостому ходу (ХХ).

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

$$Z=\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}=\underbrace{\omega L}_{X_L}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}=jX_L$$

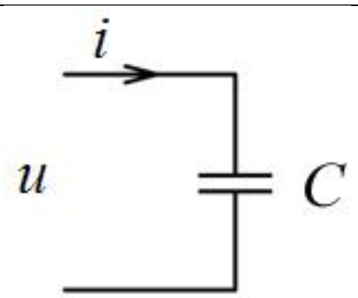
$$Y=\frac{1}{Z}=-j\frac{1}{X_L}=-jb_L$$

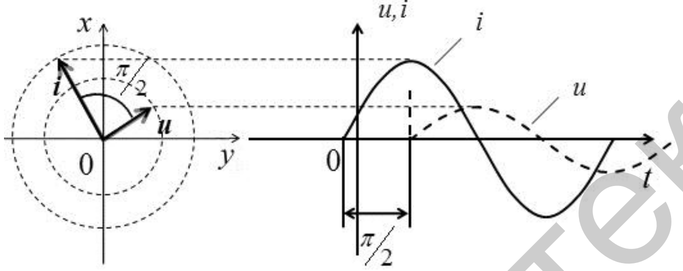
</td><td>

Сопротивление индуктивности реактивно и положительно.

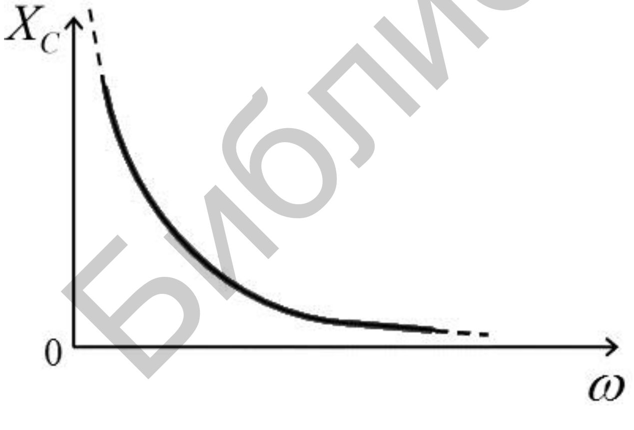
Проводимость индуктивности реактивна и отрицательна.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ёмкость</td></tr>
<tr><td>





Частотные свойства



$$Z=\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}=\underbrace{\frac{1}{\omega C}}_{X_C}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}=-jX_C$$

</td><td>

$u_c(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$;

$i_c(t)=C\dfrac{du_c(t)}{dt}=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$;

$I_m=\omega C\cdot U_m$;

$\psi_i=\psi_u+\dfrac{\pi}{2}$;

$\varphi=\psi_u-\psi_i=-\dfrac{\pi}{2}$.

Напряжение отстаёт по фазе от тока на $\dfrac{\pi}{2}$.

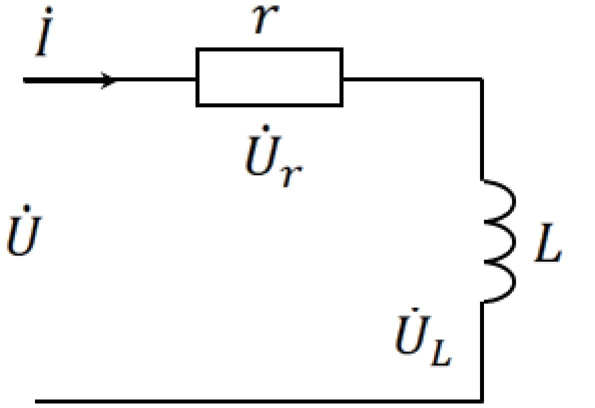
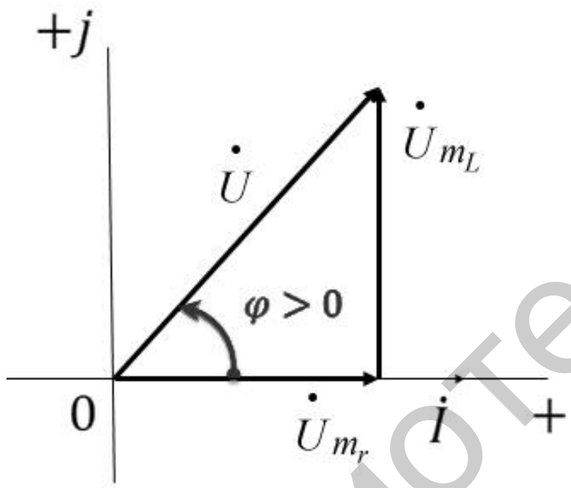
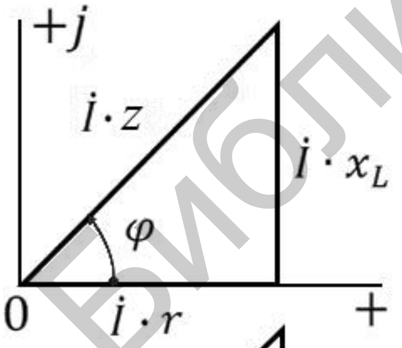
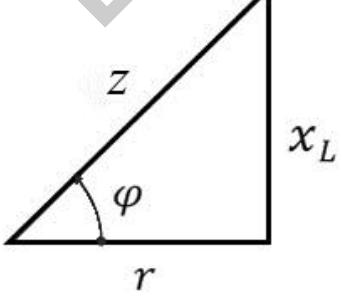
$$X_C=\frac{1}{\omega C}=f(\omega)$$

при $\omega=0,\ X_C\to\infty,\ X_C$ эквивалентно холостому ходу (ХХ);

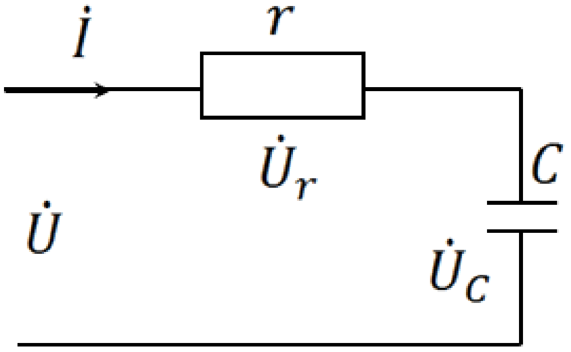
при $\omega=\infty,\ X_C\to 0,\ X_C$ эквивалентно короткозамкнутому (КЗ) проводнику.

Сопротивление ёмкости реактивно и отрицательно.

</td></tr>
</table>

$Y = \dfrac{1}{Z} = j\omega C = jb_c$	Проводимость ёмкости реактивна и положительна
RL-цепь	
   	$\dot{U}_m = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$ $\dot{I}_m = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$ $\dot{U}_m = \dot{U}_{m_r} + \dot{U}_{m_L} =$ $= U_{m_r} \cdot e^{j\psi_i} + U_{m_L} \cdot e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})} =$ $= \underbrace{I_m \cdot e^{j\psi_i}}_{\dot{I}_m} \underbrace{(r + j\omega L)}_{Z}.$ $\varphi = \psi_u - \psi_i;$ $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}.$ $z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2};$ $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{X_L}{r};$ $I = \dfrac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}$

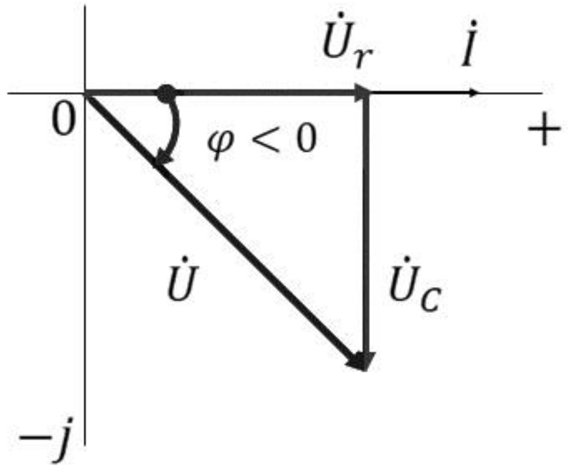
RC-цепь



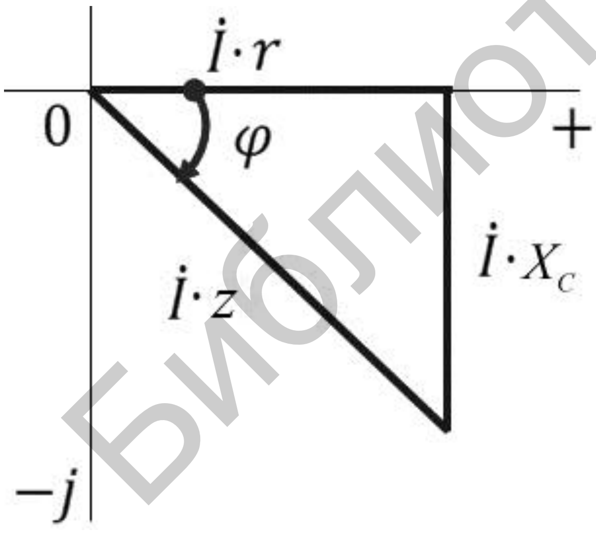
$$\dot{U}_m = \dot{U}_{m_r} + \dot{U}_{m_L} =$$

$$= U_{m_r} \cdot e^{j\psi_i} + U_{m_L} \cdot e^{j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} =$$

$$= \underbrace{I_m \cdot e^{j\psi_i}}_{\dot{I}_m} \underbrace{(r - j\frac{1}{\omega C})}_{z}.$$

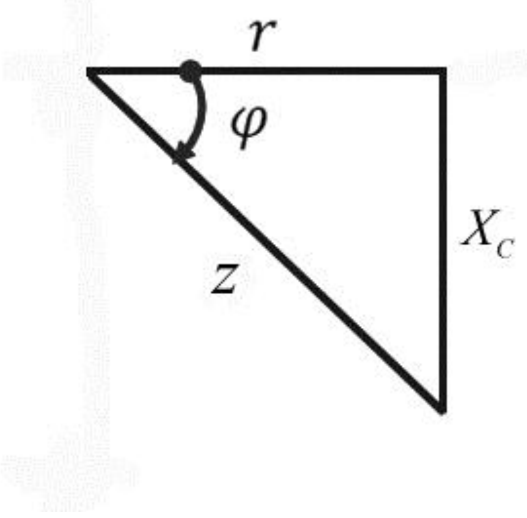
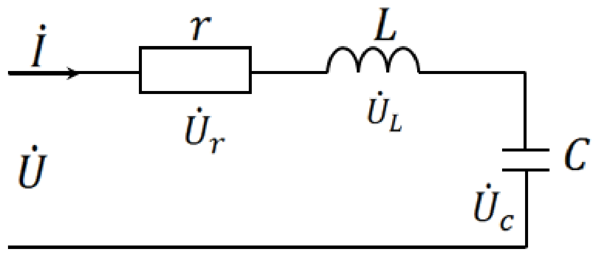
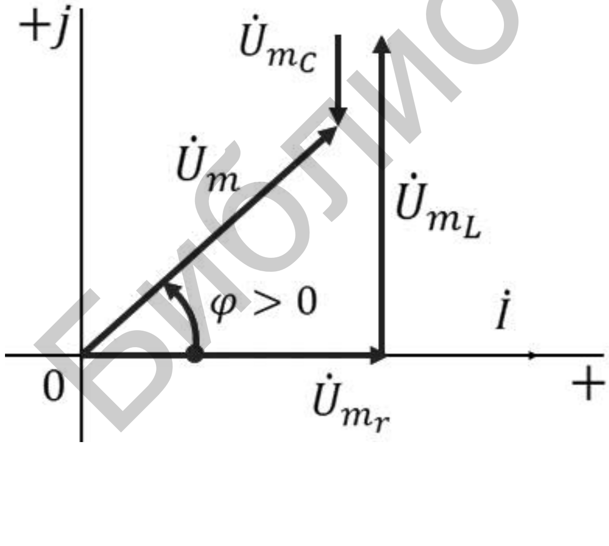


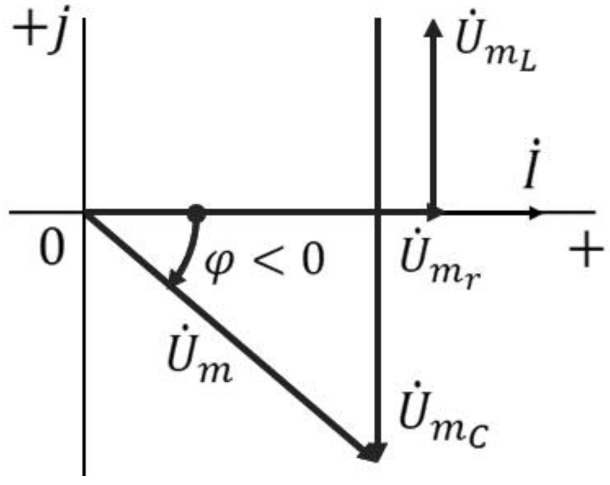
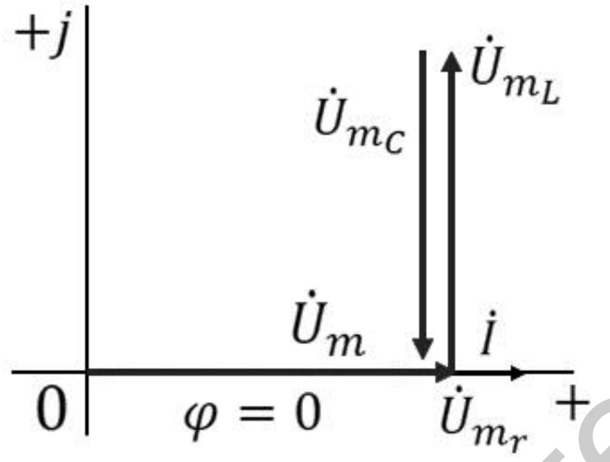
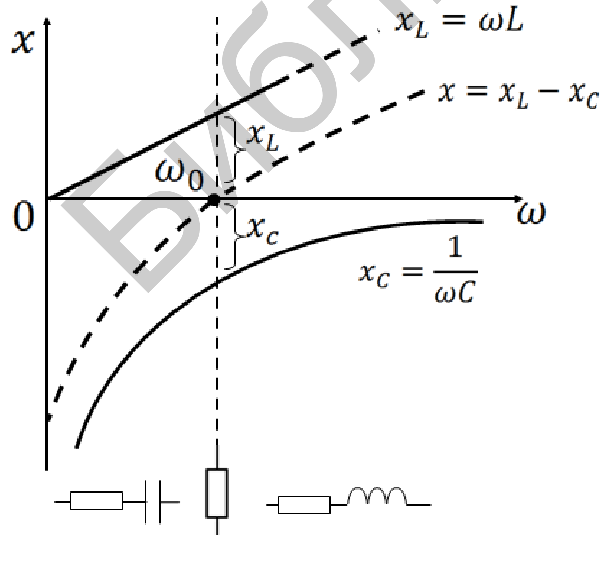
$$0 \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}.$$

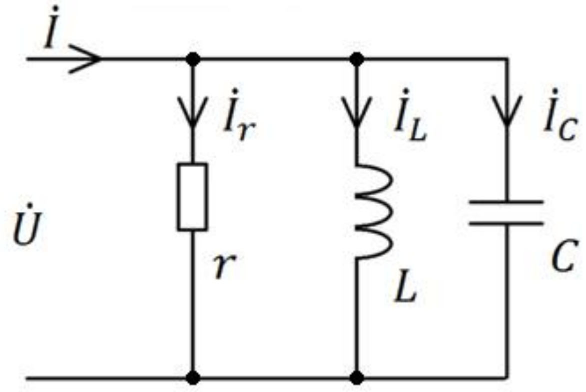
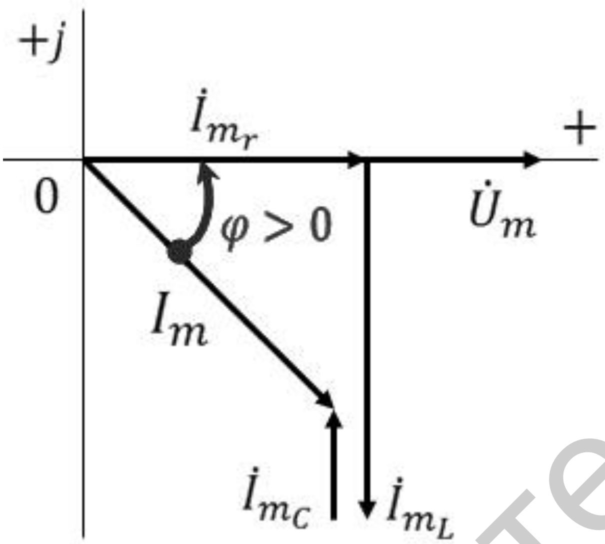


$$0 \le \varphi \le -\frac{\pi}{2};$$

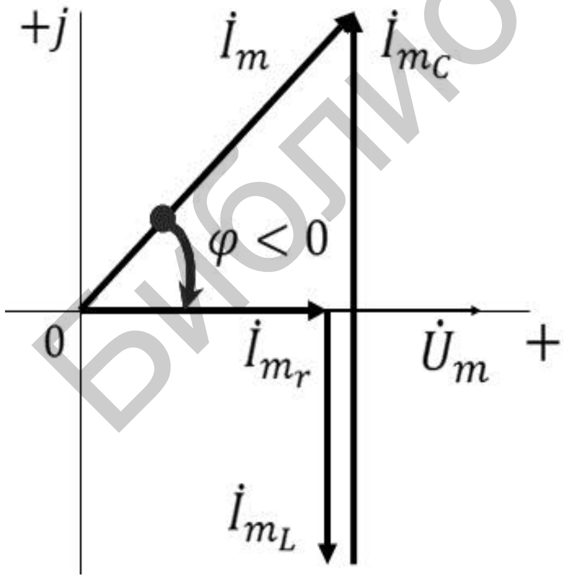
$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\omega r C};$$
$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Последовательное соединение элементов RLC</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$\dot{U}_m = \dot{U}_{m_r} + \dot{U}_{m_L} + \dot{U}_{m_C} = \dot{I}_m (r + jX) =$$
$$= \dot{I}_m \left[r + j\underbrace{(X_L - X_C)}_{X} \right] = \dot{I}_m \cdot Z$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$X_L > X_C,$$
$$\dot{U}_{m_L} > \dot{U}_{m_C}.$$
Входное сопротивление цепи носит активно-индуктивный характер</td>
</tr>
</table>

	$X_L < X_C$, $\dot{U}_{m_L} < \dot{U}_{m_C}$. Входное сопротивление цепи носит активно-ёмкостный характер
	$X_L = X_C$, $\dot{U}_{m_L} = \dot{U}_{m_C}$. Резонанс напряжений: $\dot{U}_m = \dot{U}_{m_r}$. Входное сопротивление цепи носит активный характер: $\dot{I}_{m_{\max}} = \dfrac{U_m}{r}$
	$X_L = X_C$; $\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$. Резонансная частота: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

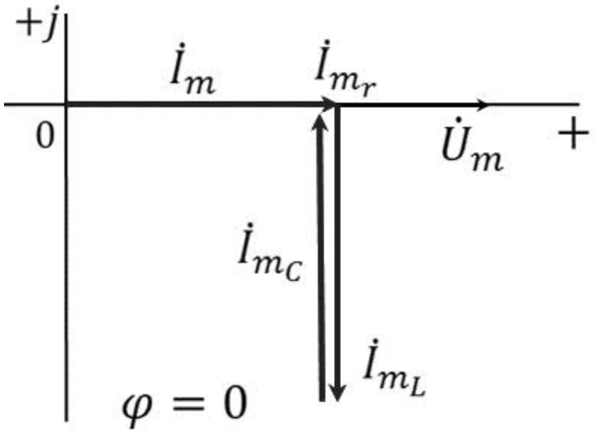
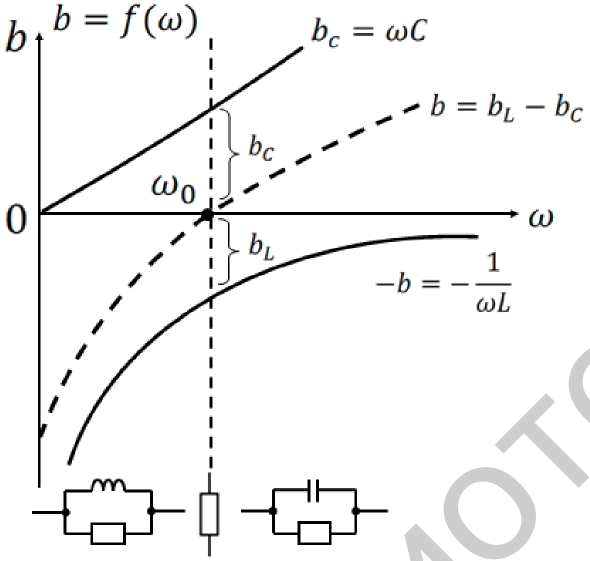
<table>
<tr><td colspan="2">Параллельное соединение элементов RLC</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m_r} + \dot{I}_{m_L} + \dot{I}_{m_C} = \dot{U}_m(g - jb) =$$
$$= \dot{U}_m\left[g - j(b_L - b_C)\right] = \dot{U}_m Y$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$b_L > b_C$,

$\dot{I}_{m_L} > \dot{I}_{m_C}$.

Входная проводимость цепи носит активно-индуктивный характер</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$b_L < b_C$,

$\dot{I}_{m_L} < \dot{I}_{m_C}$.

Входная проводимость цепи носит активно-ёмкостный характер</td></tr>
</table>

	$b_L = b_C,$ $\dot{I}_{m_L} = \dot{I}_{m_C}.$ Резонанс токов: $\dot{I}_m = \dot{I}_{m_r}.$ Входная проводимость цепи носит активный характер
	$b_L = b_C, \qquad \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C.$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Цепь, состоящую из параллельно соединённых элементов r, L и C, по отношению к её входным зажимам для фиксированной частоты можно заменить эквивалентной цепью, состоящей из параллельно соединенных активного сопротивления $r_{экв}$ и реактивного элемента с сопротивлением $x_{экв} = b/y^2$ (при $b > 0$ это будет индуктивность, при $b < 0$ – ёмкость, при $b = 0$ цепь будет состоять только из активного сопротивления).

2.5. Мощность в цепи синусоидального тока

<table>
<tr><td colspan="2">Мгновенная мощность</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$p(t) = u(t) \cdot i(t)$ $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$; $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

$p(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$

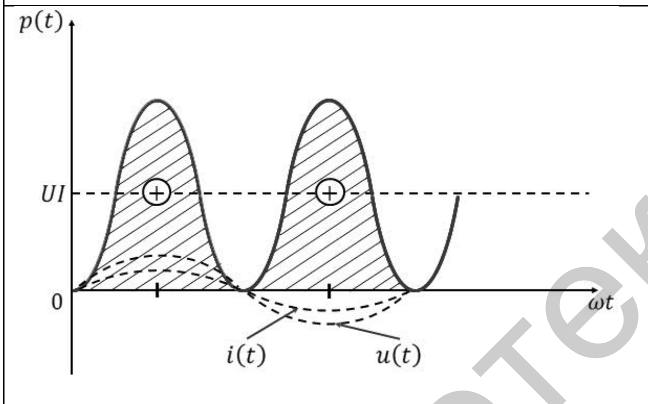
при $\psi_u = 0$ $p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$, где $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$,

$\varphi = \psi_u - \psi_i$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$

</td></tr>
<tr><td>



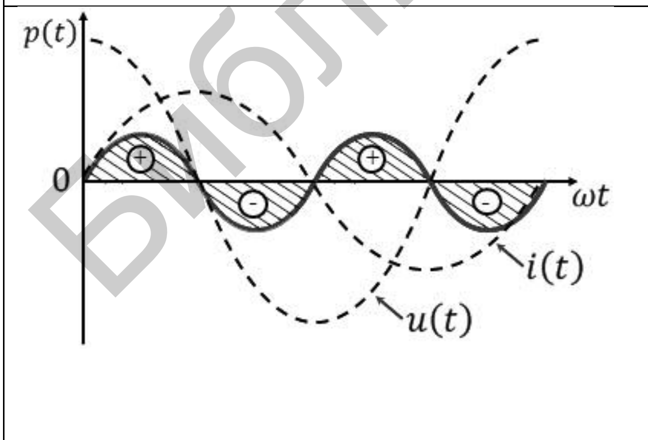
</td><td>

$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi) =$
$= UI - UI\cos 2\omega t$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$

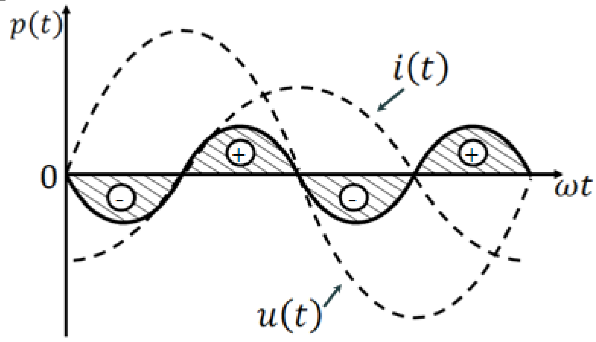
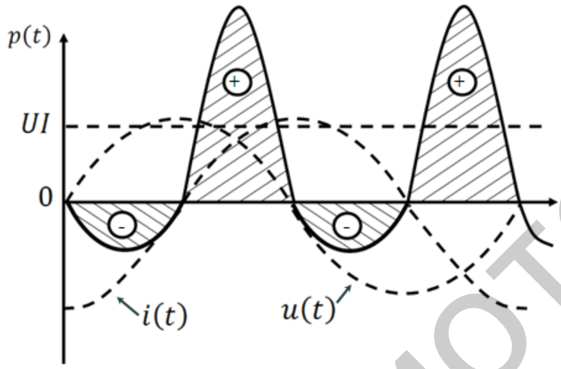
</td></tr>
<tr><td>

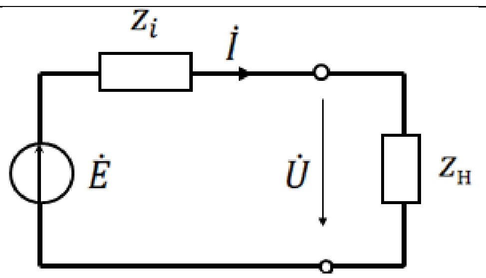


</td><td>

$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) =$
$= UI\sin 2\omega t$

</td></tr>
</table>

$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$	
	$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \dfrac{\pi}{2}) =$ $= -UI\sin 2\omega t$
$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \cos\varphi \le 1$	
	$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$
Активная мощность Реактивная мощность Полная мощность	$P = UI\cos\varphi$ [Вт, кВт, МВт]. $Q = UI\sin\varphi$ [вар]; $Q_L = I^2\omega L$; $Q_C = -U^2\omega C$. $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$ [ВА]; $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.

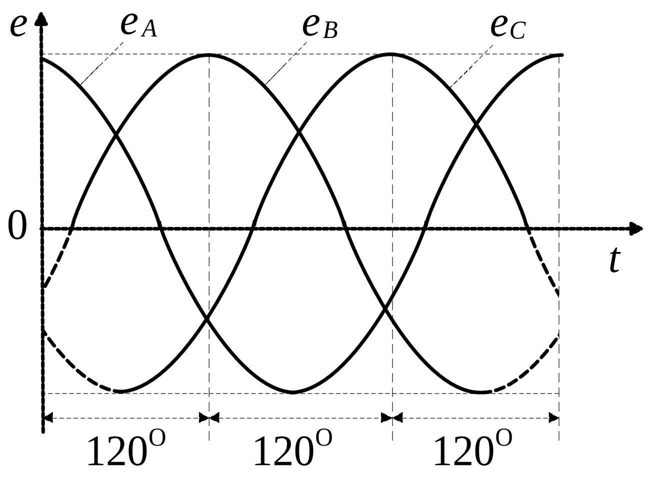
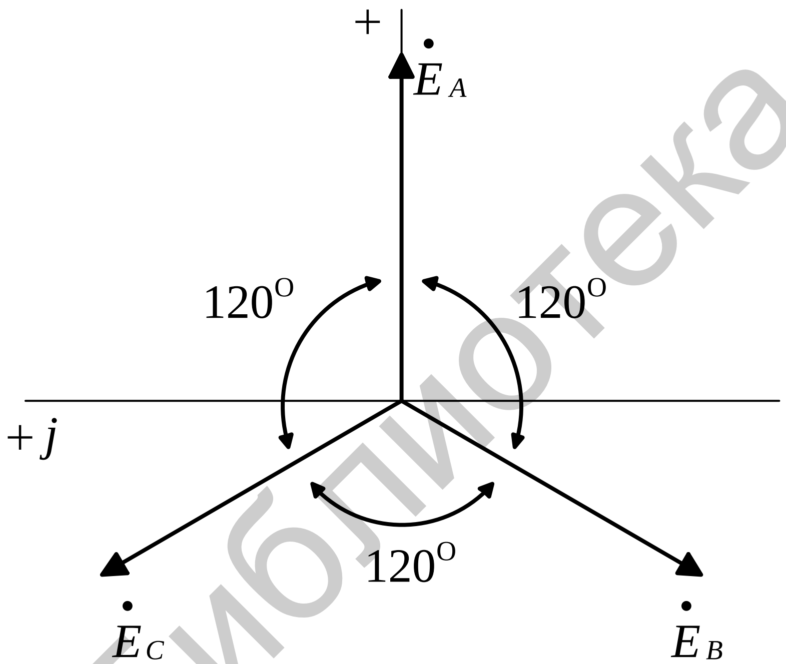
<table>
<tr><td>Комплексная мощность</td><td>$\hat{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = UI\cdot e^{j(\psi_u-\psi_i)} =$
$= \underbrace{UI\cos\varphi}_{P} + j\underbrace{UI\sin\varphi}_{Q} = P + jQ;$
$\lvert\hat{S}\rvert = \sqrt{P^2+Q^2} = S$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условия передачи максимальной активной мощности в нагрузку</td></tr>
<tr><td>

1-е <u>условие</u>: $x_{\text{н}} = -x_i$
2-е <u>условие</u>: $r_{\text{н}} = r_i$

КПД

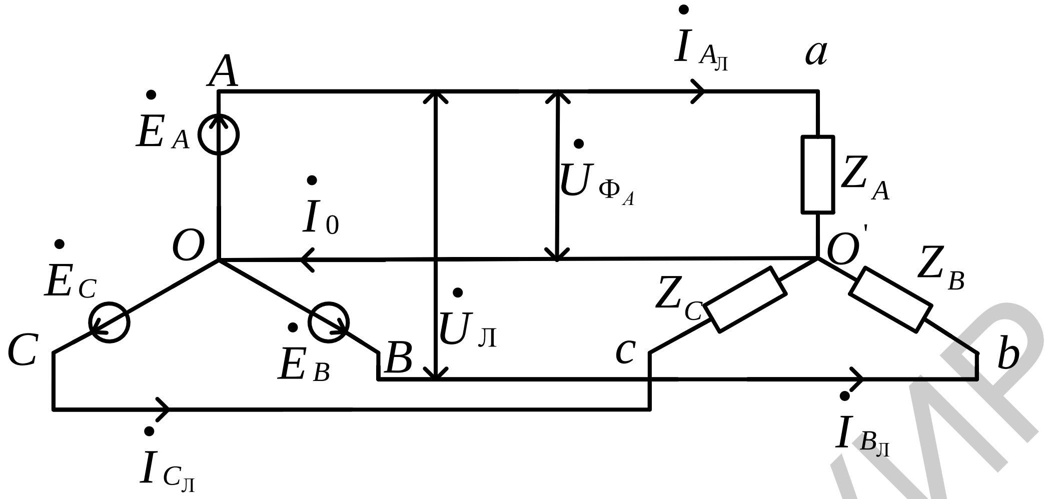
Баланс мощности</td><td>$Z_i = r_i + jx_i;$
$Z_{\text{н}} = r_{\text{н}} + jx_{\text{н}};$
$I = \frac{E}{z} = \frac{E}{\sqrt{(r_i+r_{\text{н}})^2+(x_i+x_{\text{н}})^2}};$
$P_{\text{н}} = I^2 r_{\text{н}} = \frac{E^2\cdot r_{\text{н}}}{(r_i+r_{\text{н}})^2+(x_i+x_{\text{н}})^2}.$
$P_{\text{н}} = \frac{E^2\cdot r_{\text{н}}}{(r_i+r_{\text{н}})^2}.$
$P_{\text{н}} = \frac{E^2}{4r_i} = \frac{E^2}{4r_{\text{н}}};$
$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_0} = \frac{I^2\cdot r_{\text{н}}}{I^2\underbrace{(r_i+r_{\text{н}})}_{2r_{\text{н}}}} = 0,5.$
$\sum_{l=1}^{m}\dot{E}_l\overset{*}{I}_l = \sum_{k=1}^{n}\dot{U}_k\overset{*}{I}_k;$
$\sum_{l=1}^{m}\hat{S}_l = \sum_{k=1}^{n}\hat{S}_k;$
$\underbrace{\sum_{l=1}^{m}(P_l+jQ_l)}_{\text{источник}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(P_k+jQ_k)}_{\text{нагрузка}}$
$P_l \approx P_k, Q_l \approx Q_k$</td></tr>
</table>

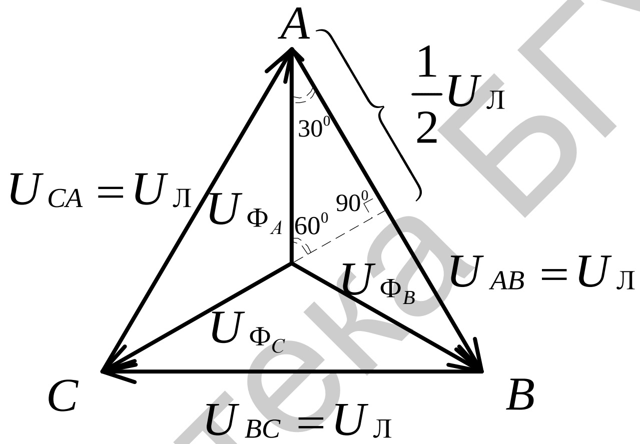
2.6. *Цепи трёхфазного тока*

	$A \to B \to C$ – прямая последовательность фаз; $A \to C \to B$ – обратная последовательность фаз
	$\dot{E}_A = Ee^{j0}$, $\dot{E}_B = Ee^{-j120^\circ}$, $\dot{E}_C = Ee^{j120^\circ}$

Временные и векторные диаграммы ЭДС трёхфазной системы показывают, что амплитудные значения ЭДС равны между собой и сдвинуты по фазе на 120°.

Соединение сопротивлений нагрузки «звездой»





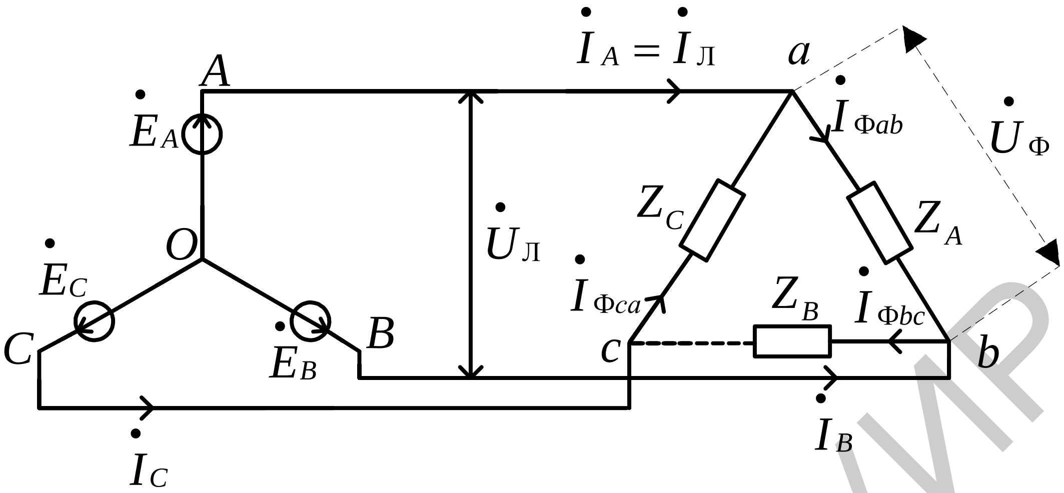
$$\frac{1}{2}U_Л = U_Ф \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}U_Ф;$$

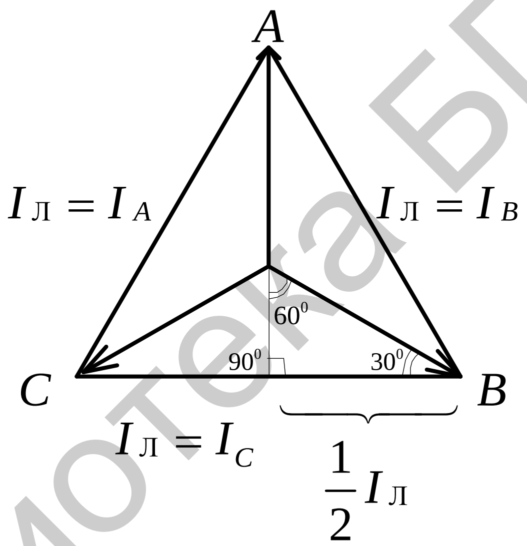
$$U_Л = \sqrt{3}U_Ф; \qquad I_Л = I_Ф.$$

Фазное напряжение $U_Ф$ – это напряжение между фазным и нейтральным проводами.

Линейное напряжение $U_Л$ – это напряжение между фазными проводами

Соединение сопротивлений нагрузки «треугольником»





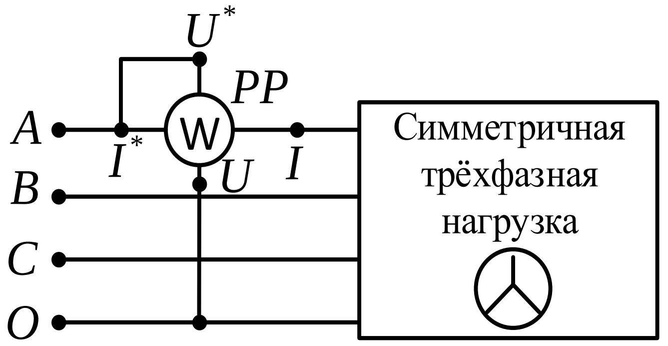
$$\frac{1}{2} I_Л = I_Ф \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} I_Ф;$$

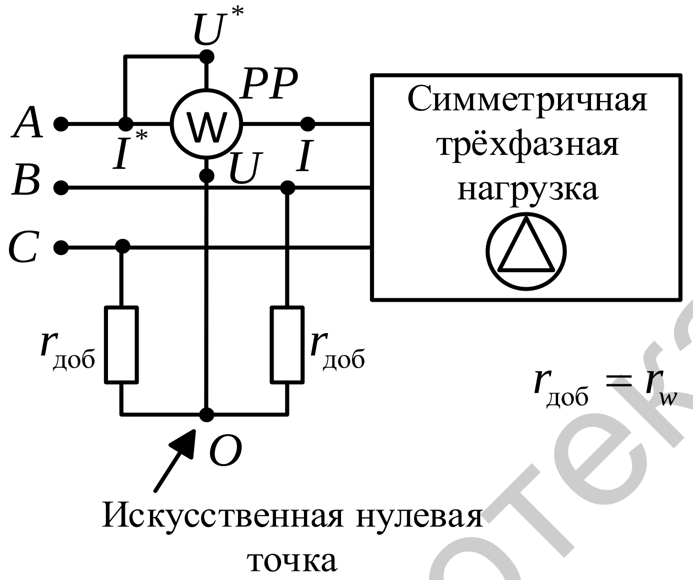
$$I_Л = \sqrt{3} I_Ф; \qquad U_Л = U_Ф.$$

На практике обычно пользуются линейными значениями токов и напряжений, так как измерительные приборы, как правило, подключают к линейным проводам

Мощность в трёхфазной цепи

Симметричная система





Активная мощность

$$P_Ф = P_{Фa} + P_{Фв} + P_{Фc} =$$
$$= 3U_Ф I_Ф \cos\varphi_Ф = 3P_Ф.$$

Звезда: $U_Ф = \dfrac{U_Л}{\sqrt{3}},\ \ I_Ф = I_Л,$

$$P = 3\frac{U_Л}{\sqrt{3}} I_Л = \sqrt{3} U_Л I_Л \cos\varphi_Ф,$$

Треугольник: $I_Ф = \dfrac{I_Л}{\sqrt{3}},\ \ U_Ф = U_Л,$

$$P = 3\frac{I_Л}{\sqrt{3}} U_Л =$$
$$= \sqrt{3} U_Л I_Л \cos\varphi_Ф$$

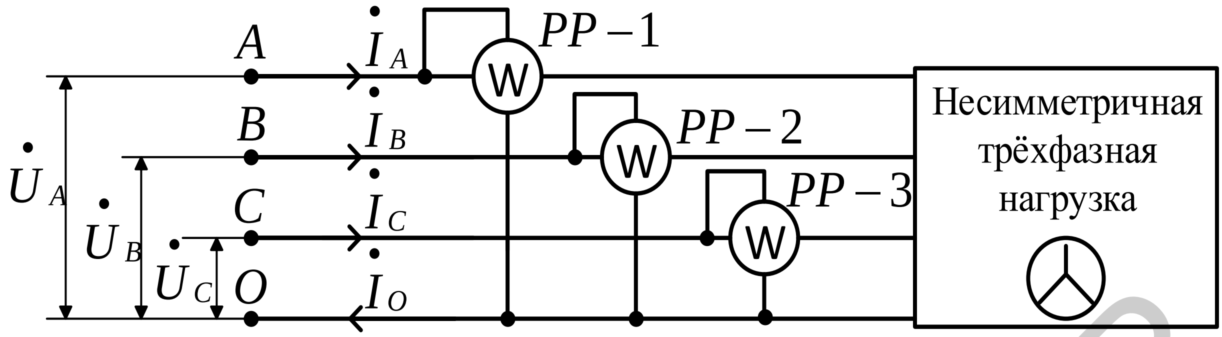
Реактивная мощность

$$Q_Ф = Q_{Фa} + Q_{Фa} + Q_{Фc} =$$
$$= 3U_Ф I_Ф sin\varphi_Ф = 3Q_Ф$$

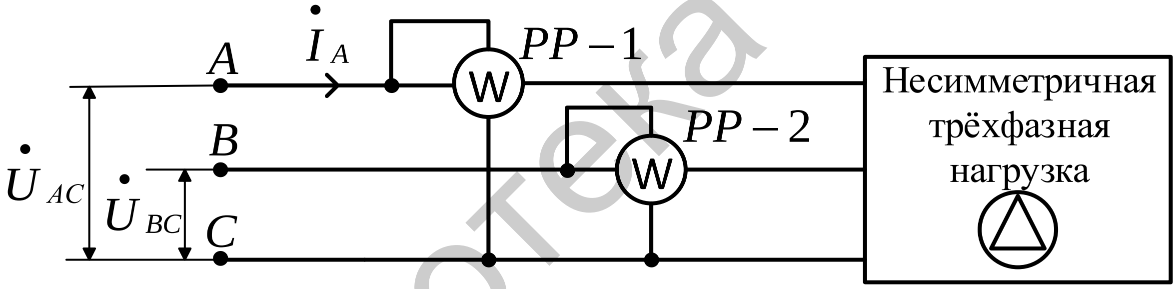
Полная мощность

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$
$$S = \sqrt{3U_Л^2 I_Л^2 \cos^2\varphi_Ф + 3U_Л^2 I_Л^2 \sin^2\varphi_Ф} = \sqrt{3} U_Л I_Л,$$
$$S = \sqrt{9U_Ф^2 I_Ф^2 \cos^2\varphi_Ф + 9U_Ф^2 I_Ф^2 \sin^2\varphi_Ф} = 3U_Ф I_Ф$$

Несимметричная система



3 ваттметра: $P = P_{Ф1} + P_{Ф2} + P_{Ф3}$



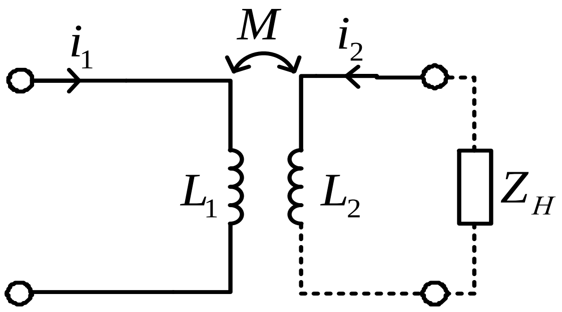
Метод Арона (2 ваттметра):

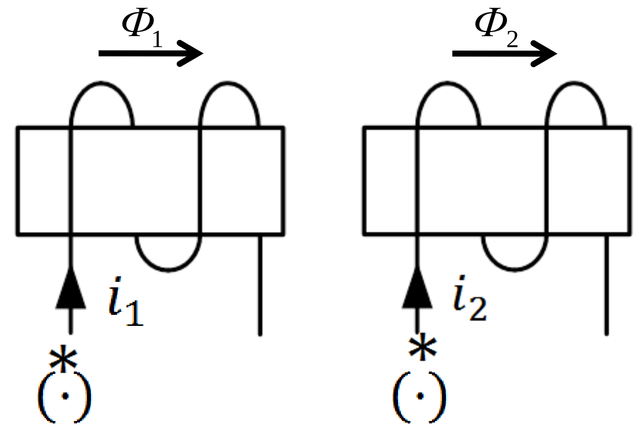
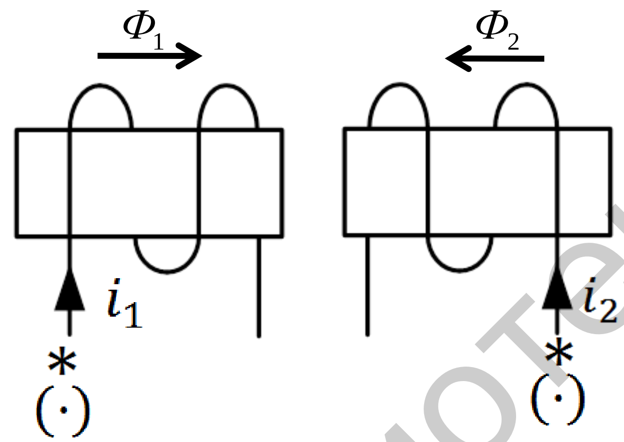
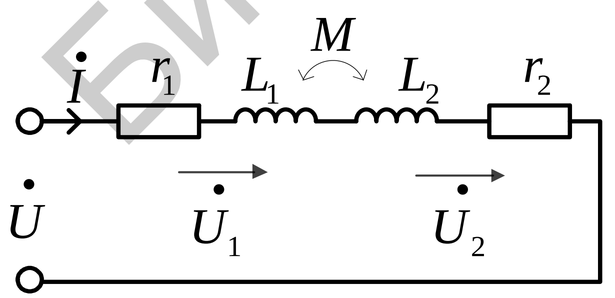
$$\hat{S} = \dot{U}_A \overset{*}{I}_A + \dot{U}_B \overset{*}{I}_B + \dot{U}_C \overset{*}{I}_C;$$

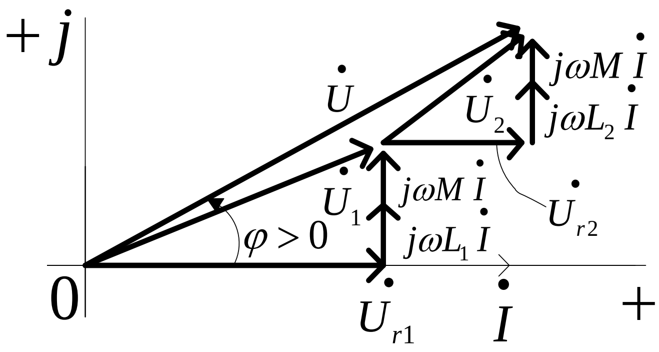
так как $\overset{*}{I}_C = -\overset{*}{I}_A - \overset{*}{I}_B$, то

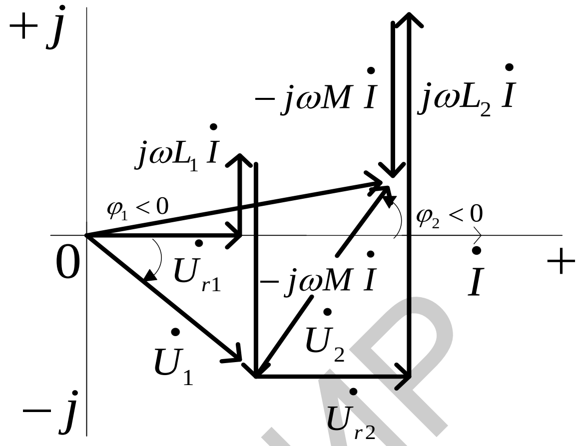
$$\hat{S} = \left(\dot{U}_A - \dot{U}_C\right)\overset{*}{I}_A + \left(\dot{U}_B - \dot{U}_C\right)\overset{*}{I}_B = \dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A + \dot{U}_{BC}\overset{*}{I}_B$$

2.7. Цепи с индуктивной связью

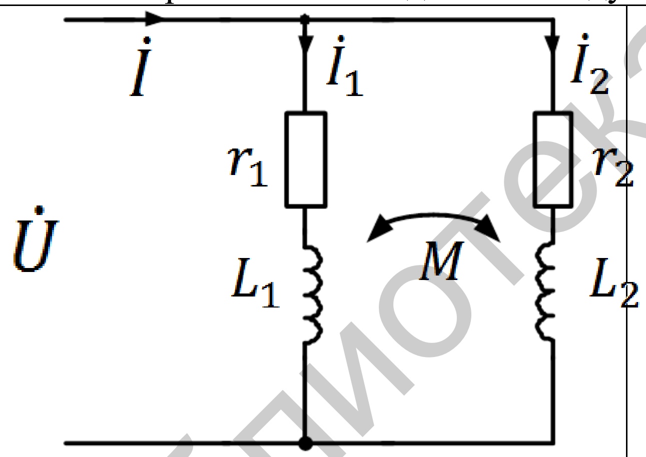
Основные понятия	
	ЭДС самоиндукции: $e_{11} = -L_1 \dfrac{di_1}{dt}, e_{22} = -L_2 \dfrac{di_2}{dt}$. ЭДС взаимной индукции: $e_{21} = -M \dfrac{di_1}{dt}, e_{12} = -M \dfrac{di_2}{dt}$
$M = \dfrac{\psi_{12}}{i_2} = \dfrac{\psi_{21}}{i_1}$[Гн]	Взаимная индуктивность – отношение потокосцепления к току
$\psi_{12}(\psi_{21})$	Потокосцепление 1-й (2-й) катушки, обусловленное током $i_1(i_2)$ во 2-й (1-й) катушке
$k_{21} = \dfrac{e_{21}}{e_{11}} = \dfrac{M}{L_1}$	Степень связи 2-й катушки с 1-й
$k_{12} = \dfrac{e_{12}}{e_{22}} = \dfrac{M}{L_2}$	Степень связи 1-й катушки со 2-й
$k = \sqrt{k_{21}k_{12}} = \dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ $k_{21} = \dfrac{-M \cdot \frac{di_1}{dt}}{-L_2 \cdot \frac{di_1}{dt}} = \dfrac{M}{L_1}, \qquad k_{12} = \dfrac{-M \cdot \frac{di_2}{dt}}{-L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}} = \dfrac{M}{L_2}$	Коэффициент связи

Согласное включение катушек	
 $e_1 = e_{11} + e_{12},$ $e_2 = e_{22} + e_{21}$	При согласном включении магнитные потоки двух катушек имеют одинаковое направление и результирующие ЭДС (e_1, e_2), равные сумме их ЭДС самоиндукции (e_{11}, e_{22}) и взаимной индукции (e_{11}, e_{21})
Встречное включение катушек	
 $e_1 = e_{11} - e_{12},$ $e_2 = e_{22} - e_{21}$	При встречном включении магнитные потоки двух катушек направлены встречно и результирующие ЭДС равны разности их ЭДС самоиндукции и взаимной индукции
Последовательное включение индуктивно связанных катушек	
	2-й закон Кирхгофа: $\dot{U} = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} +$ $+ r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} =$ $= \left[\underbrace{(r_1 + r_2)}_{r_{\text{экв}}} + j\omega \underbrace{(L_1 + L_2 \pm 2M)}_{L_{\text{экв}}} \right] \dot{I}$

<table>
<tr><th>Согласное включение катушек</th><th>Встречное включение катушек</th></tr>
<tr><td>


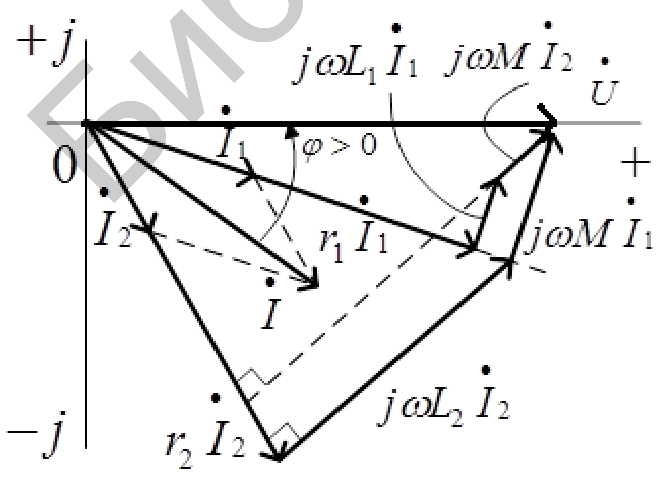
$L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 + 2M$
</td><td>


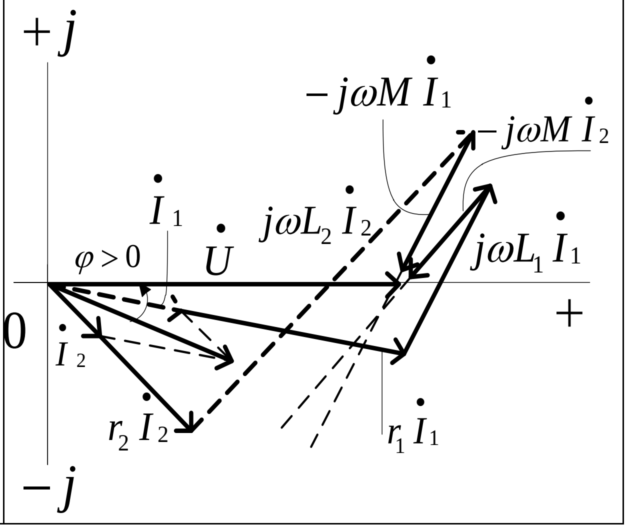
$L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 - 2M$.

При $L_1 > L_2$ – ёмкостный эффект
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Параллельное соединение индуктивно связанных катушек</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
2-й закон Кирхгофа для каждой ветви:

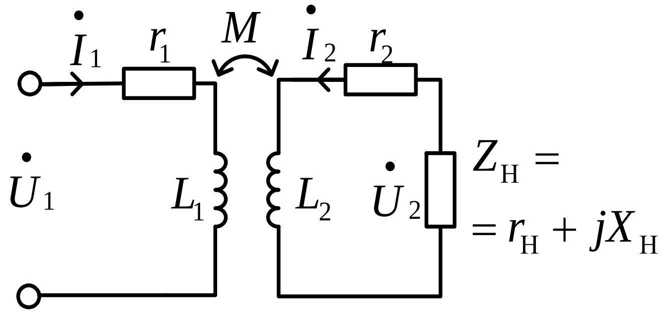
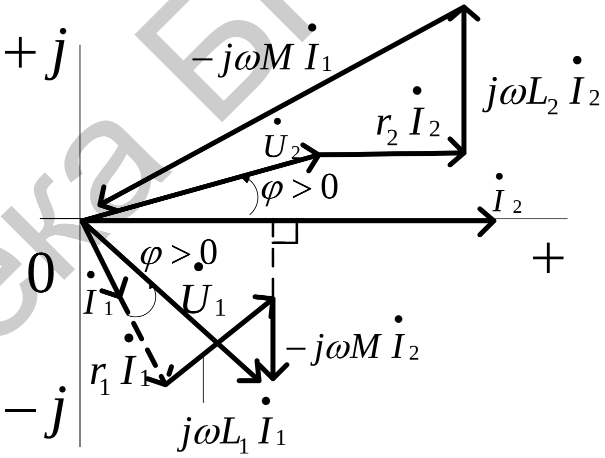
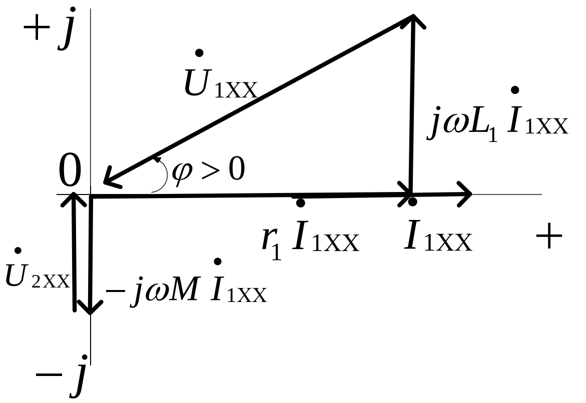
$\dot{U} = r_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 \pm j\omega M\dot{I}_2,$

$\dot{U} = r_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 \pm j\omega M\dot{I}_1$
</td></tr>
<tr><th>Согласное включение катушек</th><th>Встречное включение катушек</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

2.8. Трансформатор

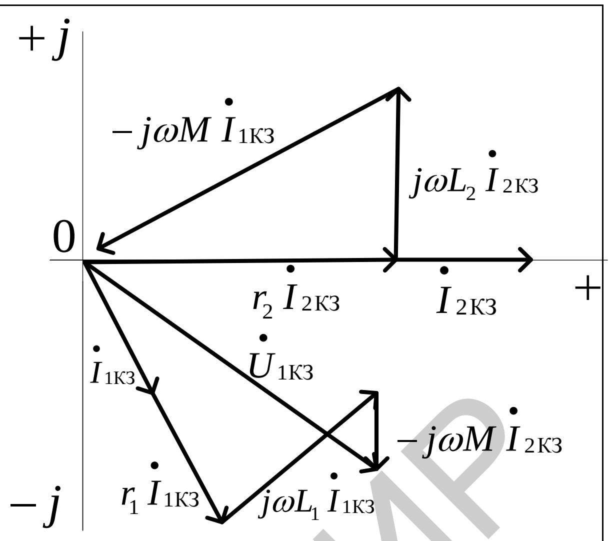
<table>
<tr><td colspan="2">Трансформатор без магнитопровода при встречном включении обмоток</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2-й закон Кирхгофа для первичной обмотки трансформатора:
$\dot U_1 = r_1\dot I_1 + j\omega L_1\dot I_1 - j\omega M\dot I_2$;
для вторичной обмотки:
$0 = r_2\dot I_2 + j\omega L_2\dot I_2 - j\omega M\dot I_1 + \dot U_2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Режимы работы трансформатора</td></tr>
<tr><td>Режимы работы</td><td>Векторные диаграммы</td></tr>
<tr><td>Уравнения трансформатора в режиме нагрузки:
$$\left.\begin{aligned}&\dot U_1 = r_1\dot I_1 + j\omega L_1\dot I_1 - j\omega M\dot I_2;\\&0 = r_2\dot I_2 + j\omega L_2\dot I_2 -\\&- j\omega M\dot I_1 + \dot U_2\end{aligned}\right\}\quad(2.1)$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Режим холостого хода ($\dot I_2 = 0$):
$$\left.\begin{aligned}&\dot U_{1XX} = r_1\dot I_{1XX} + j\omega L\dot I_{1XX};\\&0 = -j\omega M\dot I_{1XX} + \dot U_{2XX}\end{aligned}\right\}$$</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

Режим короткого замыкания ($\dot{U}_2 = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_{1КЗ} &= r_1 \dot{I}_{1КЗ} + j\omega M \dot{I}_{1КЗ} - j\omega M \dot{I}_{2КЗ}; \\ 0 &= r_2 \dot{I}_{2КЗ} + j\omega L_2 \dot{I}_{2КЗ} - j\omega M \dot{I}_{1КЗ} \end{aligned}\right\}$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема замещения трансформатора</td></tr>
<tr><td>

В первое уравнение системы (2.1) добавим $\pm j\omega M \dot{I}_1$.

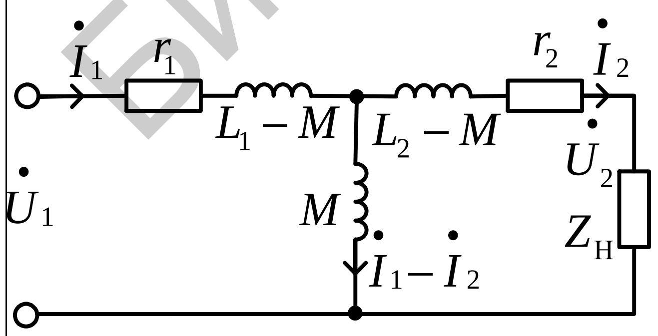
Во второе уравнение системы (2.1) добавим $\pm j\omega M \dot{I}_2$

</td><td>

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 -$$
$$- j\omega M \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1;$$
$$0 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 -$$
$$- j\omega M \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2 +$$
$$+ \dot{U}_2$$

</td></tr>
<tr><td>Схема замещения</td><td>Система уравнений</td></tr>
<tr><td>

В схеме замещения отсутствуют индуктивные связи



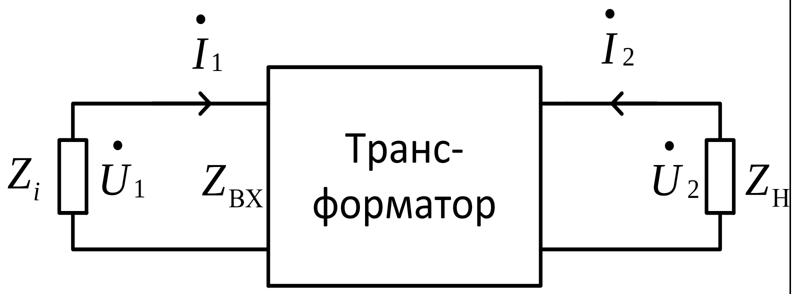
</td><td>

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + \\ &+ j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2); \\ &0 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\dot{I}_1 - \\ &- j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \dot{U}_2. \end{aligned}\right.$$

При $(L - M) < 0$ элемент $L - M$ можно заменить ёмкостью

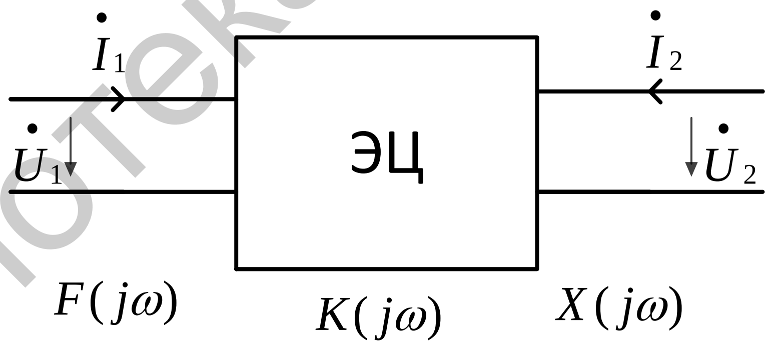
</td></tr>
</table>

Идеальный трансформатор	
Режим работы	Уравнения
У идеального трансформатора L_1 и L_2 обмоток велики, r_1 и r_2 – малы, коэффициент связи $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1$	Система уравнений (2.1) имеет вид $\left.\begin{array}{l}\dot U_1=j\omega L_1\dot I_1-j\omega M\dot I_2;\\ \dot U_2=j\omega M\dot I_1-j\omega L_2\dot I_2\end{array}\right\}$ (2.2)
Коэффициент трансформации равен отношению числа обмоток	$k_\text{Т}=\frac{e_2}{e_1}=\frac{-w_2\frac{d\Phi}{dt}}{-w_1\frac{d\Phi}{dt}}=\frac{w_2}{w_1}$
Режим холостого хода $\dot I_2=0$	Система уравнений (2.2) имеет вид $\left.\begin{array}{l}\dot U_1=j\omega L_1\dot I_1;\\ \dot U_2=j\omega M\dot I_1,\end{array}\right\}$ откуда $\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{M}{L_1}$, $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1$ при $M=\sqrt{L_1L_2}$, тогда $\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}}\approx\frac{w_2}{w_1}=k_\text{Т}$
Режим короткого замыкания $\dot U_2=0$	Второе уравнение системы (2.2) имеет вид $0=j\omega M\dot I_2-j\omega L_2\dot I_2$, откуда $\frac{\dot I_1}{\dot I_2}=\frac{L_2}{M}=\frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}}\approx\frac{w_2}{w_1}=k_\text{Т}$

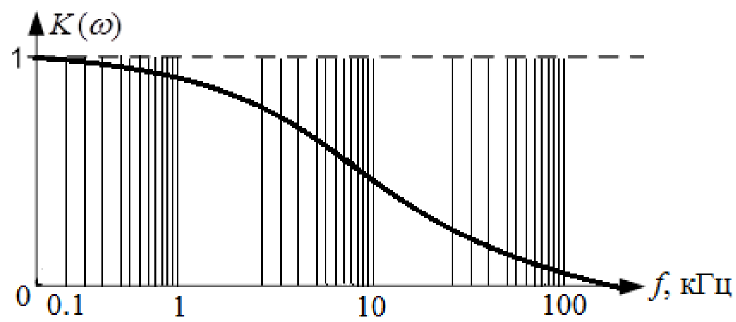
Уравнения идеального трансформатора	$\left.\begin{aligned}\dot U_2 &= k_{\text{Т}}\dot U_1;\\ \dot I_1 &= k_{\text{Т}}\dot I_2\end{aligned}\right\}$
Согласующий трансформатор 	$Z_{\text{ВХ}} = \dfrac{\dot U_1}{\dot I_1} = \dfrac{\dot U_2/k_{\text{Т}}}{k_{\text{Т}}\dot I_2} = \dfrac{Z_{\text{Н}}}{k_{\text{Т}}^2};$ $Z_{\text{Н}} = k_{\text{Т}}^2 Z_{\text{ВХ}}$

3. Избирательные электрические цепи

3.1. Комплексные функции и частотные характеристики электрических цепей (ЭЦ)

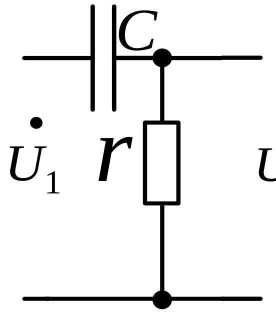
Комплексные функции ЭЦ	
Комплексные функции цепи $K(j\omega)$ есть отношения комплексных токов и напряжений, действующих на входе и выходе цепи при синусоидальном воздействии	 $K(j\omega) = \dfrac{X(j\omega)}{F(j\omega)},$ $F(j\omega)$ – воздействие на ЭЦ (ток или напряжение); $X(j\omega)$ – реакция (отклик) ЭЦ (ток или напряжение)

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) цепи $K(j\omega)$ есть зависимость амплитуды и фазы проходящего через ЭЦ сигнала от частоты	$K(j\omega)=\dfrac{X(j\omega)}{F(j\omega)}=\dfrac{X(\omega)e^{j\varphi_X(\omega)}}{K(\omega)e^{j\varphi_F(\omega)}}=$ $=K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=\underbrace{K(\omega)\cos\varphi(\omega)}_{A(\omega)}+$ $+\underbrace{jK(\omega)\sin\varphi(\omega)}_{B(\omega)}$
Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи есть зависимость модуля $K(j\omega)$ комплексной функции цепи от частоты. Величина $K(j\omega)$ определяет отношение амплитуды реакции цепи к амплитуде воздействия	$K(\omega)=\dfrac{X(\omega)}{F(\omega)}=\lvert K(j\omega)\rvert=$ $=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$
Фазовочастотная характеристика (ФЧХ) цепи есть зависимость аргумента $\varphi(\omega)$ комплексной функции от частоты. Величина $\varphi(\omega)$ определяет сдвиг по фазе реакции цепи относительно воздействия	$\varphi(\omega)=\varphi_X(\omega)-\varphi_F(\omega)=\operatorname{arctg}\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$
Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) цепи есть зависимость вещественной части $A(\omega)$ комплексной функции цепи от частоты	$A(\omega)=K(\omega)\cos\varphi(\omega)$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ) цепи есть зависимость мнимой части $B(\omega)$ комплексной функции цепи от частоты	$B(\omega) = K(\omega)\sin\varphi(\omega)$
Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) – натуральный логарифм от АЧХ	$\ln K(j\omega) = \ln K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \underbrace{\ln K(\omega)}_{\text{ЛАЧХ}} + \underbrace{j\varphi(\omega)}_{\text{ФЧХ}}$
Частотные характеристики	
АФХ	$K(j\omega) = \dfrac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
АЧХ	$K(\omega) = \lvert K(j\omega)\rvert = \dfrac{X(\omega)}{F(\omega)} = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$
ФЧХ	$\varphi(\omega) = \varphi_X(\omega) - \varphi_F(\omega) = = \arg K(j\omega) = \operatorname{arctg}\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$
ВЧХ	$A(\omega) = \operatorname{Re}K(j\omega) = K(\omega)\cos\varphi(\omega)$
МЧХ	$B(\omega) = \operatorname{Im}K(j\omega) = K(\omega)\sin\varphi(\omega)$
ЛАЧХ	$\ln K(\omega)$ 

<table>
<tr><td colspan="2">Единицы измерения усиления или затухания (ослабления) проходящего сигнала через согласованную симметричную ЭЦ</td></tr>
<tr><td>Усилению (затуханию) в 1 непер [Нп] соответствует увеличение (уменьшение) действительного значения напряжения или тока на выходе ЭЦ в $e = 2,718$ раз больше, чем на входе</td><td>Для напряжения (тока):
$$a_{\text{Нп}} = \ln\frac{X}{F}\left[1\ \text{Нп}\right],$$
так как $\frac{X}{F} = 2,718$;
$$\ln\frac{X}{F} = 2,3\lg\frac{X}{F}.$$
Для мощности:
$$a_{\text{Нп}} = 0,5\ln\frac{S_{\text{вых}}}{S_{\text{вх}}} = 1,15\lg\frac{S_{\text{вых}}}{S_{\text{вх}}}$$</td></tr>
<tr><td>Усилению (затуханию) в 1 бел [Б] соответствует увеличение (уменьшение) полной мощности на выходе ЭЦ в 10 раз относительно входа (2 Б – 100 раз)</td><td>Для мощности:
$$a_{\text{Б}} = \lg\frac{S_{\text{вых}}}{S_{\text{вх}}}\ \left[1\ \text{Б}\right].$$
Для напряжения (тока):
$$a_{\text{Б}} = \lg\frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = \lg\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \lg\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 =$$
$$= 2\lg\frac{U_2}{U_1} = 2\lg\frac{I_2}{I_1}\ \left[1\ \text{Б}\right]$$</td></tr>
<tr><td>Децибел – единица усиления (затухания), в 10 раз большая (меньшая) бела</td><td>$$a_{\text{дБ}} = 20\lg\frac{U_2}{U_1}\ \left[1\ \text{дБ}\right]$$</td></tr>
<tr><td>Усилению (затуханию) в 1 дБ соответствует увеличение (уменьшение) полной мощности проходящего через ЭЦ тока в 1,26 раза или увеличение (уменьшение) величины напряжения (тока) в 1,12 раза</td><td>Из соотношения
$$\frac{a_{\text{дБ}}}{a_{\text{Нп}}} = \frac{20\lg\frac{F}{X}}{\ln\frac{F}{X}} = \frac{20\lg\frac{F}{X}}{2,3\lg\frac{F}{X}} = 8,686,$$
отсюда следует, что
$1\ \text{Нп} \approx 0,8686\ \text{Б} \approx 8,686\ \text{дБ};$
$1\ \text{дБ} \approx 0,1\ \text{Б} \approx 0,115\ \text{Нп}$</td></tr>
</table>

3.2. *Дифференцирующая цепь*



Комплексная функция цепи по напряжению:

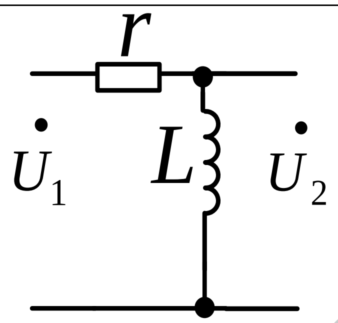
$$K_{U_{Cr}}(j\omega)=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{\dot I r}{\dot I\left(r+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{j\omega rC}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{j\omega\tau_{ц}}}=$$

$$=\frac{j\omega\tau_{ц}}{1+j\omega\tau_{ц}}.$$

Постоянная времени цепи *Cr*-цепи:

$$\tau_{ц_{rC}}=rC$$



Комплексная функция цепи по напряжению:

$$K_{U_{rL}}=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{\dot I\, j\omega L}{\dot I(r+j\omega L)}=\frac{j\omega\tau_{ц}}{1+j\omega\tau_{ц}}.$$

Постоянная времени $\tau_{ц_{Lr}}=\dfrac{L}{r}$

RL-цепи характеризует скорость изменения напряжения

Cr-цепь и *rL*-цепь – дуальны

$$K_U(j\omega)=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{j\omega\tau_{ц}}{1+j\omega\tau_{ц}}=\underbrace{\frac{\omega\tau_{ц}}{\sqrt{1+(\omega\tau_{ц})^2}}}_{K_U(\omega)\longleftarrow \text{АЧХ}}\cdot e^{\varphi(\omega)}.$$

ФЧХ: $\varphi(\omega)=j\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\omega\tau_{ц}\right)$

или $K_U(j\omega)=\dfrac{j\omega\tau_{ц}}{1+j\omega\tau_{ц}}=\dfrac{j\omega\tau_{ц}(1-j\omega\tau_{ц})}{1+(\omega\tau_{ц})^2}=\dfrac{\omega\tau_{ц}}{1+(\omega\tau_{ц})^2}+j\dfrac{(\omega\tau_{ц})^2}{1+(\omega\tau_{ц})^2}$, откуда АЧХ: $K_U(\omega) = \dfrac{\omega\tau_{ц}}{\sqrt{1+(\omega\tau_{ц})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(\omega\tau_{ц})^2}}}$,

ФЧХ: $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{(\omega\tau_{ц})^2}{1+(\omega\tau_{ц})^2}\right] \Big/ \left[\dfrac{\omega\tau_{ц}}{1+(\omega\tau_{ц})^2}\right] = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\omega\tau_{ц}}$

АЧХ дифференцирующей цепи

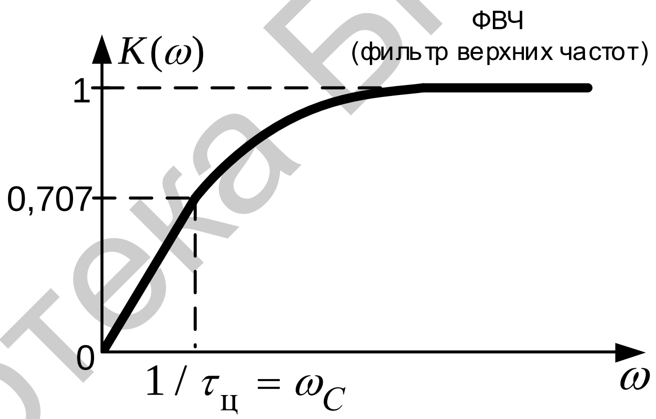
$$K(\omega) = \left|K(j\omega)\right| = \left|\frac{1}{1+\dfrac{1}{j\omega\tau_{ц}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\omega^2\tau_{ц}^2}}}$$

При $\omega = 0$ $K(\omega) \longrightarrow 0;$

при $\omega = \dfrac{1}{\tau_{ц}} = \omega_C$

$K(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707;$

при $\omega \longrightarrow \infty$ $K(\omega) \longrightarrow 1$



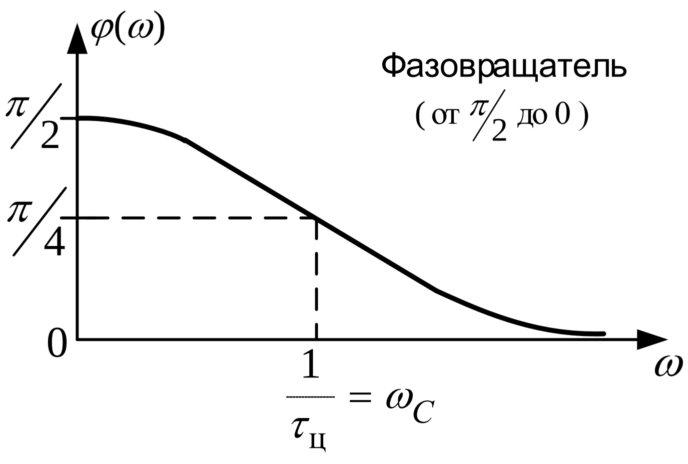
ФЧХ дифференцирующей цепи

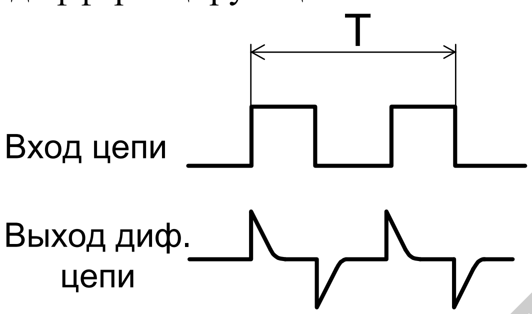
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{1}{\omega\tau_{ц}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\omega\tau_{ц}$$

при $\omega = 0$ $\varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{2};$

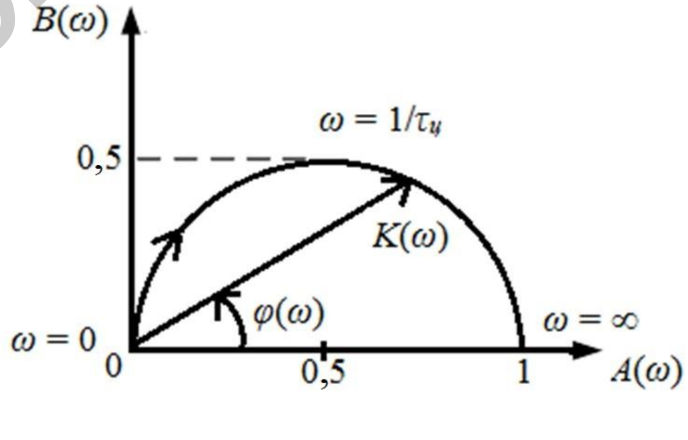
при $\omega = \dfrac{1}{\tau_{ц}} = \omega_C$ $\varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{4};$

при $\omega \longrightarrow \infty$ $\varphi(\omega) \longrightarrow 0$

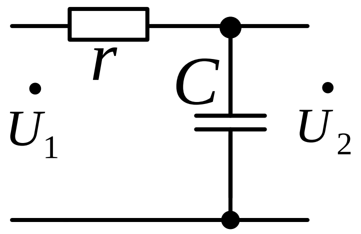


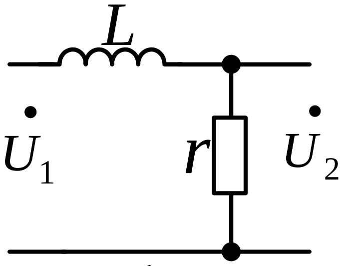
Дифференцирующая цепь	Переходная цепь
При $\omega\tau_ц \ll 1$ или $\tau_ц \ll T$ $K_U(j\omega)=\frac{j\omega\tau_ц}{1+j\omega\tau_ц}\approx j\omega\tau_ц =$ $=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, откуда $\dot{U}_2 \approx j\omega\tau_ц\dot{U}_1$. Умножение на *j* есть математическая операция дифференцирования, т. е. при $\tau_ц \ll T$ цепь $Cr(rL)$ – дифференцирующая 	При $\omega\tau_ц \gg 1$ $2\pi f\tau_ц \gg 1$, $\frac{2\pi\tau_ц}{T} \gg 1$, $\tau_ц \gg T$, $K_U(j\omega)=\frac{j\omega\tau_ц}{1+\frac{1}{j\omega\tau_ц}}\approx 1=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, откуда $\dot{U}_2 \approx \dot{U}_1$, т. е. при $\tau_ц \gg T$ цепь $Cr(rL)$ – переходная, форма сигнала практически не искажается

Уравнение окружности $(A(\omega) - 0{,}5)^2 + B^2(\omega) = 0{,}5^2$ является амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) дифференцирующей цепи:



3.3. Интегрирующая цепь

<table>
<tr>
<td>

Комплексная функция rC-цепи по напряжению:
$K_{U_{rC}}(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\dfrac{\dot{I}\,\dfrac{1}{j\omega C}}{\dot{I}(r+\dfrac{1}{j\omega C})}=$
$=\dfrac{1}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}}$</td>
<td>

Комплексная функция Lr-цепи по напряжению:
$K_{U_{rL}}=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\dfrac{\dot{I}\,r}{\dot{I}(r+j\omega Lr)}=\dfrac{1}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Постоянная времени rC-цепи:
$\tau_{\text{ц}_{rC}}=rC$</td>
<td>Постоянная времени Lr-цепи:
$\tau_{\text{ц}_{Lr}}=\dfrac{L}{r}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">rC-цепь и Lr-цепь – дуальны</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">АЧХ: $K_U(\omega)=\left|K_U(j\omega)\right|=\left|\dfrac{1}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau_{\text{ц}})^2}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">ФЧХ: $K_U(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}}=\dfrac{1-j\omega\tau_{\text{ц}}}{1+(j\omega\tau_{\text{ц}})^2}=\dfrac{1}{1+(j\omega\tau_{\text{ц}})^2}-j\dfrac{\omega\tau_{\text{ц}}}{1+(\omega\tau_{\text{ц}})^2}$,
откуда $\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\left[-\dfrac{\omega\tau_{\text{ц}}}{1+(\omega\tau_{\text{ц}})^2}\right]\Big/\left[\dfrac{1}{1+(\omega\tau_{\text{ц}})^2}\right]=-\operatorname{arctg}\omega\tau_{\text{ц}}$</td>
</tr>
</table>

АЧХ интегрирующей цепи

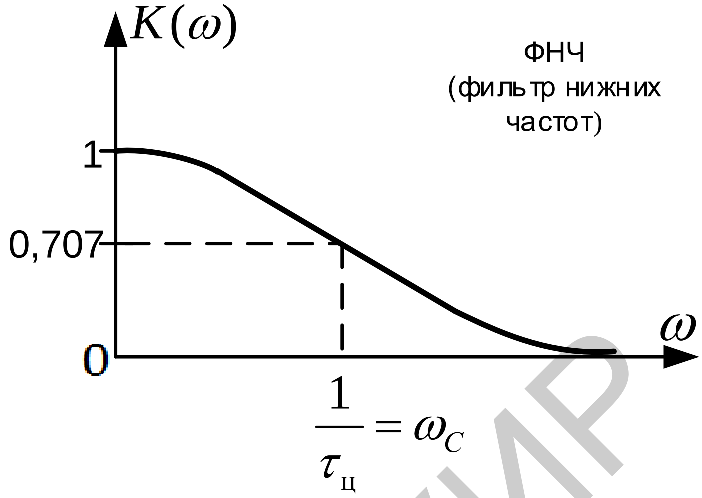
$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau_{ц})^2}}.$$

При $\omega=0$ $K(\omega)=1;$

при $\omega=\dfrac{1}{\tau_{ц}}=\omega_C$

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

при $\omega \longrightarrow \infty$ $K(\omega) \longrightarrow 0$



<table>
<tr><td colspan="2">ФЧХ и АЧХ интегрирующей цепи</td></tr>
<tr><td>

$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega\tau_{ц}$,

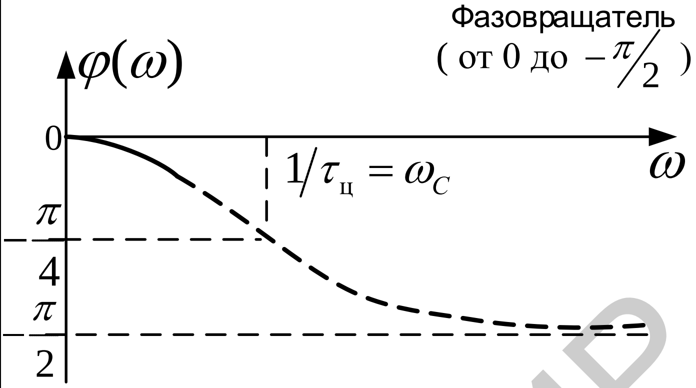
$\omega = 0 \quad \varphi(\omega) = 0$,

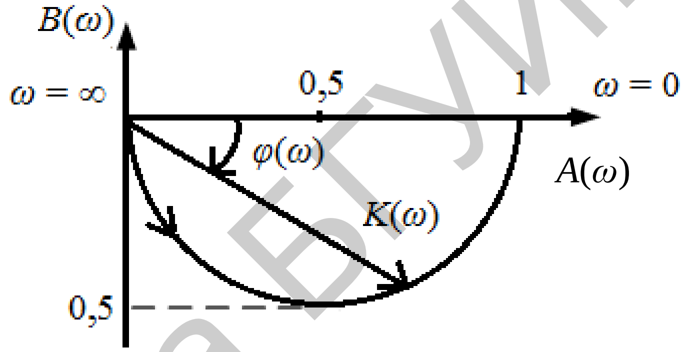
$\omega = \dfrac{1}{\tau_{ц}} = \omega_C, \quad \varphi(\omega) = -\pi/4$,

$\omega \longrightarrow \infty \quad \varphi(\omega) \longrightarrow -\pi/2$.

АФХ интегрирующей цепи

</td><td>





</td></tr>
<tr><td>Интегрирующая цепь</td><td>Переходная цепь</td></tr>
<tr><td>

При $\omega\tau_{ц} \ll 1$ или $\tau_{ц} \ll T$

$K_U(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau_{ц}} \approx 1 = \dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$,

откуда $\dot{U}_2 \approx \dot{U}_1$, т. е. при $\tau_{ц} \ll T$

цепь $rC(Lr)$ – переходная (форма сигнала практически не искажается)

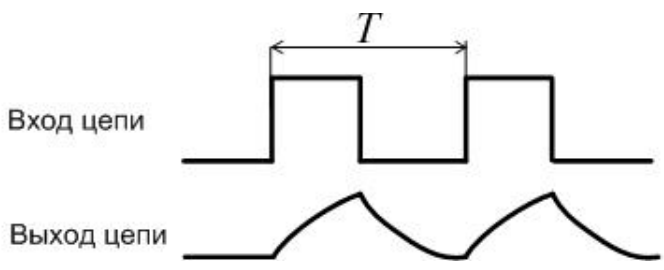
</td><td>

При $\omega\tau_{ц} \gg 1$ или $\tau_{ц} \gg T$

$K_U(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau_{ц}} \approx \dfrac{1}{j\omega\tau_{ц}} = \dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$,

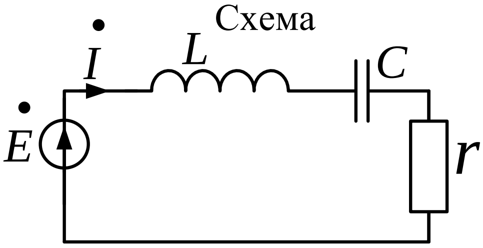
откуда $\dot{U}_2 \approx \dfrac{\dot{U}_1}{j\omega\tau_{ц}}$.

Деление на j есть математическая операция интегрирования, т. е. при $\tau_{ц} \gg T$ цепь $rC(Lr)$ – интегрирующая

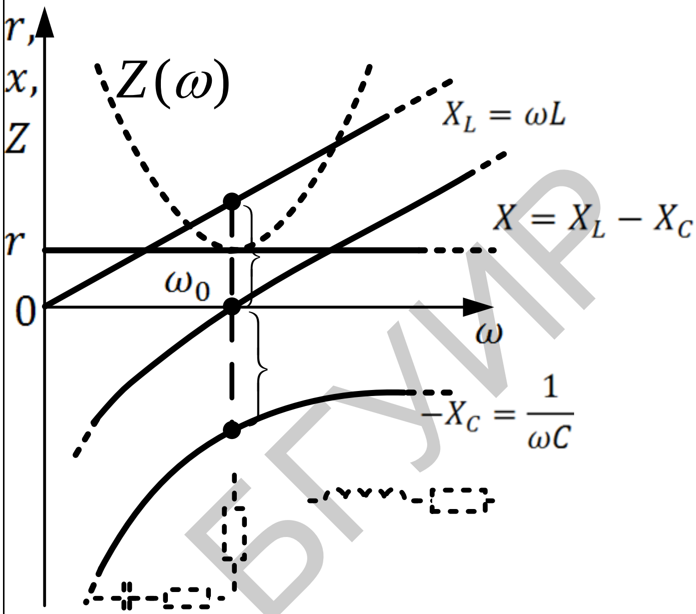
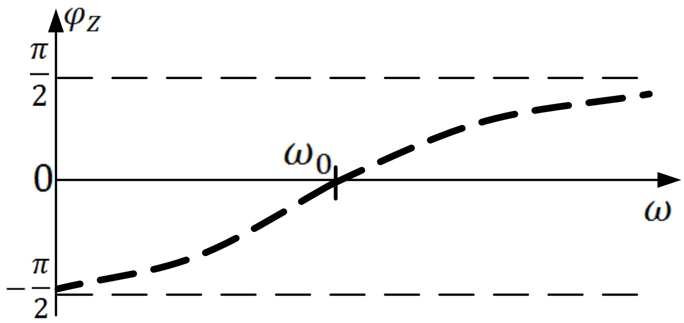


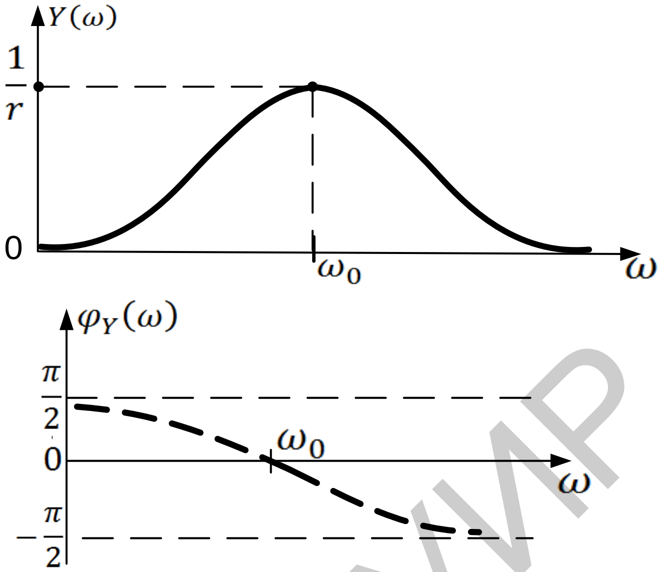
</td></tr>
</table>

3.4. Последовательный колебательный контур

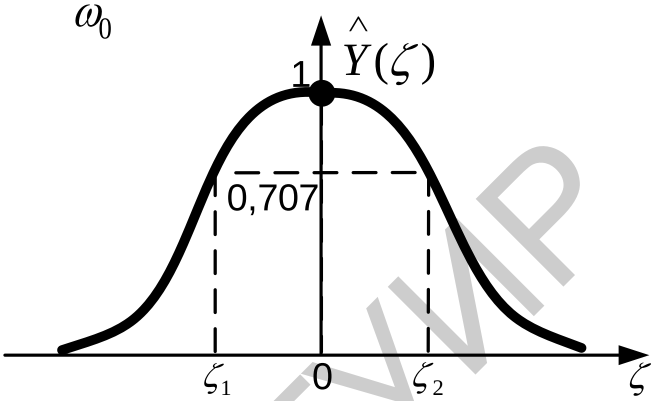
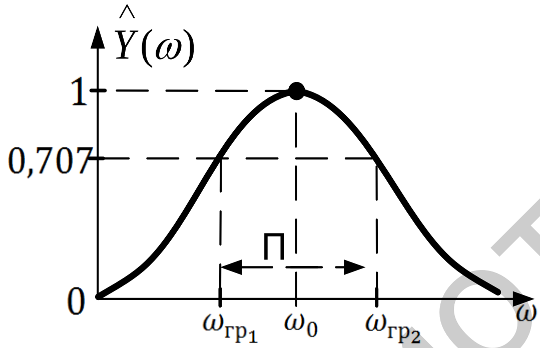
Схема	Параметры
	Первичные: r, L, C. Вторичные: ω_0, f_0, ρ, Q, d
Резонансная частота ω_0 – частота, при которой в контуре возникает резонанс напряжений и ток максимален	Резонанс наступает при равенстве нулю реактивного сопротивления контура: $X = X_L - X_C = 0$, откуда $\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0, \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $I_{m_0} = \dfrac{E_m}{r}$
Характеристическое (или волновое) сопротивление ρ – сопротивление индуктивности или ёмкости на резонансной частоте	$\rho = \omega_0 L$ или $\rho = \dfrac{1}{\omega_0 C}$, так как $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, то $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ $[\text{Ом}]$. На практике $\rho \approx 100 - 500$ Ом
Добротность Q – отношение напряжения на индуктивности или ёмкости к напряжению на входе контура при резонансе	$Q = \dfrac{U_{m_{L\,0}}}{E_m}$ или $Q = \dfrac{U_{m_{C\,0}}}{E_m}$, так как $\omega_{m_{L\,0}} = \dfrac{I_{m_0}\rho}{E_m} = \dfrac{(E_m/r)\cdot\rho}{E_m}$, то $Q = \dfrac{\rho}{r}$ или $Q = \dfrac{\omega_0 L}{r}$, или $Q = \dfrac{1}{\omega_0 C r}$
Затухание d – величина, обратная Q	$d = \dfrac{1}{Q}$

Добротность Q тем выше, чем меньше потери в контуре (чем меньше активное сопротивление r) и больше индуктивность при данной резонансной частоте. В диапазоне сверхвысоких частот добротность контуров ограничивается ёмкостью монтажа и активным сопротивлением катушки индуктивности. Ухудшает добротность контура и внутреннее сопротивление источника входного сигнала, которое увеличивает активное сопротивление контура.

Частотные характеристики	
Комплексное входное сопротивление: $Z(j\omega)=r+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=$ $=r+j(X_L-X_C)=$ $=r+jX(\omega)=Z(\omega)e^{j\varphi_z(\omega)}$ $Z(\omega)=\sqrt{r^2+X^2(\omega)}.$ При $\omega<\omega_0$ сопротивление контура $Z(\omega)$ носит активно-ёмкостный характер, при $\omega>\omega_0$ – активно-индуктивный, при $\omega=\omega_0$ – активный	Графики r, X АЧХ: $Z(\omega)=\sqrt{r^2+X^2(\omega)}$  ФЧХ: $\varphi_z(\omega)=\text{arctg}\frac{X(\omega)}{r}=\text{arctg}\frac{\omega L-1/\omega C}{r}$ 

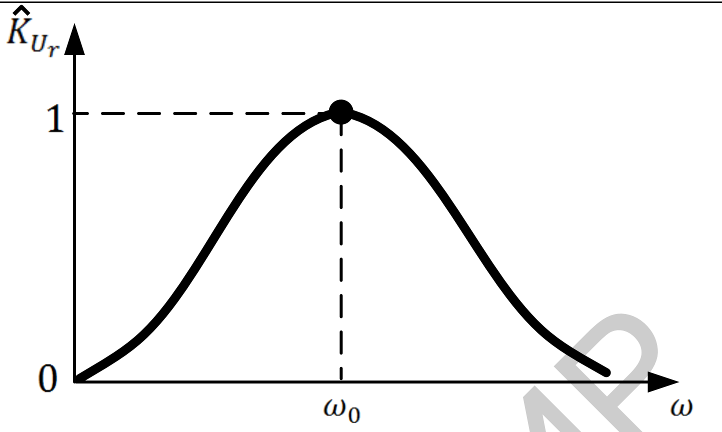
Комплексная входная проводимость: $Y(j\omega)=\dfrac{1}{Z(j\omega)}=$ $=\dfrac{1}{Z(\omega)}e^{-j\varphi_Z(\omega)}=Y(\omega)e^{\varphi_Y(\omega)}$, $Y(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+X^2(\omega)}}$, $\varphi_Y(\omega)=-\varphi_Z(\omega)$	Графики АЧХ $Y(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_Y(\omega)$ 
Фактор расстройки показывает, насколько и в какую сторону частота входного сигнала контура отличается от резонансной частоты ω_0 контура. При $\omega=\omega_0$ $\zeta=0$; при $\omega>\omega_0$ $\zeta>0$; при $\omega<\omega_0$ $\zeta<0$	$Y(j\omega)=\dfrac{1}{r+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}=$ $=\dfrac{1}{r\left[1+j\dfrac{\omega_0 L}{r}\underbrace{(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})}_{\zeta}\right]}=$ $=\dfrac{1}{r(1+jQ\zeta)}$. $\zeta=\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}$, $\zeta=\dfrac{f}{f_0}-\dfrac{f_0}{f}$

Графики АЧХ $Y(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_y(\omega)$ показывают, что при $\omega = \omega_0$ ($\xi = 0$) и $\varphi(\xi_0) = 0$, т. е. сопротивление контура активно. При $\omega < \omega_0$ сопротивление контура – активно-ёмкостное, при $\omega > \omega_0$ – активно-индуктивное.

Обобщённая расстройка	$Q\zeta$
Абсолютная расстройка	$\Delta\omega = \omega - \omega_0$
Относительная расстройка	$\delta = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$
Нормированная АЧХ: $\hat{Y}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\zeta^2}}$.	
Полоса пропускания контура П – диапазон частот, в пределах которого АЧХ (например, $Y(\omega)$) не ниже уровня $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ от максимального значения 	$\hat{Y}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\zeta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $1+Q^2\zeta^2 = 2,\ \zeta = \pm\dfrac{1}{Q}$, $\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega} \mp \dfrac{1}{Q} = 0$ или $\omega^2 \mp 2\dfrac{\omega_0}{2Q}\omega - \omega_0^2 = 0.$ Решение уравнения: $\omega_{гр_{1,2}} = \pm\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{4Q^2} + \omega_0^2}.$ Полоса пропускания $П = \omega_{гр_2} - \omega_{гр_1} = \dfrac{\omega_0}{Q}$ или $\Delta F = \dfrac{2\pi f_0}{Q}.$ Относительная полоса пропускания $П_0 = \dfrac{П}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q} = d$

<table>
<tr><td colspan="2">Комплексные передаточные функции контура</td></tr>
<tr><td>Комплексная передаточная функция по напряжению на активном сопротивлении:

$$K_{U_r}(j\omega)=\frac{\dot{U}_r}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}=rY(j\omega)=$$

$$=\frac{r}{\sqrt{r^2+X^2(\omega)}}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Комплексная передаточная функция по напряжению на ёмкости:

$$K_{U_C}(j\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}=Y(j\omega)\cdot\frac{1}{\omega C}.$$

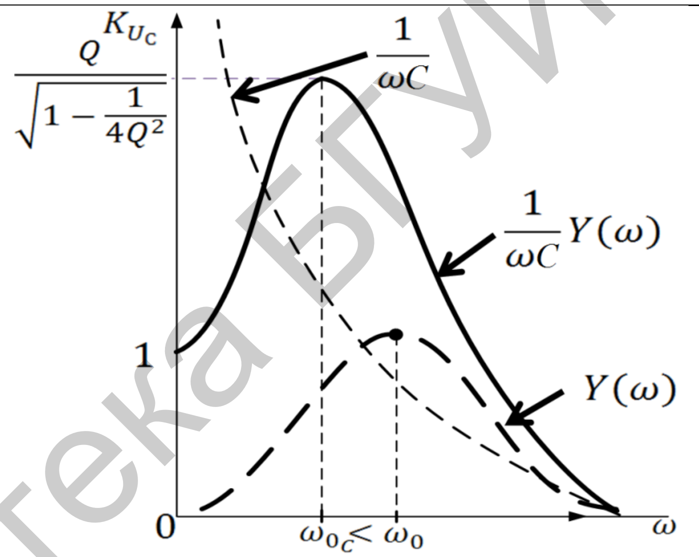
Максимальное значение АЧХ:

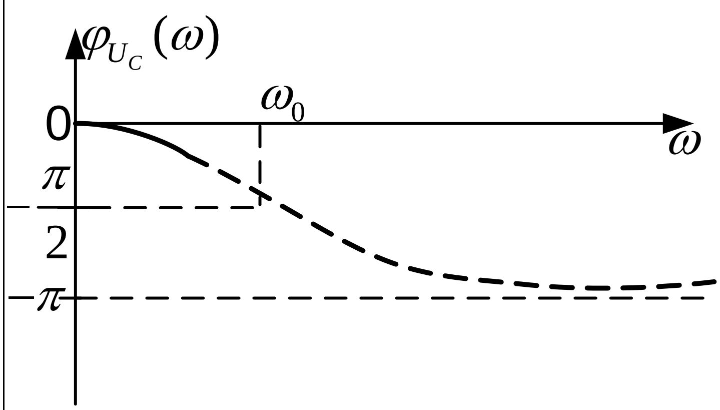
$$K_{U_C}(\omega)=\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

на частоте $\omega_{0C}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\approx$

$\approx\omega_0(1-\frac{1}{4Q^2}).$

ФЧХ:

$\varphi_{U_C}(\omega)=-\pi/2+\varphi_Y(\omega)$</td><td>


</td></tr>
</table>

Комплексная передаточная функция по напряжению на индуктивности:

$$K_{U_L}(j\omega)=\frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}=Y(j\omega)\cdot\omega L.$$

Максимальное значение АЧХ:

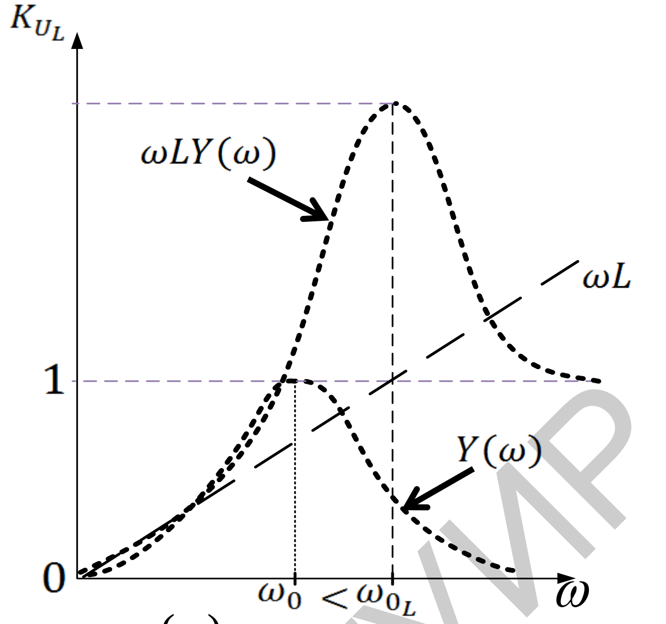
$$K_{U_L}(\omega)=\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

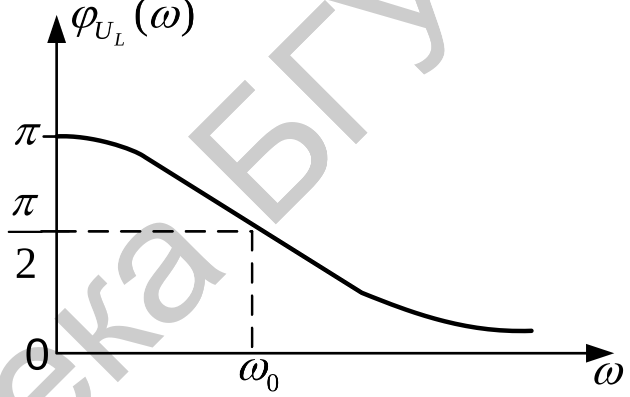
на частоте

$$\omega_{0_L}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}\approx\omega_0\left(1+\frac{1}{4Q^2}\right).$$

ФЧХ:

$$\varphi_{U_L}(\omega)=\pi/2+\varphi_Y(\omega)$$



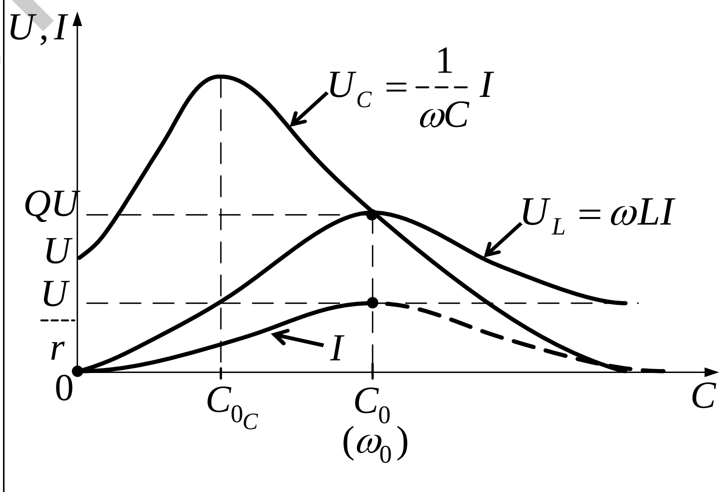


Настроечные кривые:

$$I=\frac{U}{\sqrt{r^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$U_L=I\omega L=\frac{U\omega L}{\sqrt{r^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}},$$

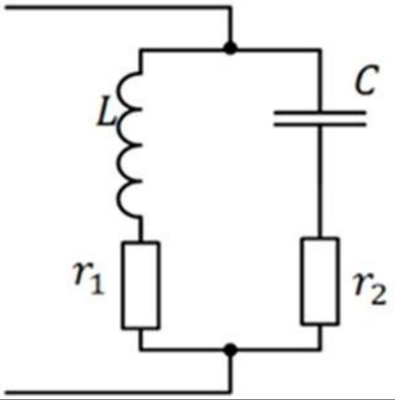
$$U_C=I\frac{1}{\omega C}=\frac{U}{\omega C\sqrt{r^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$

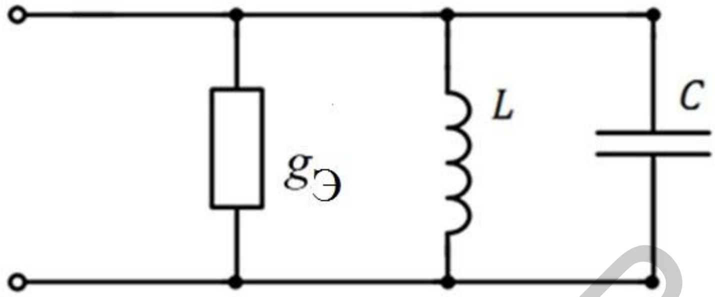


$(\omega=\omega_0)$

$U_{C\max}$ при $C_{0_C}<C_0$

3.5. Простой параллельный колебательный контур

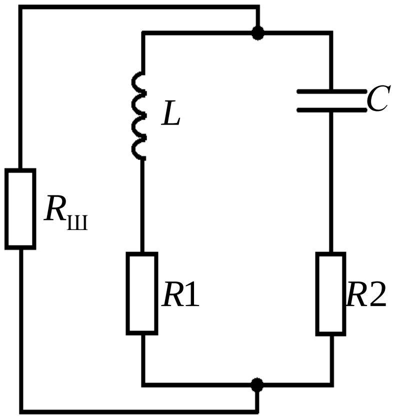
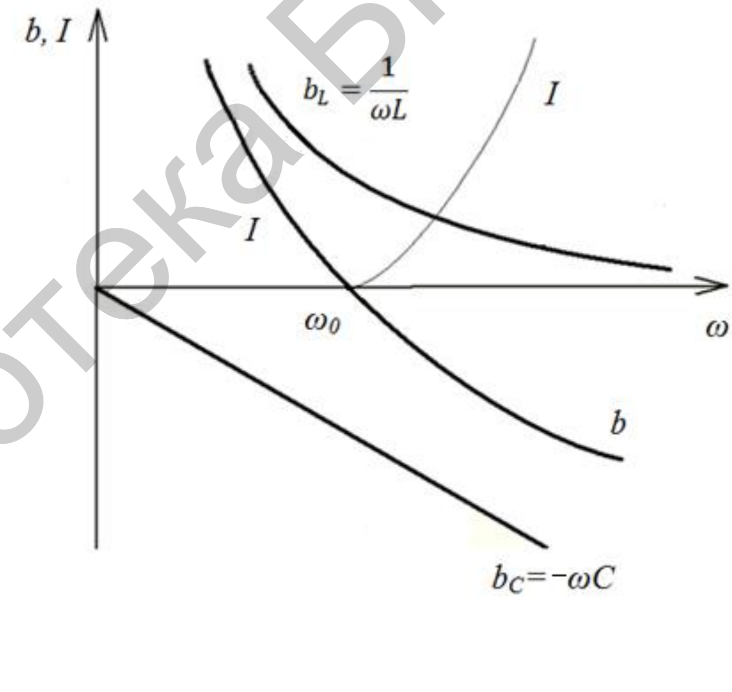
<table>
<tr><td colspan="2">


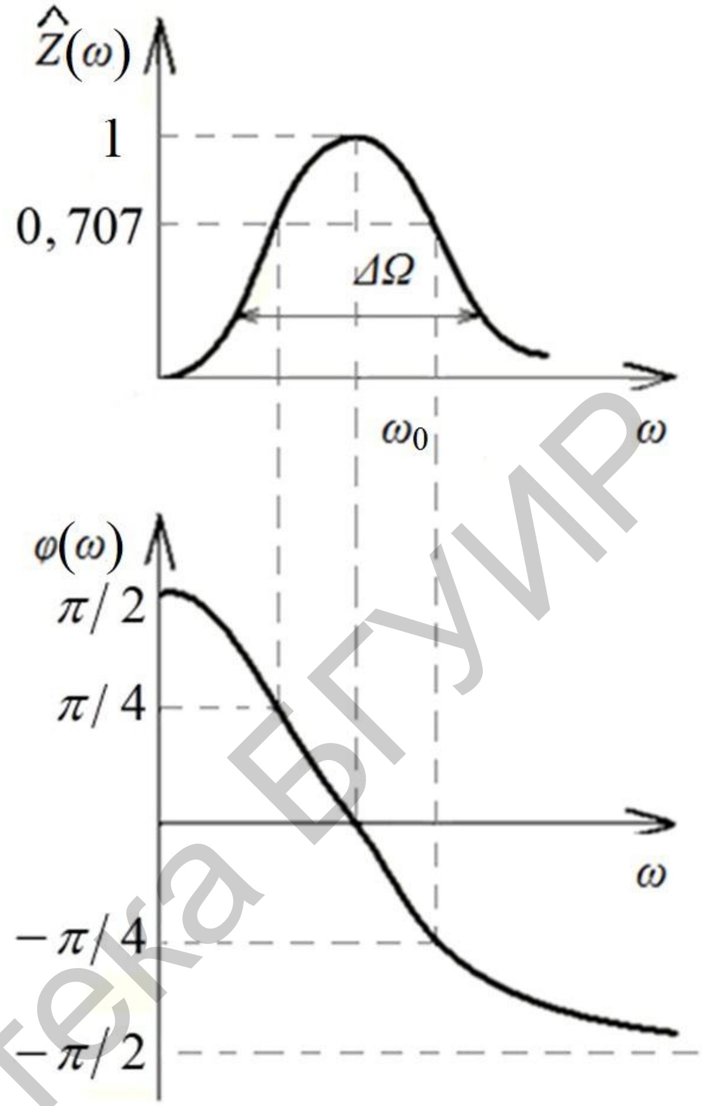


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вторичные параметры</td></tr>
<tr><td>
Входная проводимость $\dot{Y}$
при $r_1 << \omega L$,
$r_2 << \frac{1}{\omega C}$.
$\dot{Y} \approx \underbrace{\frac{r_1}{\omega^2 L^2} + \frac{r_2}{1/\omega^2 C^2}}_{g_Э} +$
$+ j\underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}_{b_Э} \approx$
$\approx g_Э + jb_Э$
</td><td>
$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \frac{1}{r_1 + j\omega L} + \frac{1}{r_2 - j\,1/\omega C} =$
$= \underbrace{\frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2}}_{g_Э} +$
$+ j\underbrace{\left(\frac{1/\omega C}{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2} - \frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2}\right)}_{b_Э} =$
$= g_Э + jb_Э$
</td></tr>
<tr><td>
Резонансная частота ω_p
при $r_1 << \omega L$,
$r_2 << \frac{1}{\omega C}$
или
$r_1 << \rho$,
$r_2 << \rho$
</td><td>
$\frac{1/\omega_p C}{r_2^2 + 1/\omega_p^2 C_2} - \frac{\omega_p L}{r_1^2 + \omega_p^2 L^2} = 0$,
$\omega_p = \omega_0\sqrt{\left(\rho^2 - r_1^2\right)\left(\rho^2 - r_2^2\right)}$,
$\omega_p \approx \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$
</td></tr>
</table>

Характеристическое сопротивление ρ	$\rho=\omega_0 L$ или $\rho=\dfrac{1}{\omega_0 C}$, или $\rho=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
Активная проводимость (сопротивление) на резонансной частоте $g_{Э_0}(R_{0_Э})$	$g_{экв}(\omega_0)$ или $g_{э_0}=\dfrac{r_1}{(\omega_0 L)^2}+\dfrac{r_2}{\left(1/\omega_0 C\right)^2}=\dfrac{r_Э}{\rho^2}$, где $r_Э=r_1+r_2$ – суммарное активное сопротивление потерь. $R_{0_Э}=\dfrac{1}{g_{Э_0}}=\dfrac{\rho^2}{r_Э}$ при $\omega\approx\omega_0$, $R_{0_Э}\approx Z_{0_Э}$
Добротность контура Q – отношение тока на индуктивности I_{L_0} или ёмкости I_{C_0} к силе тока контура на резонансной частоте I_0	$Q=\dfrac{I_{C_0}}{I_0}$ или $Q=\dfrac{I_{L_0}}{I_0}$ $Q=\dfrac{I_{C_0}}{I_0}=\dfrac{U/\rho}{U/g_{Э_0}}=\dfrac{\rho}{r_Э}=\dfrac{R_{0_e}}{\rho}$
Затухание d	$d=\dfrac{1}{Q}$

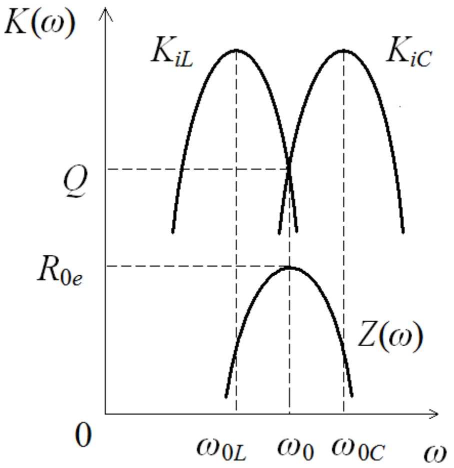
При рассмотрении вторичных параметров параллельного колебательного контура предполагалось, что в качестве источника к контуру подключён идеальный источник тока с бесконечным внутренним сопротивлением.

Ухудшенная добротность контура Q'  $R_Ш$ – шунтирующее сопротивление	$Q' = \dfrac{R'}{\rho};$ $R' = \dfrac{R_{0_Э} R_Ш}{R_{0_Э} + R_Ш};$ $Q' = Q \dfrac{1}{1 + R_{0_Э} / R_Ш}$
Частотные характеристики простого параллельного контура	
Частотные характеристики проводимостей ветвей b_L и b_C. Сила тока $I = \lvert b \rvert U$, поэтому кривая $\lvert b \rvert$ в соответствующем масштабе есть резонансная кривая тока $I(\omega)$	 $b = b_L + b_C$

Входное сопротивление контура $Z(j\omega)$ и его нормированное значение $\hat{Z}(\omega)$: $Z(j\omega)=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{1}{Y}=$ $=\dfrac{1}{g_{Э_0}+j\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)}=$ $=\dfrac{1}{\left[1+j\dfrac{R_{0_Э}}{\rho}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}\times$ $\times\dfrac{1}{g_{Э_0}}={R_{0_Э}}\Big/{(1+jQ\xi)}$; $\hat{Z}(\omega)={1}\Big/{\sqrt{1+Q^2\xi^2}}$; $\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}Q\xi$	

На резонансной частоте ω_0 входное сопротивление параллельного контура активно и максимально. На частоте $\omega < \omega_0$ сопротивление контура носит активно-индуктивный характер. При $\omega > \omega_0$ характер сопротивления контура активно-ёмкостный.

<table>
<tr>
<td>
Комплексная передаточная функция контура по току в индуктивности $K_{iL}\left(j\omega_0\right)$ и ёмкости $K_{iC}\left(j\omega_0\right)$



$$\omega_{0_L}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}};$$

$$\omega_{0_C}=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$$
</td>
<td>

$$K_{i_L}\left(j\omega\right)=\frac{\dot{I}_L}{\dot{I}}=Z\left(j\omega\right)\frac{1}{j\omega L}$$

или

$$K_{i_L}\left(j\omega\right)=$$

$$=\frac{1}{j\omega L\left(g_{\text{Э}_0}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\right)},$$

откуда

$$K_{i_L}\left(\omega\right)=\frac{1}{\omega L\sqrt{g_{\text{Э}_0}^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}};$$

$$K_{i_C}\left(j\omega\right)=\frac{\dot{I}_C}{\dot{I}}=Z\left(j\omega\right)j\omega C$$

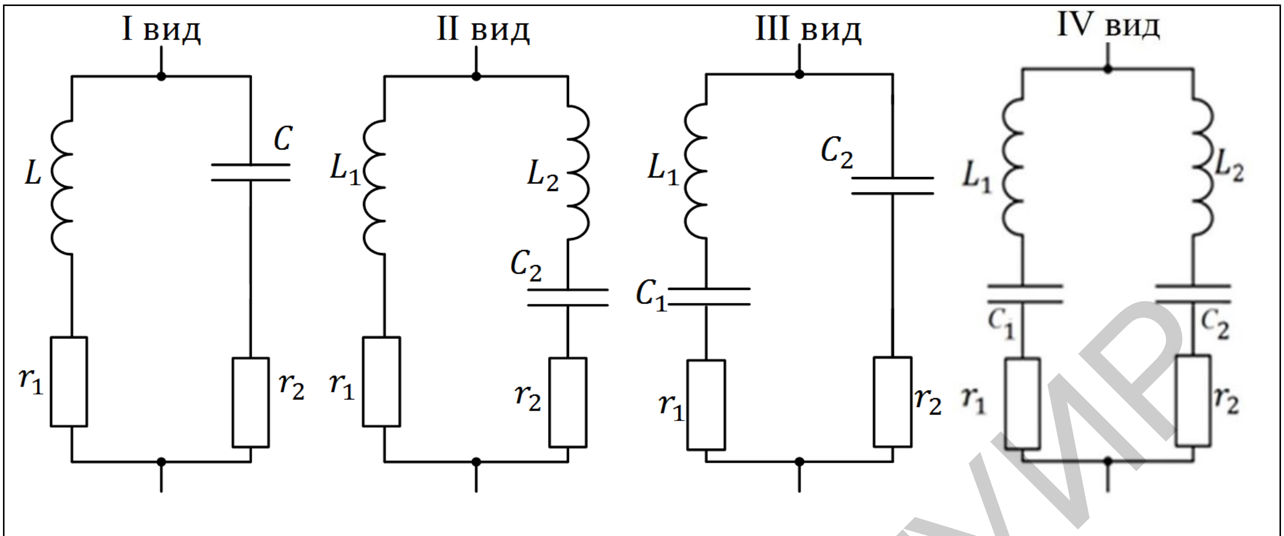
или

$$K_{i_C}\left(j\omega\right)=\frac{j\omega C}{g_{\text{Э}_0}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)},$$

откуда

$$K_{i_C}\left(\omega\right)=\frac{\omega C}{\sqrt{g_{\text{Э}_0}^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$
</td>
</tr>
</table>

3.6. Сложные параллельные колебательные контуры



Последовательный резонанс	
Контур II вида	$\omega_{0_2} L_2 - \dfrac{1}{\omega_{0_2} C_2} = 0;\quad \omega_{0_2} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$
Контур III вида	$\omega_{0_1} L_1 - \dfrac{1}{\omega_{0_1} C_1} = 0;\quad \omega_{0_1} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$
Контур IV вида	$\omega_{0_1} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}};\qquad \omega_{0_2} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

У высокодобротных контуров для частот в полосе пропускания $r_1 \ll x_1$ и $r_2 \ll x_2$. Тогда суммарная проводимость контура II вида

$$Y = Y_1 + Y_2 = r_1/x_1^2 + r_2/x_2^2 - j(1/x_1 + 1/x_2) = g_{\text{экв}} + jb_{\text{экв}}.$$

При резонансе токов $b_{\text{экв}} = 0$, тогда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{экв}} C_2}},$$

где $L_{\text{экв}} = L_1 + L_2$.

Параллельный резонанс	
Контур II вида	$$Z_{Э_{II}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{\omega L_1 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}{\omega \underbrace{\left(L_1 + L_2 \right)}_{L_Э} - 1 / \omega C_2};$$ $$L_Э = L_1 + L_2.$$ При $r_1 \ll \omega L_1$ и $r_2 \ll 1/\omega C_2$; $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_Э C_2}}$$
Контур III вида	$$Z_{Э_{III}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} =$$ $$= \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2} \right)\left(-\frac{1}{\omega C_2} \right)}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}};$$ $$C_Э = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$ При $r_1 << \omega L_1$ и $r_2 << \omega L_2 - 1/\omega C_2$; $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_Э}}$$

<table>
<tr>
<td>Контур IV вида</td>
<td>

$$Z_{Э_{IV}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} =$$

$$= \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}};$$

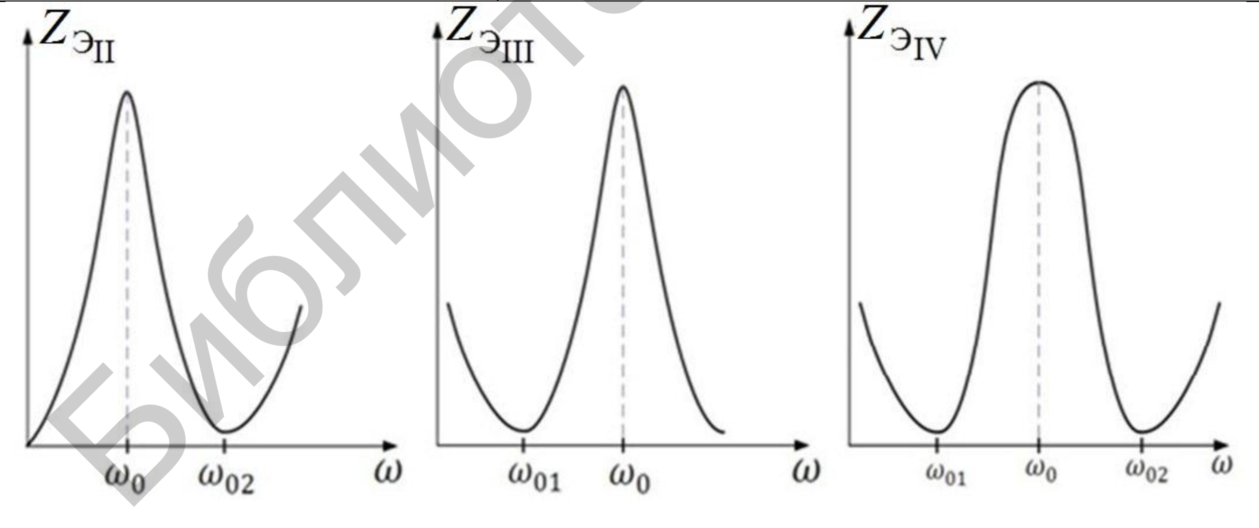
$$L_Э = L_1 + L_2,\ C_Э = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

При $r_1 << \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ и

$$r_2 << \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_Э C_Э}}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

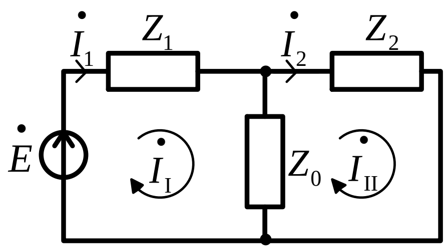


</td>
</tr>
</table>

Коэффициент включения p	
Контур II вида	$p_{\mathrm{II}} = \dfrac{\lvert x_{10} \rvert}{\rho_Э} = \dfrac{\lvert x_{20} \rvert}{\rho_Э};$ $p_{\mathrm{II}} = \dfrac{\omega_0 L_1}{\rho_Э} = \dfrac{\left\lvert \omega_0 L_2 - \dfrac{1}{\omega_0 C_2} \right\rvert}{\rho_Э} =$ $= \dfrac{\omega_0 L_1}{\omega_0 L_Э} = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2};$ $Z_{0Э_{\mathrm{II}}} = Z_{0Э} p_{\mathrm{II}}^2;$ $Q_{\mathrm{II}} = Q p_{\mathrm{II}}$
Контур III вида	$p_{\mathrm{III}} = \dfrac{1/\omega_0 C_2}{1/\omega_0 C_Э} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2};$ $Z_{0Э_{\mathrm{III}}} = Z_{0Э} p_{\mathrm{III}}^2;$ $Q_{\mathrm{III}} = Q p_{\mathrm{III}}$
Контур IV вида	$p_{\mathrm{IV}} = \dfrac{\omega_0 L_1 - \dfrac{1}{\omega_0 C_1}}{\rho_Э} = \dfrac{L_1}{L_Э} - \dfrac{C_Э}{C_1}$ или $p_{\mathrm{IV}} = \dfrac{\omega_0 L_2 - \dfrac{1}{\omega_0 C_2}}{\rho_Э} = \dfrac{L_2}{L_Э} - \dfrac{C_Э}{C_2};$ $Z_{0Э_{\mathrm{IV}}} = Z_{0Э} p_{\mathrm{IV}}^2;$ $Q_{\mathrm{IV}} = Q p_{\mathrm{IV}}$

3.7. *Связанные колебательные контуры*

Обобщённая схема системы двух связанных контуров. Внесимые сопротивления



Контурные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_{\mathrm{I}} + Z_{12}\dot{I}_{\mathrm{II}} &= \dot{E}; \\ Z_{21}\dot{I}_{\mathrm{I}} + Z_{22}\dot{I}_{\mathrm{II}} &= 0; \end{aligned}\right\}$$

$Z_{11} = Z_1 + Z_0$,

$Z_{22} = Z_2 + Z_0$,

$Z_{12} = Z_{21} = -Z_0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{E} & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{E} \\ Z_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

Z_0 – сопротивление связи (индуктивное, ёмкостное, резистивное, комбинированное).

Коэффициент связи:

$k = Z_0 / \sqrt{Z'_{11} \cdot Z'_{22}}$, в Z'_{11} и Z'_{22} включают только элементы, однотипные сопротивлению связи.

Ток в первом контуре

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dot{E}}{Z_{1Э}},$$

$$Z_{1Э} = Z_{11} - \frac{Z_0^2}{Z_{22}} = Z_{11} + Z_{1ВН}.$$

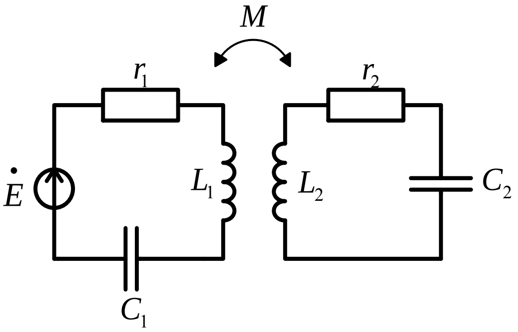
$Z_{1ВН} = -\dfrac{Z_0^2}{Z_{22}}$ – вносимое сопротивление первого контура, учитывающее влияние второго контура на ток в первом контуре.

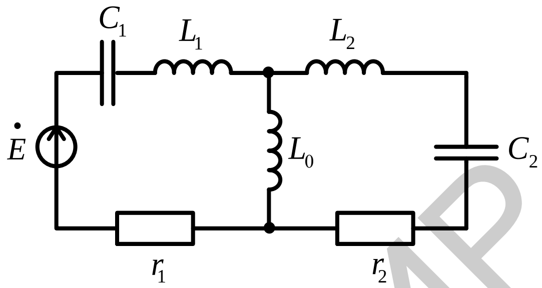
Ток во втором контуре:

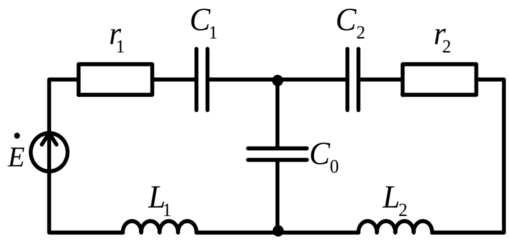
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\dot{E} \cdot Z_0}{Z_{2Э} \cdot Z_{11}},$$

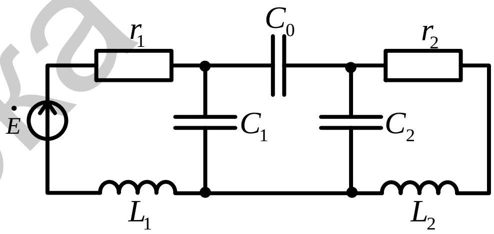
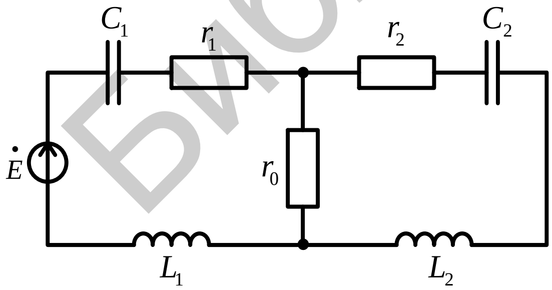
$$Z_{2Э} = Z_{22} - \frac{Z_0^2}{Z_{11}} = Z_{22} + Z_{2ВН}.$$

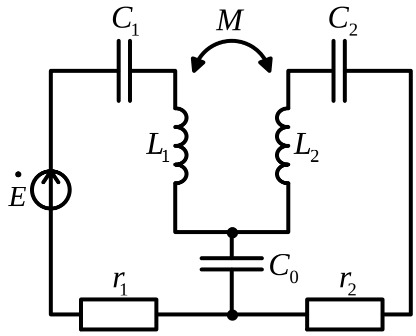
$Z_{2ВН} = -\dfrac{Z_0^2}{Z_{11}}$ – вносимое сопротивление второго контура, учитывающее влияние первого

<table>
<tr><td></td><td>контура на ток второго контура</td></tr>
<tr><td colspan="2">Виды связи между контурами</td></tr>
<tr><td>Индуктивная связь
(трансформаторная)


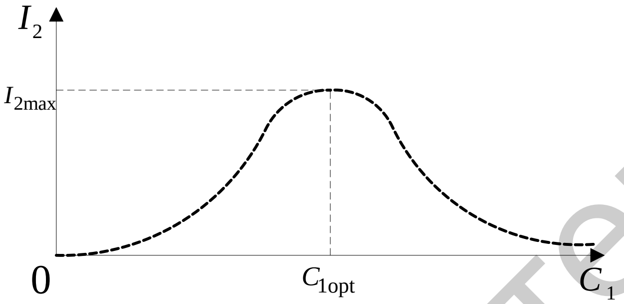
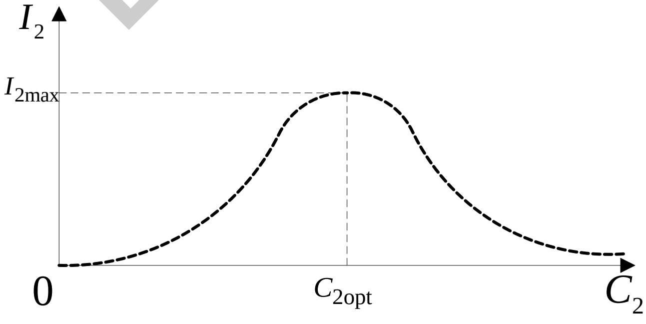
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$</td><td>Индуктивная связь
(автотрансформаторная)


$$k = \frac{L_0}{\sqrt{(L_1 + L_0)(L_2 + L_0)}}$$</td></tr>
<tr><td>Ёмкостная связь
(внутренняя)


$$k = \frac{\sqrt{\frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} \cdot \frac{C_0 C_2}{C_0 + C_2}}}{C_0}$$</td><td>Ёмкостная связь
(внешняя)

</td></tr>
<tr><td>Резистивная (гальваническая)
связь


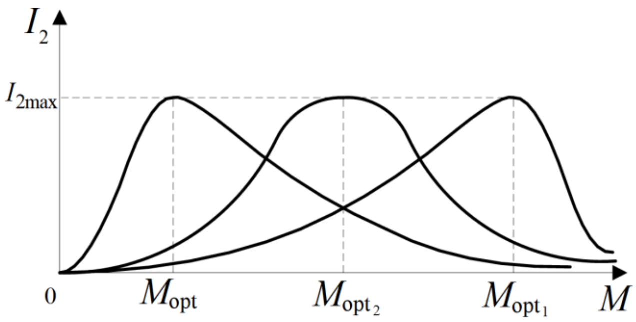
$$k = \frac{r_0}{\sqrt{(r_0 + r_1)(r_0 + r_2)}}$$</td><td>Комбинированная
(индуктивно-ёмкостная связь)

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Условная оценка связи между контурами</td></tr>
<tr><td colspan="2">$0 \le k \le 0{,}01$ очень слабая связь
$0{,}01 \le k \le 0{,}05$ слабая связь
$0{,}05 \le k \le 0{,}9$ сильная связь
$0{,}9 \le k \le 1$ очень сильная связь</td></tr>
<tr><td colspan="2">Настройка системы двух индуктивно связанных контуров</td></tr>
<tr><td>Настройка в резонанс

Настройка в частный резонанс</td><td>Настройка в целях получения максимального тока во втором контуре.
Настройка, при которой обеспечивается максимальный ток во втором контуре, но этот ток меньше максимально возможного</td></tr>
<tr><td>Первый частный резонанс

$$I_{2max} = \frac{E \cdot X_0}{Z_{22}(r_1 + \frac{r_2 \cdot X_0^2}{Z_{22}^2})}$$</td><td>Максимум тока во втором контуре достигается изменением реактивного сопротивления первого контура $X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ при неизменном реактивном сопротивлении второго контура $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ и сопротивлении связи $X_0 = \omega M$ (например, путём изменения ёмкости C_1).
Условие первого частного резонанса: $X_{1экв} = X_1 + X_{1ВН} = 0$</td></tr>
<tr><td>Второй частный резонанс
</td><td>Максимум во втором контуре достигается изменением реактивного сопротивления второго контура $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ (например, путём изменения ёмкости C_2) при неизменном реактивном</td></tr>
</table>

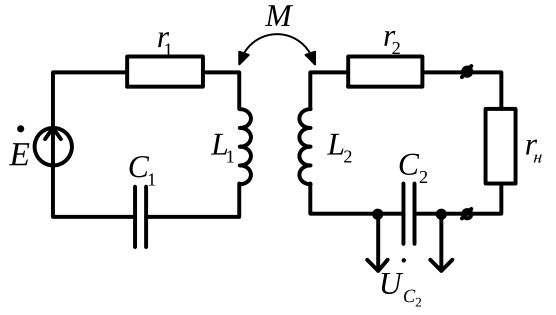
	сопротивлении первого контура $X_1 = \omega L_1 - \dfrac{1}{\omega C_1}$ и сопротивлении связи $X_0 = \omega M$. Условие второго частного резонанса: $X_{2экв} = X_2 + X_{2ВН} = 0$
Основной (индивидуальный) резонанс: $I_{2\max} = \dfrac{E_0 \cdot X_0}{r_1 r_2 + X_0^2}$	При неизменном сопротивлении связи $X_0 = \omega M = \mathrm{const}$ максимум тока во втором контуре достигается последовательно: сначала изменением реактивного сопротивления первого контура до $X_1 = 0$, $Z_{11} = r_1$ и $I_1 = I_{1\max}$, затем изменением реактивного сопротивления второго контура до $X_2 = 0$, $Z_{22} = r_2$ и $I_2 = I_{2\max}$. Процесс настройки повторяется (т. е. возвращаются к настройке первого контура, потом второго контура и т. д.) до получения максимально возможного тока во втором контуре. Условия основного (индивидуального) резонанса: $X_{1экв} = X_1 + X_{1ВН} = 0$, $X_{2экв} = X_2 + X_{2ВН} = 0$
Сложный резонанс	
Сложный резонанс	Максимум тока во втором контуре достигается последовательным изменением реактивного сопротивления одного из

	контуров и сопротивления связи между контурами
Первый способ получения сложного резонанса: $I_{2\max\max} = \dfrac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}$; $X_{0\mathrm{opt}1} = Z_{22}\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$; $M_{0\mathrm{opt}1} = \dfrac{Z_{22}}{\omega}\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$	Максимально возможный ток во втором контуре достигается последовательно: вначале первый контур настраивается в первый частный резонанс путём изменения реактивного сопротивления X_1 (при $X_0 = \min$), затем изменяется сопротивление связи X_0, снова первый контур настраивается в первый частный резонанс и опять изменяем сопротивление связи X_0 и т. д. до получения $I_{2\max\max}$. Условия первого способа получения сложного резонанса: $X_{1\text{экв}} = X_1 + X_{1\text{ВН}} = 0,$ $X_0 = X_{0\mathrm{opt}1}$
Второй способ получения сложного резонанса: $I_{2\max\max} = \dfrac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}$; $X_{0\mathrm{opt}2} = z_{11}\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$; $M_{0\mathrm{opt}2} = \dfrac{z_{11}}{\omega}\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$	Максимально возможный ток во втором контуре достигается последовательно: вначале второй контур настраивается во второй частный резонанс путём изменения реактивного сопротивления X_2 (при $X_0 = \min$), затем изменяется сопротивление связи X_0, снова второй контур настраивается во второй частный резонанс и опять изменяется сопротивление связи X_0 и т. д. до получения $I_{2\max\max}$. Условия второго способа получения сложного резонанса: $X_{2\text{экв}} = X_2 + X_{2\text{ВН}} = 0,$ $X_0 = X_{0\mathrm{opt}2}$

Полный резонанс: $I_{2\max\max} = \dfrac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}}$; $X_{0\text{opt}} = \sqrt{r_1 r_2}$; $M_{0\text{opt}} = \dfrac{\sqrt{r_1 r_2}}{\omega}$; $k_{\text{opt}} = \dfrac{1}{Q} = d$ 	Максимум тока во втором контуре достигается последовательным изменением реактивных сопротивлений контуров и сопротивления связи между контурами: при $X_0 = \min$ изменением реактивных сопротивлений контуров получают первый и второй частные резонансы, затем X_0 изменяется до увеличения тока I_2 и снова контуры настраивают в первый и второй частные резонансы и т. д. до получения $I_{2\max\max}$. Условия получения полного резонанса: $X_{1\text{экв}} = 0$, $X_{2\text{экв}} = 0$

3.8. Частотные характеристики индуктивно связанных контуров

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Комплексная передаточная функция по напряжению на ёмкости

$$K_U(j\omega)=\frac{\dot{U}_{c2}}{\dot{E}}=\frac{\dot{I}_2\cdot\frac{1}{j\omega C}}{\dot{E}},$$

где $I_2=\dfrac{\dot{E}\cdot Z_0}{Z_{11}\cdot Z_{22}-Z_0^2}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

При $r_1=r_2=r,\ L_1=L_2=L,\ C_1=C_2=C$

$$Z_{11}=Z_{22}=r+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right),\ Z_0=j\omega M,$$

$k=\dfrac{M}{L}$, $d=\dfrac{r}{\omega_0 L}$ и вблизи резонансной частоты $\omega L\approx\omega_0 L\approx\rho$

$$K_U(j\omega)=\frac{k}{(d+j\xi)^2+k^2}=\frac{k^2}{k^2+d^2-\xi^2+j2d\xi}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Амплитудно-частотная характеристика

$$K_U(\omega)=\frac{k}{\sqrt{\left(k^2+d^2-\xi^2\right)+4d^2\xi^2}}=$$

$$=\frac{k}{\sqrt{\xi^4+2(d^2-k^2)\xi^2+(d^2+k^2)^2}}.$$

Фазовочастотная характеристика

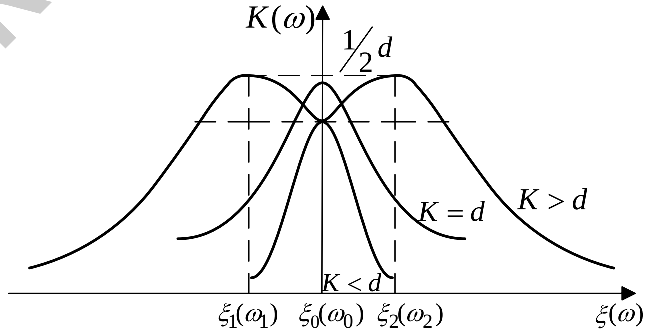
$$\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{2d\xi}{k^2+d^2-\xi^2}:$$

при $k<d$ $\quad K(\omega)=\dfrac{k}{k^2+d^2}$;

при $k=d$ $\quad K(\omega)=\dfrac{1}{2d}$;

при $k>d$ $\quad K(\omega)$ имеет два экстремума (первый – min и второй – max), т. е. АЧХ – «двугорбая»

</td>
<td>



$\xi_0=0$ – соответствует резонансной частоте контура,

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=\sqrt{k^2-d^2},\\ \xi_2&=-\sqrt{k^2-d^2}\end{aligned}\right\}-$$

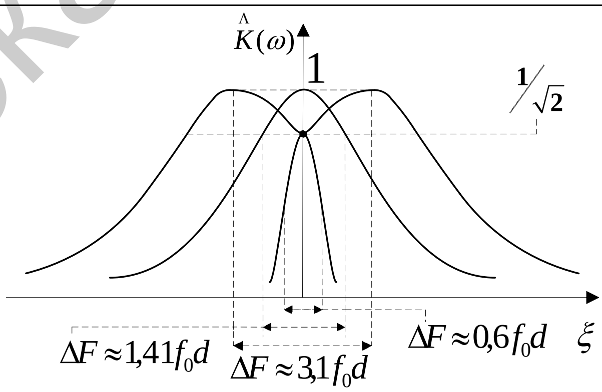
соответствуют резонансным частотам связи:

$$\omega_1=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{k^2-d^2}}},$$

$$\omega_2=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\sqrt{k^2-d^2}}}$$

</td>
</tr>
</table>

Полоса пропускания индуктивно связанных контуров
$\hat{K}(\omega)=\dfrac{K(\omega)}{K_{\max}(\omega)}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\xi^4+2(d^2-k^2)\xi^2+(d^2+k^2)^2}}}{1/2d}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Биквадратное уравнение: $\xi_{\text{гр}}^4+2\xi_{\text{гр}}^2(d^2-k^2)+(d^2+k^2)^2-8k^2d^2=0.$ Корни биквадратного уравнения: $\xi_{\text{гр}1,2}=\pm\sqrt{k^2-d^2\pm 2kd}=\pm d\sqrt{\dfrac{k^2}{d^2}-1\pm\dfrac{2k}{d}}.$ При $k=d$ $\xi_{\text{гр}1,2}=\pm d\sqrt{2}$.   При $k>d$ $(k_{\text{гр}}\approx 2{,}41d)$ $\xi_{\text{гр}1,2}\approx 3{,}1d$
Связь расстройки ξ с полосой пропускания
$\xi_{\text{гр}}\approx\dfrac{\Delta\Omega}{\omega_{\text{o}}}$ или $\Delta\Omega=\xi_{\text{гр}}\omega_0$, $\Delta F=\xi_{\text{гр}}f_0$.   При $k<d$ – очень слабая связь.   При $k=d$ – слабая связь.   При $k>d$ – сильная связь

При $k<d$ $\Delta\Omega\approx 0{,}6\omega_0 d$, $\Delta F\approx 0{,}6 f_0 d$. При $k=d$ $\Delta\Omega\approx 1{,}41\omega_0 d$, $\Delta F\approx 1{,}41 f_0 d$. При $k>d$ $\Delta\Omega\approx 3{,}1\omega_0 d$, $\Delta F\approx 3{,}1 f_0 d$	

При оптимальной связи ($k=d$) граничные значения фактора расстройки по уровню $0{,}1K_{\max}$ $\xi_{\text{гр}0,1}\approx\pm 4{,}45d$, а коэффициент прямоугольности $K_{\text{п}}|_{k=d}\approx 0{,}316$. При максимальной полосе пропускания, т. е. при $k=2{,}4d$, $K_{\text{п}}|_{k=2,41d}\approx 0{,}426$. Так как коэффициент прямоугольности одиночного колебательного контура равен 0,1, то избирательность системы из двух связанных контуров в 3–4 раза выше.

4. Классический (временной) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

4.1. Общие сведения о переходных процессах в линейных электрических цепях

Различают установившийся и неустановившийся режимы работы электрической цепи.

Установившимся (стационарным) называют такой режим, при котором токи и напряжения в электрической цепи являются постоянными или периодическими функциями времени.

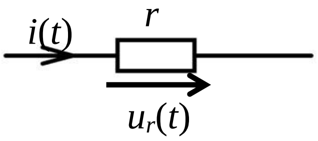
Неустановившимся (нестационарным или переходным) режимом называют электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи с накопительными (энергоёмкими) элементами (индуктивными или ёмкостными) при переходе от одного установившегося режима к другому в результате коммутации.

Переходные процессы в электрических цепях возникают в результате скачкообразной коммутации: подключения или отключения источников ЭДС и тока, аварийного или принудительного изменения схемы электрической цепи либо параметров входящих в неё элементов.

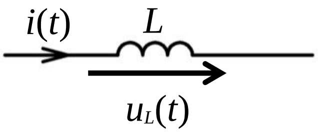
Целью анализа переходных процессов в электрических цепях классическим (временным) методом является нахождение закона изменения токов в ветвях и напряжений на элементах цепи (как функции времени) в результате коммутации.

В основе анализа переходных процессов лежат уравнения состояния, составленные для мгновенных значений токов и напряжений по методам уравнений Кирхгофа, контурных токов либо других.

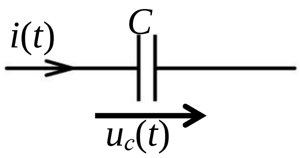
Для переходных процессов в электрических цепях эти уравнения являются интегродифференциальными, поскольку соотношения токов и напряжений на элементах R, L и C соответствующие.



$$u_r(t) = r \cdot i(t); \qquad i(t) = \frac{u_r(t)}{r};$$

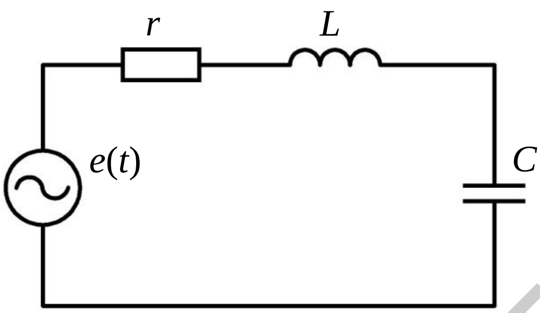


$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}; \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)dt;$$



$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt; \qquad i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

Для одноконтурной цепи при подключении к ней источника ЭДС $e(t)$ интегродифференциальное уравнение состояния (или переходного процесса) составляется по второму закону Кирхгофа.



$$e(t) = u_r(t) + u_C(t) + u_L(t) =$$
$$= r \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt + L\frac{di(t)}{dt}$$

Для получения дифференциального уравнения обе части интегро-дифференциального уравнения дифференцируют по времени.

Порядок цепи определяется порядком дифференциального уравнения.

В общем случае для описания переходных процессов в линейных электрических цепях составляется линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-порядка с постоянными коэффициентами.

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}x(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \ldots$$
$$\ldots + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) =$$
$$= b_n\frac{d^n}{dt^n}f(t) + b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t) + \ldots$$
$$\ldots + b_1\frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t). \qquad (4.1)$$

В формуле (4.1):

$f(t)$ – входное воздействие (ток или напряжение источника сигнала);

$x(t)$ – реакция (или отклик) цепи на входное воздействие $f(t)$ в виде токов в ветвях или напряжений на элементах цепи;

a_i ,b_i – положительные вещественные коэффициенты, определяемые схемой цепи и параметрами её элементов (r, L, C).

Порядок составления дифференциального уравнения, описывающего состояние электрической цепи в переходном режиме

1) дифференциальное уравнение составляется для цепи после коммутации;

2) в одноконтурной цепи дифференциальное уравнение составляется по 2-му закону Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений;

3) в многоконтурной цепи на основании 1-го и 2-го законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений составляется система уравнений, которая затем сводится к одному дифференциальному уравнению

Решение уравнения (4.1) содержит свободную и принуждённую составляющие.

<u>Решение</u>:

а) общее решение однородного дифференциального уравнения без правой части:

$X_{\text{св}}(t) \longrightarrow$ свободная составляющая

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} \cdot x(t) + ... + a_0 \cdot x(t) = 0;$$

б) частное решение неоднородного дифференциального уравнения с правой частью:

$X_{\text{пр}}(t) \longrightarrow$ принуждённая составляющая.

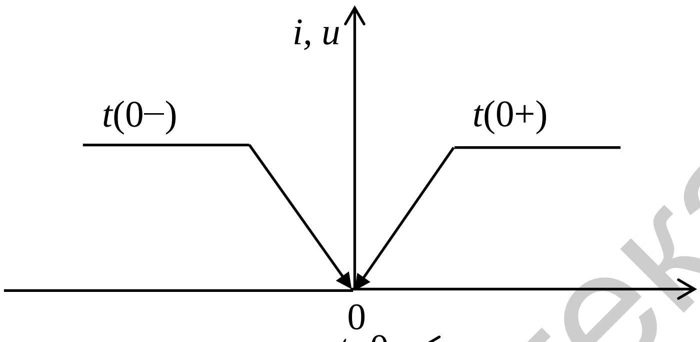
Тогда $x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{пр}}(t),$

$$x_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots$$
$$\ldots + A_n e^{p_n t} = \sum_{\kappa=1}^{n} A_k e^{p_k t},$$

A_k – постоянная интегрирования;
p_k – корни характеристического уравнения:
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} x_{\text{св}}(t) = 0$, $x(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}}_{x_{\text{св}}(t)} + x_{\text{пр}}(t)$

Законы коммутации



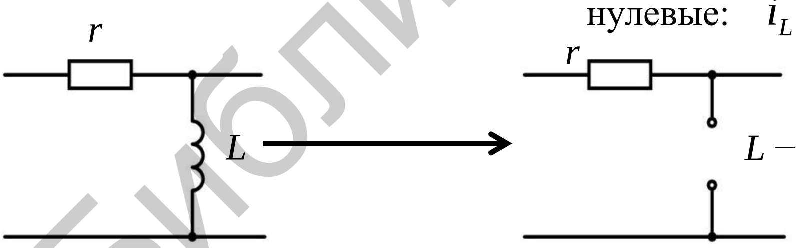
t=0 ← момент коммутации

1-й закон:
$$i_L(0+) = i_L(0-)$$

2-й закон:
$$u_C(0+) = u_C(0-)$$

Начальные условия:

нулевые: $i_L(0+) = 0$



L − разрыв (или холостой ход)

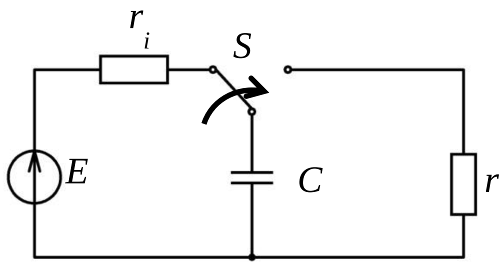
$$u_C(0+) = 0$$

C − идеальный проводник (или короткое замыкание)

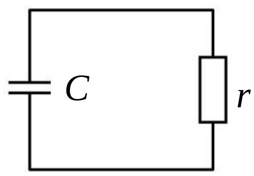
4.2. Переходные процессы в электрических цепях первого порядка

4.2.1. Свободные процессы в цепях первого порядка при подключении к источнику постоянного напряжения

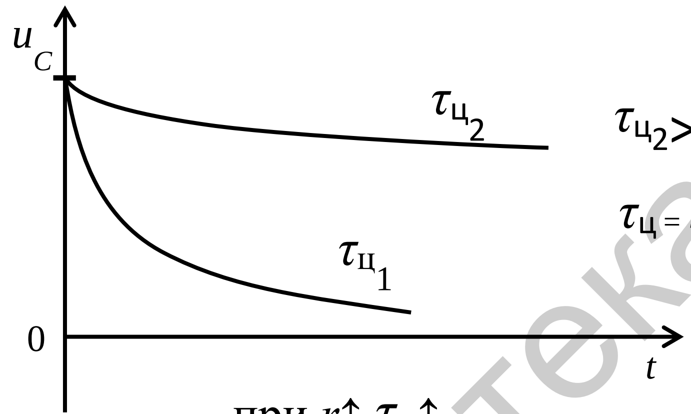
<table>
<tr><td colspan="2">Свободные процессы в rC-цепи</td></tr>
<tr><td>



до коммутации



после коммутации



$\tau_{ц_2} > \tau_{ц_1}$

$\tau_ц = rC$

при $r\uparrow$ $\tau_ц\uparrow$

</td><td>

$u_C + u_r = 0;$

$u_C(0+) \neq 0;$

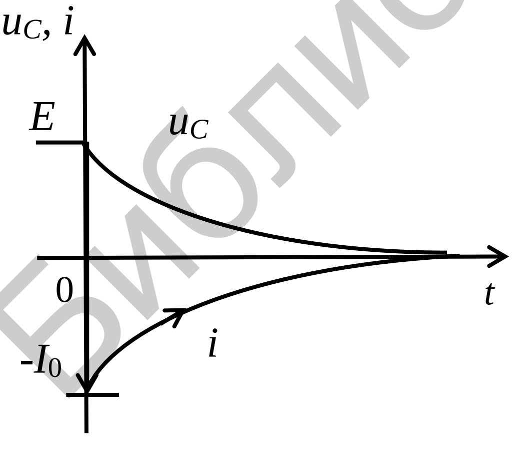
$u_C + rC\dfrac{du_C}{dt} = 0;$

$rC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0;$

$rCp_1 + 1 = 0;$

$p_1 = -\dfrac{1}{rC} = -\dfrac{1}{\tau_ц}$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

$u_{с\ св}(t) = A_1 e^{p_1 t};$

$u_с(0-) = u_с(0+) = E;$

$E = A_1 \cdot e^0;$ $u_{с\ св}(t)$

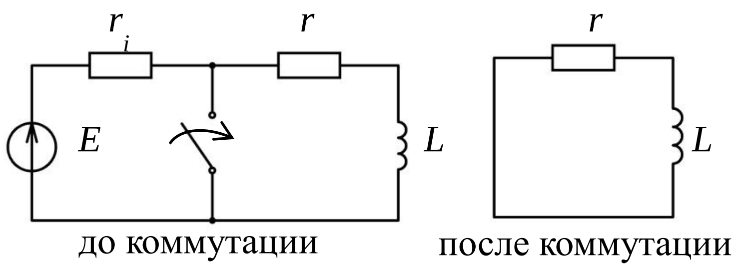
т. е. $A_1 = E;$

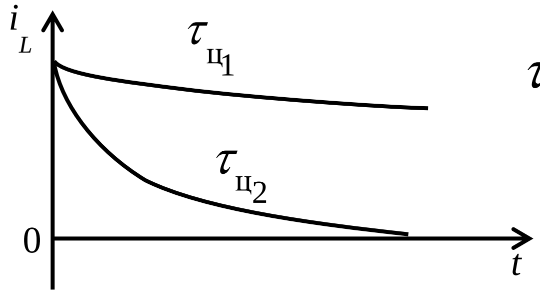
$u_{с\ св}(t) = E \cdot e^{-t/\tau_ц};$

$i_C = C\dfrac{du_C}{dt} = C \cdot E\left(-\dfrac{1}{\tau_ц}\right) \cdot e^{-t/\tau_ц} =$

$= -\dfrac{E}{r} \cdot e^{-t/\tau_ц} = -I_0 \cdot e^{-t/\tau_ц}$

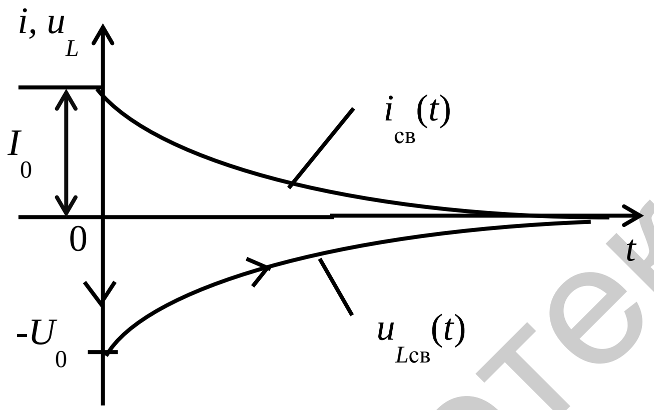
</td></tr>
</table>





$\tau_{ц1} > \tau_{ц2}$

$r \uparrow \quad \tau_ц \downarrow$



$$u_L + u_r = 0;$$

$$L\frac{di}{dt} + r \cdot i = 0;$$

$$Lp_1 + r = 0;$$

$$p_1 = -\frac{r}{L} = -\frac{1}{L/r} = -\frac{1}{\tau_ц};$$

$$\tau_ц = \frac{L}{r};$$

$$i_{LСВ}(t) = A_1 e^{p_1 t};$$

$$i_L(0-) = i_L(0+) = \frac{E}{r_i + r};$$

$$i_{LСВ}(0) = A_1 e^0;$$

$$\uparrow$$

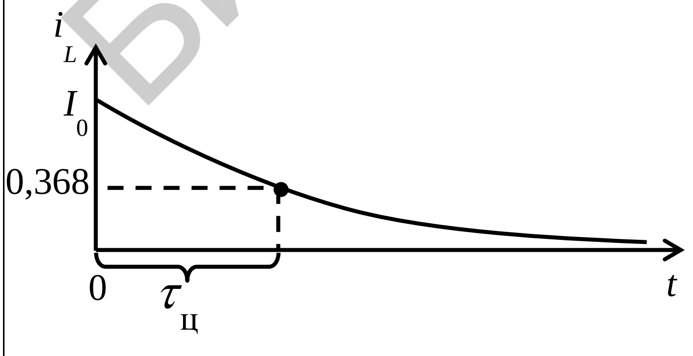
$$i_L(0+)$$

$$A_1 = \frac{E}{r_i + r};$$

$$i_{LСВ}(t) = \frac{E}{r_i + r} e^{-t/\tau_Ц}$$

$$U_{LСВ}(t) = L\frac{di}{dt} = \underbrace{\frac{E}{r_i + r}}_{I_0} \cdot \underbrace{L\left(-\frac{1}{\tau_Ц}\right)}_{U_0} \cdot e^{-t/\tau_Ц} = -I_0 \cdot r \cdot e^{-t/\tau_Ц} = -U_0 \cdot e^{-t/\tau_Ц}$$

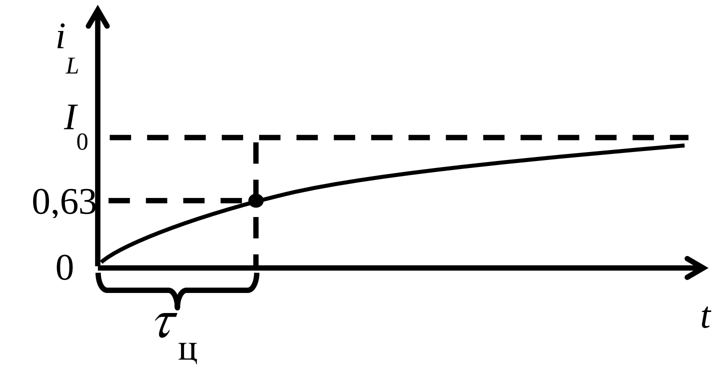
Постоянная времени цепи первого порядка



$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau_Ц}$$

при $t = \tau_ц$

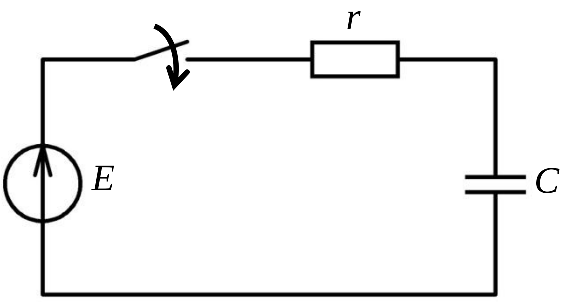
$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-1} = \frac{I_0}{e} \approx 0{,}368 I_0$$

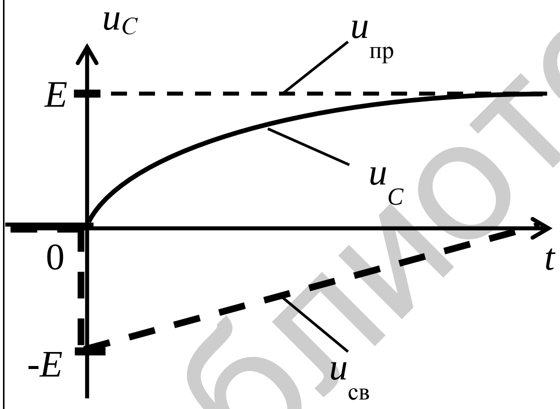


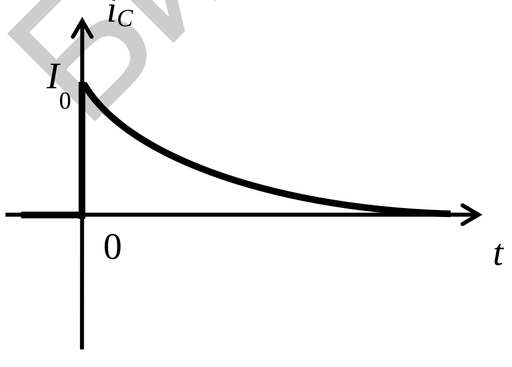
$$i_L(t)=I_0(1-e^{-t/\tau_ц})=$$
$$=I_0(1-0{,}368)\approx$$
$$\approx 0{,}63\ I_0.$$
$$t_{уст}\approx(3-5)\tau_ц$$

4.2.2. Переходные процессы в цепях первого порядка при подключении к источнику постоянного напряжения

Переходные процессы в *rC*-цепи



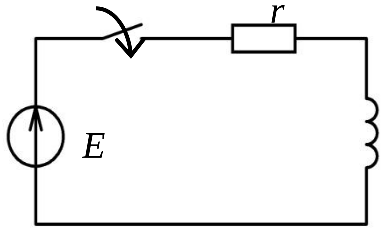


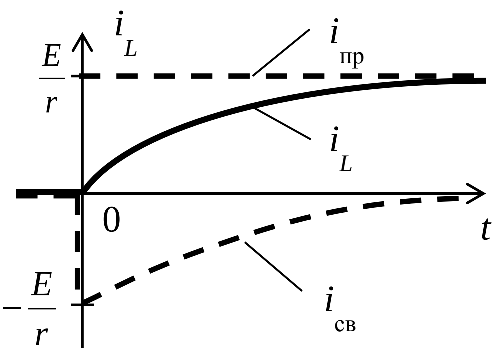


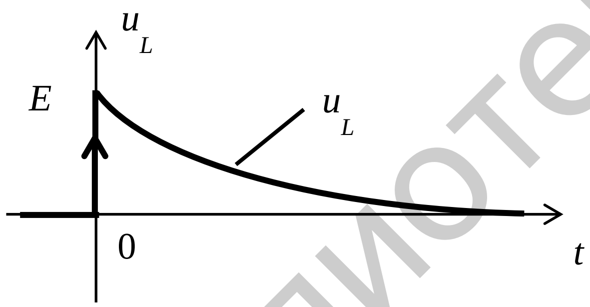
Решение: $u_r+u_C=E;$

$$i\cdot r+{}_C=E;$$
$$rC\frac{du_C}{dt}+u_C=E;$$
$$u_C=u_{св}+u_{пр};$$
$$u_{пр}\Big|_{t\to\infty}=E;$$
$$u_{св}=A_1\cdot e^{p_1t};$$
$$u_C(0+)=u_C(0-)=0;$$
$$\overbrace{u_{св}(0)+u_{пр}}=0;$$
$$\uparrow\qquad\uparrow$$
$$A_1\cdot e^0\qquad E$$
$$A_1+E=0;$$
$$A_1=-E;$$
$$u_C=E-E\cdot e^{-1/\tau_ц};$$
$$u_C=E(1-e^{-1/\tau_ц});$$
$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=CE\frac{d(1-e^{-t/\tau_Ц})}{dt}=$$
$$=-EC\left(-\frac{1}{\underset{rC}{\tau_Ц}}\right)\cdot e^{-t/\tau_Ц}=\underset{I_0}{\frac{E}{r}}e^{-t/\tau_Ц}$$
$$i_c(t)=I_0e^{-t/\tau_ц}$$

Переходные процессы в *rL*-цепях







$$u_L + u_r = E;$$

$$L\frac{di}{dt} + r \cdot i = E.$$

Решение: $i(t) = i_{св}(t) + i_{пр}(t);$

$$i_{пр}(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{E}{r};$$

$$i_{св}(t) = A_1 \cdot e^{-t/\tau_{ц}};$$

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 0;$$

$$\overbrace{i_{св}(0) + i_{пр}}$$

$$A_1 \cdot e^0 + \frac{E}{r} = 0;$$

$$A_1 = -E/r;$$

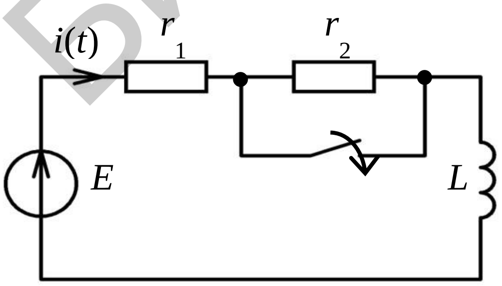
$$i_L(t) = \frac{E}{r} - \frac{E}{r}e^{-t/\tau_{ц}} =$$

$$= \frac{E}{r}(1 - e^{-t/\tau_{ц}}).$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{E}{r}\left(-\frac{1}{\tau_{ц}}\right)e^{-t/\tau_{ц}} =$$

$$= E \cdot e^{-t/\tau_{ц}}$$

4.2.3. Переходные процессы при скачкообразном изменении схемы цепи с источником постоянного напряжения

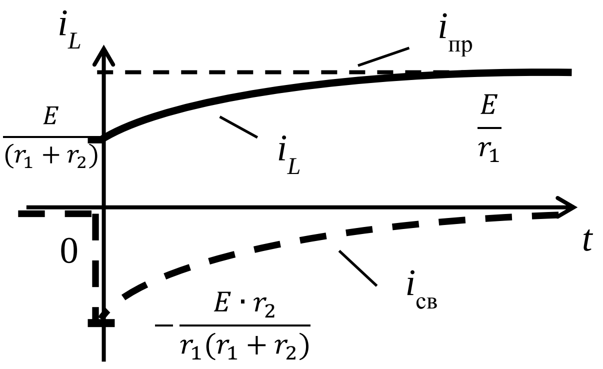


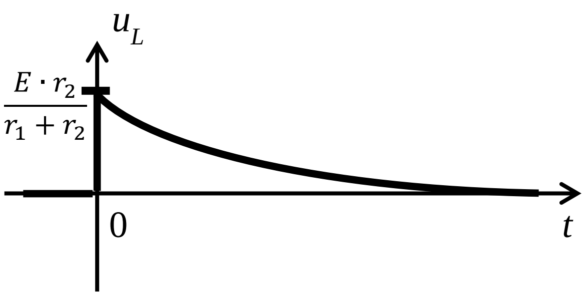
$$i|_{t(0-)} = \frac{E}{r_1 + r_2};$$

$$i|_{t(0+)} = \frac{E}{r_1} = i_{пр};$$

$$u_{r_1} + u_L = E;$$

$$r_1 \cdot i + L\frac{di}{dt} = E.$$





<u>Решение:</u> $i(t) = i_{св}(t) + i_{пр};$

$$i_{св}(t) = A_1 e^{-t/\tau_ц};$$

$$\tau_ц = \frac{L}{r_1};$$

$$i(t) = A_1 e^{-t/\tau_ц} + \frac{E}{r_1};$$

$$\begin{cases} i(0-) = \dfrac{E}{r_1+r_2}; \\ i(0+) = A_1\cdot e^0 + \dfrac{E}{r_1}; \end{cases}$$

$$i(0-) = i(0+)$$

$$\frac{E}{r_1+r_2} = A_1 + \frac{E}{r_1};$$

$$A_1 = -E\cdot\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)};$$

$$i = i_{св} + i_{пр};$$

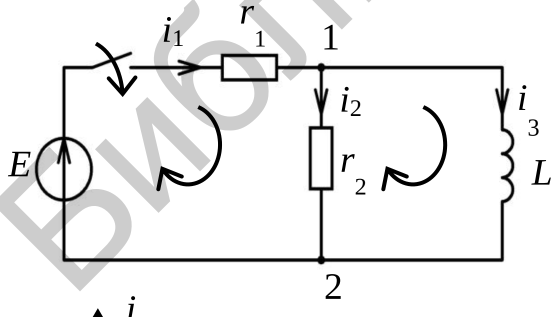
$$i(t) = -\frac{E\cdot r_2}{r_1(r_1+r_2)}\cdot e^{-t/\tau_ц} + \frac{E}{r_1} =$$

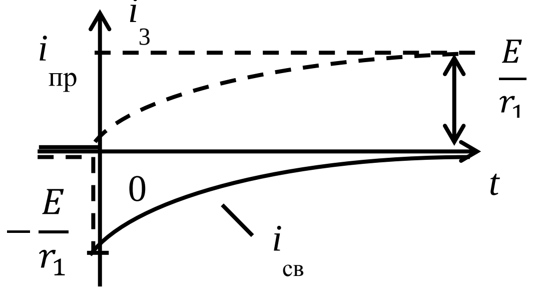
$$= \frac{E}{r_1}\left(1 - \frac{r_2}{r_1+r_2}\cdot e^{-t/\tau_ц}\right).$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = E\cdot\frac{L\cdot r_2}{r_1(r_1+r_2)}\cdot\frac{r_1}{L}\cdot e^{-t/\tau_ц} =$$

$$= E\cdot\frac{r_2}{r_1+r_2}\cdot e^{-t/\tau_ц}$$

4.2.4. Переходные процессы в разветвлённых цепях первого порядка при подключении к источнику постоянного напряжения



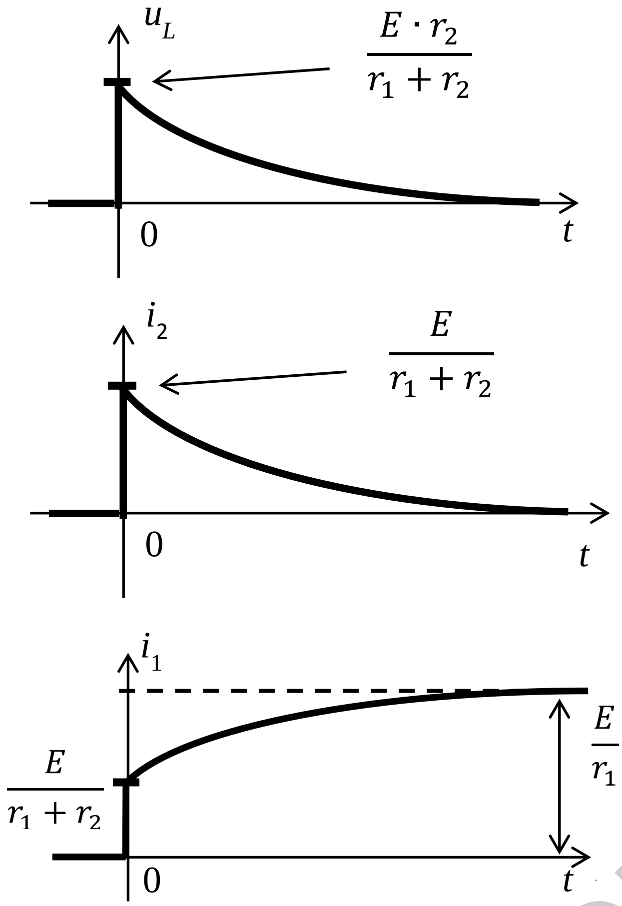


$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0; \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 = E; \\ L\dfrac{di_3}{dt} - r_2 i_2 = 0. \end{cases}$$

$$L\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{di_3}{dt} + r_1 i_3 = E.$$

<u>Решение:</u> $i_3 = i_{3св} + i_{3пр};$

$$i_{3пр}\Bigg|_{\substack{t\to\infty \\ L\to КЗ}} = \frac{E}{r_1};$$



$$i_{3\text{св}} = A_1\cdot e^{-t/\tau_\text{ц}};$$

$$i_3(0-) = i_3(0+) = 0;$$

$$\tau_\text{ц} = \frac{L}{\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}}; \qquad \frac{E}{r_1} + A_1\cdot e^0 = 0$$

$$\frac{E}{r_1} + A_1 = 0,\ A_1 = -\frac{E}{r_1};$$

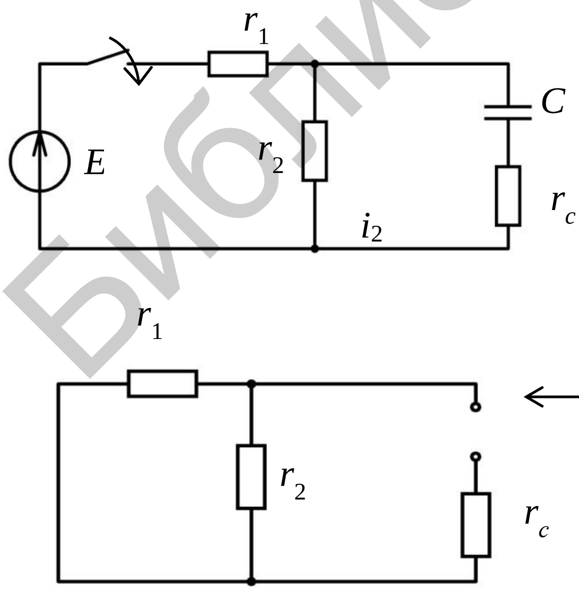
$$i_3(t) = \frac{E}{r_1} - \frac{E}{r_1}\cdot e^{-t/\tau_\text{ц}};$$

$$i_2 = \frac{u_L}{r_2} = \frac{E}{r_1+r_2}\cdot e^{-t/\tau_\text{ц}};$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{E}{r_1}\left(1 - \frac{r_2}{r_1+r_2}\cdot e^{-t/\tau_\text{ц}}\right);$$

$$u_L = L\frac{di_3}{dt} = E\cdot\frac{r_2}{r_1+r_2}\cdot e^{-t/\tau_\text{ц}}$$

4.2.5. Анализ переходных процессов в разветвлённых цепях первого порядка с источником постоянного напряжения без составления дифференциального уравнения



Пример 1. $u_C = ?$

Решение: $u_C = u_{C_\text{св}} + u_{C_\text{пр}}$;

$$u_{C_\text{пр}} = \frac{E}{r_1+r_2}\cdot r_2$$

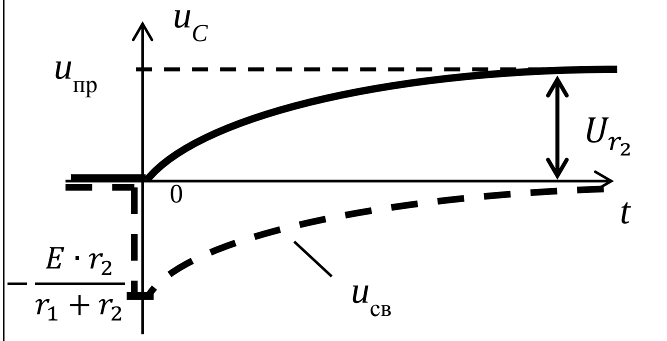
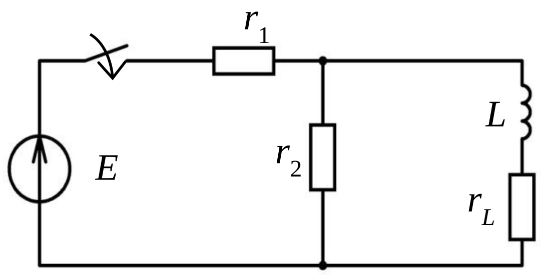
($C \to$ холостой ход)

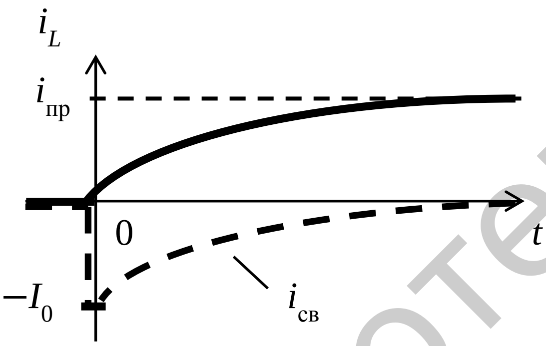
$$u_{C_\text{св}} = A_1\cdot e^{-t/\tau_\text{ц}}; \qquad \tau_\text{ц} = r_\text{экв}\cdot C;$$

$$r_\text{экв} = r_C + \frac{r_1\cdot r_2}{r_1+r_2};$$

$$u(0-) = u(0+) = 0;$$

$$A_1\cdot e^0 + \frac{E\cdot r_2}{r_1+r_2} = 0, \quad A_1 = -\frac{E\cdot r_2}{r_1+r_2},$$

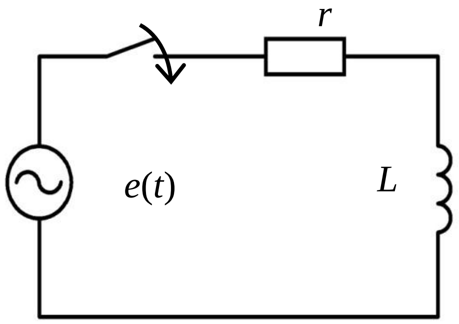
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$u_C = \frac{Er_2}{r_1+r_2}\left(1-e^{-t/\tau_ц}\right)$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">rL-цепь</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Пример 2. i_L – ?
Решение: $i = i_{св} + i_{пр}$;
$i_{пр}\Big|_{t\to\infty} = i_1\frac{r_2}{r_2+r_L}$
($L \to$ короткое замыкание);
$i_1 = \frac{E}{r_1+\frac{r_2\ r_L}{r_2+r_L}}$;
$i_{св} = A_1e^{-t/\tau_ц}$; $\tau_ц = \frac{L}{r_{экв}}$;
$r_{экв} = r_L + \frac{r_1+r_2}{r_1+r_2}$;
$i_L(0-) = i_L(0+) = 0$;
$i_{пр} + A_1\cdot e^0 = 0$; $A_1 = -i_{пр}$;
$i(t) = I_0\left(1-e^{-t/\tau_ц}\right)$
$i_{пр} = \frac{Er_2}{r_1r_2 + r_L(r_1+r_2)}$</td>
</tr>
</table>

Из полученного в примере 1 изменения напряжения $U_c(t)$ видно, что характер переходного процесса полностью определяется свободной составляющей, а принуждённая составляющая равна установившемуся значению выходной величины.

4.2.6. Переходные процессы в цепях первого порядка при подключении к источнику синусоидального напряжения

Переходные процессы в rL-цепи



$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$u_L + u_r = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$L\frac{di}{dt} + r \cdot i = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

<u>Решение:</u> $i = i_{св} + i_{пр};$

$$i_{пр} = \underbrace{\frac{E_m}{\sqrt{r_2 + (\omega L)^2}}}_{I_m} \cdot \sin(\omega t + \psi_e - \varphi);$$

$$\psi_i = \psi_u - \pi/2$$

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0;$$

$$A_1 e^0 + I_m \sin(\psi_e - \varphi) = 0;$$

$$A_1 = -I_m \sin(\psi_e - \varphi);$$

$$i(t) = i_{св} + i_{пр} =$$

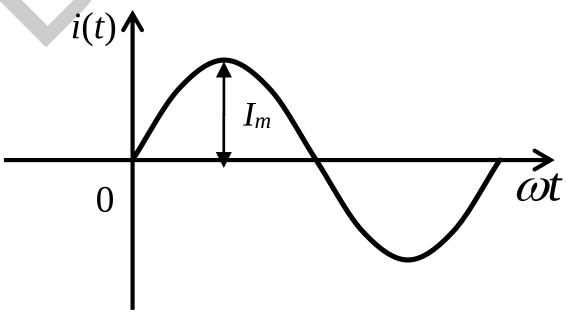
$$= -I_m \sin(\psi_e - \varphi) e^{-t/\tau_ц} +$$

$$+ I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) =$$

$$= I_m \left[\sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - \sin(\psi_e - \varphi) e^{-t/\tau_ц} \right]$$

<u>Три случая:</u> $1)\ \psi_e - \varphi = 0;\quad 2)\ \psi_e - \varphi = \pi/2;\quad 3)\ \psi_e - \varphi = -\pi/2$

$1)\ \psi_e - \varphi = 0$



$$i = i_{св} + i_{пр} = I_m \sin \omega t$$

$$i = i_{св} + i_{пр} = I_m \sin \omega t$$

↘

0

$$\psi_e - \varphi = 0$$

2) $\psi_e - \varphi = \pi/2$;

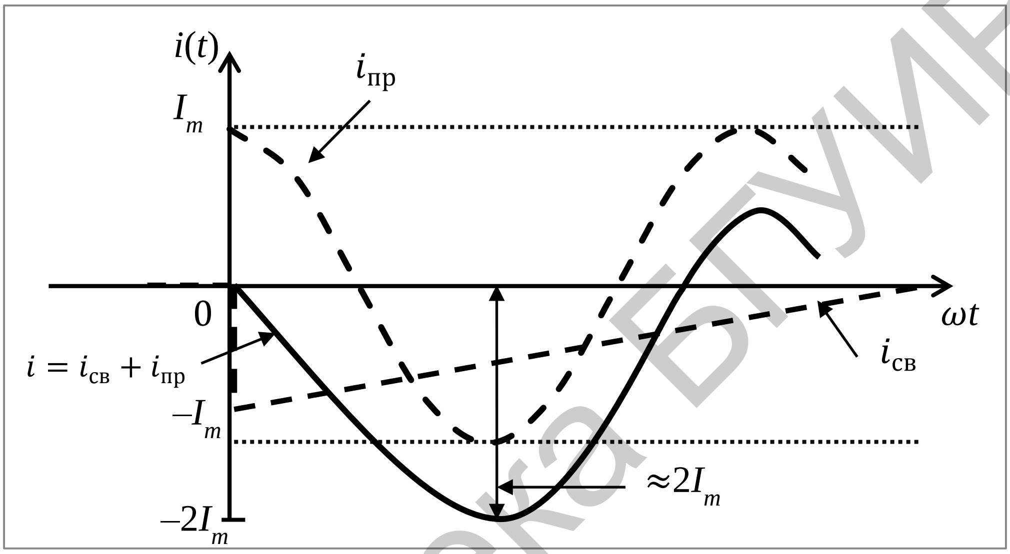
$i = i_{\text{св}} + i_{\text{пр}}$;

$$i_{\text{св}} = -I_m \sin\frac{\pi}{2} \cdot e^{-t/\tau_{\text{Ц}}} = -I_m \cdot e^{-t/\tau_{\text{Ц}}};$$

$$i_{\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \cos\omega t;$$

$$i(t) = I_m \cos\omega t - I_m \cdot e^{-t/\tau_{\text{Ц}}}$$

$$\psi_e - \varphi = \pi/2$$



$$\text{При } t = T/2 \quad i(t) = Im\left[\underbrace{\cos\left(\overbrace{\frac{2\pi}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}}^{\pi}\right)}_{-1} - \underbrace{e^{-t/\tau_{\text{ц}}}}_{\approx 1}\right] \approx -2I_m$$

при $t = T/2$

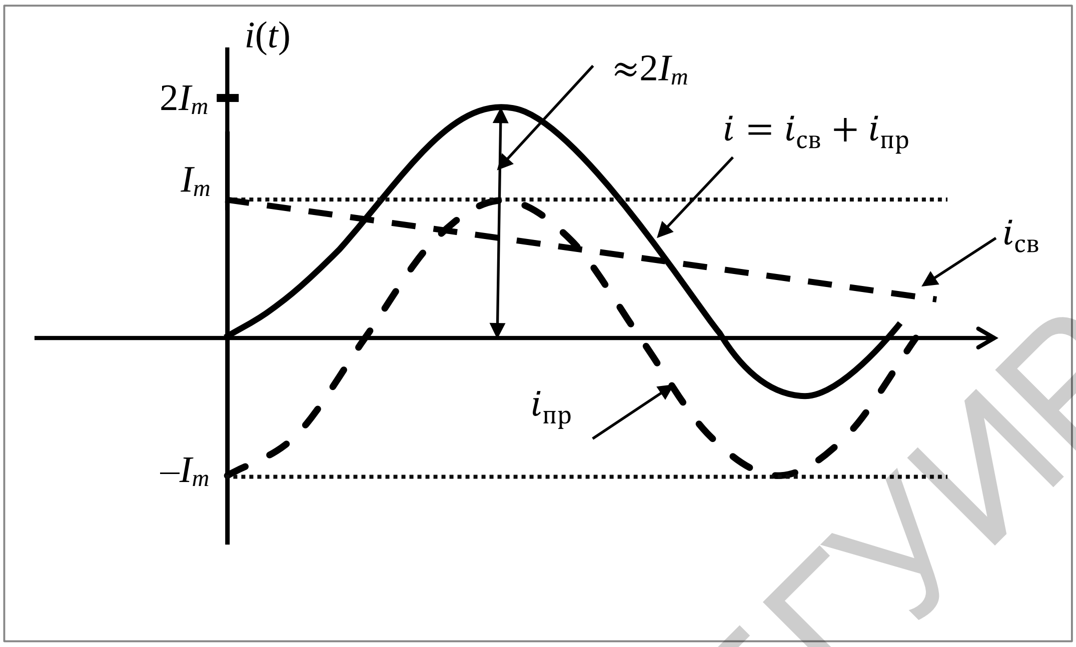
и $\tau_{\text{ц}} \gg T$

3) $\psi_e - \varphi = -\pi/2$;

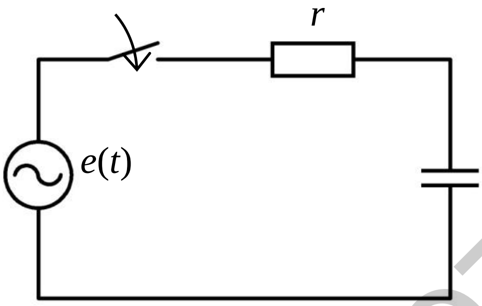
$$i = i_{\text{св}} + i_{\text{пр}} = \quad I_m\left[\underbrace{\sin(\omega t - \pi/2)}_{-\cos\omega t} - \underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1} \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}}\right] =$$

$$= -I_m \cos\omega t + I_m \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}}$$

$\psi_e - \varphi = -\pi/2$



Переходные процессы в *rC*-цепи



$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$

$u_r + u_c = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$

$rC\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$

Решение:

$u = u_{св} + u_{пр};$

$u_{пр} = U_m \sin\left[\omega t + \psi_e - (\varphi + \pi/2)\right];$

$\dfrac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{\omega C}$ $\qquad \psi_u = \psi_i - \pi/2$

$u_c(0-) = u_c(0+) = 0;$

$A_1 \cdot e^0 + U_m \sin\left[\psi_e - \varphi - \pi/2\right] = 0;$

$A_1 = -U_m \sin\left[\psi_e - \varphi - \pi/2\right];$

$$u(t) = \underbrace{U_m \sin[\omega t + \psi_e - \varphi - \pi/2]}_{u_{пр}} - \underbrace{U_m \sin[\psi_e - \varphi - \pi/2] \cdot e^{-t/\tau_ц}}_{u_{св}}$$

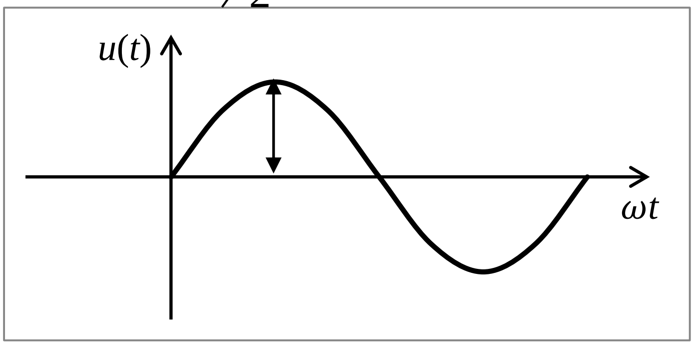
Три случая:

1) $\psi_e - \varphi = \pi/2$;

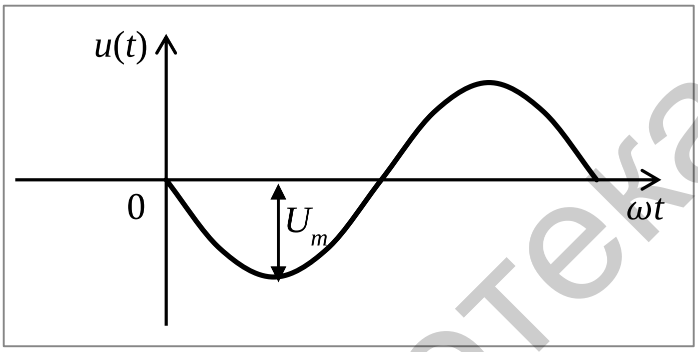
2) $\psi_e - \varphi = -\pi/2$;

3) $\psi_e - \varphi = 0$

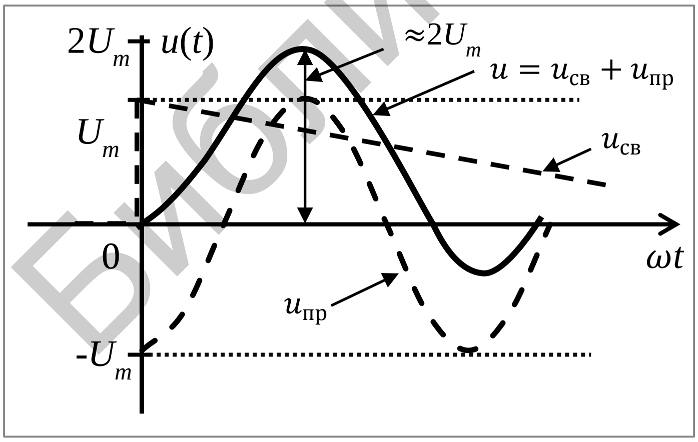
1) $\psi_e - \varphi = \pi/2$



2) $\psi_e - \varphi = -\pi/2$



3) $\psi_e - \varphi = 0$



1) $\psi_e - \varphi = \pi/2$;

$$u = \underset{\searrow 0}{u_{св}} + u_{пр} = U_m \sin \omega t;$$

$$\psi_e - \varphi = \pi/2;$$

2) $\psi_e - \varphi = -\pi/2$;

$$u = \underset{\searrow 0}{u_{св}} + u_{пр} = -U_m \sin \omega t;$$

3) $\psi_e - \varphi = 0$;

$$u(t) = u_{пр} + u_{св} =$$

$$= U_m \sin\left[\omega t - \pi/2\right] -$$

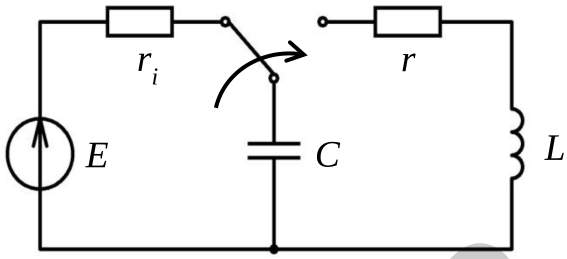
$$-U_m \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \cdot e^{-t/\tau_ц} =$$

$$= -U_m \cos \omega t + U_m \cdot e^{-t/\tau_ц}$$

4.3. Переходные процессы в цепях второго порядка

4.3.1. Свободные процессы в цепях второго порядка с источником постоянного напряжения

$$X_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$
$$X_{\text{св}}(0+) = A_1 + A_2;$$
$$X'_{\text{св}}(0+) = A_1 p_1 + A_2 p_2.$$



Найти: p_1 и p_2,
A_1 и A_2.

Решение: $u_L + u_r + u_C = 0;$

$$L\frac{di}{dt} + i \cdot r + u_C = 0;$$

$$LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Разделим на LC:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \underbrace{\frac{r}{L}}_{2\delta}\frac{du_C}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}u_C = 0,$$

так как $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0.$$

Найдем p_1 и p_2 из характеристического уравнения:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0;$$
$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0;$$
$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$
$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$
$$p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$

1) $|p_2| > |p_1|;$

2) $p_1 \cdot p_2 = (-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}) = \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC};$

3) если $\delta > \omega$, то

$\dfrac{r}{2L} > \dfrac{1}{\sqrt{LC}};\ r > \dfrac{2L}{\sqrt{LC}};\ r > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}},$ так как $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, то $r > 2\rho$

Три случая:

1) $\delta > \omega_0$ или $r > 2\rho$

(корни вещественные, отрицательные, разные);

2) $\delta = \omega_0$ или $r = 2\rho$

(корни вещественные, отрицательные и равные $p_1 = p_2 = -\delta$);

3) $\delta < \omega_0$ или $r < 2\rho$

(корни комплексно-сопряжённые)

$$p_1 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$p_2 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Найдём A_1 и A_2: $X_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$;

$u(0+) = u(0-) = E.$

Тогда $u(0+) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = E$;

$A_1 + A_2 = E \longrightarrow$ 1-е уравнение;

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\underbrace{(p_1 A_1 + p_2 A_2)}_{=0} = 0;$$

$C \neq 0$

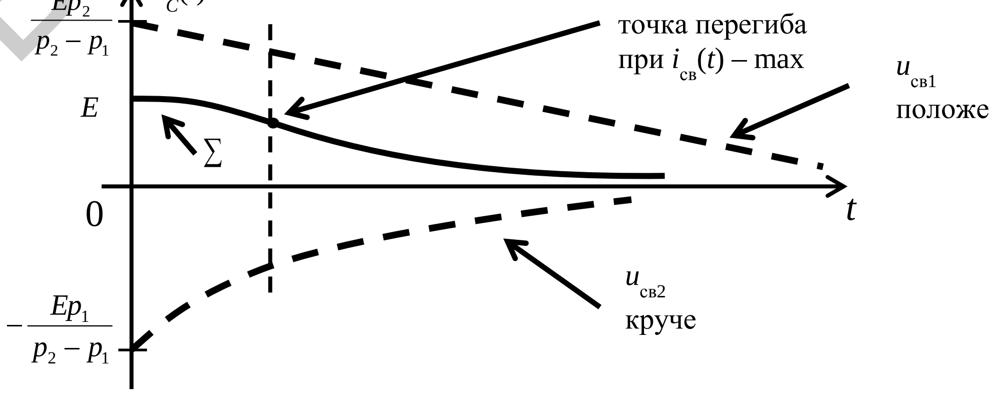
$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0 \longrightarrow$ 2-е уравнение.

<u>Система:</u> $\begin{cases} A_1 + A_2 = E; \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0. \end{cases}$

<u>Решение:</u> $A_1 = \dfrac{p_2 E}{p_2 - p_1}, \; A_2 = -\dfrac{p_1 E}{p_2 - p_1}.$

<u>Тогда:</u> $$u_{Cсв}(t) = \underbrace{\frac{p_2 E}{p_2 - p_1} e^{p_1 t}}_{u_{C\,св1}} - \underbrace{\frac{p_1 E}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}}_{u_{C\,св2}};$$

1) корни p_1 и p_2 – вещественные, отрицательные, разные:



$$i_{\text{св}}(t) = C\frac{du_C}{dt} =$$

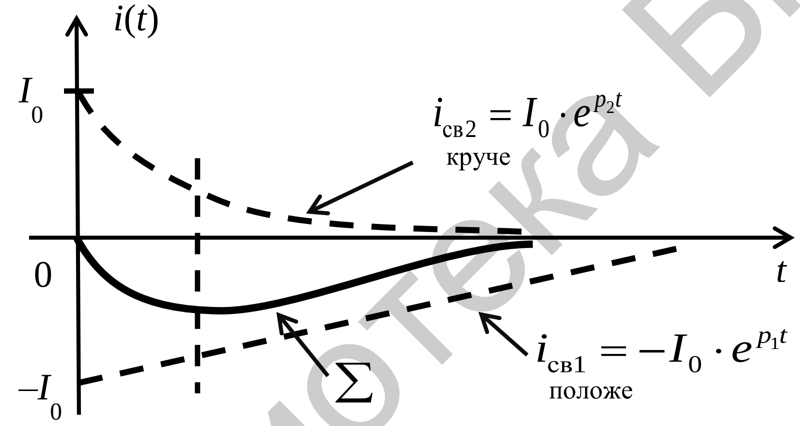
$$= C\frac{E}{p_1 - p_2}(p_1 p_2 e^{p_1 t} - p_1 p_2 e^{p_2 t}) =$$

$$= C\frac{E p_1 p_2}{p_1 - p_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

но $\quad p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC},$

тогда $\quad i_{\text{св}}(t) = \underbrace{\frac{E}{L(p_2 - p_1)}}_{I_0} \cdot (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$

$$i_{\text{св}}(t) = \underbrace{I_0 e^{p_1 t}}_{-i_{\text{св}1}} - \underbrace{I_0 e^{p_2 t}}_{i_{\text{св}2}}$$

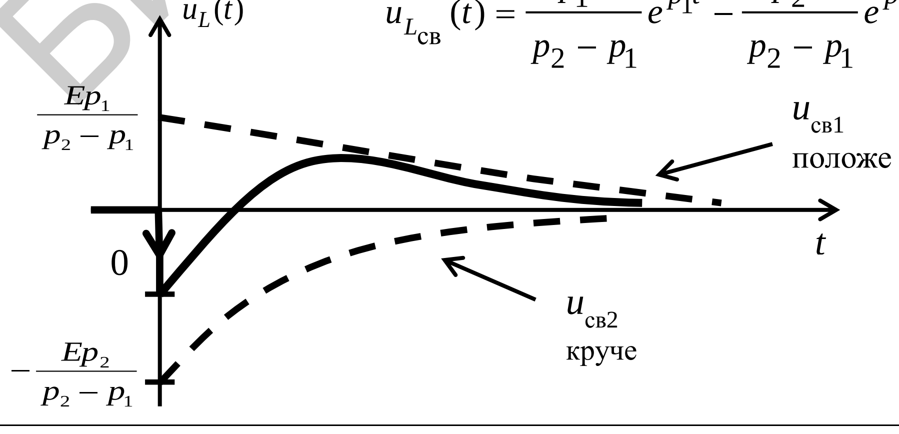


$$|p_2| > |p_1|$$

$$u_{L_{\text{св}}}(t) = L\frac{di}{dt} =$$

$$= \frac{E}{p_2 - p_1}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}),$$

$$u_{L_{\text{св}}}(t) = \frac{p_1 E}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{p_2 E}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}.$$



$$|p_2| > |p_1|$$

2) корни p_1 и p_2 – комплексно-сопряжённые:

т. е. $\delta < \omega_0$ или $r < 2\rho$:

$$p_1 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$p_2 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2};$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}$$

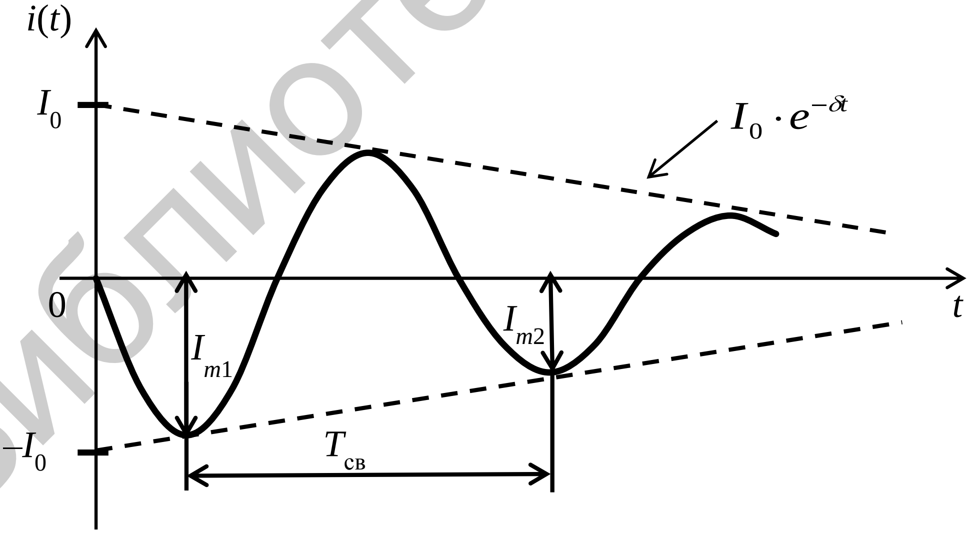
$$i_{\text{св}} = \frac{E}{L\cdot(p_2 - p_1)}\left(e^{p_1 t} - e^{-p_2 t}\right) = \frac{-E\cdot e^{-\delta\cdot t}}{L\cdot\omega_{\text{св}}\cdot 2j}\left(e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}\right) =$$

$$= \frac{-E\cdot e^{-\delta\cdot t}}{\omega_{\text{св}}\cdot L}\cdot\frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2j}.$$

$$\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = \sin\alpha;$$

$$i_{\text{св}}(t) = -\frac{E}{\underbrace{\omega_{\text{св}}\cdot L}_{-I_0}}\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin\omega_{\text{св}}t;$$

$$i_{\text{св}}(t) = -I_0\cdot e^{-\delta t}\cdot\sin\omega_{\text{св}}t.$$



$$\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} =$$

$$= \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

$$\Delta = \frac{I_{m_1}}{I_{m_2}} = \frac{I_0 e^{-\delta \cdot t_1}}{I_0 e^{-\delta(t_1 + T_{\text{св}})}};$$

$$\Delta = e^{\delta T_{\text{СВ}}}, \ln \Delta = \delta T_{\text{СВ}}, \upsilon = \delta T_{\text{СВ}}.$$

Так как $I_m(t) = I_0 e^{-\delta t}$,

то $\tau_{\text{ц}} = \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{2L}{r}$,

$$t_{\text{уст. св}} = k \cdot \frac{1}{\delta} = k \cdot \tau_{\text{ц}},$$

$$u_L(t) = -\frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} \cdot E \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_{\text{св}} t - \theta),$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega_{\text{св}}} \qquad u_C(t) = \frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} \cdot E \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_{\text{св}} t - \theta);$$

3) корни p_1 и p_2 – вещественные, равные:

т. е. $\delta = \omega_0$ или $r = 2\rho$:

$$p_1 = p_2 = -\delta;$$

$$\omega_{\text{СВ}} = \sqrt{{\omega_0}^2 - {\delta_0}^2} = 0;$$

$$i_{\text{св}} = \frac{E}{\cancel{\omega_{\text{св}}} \cdot L} \cdot e^{-\delta t} \cdot \underbrace{\sin \omega_{\text{св}} t}_{\cancel{\omega_{\text{св}}}} =$$

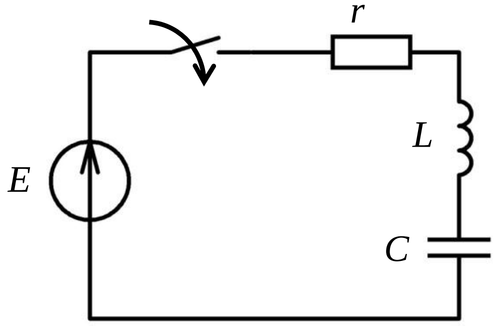
$$= -\frac{E}{L} \cdot e^{-\delta t} t;$$

$$u_{L_{\text{св}}} = L \frac{di}{dt} = L \frac{d\left[-\frac{E}{L} \cdot e^{-\delta t} \cdot t\right]}{dt} = E\left(\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot t - e^{-\delta t}\right) = E \cdot e^{-\delta t}(\delta t - 1),$$

$$u_r + u_L + u_C = 0, \qquad \delta = r/(2L),$$

$$u_{C\text{ св}} = -u_r - u_L = -i \cdot r - E \cdot e^{-\delta t}(\delta t - 1) = E \cdot e^{-\delta t}(1 + \delta t)$$

4.3.2. Свободная и принуждённая составляющие в цепях второго порядка с источником постоянного и синусоидального напряжения



$$u_L + u_r + u_C = E;$$

$$L\frac{di}{dt} + i \cdot r + u_C = E;$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + rL\frac{du_C}{dt} + u_C = E;$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\delta\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E;$$

$$u_C(t) = u_{C\,\text{св}} + u_{C\,\text{пр}};$$

$$u_{C\,\text{св}} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t};$$

$$u_C = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + E;$$

$$u_C(0-) = u_C(0+);$$

$$0 = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 + E;$$

$$A_1 + A_2 = -E;$$

$$i(0) = 0;$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d\left[A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\right]}{dt};$$

$$C\underbrace{\left[A_1 p_1 + A_2 p_2\right]}_{=0} = 0;$$

$$C \neq 0$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= -E; \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad A_1 = -\frac{p_2 E}{p_2 - p_1}, \qquad A_2 = \frac{p_1 E}{p_2 - p_1};$$

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t}\right);$$

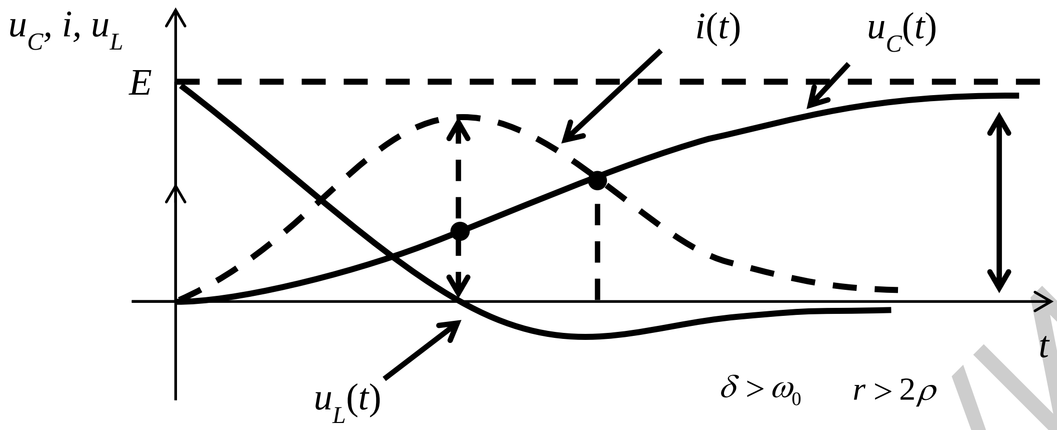
$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{L(p_2 - p_1)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right);$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{E}{p_2 - p_1}\left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}\right)$$

Три случая:

1) корни p_1 и p_2 – вещественные, отрицательные, разные,

т. е. $\delta > \omega_0$ или $r > 2\rho$:



2) корни p_1 и p_2 – вещественные, равные,

т. е. $\delta = \omega_0$ или $r = 2\rho$:

$$u_C(t) = E\left[1 - e^{-\delta \cdot t}(1 + \delta \cdot t)\right];$$

$$u_L(t) = E\left[1 + e^{-\delta \cdot t}(1 + \delta \cdot t)\right];$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\delta \cdot t};$$

3) корни p_1 и p_2 – комплексно-сопряжённые,

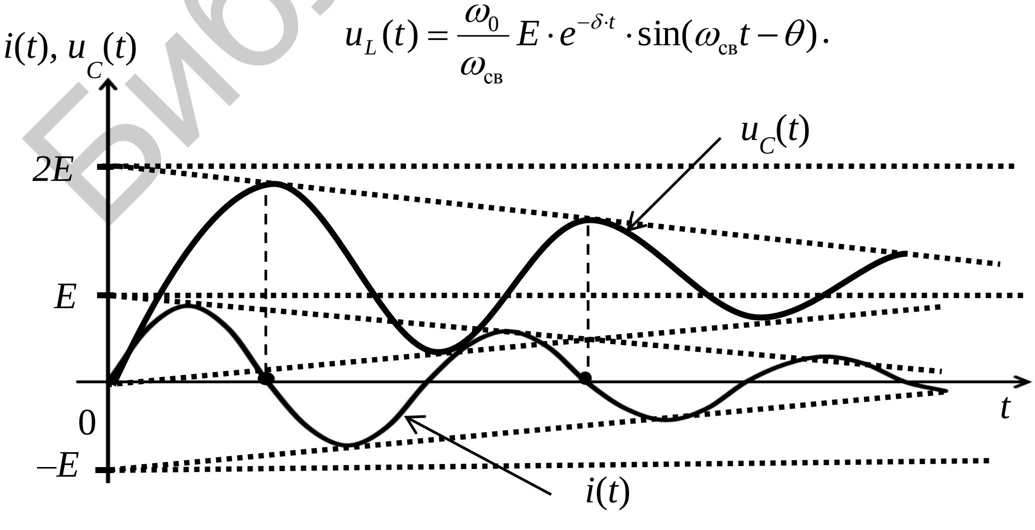
т. е. $\delta < \omega_0$ или $r < 2\rho$:

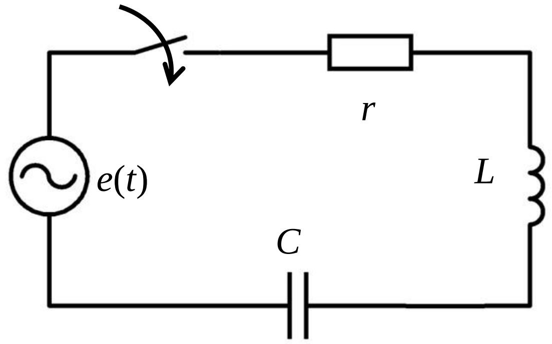
$$u_C(t) = E\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_{\text{св}} t - \theta)\right];$$

$$\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \qquad \cos\theta = \frac{\omega_{\text{св}}}{\omega_0};$$

$$i(t) = \frac{E}{\omega_{\text{св}} L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_{\text{св}} t;$$

$$u_L(t) = \frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} E \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_{\text{св}} t - \theta).$$





$$u_L + u_r + u_C = e(t);$$

$$u_L + u_r + u_C = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C =$$

$$= \omega_0^2 E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

<u>Решение:</u> $u_c(t) = u_{c\,\text{св}}(t) + u_{c\,\text{пр}}(t).$

Корни p_1 и p_2 – комплексно-сопряжённые,

т. е. $\delta < \omega_0$ или $r < 2\rho$:

$$u_c(t) = u_{c\,\text{св}}(t) + u_{c\,\text{пр}}(t);$$

$$u_C(t) = u_{C\,\text{св}}(t) + u_{C\,\text{пр}}(t) = u_{mC} \sin(\omega t + \psi_C) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta);$$

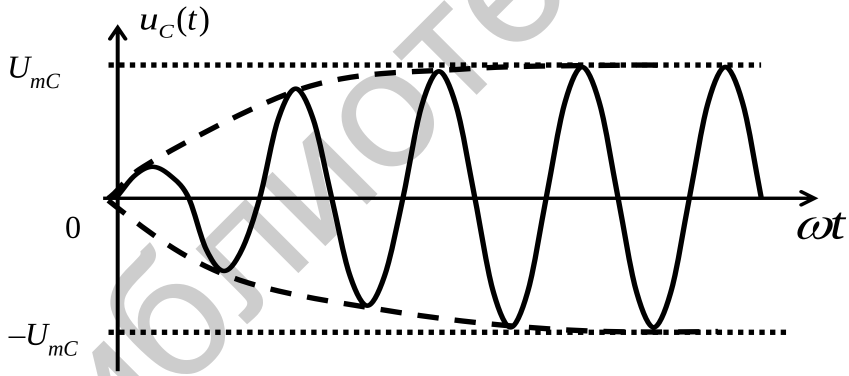
$$\psi_C = \psi_e - \psi - \frac{\pi}{2}.$$

При $\omega \approx \omega_{\text{св}} \approx \omega_0$ $\delta \ll \omega_0$

При нулевых начальных условиях $A = -U_{m_C}$, $\psi_C = \theta$

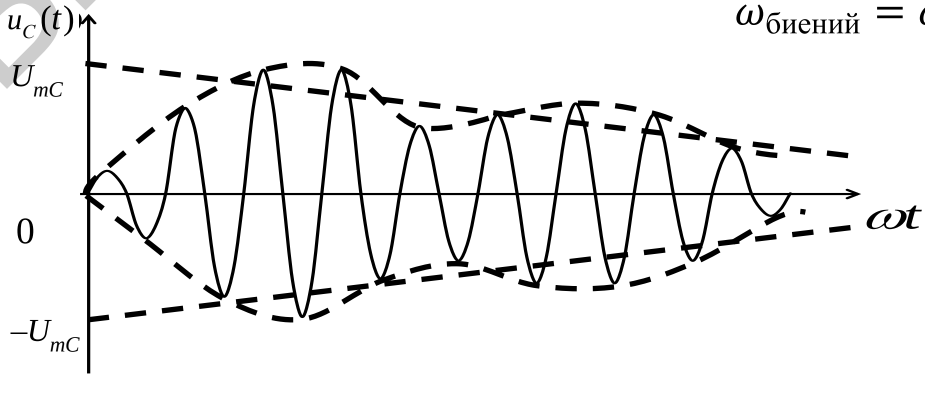
$$u_C(t) = u_{m_C}(1 - e^{-\delta t}) \cdot \sin(\omega t + \psi_C).$$

1. ИЗОХРОНИЗМ при $\omega = \omega_{\text{св}} = \omega_0$



2. БИЕНИЯ (при $\omega \neq \omega_{\text{св}}$) $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, при малом $\Delta\omega$

$$\omega_{\text{биений}} = \omega - \omega_{\text{св}}.$$



$$\delta = \frac{r}{2L} = \frac{r}{2L}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{r\cdot\omega_0}{2\rho} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\rho \qquad \frac{1}{Q}$$

$$Q\uparrow \quad \delta\downarrow$$

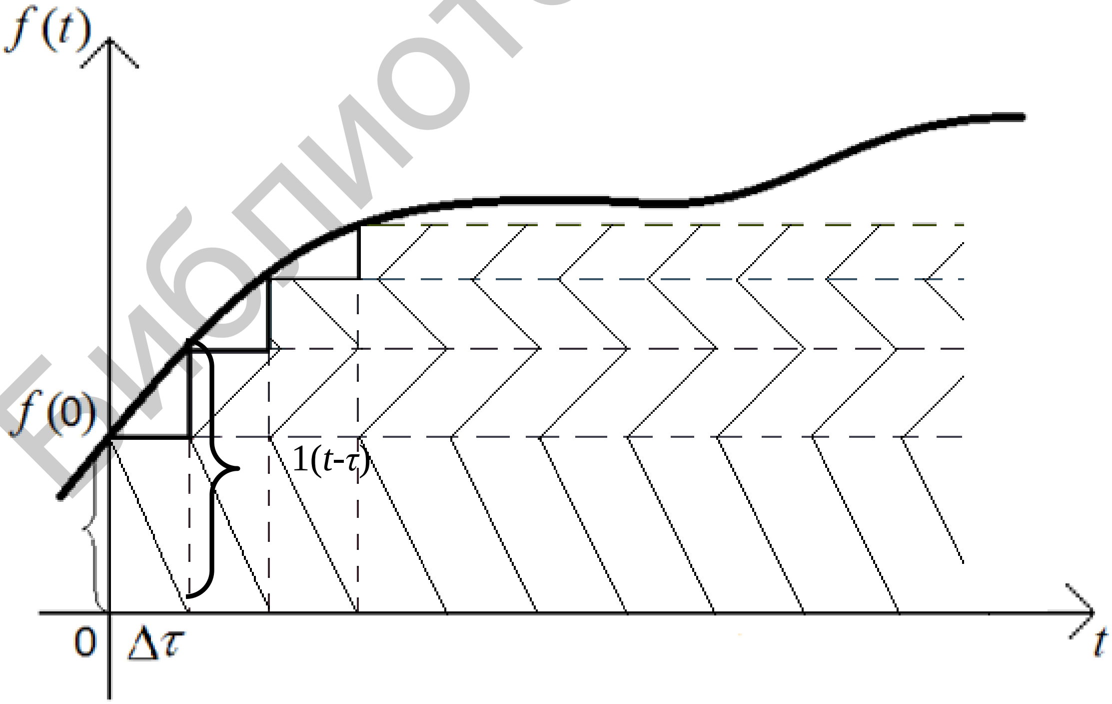
$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q}$$

4.4. Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях методом наложения

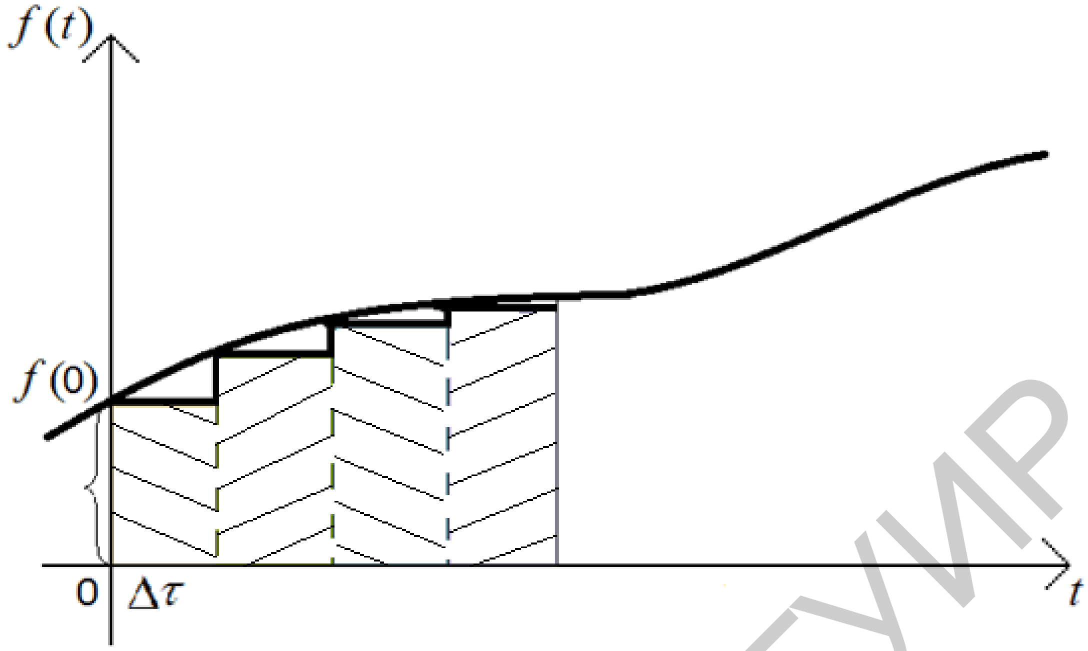
4.4.1. Типовые функции воздействия

Принцип наложения: реакция линейной цепи на сумму входных воздействий равна сумме её реакций на каждое из воздействий в отдельности.

Входное воздействие $f(t)$ можно представить совокупностью стандартных типовых сигналов, например единичных ступенчатых функций $1(t)$ или дельта-функций $\delta(t)$.

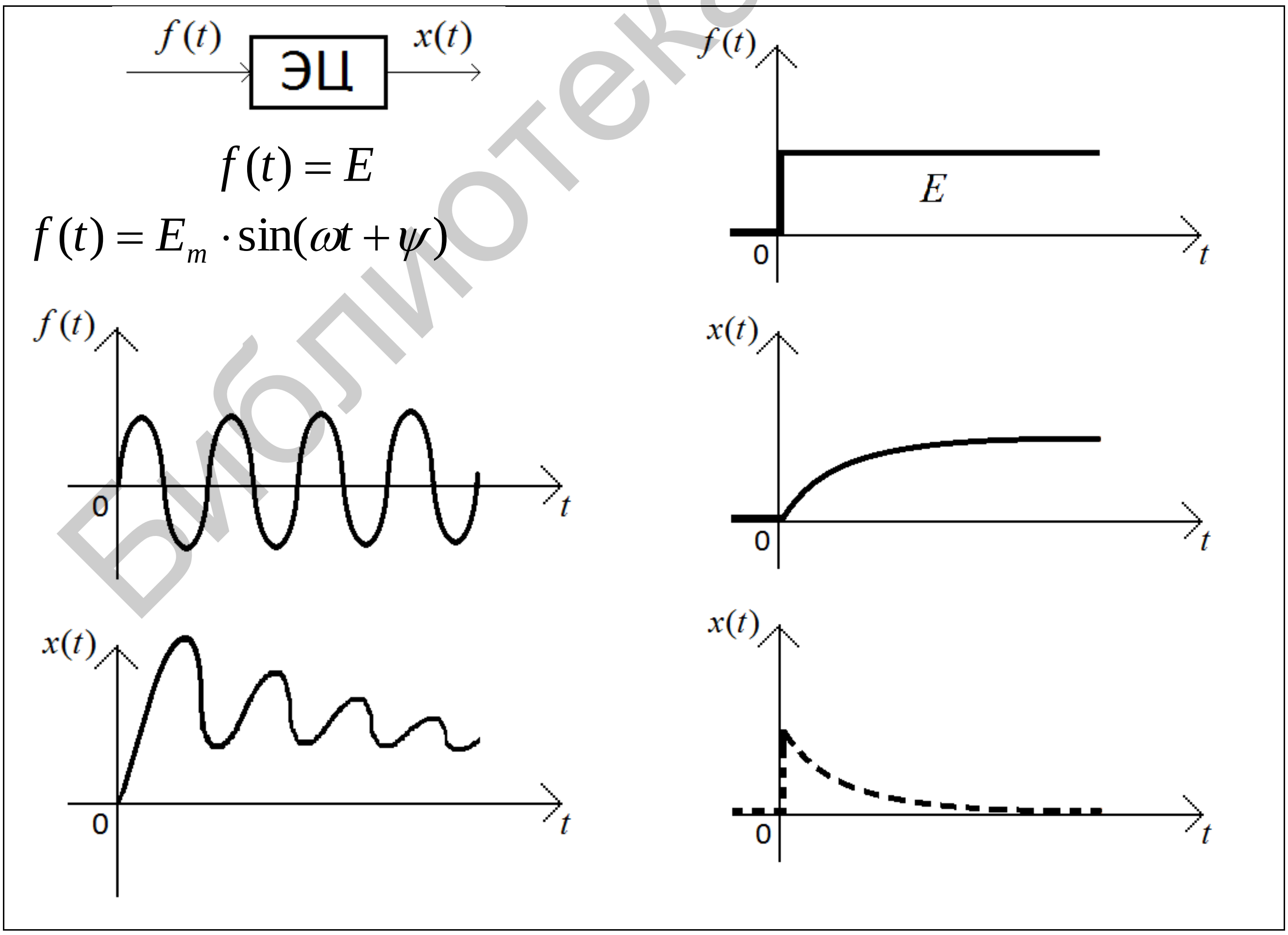


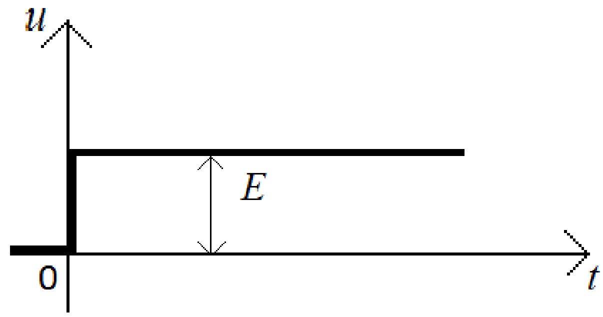
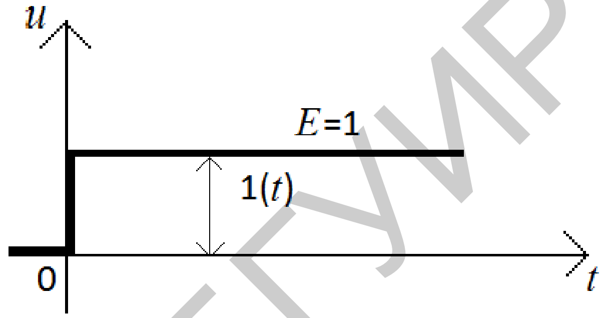
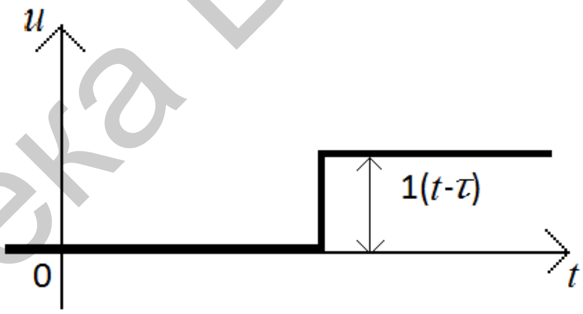
$1(t\text{-}\tau)$ – единичная функция включения



$\delta(t)$-функция, или функция Дирака

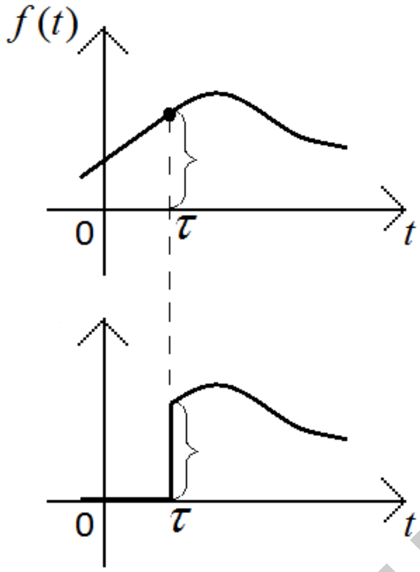
Вид реакции цепи $x(t)$ как сумма (наложение) реакций цепи на каждое типовое воздействие зависит от схемы цепи и её параметров и представляется в виде временных характеристик (переходных $h(t)$ или импульсных $k(t)$).



Единичная функция воздействия (функция Хевисайда)	
$$u(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ E, t\geq 0.\end{cases}$$	
$$1(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ 1, t\geq 0.\end{cases}$$	
$$1(t-\tau)=\begin{cases}0, t<\tau;\\ 1, t\geq \tau.\end{cases}$$	
	В теории электрических цепей единичная ступенчатая функция воздействия соответствует, например, подключению постоянного напряжения на вход устройства при замыкании ключа.

Свойство единичной функции

Формирующее свойство единичной функции: при умножении непрерывной функции на единичную результирующая функция будет разрывной.

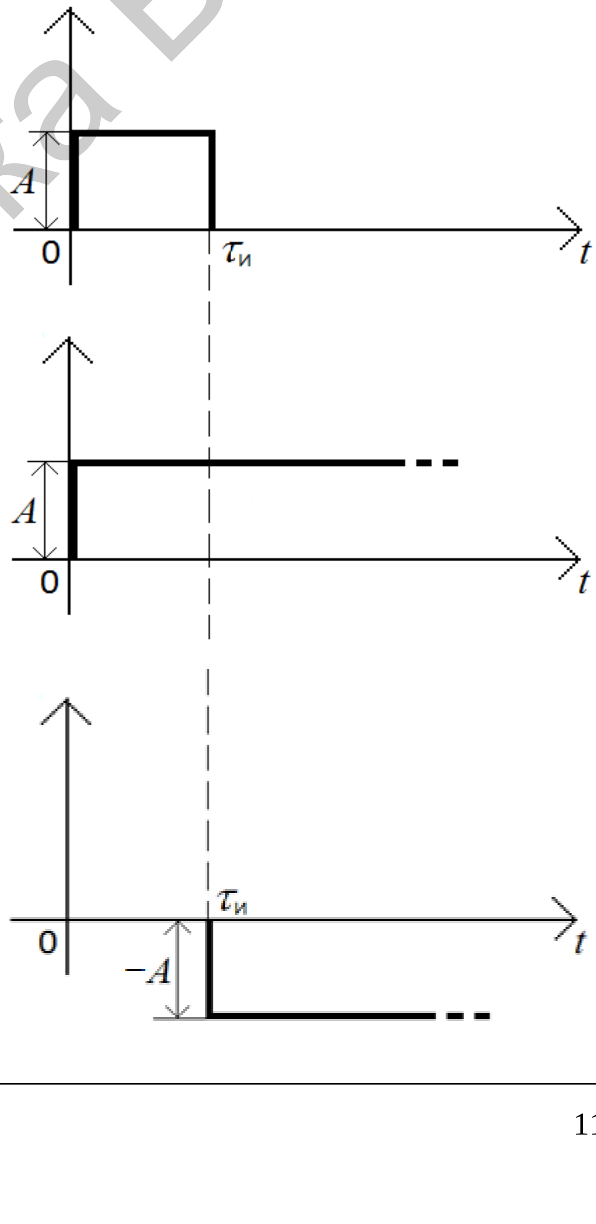


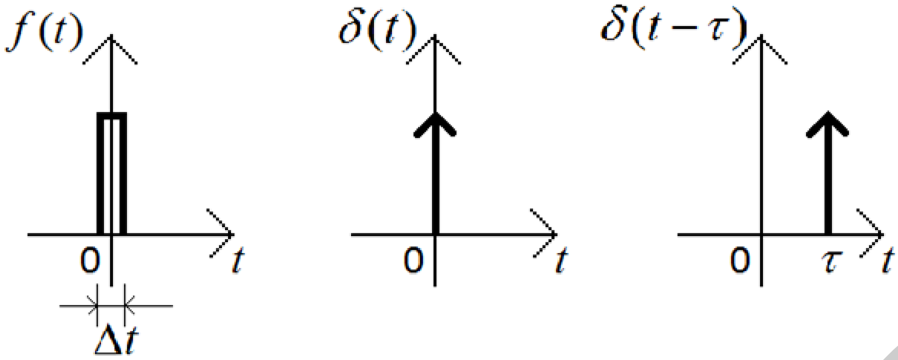
Представление прямоугольного импульса с помощью единичной функции

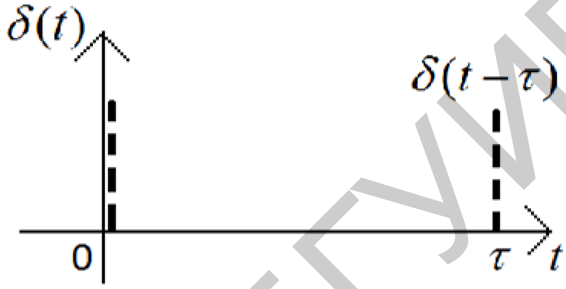
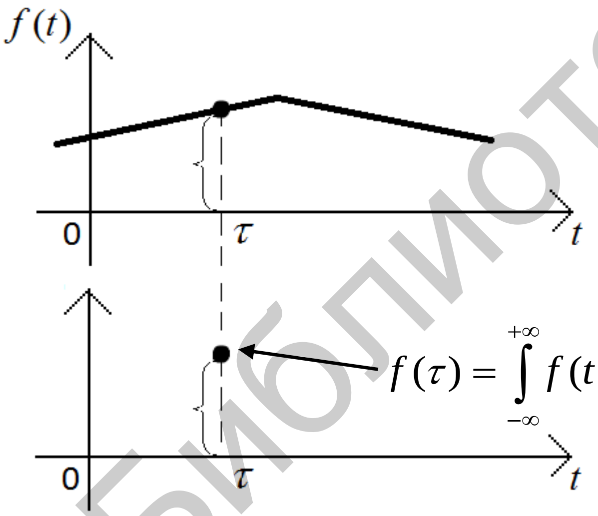
$$f(t) = f_1 \cdot 1(t) + f_2 \cdot 1(t-\tau)$$

$$f_1(t) \cdot 1(t) = A \cdot 1(t)$$

$$f_2(t) \cdot 1(t-\tau) = -A \cdot 1(t-\tau)$$



<table>
<tr><td colspan="2">Дельта-функция (функция Дирака)</td></tr>
<tr><td colspan="2">

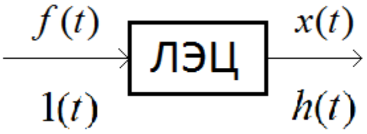
$S = U_m \cdot \Delta t = 1$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства дельта-функции</td></tr>
<tr><td>Дельта-функция есть первая производная от единичной функции при нулевых начальных условиях</td><td>$\delta(t) = 1'(t)$,
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$, $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = 1(t)$</td></tr>
<tr><td>

$f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-\tau)d\tau$</td><td>Дельта-функция выделяет (отфильтровывает) значение функции в заданный момент времени</td></tr>
</table>

Дельта-функция моделирует такие быстро протекающие процессы, как броски ЭДС самоиндукции, короткое замыкание и разрыв в электрической цепи, воздействие кратковременных импульсов.

4.4.2. Временные характеристики электрических цепей

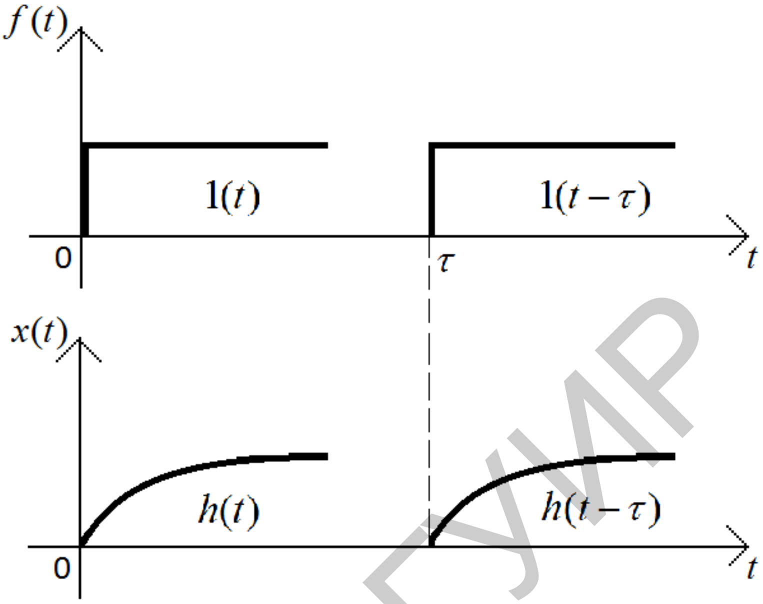
Переходная характеристика



Переходная характеристика электрической цепи – это отклик (реакция) цепи на единичную функцию при нулевых начальных условиях

$$x(t) = h(t)\cdot 1(t),$$

$$x(t-\tau) = h(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$$

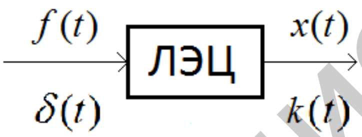


Физический смысл переходной характеристики

Если $f(t) = u(t)$, то $x(t) = \begin{cases} u, K_u(t); \\ i, Y(t). \end{cases}$

Если $f(t) = i(t)$, то $x(t) = \begin{cases} i, K_i(t); \\ u, Z(t) \end{cases}$

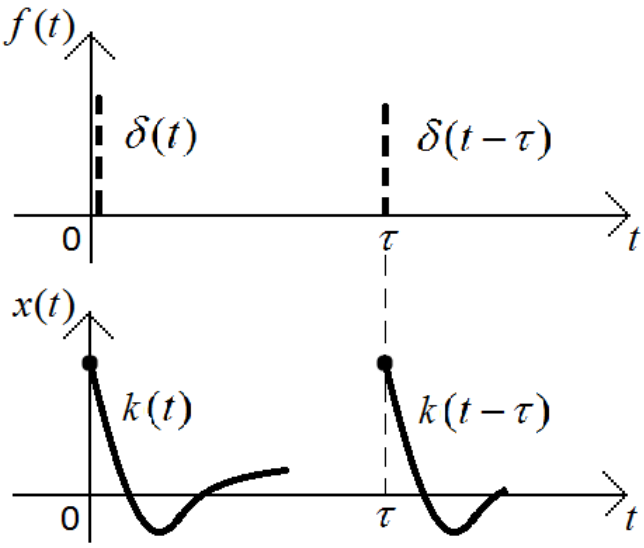
Импульсная характеристика



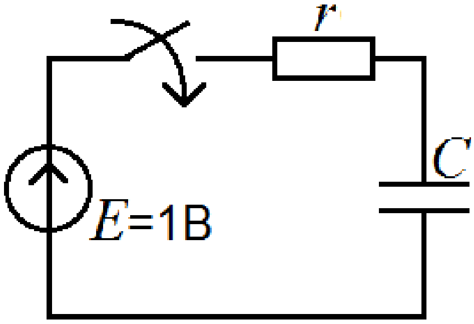
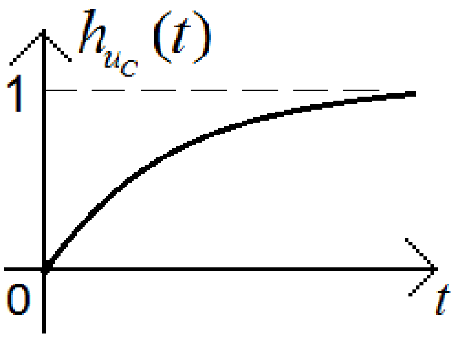
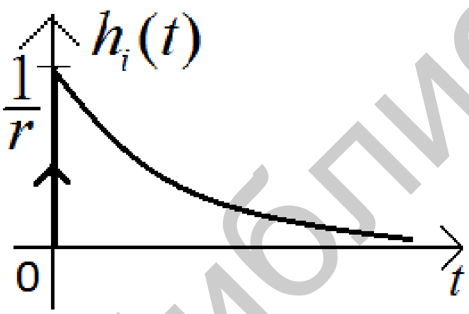
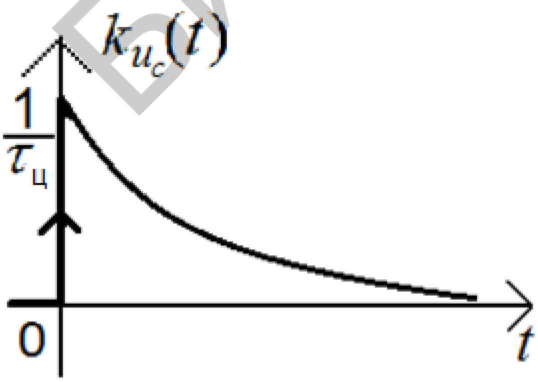
Импульсная характеристика – это отклик (реакция) цепи на дельта-функцию при нулевых начальных условиях

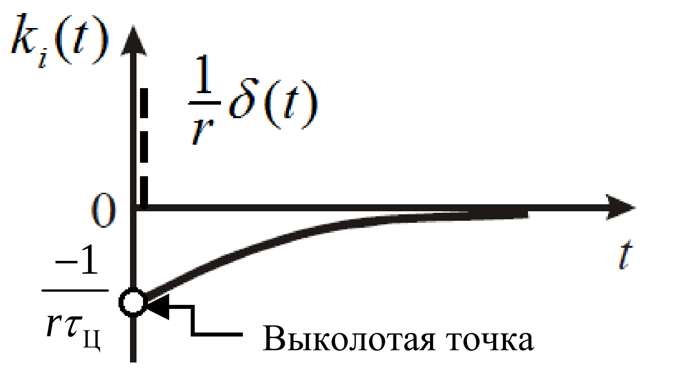
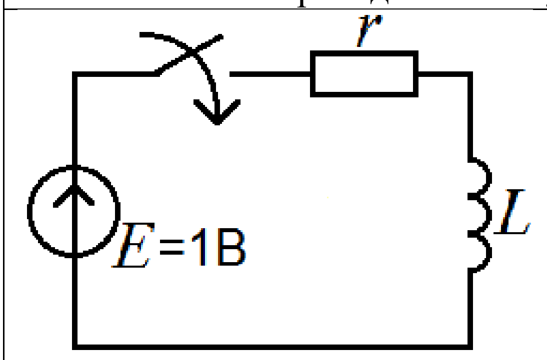
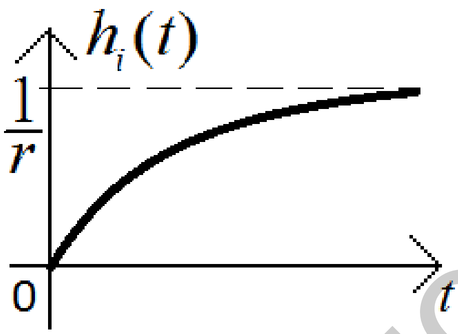
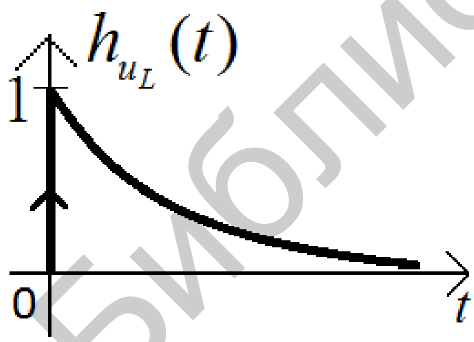
$$x(t) = k(t)\cdot 1(t),$$

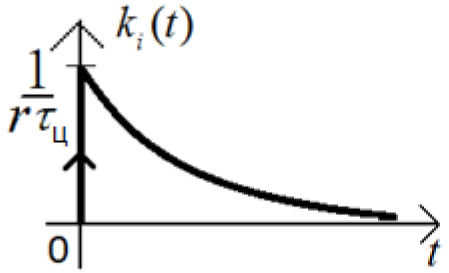
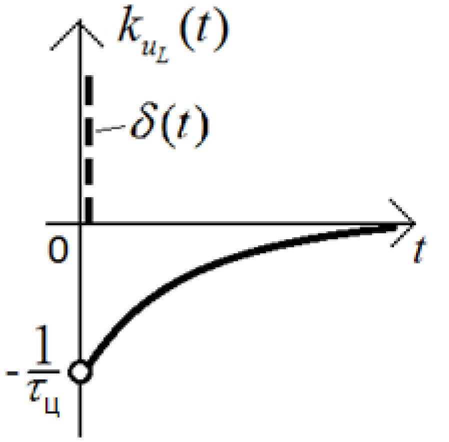
$$x(t-\tau) = k(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$$



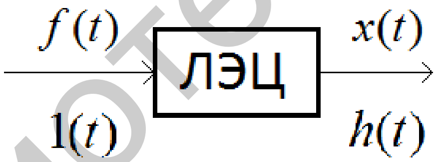
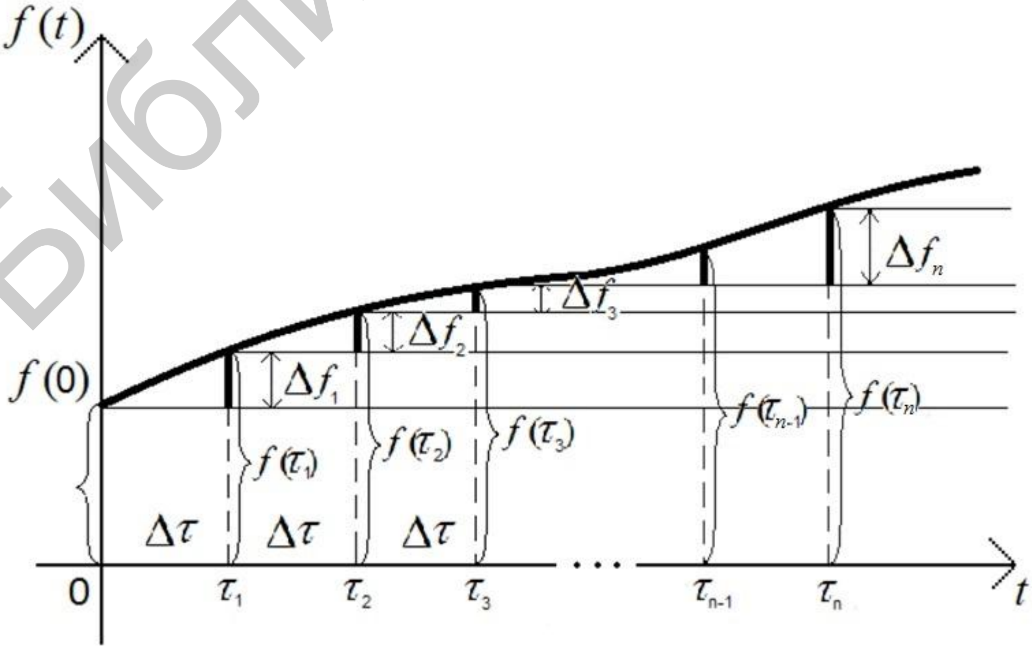
Связь между переходной и импульсной характеристиками
Так как $\delta(t)=1'(t)$, то $k(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}[h(t)\cdot 1(t)]=h'(t)\cdot 1(t)+h(t)\cdot 1'(t)=h'(t)\cdot 1(t)+$ $+h(t)\cdot\delta(t)$. Если $\delta(t)\neq 0$ при $t=0$, то $k(t)=h'(t)+h(0)\cdot\delta(t)$. Размерность $k(t)\to\dfrac{h(t)}{\text{с}}$

Переходная и импульсная характеристики rC-цепи	
	$u_r+u_C=E;$ $rC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=E;$ $u_c(t)=E(1-e^{-t/\tau_Ц});$ $i(t)=\dfrac{E}{r}e^{-t/\tau_Ц}$
	При $E=1(t)$ $h_u(t)=\dfrac{u_C(t)}{E};$ $h_{u_C}(t)=1-e^{-t/\tau_Ц}$
	$h_i(t)=\dfrac{i(t)}{E}=\dfrac{1}{r}e^{-t/\tau_Ц};$ $k(t)=h'(t)+h(0)\cdot\delta(t)$
	$k_{u_C}(t)=\dfrac{d}{dt}(1-e^{-t/\tau_Ц})+(1-e^{0})\cdot\delta(t)=$ $=\dfrac{1}{\tau_Ц}e^{-t/\tau_Ц}$

	$k_i(t)=\frac{d}{dt}(\frac{1}{r}e^{-t/\tau_Ц})+\frac{1}{r}\cdot e^0\cdot\delta(t)=$ $=-\frac{1}{r\cdot\tau_Ц}e^{-t/\tau_Ц}+\frac{1}{r}\delta(t)$
Переходная и импульсная характеристики в rL-цепи	
	$u_L+u_r=E;$ $L\frac{di}{dt}+r\cdot i=E$
	$i(t)=\frac{E}{r}(1-e^{-t/\tau_Ц});$ $u_L(t)=E\cdot e^{-t/\tau_Ц};$ $h_i(t)=\frac{i(t)}{E}=\frac{1}{r}(1-e^{-t/\tau_Ц});$ $h_{u_L}(t)=\frac{u_L(t)}{E}=e^{-t/\tau_Ц}$

	$k_i(t)=\dfrac{1}{r\cdot\tau_{ц}}\cdot e^{-t/\tau_{ц}}+0\cdot\delta(t).$
	$k_{u_L}(t)=-\dfrac{1}{\tau_{ц}}\cdot e^{-t/\tau_{ц}}+\delta(t)$

4.4.3. Определение реакции цепи на воздействие произвольной формы с помощью временных характеристик

Определение реакции цепи на воздействие произвольной формы с помощью переходной характеристики
 

Входное воздействие и реакция цепи на *k*-ю единичную функцию

$$f(t) \approx f(0)\cdot 1(t) + \Delta f_1 \cdot 1(t-\tau_1) + \ldots + \Delta f_n \cdot 1(t-\tau_n) \approx f(0)\cdot 1(t) + \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k \cdot 1(t-\tau_k).$$

Реакция цепи на *k*-ю единичную функцию $1(t-\tau)$:

$$\Delta x_k(t) = \Delta f_k \cdot h(t-\tau_k)$$

Реакция цепи на входные воздействия

$$x(t) \approx f(0)\cdot h(t) + \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k \cdot h(t-\tau_k)\cdot \frac{\Delta\tau_k}{\Delta\tau_k} \text{ при } \Delta\tau_k \to 0.$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau_k \to 0}\left[f(0)\cdot h(t) + \sum \frac{\Delta f_k}{\Delta\tau_k}\cdot h(t-\tau_k)\cdot \Delta\tau_k \right] =$$

$$= f(0)\cdot h(t) + \int_0^t f'(t)\cdot h(t-\tau)\,d\tau. \qquad (4.1)$$

Первая форма интеграла Дюамеля

Для любых двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ существует интеграл свёртки: $\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$, который легко проверяется путём замены переменных интегрирования. Используя свойство коммутативности такой свёртки, получим вторую форму интеграла Дюамеля:

$$x(t) = f(0)\cdot h(t) + \int_0^t f'(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau. \qquad (4.2)$$

Интегрирование (4.1) по частям даёт 3-ю форму:

$$x(t) = f(t)\cdot h(0) + \int_0^t f(\tau)\cdot h'(t-\tau)\,d\tau. \qquad (4.3)$$

Согласно свойству коммутативности свёртки, выражение (4.3) записывается так:

$$x(t) = f(\tau)\cdot h(0) + \int_0^t f(t-\tau)\cdot h'(\tau)\,d\tau. \qquad (4.4)$$

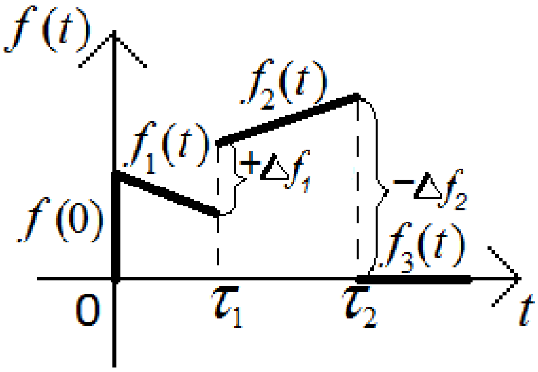
Уравнение (4.4) есть 4-я форма интеграла Дюамеля.

5-я и 6-я формы интеграла Дюамеля имеют вид

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau\right], \qquad (4.5)$$

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau\right] \qquad (4.6)$$

Пример определения реакции цепи с помощью переходной характеристики



На интервале $[0,\tau_1]$:

$$x(t) = f(0)\cdot h(t) + \int f_1'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau.$$

На интервале $[\tau_1, \tau_2]$:

$$x(t) = f(0)\cdot h(t) - \int_0^{\tau_1} f_1'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau +$$

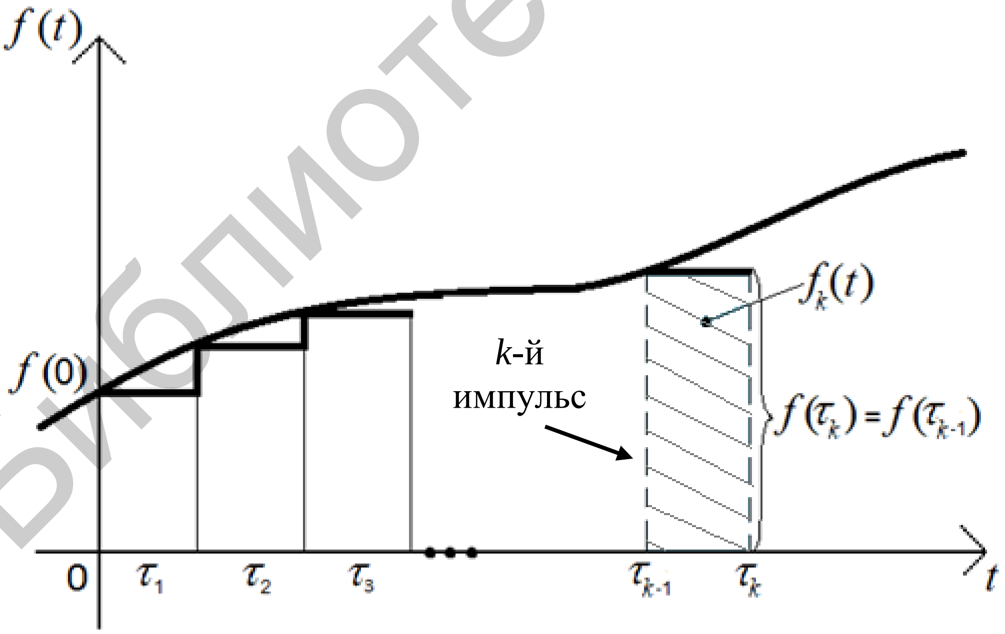
$$+\Delta f_1\cdot h(t-\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} f_2'(t-\tau)d\tau.$$

На интервале $[\tau_2,\infty]$:

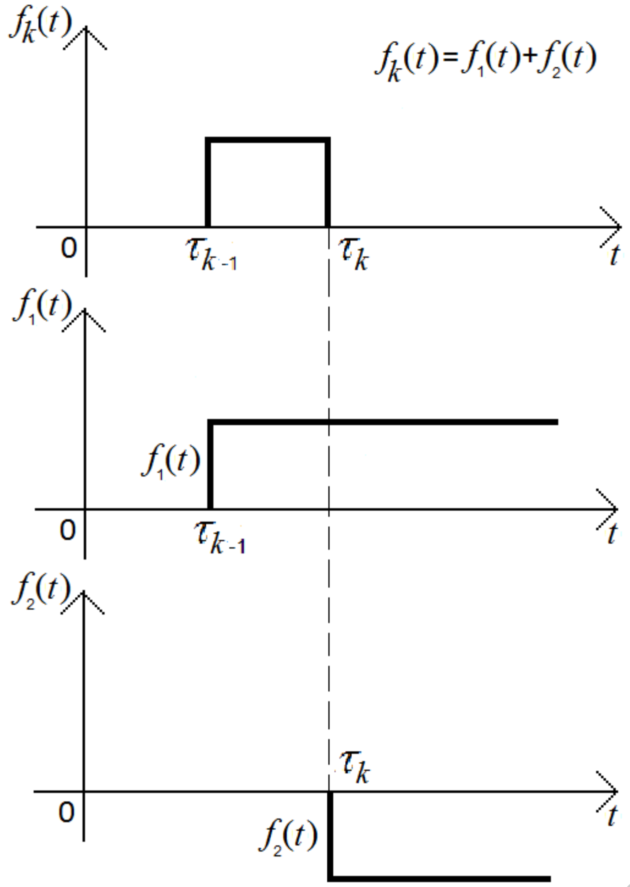
$$x(t) = f(0)\cdot h(t) + \int_0^{\tau_1} f_1'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau + \Delta f_1\cdot h(t-\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_2'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau +$$

$$+\Delta f_2\cdot h(t-\tau_2) + \int_{\tau_2}^{t} f_3'(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

Определение реакции цепи на воздействие произвольной формы с помощью импульсной характеристики



Представление *k*-го импульса как суммы двух функций



$$f_1(t) = f(\tau_{k-1}) \cdot 1(t - \tau_{k-1})\,;$$

$$f_2(t) = -f(\tau_{k-1}) \cdot 1(t - \tau_k)\,;$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) =$$
$$= f(\tau_{k-1}) \cdot [1(t - \tau_{k-1}) - 1(t - \tau_k)]$$

Реакция цепи на входное воздействие

Реакция ЛЭЦ на *k*-й импульс:

$$\Delta x_k(t) = f(\tau_{k-1}) \cdot [h(t - \tau_{k-1}) - h(t - \tau_k)]$$

Реакция ЛЭЦ на полное входное воздействие:

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_{k-1}) \cdot [h(t - \tau_{k-1}) - h(t - \tau_k)] \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_{k-1}) \cdot \Delta h(t - \tau_{k-1})\,;$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_{k-1}) \cdot \underbrace{\frac{\Delta h(t - \tau_{k-1})}{\Delta \tau_{k-1}}}_{\longrightarrow\, h'(t-\tau) = k(t-\tau)} \cdot \Delta \tau_{k-1}$$

Интегралы свертки:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot k(t - \tau)\, d\tau\,;$$

$$x(t) = \rightarrow \int_0^t f(t - \tau) \cdot k(\tau)\, d\tau$$

5. Операторный метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

5.1. Свойства и теоремы преобразований Лапласа

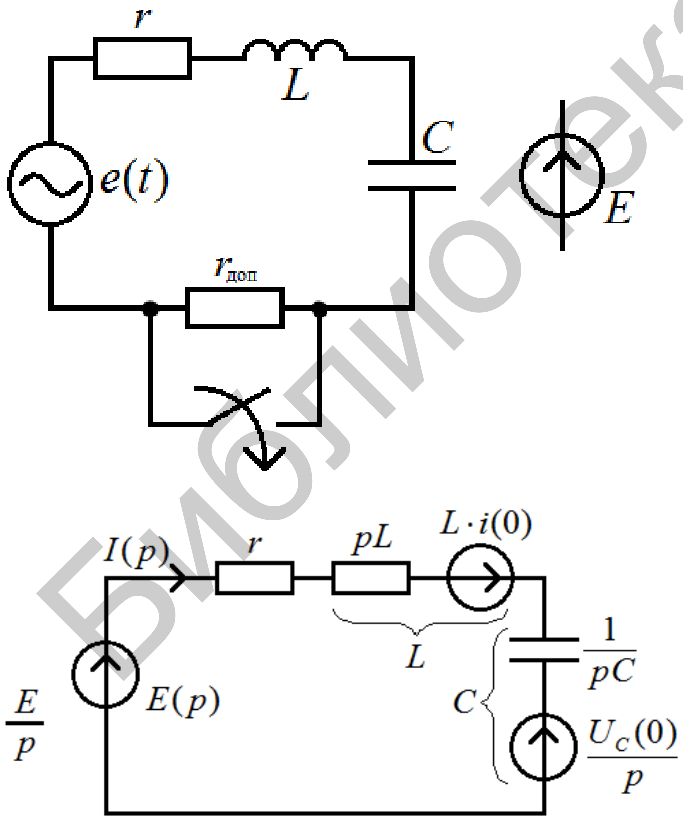
Суть операторного метода заключается в том, что функция действительной переменной t преобразуется по Лапласу в функцию комплексной переменной $p = \delta \pm j\omega$ таким образом, чтобы вместо интегродифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы, получить алгебраические уравнения. После решения этих алгебраических уравнений выполняется обратный переход к функции действительной переменной t. Это упрощает решение интегродифференциальных уравнений.

Замена $t \to p = \delta \pm j\omega$, $f(t) \to$ оригинал, $F(p) \to$ изображение оригинала по Лапласу	
Условия перехода [от $f(t)$ к $F(p)$]	
1) $f(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле: − ограничена на интервале; − имеет конечное число максимумов и минимумов и точек разрыва 1-го рода; 2) $f(t)=0$ при $t=0$; 3) не требуется абсолютной интегрируемости функции $f(t)$. $f(t) \fallingdotseq F(p)$, т. е. оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$	
Преобразования Лапласа	
Прямое преобразование Лапласа	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$
Обратное преобразование Лапласа	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\omega}^{\delta + j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp$
Свойства преобразований Лапласа	
Единственность	Если $f(t) \fallingdotseq F(p)$, то $F(p) \fallingdotseq f(t)$
Линейность	Если $f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$, то $F(p) = \sum_{k=1}^{n} F_k(p)$
Теоремы преобразований Лапласа. При условии $f(t) \fallingdotseq F(p)$	
1. Дифференцирование оригинала	$f'(t) \fallingdotseq p \cdot F(p)$; $f''(t) \fallingdotseq p^2 \cdot F(p)$; $f^{(n)}(t) \fallingdotseq p^n \cdot F(p)$ (при нулевых начальных условиях); $f'(t) \fallingdotseq p \cdot F(p) - f(0)$ (при ненулевых начальных условиях)

2. Интегрирование оригинала	$\int\limits_0^t f(t)dt \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$
3. Запаздывание оригинала	$F(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p)$
4. Смещение изображения	$F(p \pm \delta) \risingdotseq e^{\mp p\delta} \cdot f(t)$
5. Теорема свёртывания оригиналов (или умножения изображений)	$F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau)d\tau$ или $F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau$
Следствие	
$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \dfrac{d}{dt}\int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)dt$ или $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \dfrac{d}{dt}\int\limits_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau)dt$	
6. Предельные теоремы	$f(0) = \lim\limits_{p\to\infty} p \cdot F(p),\ f(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} p \cdot F(p)$
7. Теорема разложения	Если $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)} =$ $= \dfrac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... a_1 p + a_0}$, то возможны три случая: а) p_k – различные (из $F_2(p)=0$), тогда $f(t) \risingdotseq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$; б) один из корней равен 0, т. е. $F_2(p) = pF_3(p)$, тогда $f(t) \risingdotseq \dfrac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$; в) корни кратные, тогда $f(t) \risingdotseq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(m_k-1)!} \times$ $\times [\dfrac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)} \cdot (p-p_k)^{m_k} \cdot e^{p_k}]$

Таблица преобразований Лапласа	
Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
$A\cdot\delta(t)$	A
A	$\dfrac{A}{p}$
$A\cdot t$	$\dfrac{A}{p^2}$
$A\cdot e^{-\alpha t}$	$\dfrac{A}{p+\alpha}$
$A[\delta(t)-\alpha\cdot e^{-\alpha t}]$	$\dfrac{A\cdot p}{p+\alpha}$
$\dfrac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$	$\dfrac{A\cdot p}{p(p+\alpha)}$

5.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Схема замещения

Операторная схема замещения	
	$E\to\dfrac{E}{p}$, $L\to pL$, $C\to\dfrac{1}{pC}$, $e(t)\to E(p)$. При ненулевых начальных условиях: $L\cdot i(0)$, $\dfrac{U_c(0)}{p}$

Закон Ома

$$e(t) = r\cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + U_c(0),$$

$E(p)$ $I(p)$ $\frac{U_c(0)}{p}$

$$E(p) = r\cdot I(p) + pL\cdot I(p) - L\cdot i(0) + \frac{1}{pC}\cdot I(p) + \frac{U_c(0)}{p},$$

$$\underbrace{E(p) + L\cdot i(0) - \frac{U_c(0)}{p}}_{\varepsilon(p)} = \underbrace{(r + pL + \frac{1}{pC})}_{Z(p)}I(p).$$

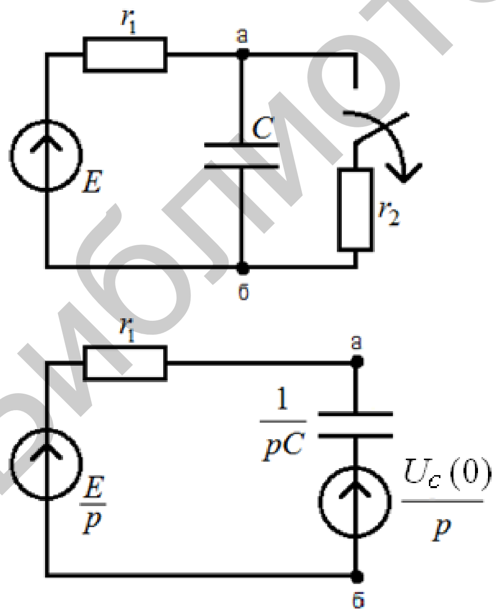
$$I(p) = \frac{\varepsilon(p)}{Z(p)} \text{ — закон Ома}$$

1-й закон Кирхгофа

Если $\sum i_k(t) = 0$, то согласно свойству линейности

$$\sum I_k(p) = 0$$

Пример 5.1. Определение тока и напряжения в ёмкости



$$I_c(p) = \frac{\frac{E}{p} - \frac{U_c(0)}{p}}{r_1 + \frac{1}{pC}} = \frac{E - U_c(0)}{p\left(r_1 + \frac{1}{pC}\right)} =$$

$$= \frac{C}{r_1C}\cdot\frac{E - U_c(0)}{\left(p + \frac{1}{r_1C}\right)} = \frac{\frac{E - U_c(0)}{r_1}}{p + \alpha} =$$

$$= \frac{A}{p+\alpha} \risingdotseq A\cdot e^{-\alpha t}.$$

$$U_c(0) = U_{r_2} = \frac{E}{r_1 + r_2}\cdot r_2$$

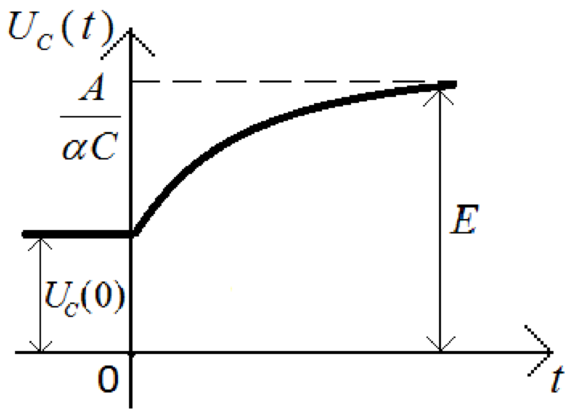
$$U_C(p)=\varphi_{\text{а}}-\varphi_{\text{б}},$$

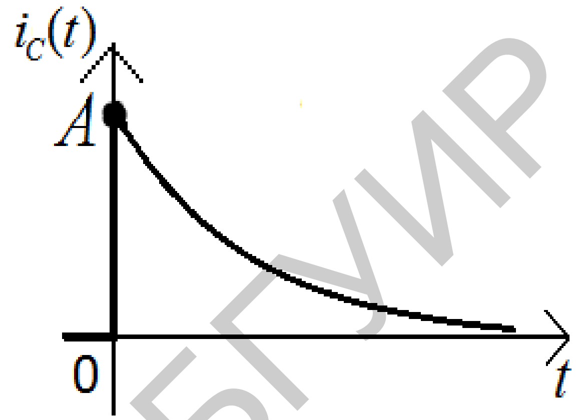
$$\varphi_{\text{б}}=\varphi_{\text{а}}-I(p)\cdot\frac{1}{pC}-\frac{U_C(0)}{p},$$

$$U_C(p)=\frac{U_C(0)}{p}+I(p)\cdot\frac{1}{pC}=\frac{U_C(0)}{p}+$$

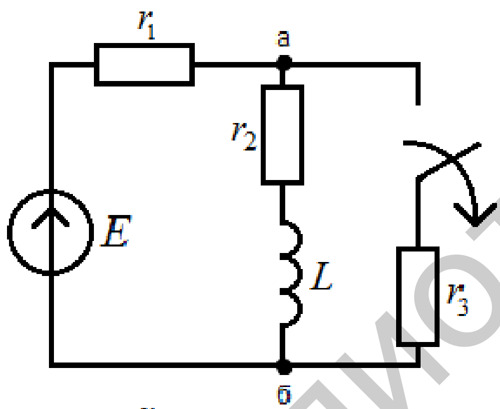
$$+\frac{A}{p+\alpha}\cdot\frac{1}{pC}=\frac{U_C(0)}{p}+\frac{A/C}{p(p+\alpha)}\risingdotseq$$

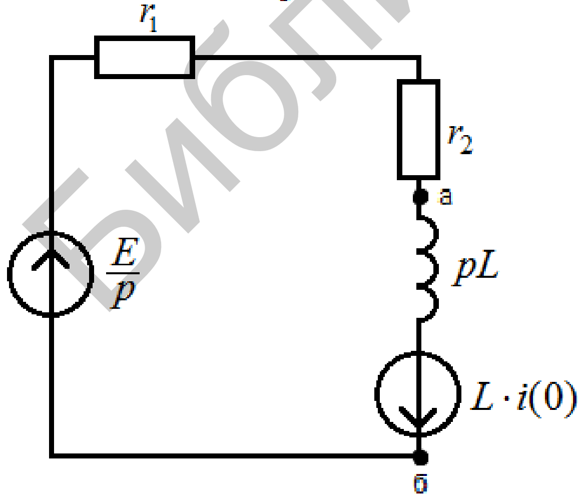
$$\risingdotseq U_C(0)+\frac{A}{\alpha C}(1-e^{-\alpha t})$$





Пример 5.2. Определение тока и напряжения в индуктивности



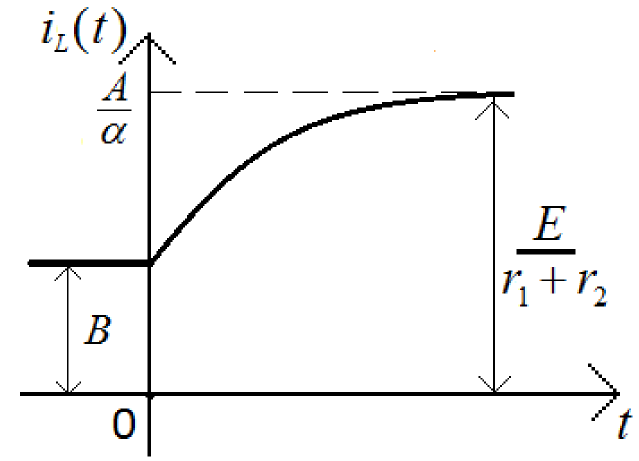
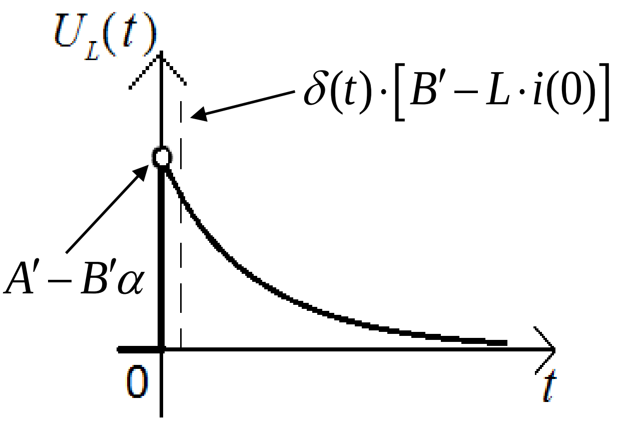


$$I_L(p)=\frac{\frac{E}{p}+L\cdot i(0)}{r_1+r_2+pL}=\frac{E}{pL\left(p+\frac{r_1+r_2}{L}\right)}+$$

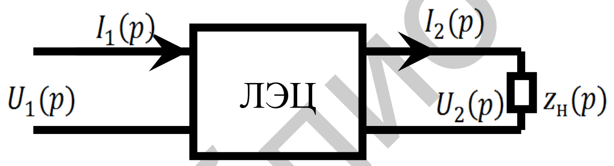
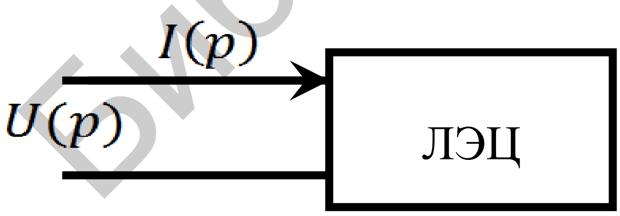
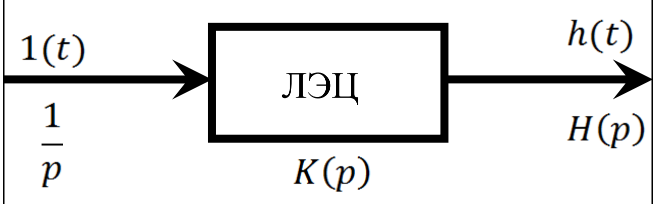
$$+\frac{L\cdot i(0)}{r_1+r_2+pL}=\frac{E/L}{p\left(p+\frac{r_1+r_2}{L}\right)}+$$

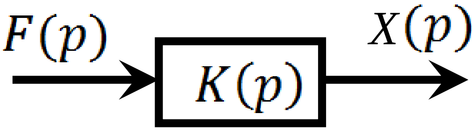
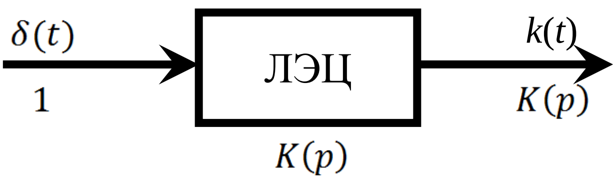
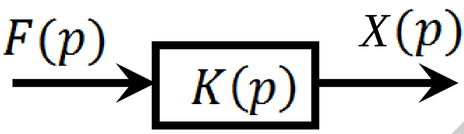
$$+\frac{i(0)}{p+\frac{r_1+r_2}{L}}=\frac{A}{p(p+\alpha)}+\frac{B}{p+\alpha}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha\cdot t})+B\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

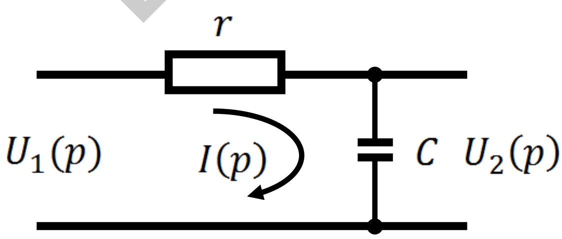
	$i(0)=\dfrac{E}{r_1+\dfrac{r_2\cdot r_3}{r_2+r_3}}\cdot\dfrac{r_3}{r_2+r_3}$
	$U_L(p)=\varphi_а-\varphi_б;$ $\varphi_б=\varphi_а-I(p)\cdot pL+L\cdot i(0);$ $U_L(p)=I(p)\cdot pL-L\cdot i_L(0)=\dfrac{ApL}{p(p+\alpha)}+$ $+\dfrac{BpL}{p+\alpha}-L\cdot i(0)=\dfrac{A'}{p+\alpha}+\dfrac{B'\cdot p}{p+\alpha}-L\cdot i(0)\risingdotseq$ $\risingdotseq A'e^{-\alpha t}+B'\left[\delta(t)-\alpha e^{-\alpha t}\right]-L\cdot i(0)\cdot\delta(t)=$ $=(A'-B'\alpha)\cdot e^{-\alpha t}+\left[B'-L\cdot i(0)\right]\cdot\delta(t)$

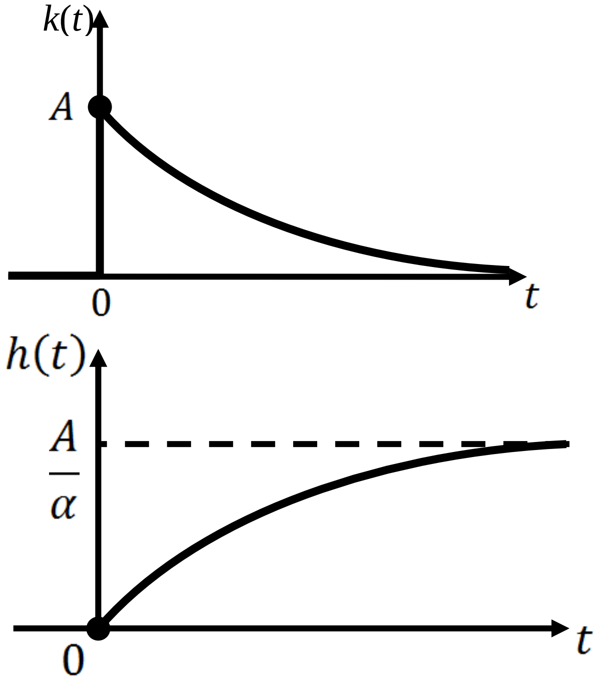
5.3. *Связь операторных передаточных функций электрических цепей с временными характеристиками*

Виды операторных функций	
	$K_U(p)=\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)},\ K_I(p)=\dfrac{I_2(p)}{I_1(p)},$ $Z_{21}(p)=\dfrac{U_2(p)}{I_1(p)},\ Y_{21}(p)=\dfrac{I_2(p)}{U_1(p)},$
	$Z(p)=\dfrac{U(p)}{I(p)},\ Y(p)=\dfrac{1}{Z(p)}$
Связь $K(p)$ и $h(t)$	
	$1(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$

Связь $K(p)$ и $h(t)$	
	$K(p)=\dfrac{X(p)}{F(p)}$; $X(p)=K(p)\cdot F(p)$; $\downarrow \qquad\qquad \downarrow$ $H(p) \qquad\qquad \dfrac{1}{p}$ $H(p)=\dfrac{K(p)}{p}$, $H(p)\risingdotseq h(t)$; $h(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\dfrac{K(p)}{p}\cdot e^{pt}dp$
Связь $K(p)$ и $k(t)$	
	$\delta(t)\risingdotseq 1$; $K(p)=\dfrac{X(p)}{F(p)}$; $X(p)=K(p)\cdot F(p)$; $\downarrow \qquad\qquad \downarrow$ $k(t) \qquad\qquad 1$ $k(t)\risingdotseq K(p)$, т. е. $K(p)=\displaystyle\int_0^{\infty}k(t)e^{-pt}dt$, $k(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}K(p)e^{pt}dp$

5.4. Примеры определения временных характеристик электрических цепей операторным методом

Пример 5.3. Определение $k(t)$ и $h(t)$ в rC-цепи	
	$K(p)=\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}=\dfrac{\cancel{I(p)}\cdot\dfrac{1}{pC}}{\cancel{I(p)}\cdot\left[r+\dfrac{1}{pC}\right]}=$ $=\dfrac{1}{1+prC}=\dfrac{1}{rC\cdot\left(\dfrac{1}{rC}+p\right)}=\dfrac{A}{p+\alpha}$.



$$k(t) \risingdotseq K(p);$$
$$k(t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot t};$$

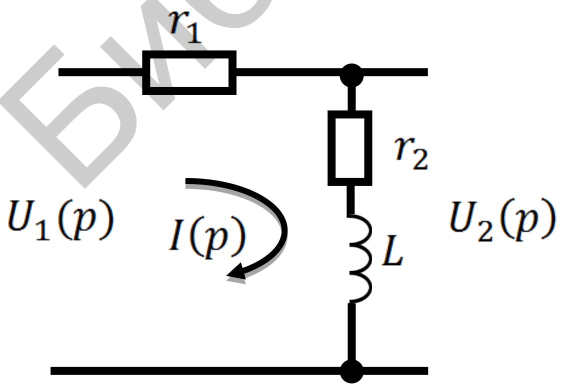
$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{A}{p(p+\alpha)};$$
$$h(t) = \frac{A}{\alpha}(1 - e^{-\alpha \cdot t})$$

Проверка решения предельными теоремами

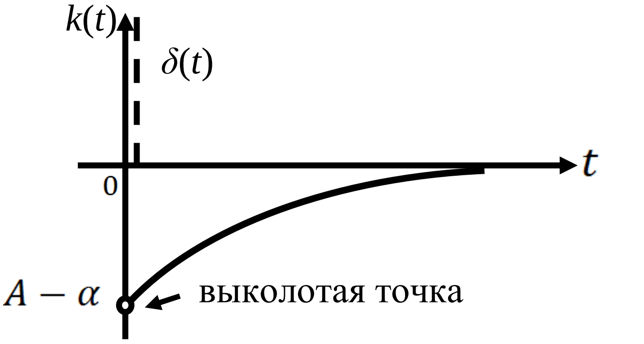
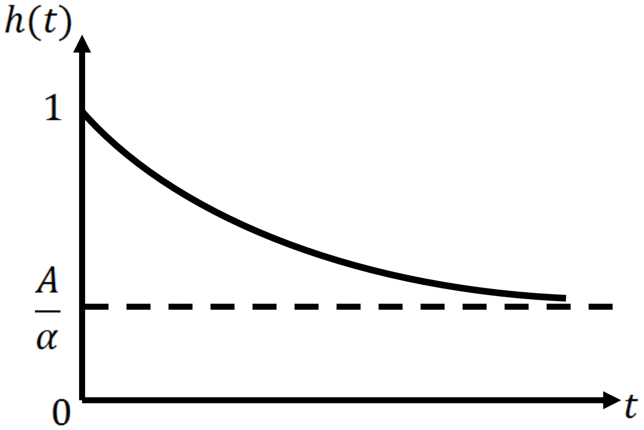
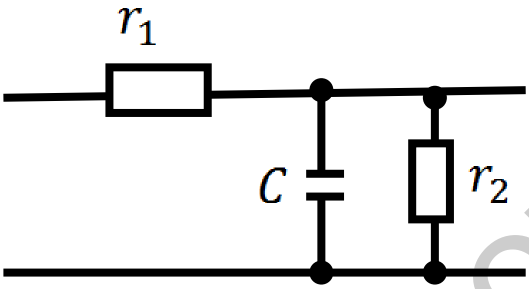
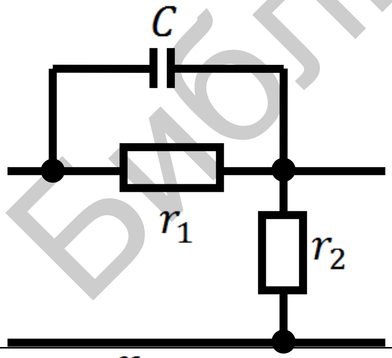
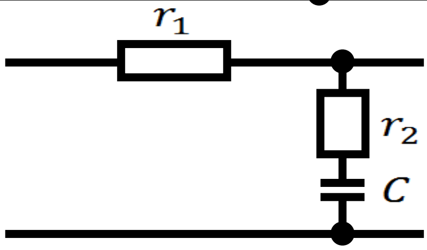
$$k(t)\begin{cases} K(0) = \lim\limits_{p\to\infty} p \cdot K(p) = \lim\limits_{p\to\infty} p \cdot \dfrac{A}{p+\alpha} = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{A}{1+\dfrac{\alpha}{p}} = A; \\ K(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} p \cdot K(p) = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p \cdot A}{p+\alpha} = 0; \end{cases}$$

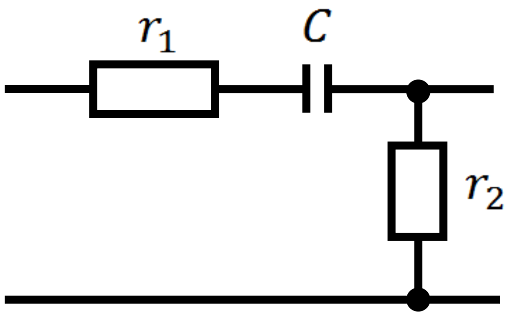
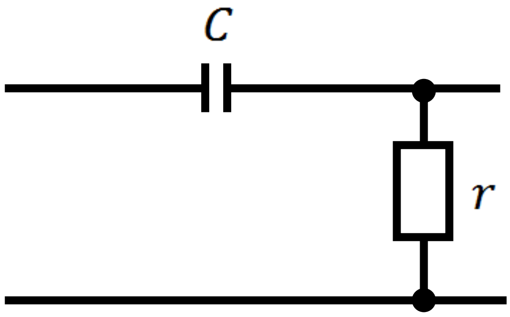
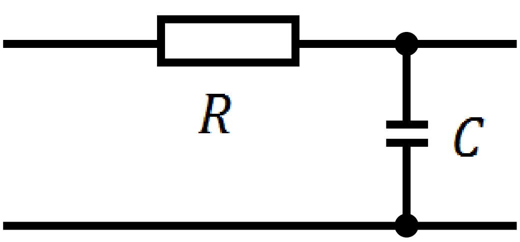
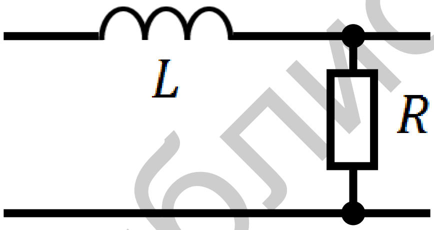
$$h(t)\begin{cases} h(0) = \lim\limits_{p\to\infty} p \cdot H(p) = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p \cdot A}{p(p+\alpha)} = 0; \\ h(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} p \cdot H(p) = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p \cdot A}{p(p+\alpha)} = \dfrac{A}{\alpha} \end{cases}$$

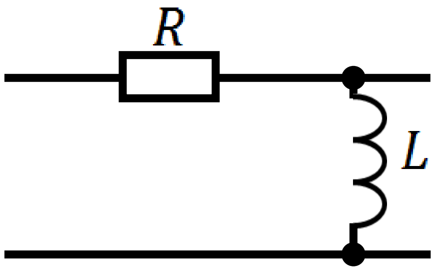
Пример 5.4. Определение $k(t)$ и $h(t)$ в rL-цепи



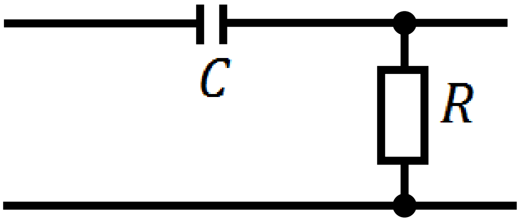
$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{I(p)[r_2 + pL]}{I(p)[r_1 + r_2 + pL]} =$$
$$= \frac{r_2}{r_1 + r_2 + pL} + \frac{pL}{r_1 + r_2 + pL} =$$
$$= \frac{A}{p+\alpha} + \frac{p}{p+\alpha}.$$

 	$k(t)=A\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(t)-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}= =(A-\alpha)e^{-\alpha\cdot t}+\delta(t)\,.$ $H(p)=\dfrac{K(p)}{p}=\dfrac{A}{p(p+\alpha)}+\dfrac{p\cdot 1}{p(p+\alpha)}\,;$ $h(t)=\dfrac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha\cdot t})+e^{-\alpha\cdot t}$
Пример 5.5. Определение *K*(*p*)	
	$K(p)=\dfrac{\dfrac{r_2\cdot\frac{1}{pC}}{r_2+\frac{1}{pC}}}{r_1+\dfrac{r_2\cdot\frac{1}{pC}}{r_2+\frac{1}{pC}}}=\dfrac{r_2\cdot A}{r_1r_2C\left(p+\dfrac{r_1+r_2}{r_1r_2C}\right)}=\dfrac{A}{p+\alpha}$
	$K(p)=\dfrac{r_2}{\dfrac{r_1\cdot\frac{1}{pC}}{r_1+\frac{1}{pC}}+r_2}=\dfrac{p}{p+\alpha}+\dfrac{A}{p+\alpha}$
	$K(p)=\dfrac{r_2+\dfrac{1}{pC}}{r_1+r_2+\dfrac{1}{pC}}=\dfrac{A\cdot p}{p+\alpha}+\dfrac{A'}{p+\alpha}$

	$$K(p)=\frac{r_2}{r_1+\frac{1}{pC}+r_2}=\frac{A\cdot p}{p+\alpha}$$
	$$K(p)=\frac{r}{r+\frac{1}{pC}}=\frac{p}{p+\alpha}$$
Пример 5.6. Дуальные цепи (*RC* и *LR*)	
 $\tau_{Ц}=RC$  $\tau_{Ц}=\frac{L}{R}$	Дано: $h(t)=1-e^{-t/\tau_{Ц}}$, $k(t)=e^{-\alpha\cdot t}$. Найти схему. $H(p)=\frac{1}{p(p+\alpha)}$; $K(p)=p\cdot H(p)=\frac{p}{p(p+\alpha)}=\frac{1}{p+\alpha}$; $\alpha=\frac{1}{\tau_{Ц}}$

<table>
<tr><td colspan="2">Пример 5.7. Дуальные цепи (RC и LR)</td></tr>
<tr><td>


$\tau_{ц} = \dfrac{L}{R}$



$\tau_{ц} = RC$
</td><td>
Дано: $h(t) = e^{-t/\tau_{ц}}$.
Найти схему.
$H(p) = \dfrac{1}{p+\alpha}$;
$K(p) = p \cdot H(p) = \dfrac{p}{p+\alpha}$;
$k(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha \cdot t}$;
$\alpha = \dfrac{1}{\tau_{ц}}$
</td></tr>
</table>

6. Четырёхполюсники

6.1. Определения и классификация четырёхполюсников

По числу внешних зажимов электрические цепи подразделяют на двухполюсники, трёхполюсники, четырёхполюсники, многополюсники.

Четырёхполюсником называют часть электрической цепи, имеющую две пары зажимов (1–1′ и 2–2′), через которые она подключается к внешней цепи (рис. 6.1, *а*).

Зажимы 1–1′ – входные, 2–2′ – выходные. К входным зажимам подключается, как правило, источник электрической энергии, к выходным – нагрузка.

Положительные направления токов и напряжений показаны на рис. 6.1, *б*.

Классификация четырёхполюсников следующая: линейные и нелинейные, активные и пассивные, автономные и неавтономные, обратимые и необратимые, симметричные и несимметричные, уравновешенные и неуравновешенные, регулярные и нерегулярные.

Линейными называют четырёхполюсники, не содержащие нелинейных элементов.

Четырёхполюсник является нелинейным, если он содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Активными называют четырёхполюсники, содержащие источники электрической энергии, пассивными – не имеющие таких источников.

Автономные (неуправляемые) четырёхполюсники содержат независимые источники электрической энергии.

Неавтономные (управляемые) – содержат зависимые источники напряжения или тока (например, транзисторы, микросхемы). Неавтономными активными четырёхполюсниками являются усилители напряжения или тока.

Четырёхполюсник называют *обратимым*, когда передаточные сопротивления входного и выходного контуров не зависят от того, какая из двух пар зажимов является входной, а какая – выходной, т. е. выполняется принцип взаимности.

Четырёхполюсник называют *симметричным*, когда перемена мест его входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в электрической цепи, с которой он соединён.

Симметричные четырехполюсники всегда обратимы.

Четырёхполюсник называют *уравновешенным*, если его схема симметрична относительно продольной оси (рис. 6.1, *в*). У неуравновешенного четырёхполюсника один из его элементов может быть непосредственно соединён с зажимом другой пары (рис. 6.1, *г*). При этом образуется трёхполюсник, который используется в четырёхполюсном режиме.

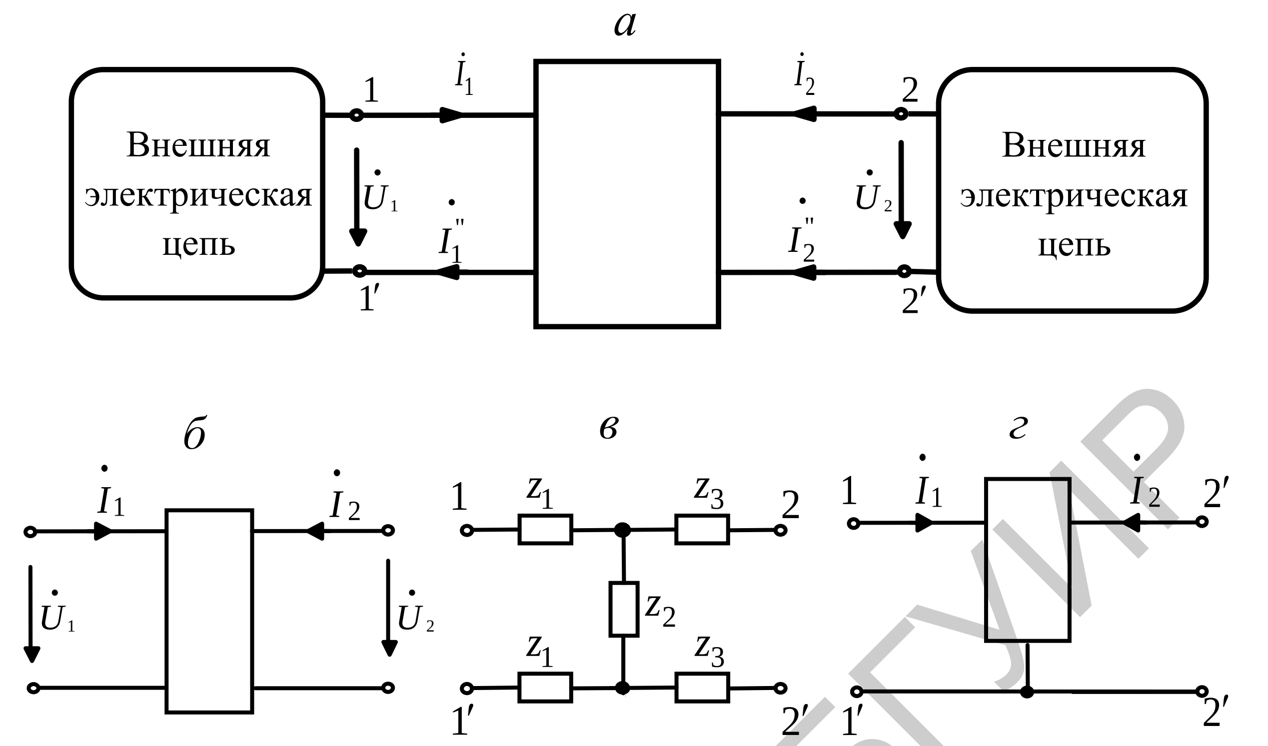


Рис. 6.1

Входную внешнюю электрическую цепь четырёхполюсника (см. рис. 6.1, *а*) обычно представляют эквивалентным источником энергии, а выходную – эквивалентной нагрузкой. Если у такого четырёхполюсника равны прямые и обратные токи (напряжения) на входе и выходе, то его называют *регулярным*.

6.2. Уравнения четырёхполюсников и схемы замещения

При исследовании регулярных четырёхполюсников устанавливают соотношения между напряжениями и токами на входе ($\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$) и выходе ($\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$). Любые две переменные из четырёх ($\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$) можно считать зависимыми и выражать через остальные две, принятые за независимые. Число таких соотношений, называемых *уравнениями четырёхполюсников*, равно шести (сочетание их четырёх элементов по два), а коэффициенты этих уравнений называют *параметрами четырёхполюсников*.

6.2.1. Уравнения четырёхполюсников в *Y*-форме

Подключив к входным и выходным зажимам четырёхполюсника идеальные источники ЭДС $\dot{E}_1$=$\dot{U}_1$, $\dot{E}_2$=$\dot{U}_2$ (рис. 6.2), получим два контура с контурными токами $\dot{I}_{\mathrm{I}}$ и $\dot{I}_{\mathrm{II}}$.

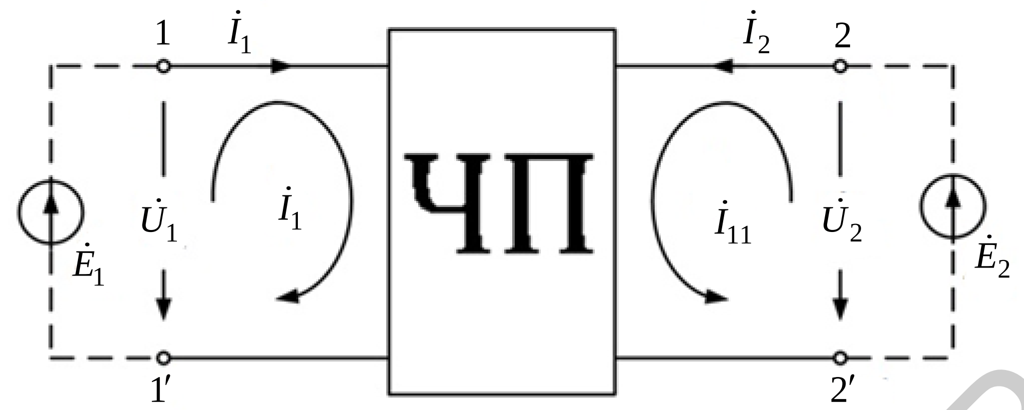


Рис. 6.2

Для определения токов $\dot I_1 = \dot I_{\mathrm{I}}$ и $\dot I_2 = \dot I_{\mathrm{II}}$ воспользуемся формулой Крамера, согласно которой ток в k-м контуре равен

$$\dot I_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \dot E_j, \tag{6.1}$$

где $\dot I_k$ – токи $\dot I_1$ и $\dot I_2$; $\dot E_j$ – источники ЭДС с напряжениями $\dot U_1$ и $\dot U_2$; Δ – определитель системы контурных токов; Δ_{jk} – алгебраическое дополнение определителя A, получаемое путём вычёркивания в нём j-й строки и k-го столбца и умножения на $(-1)^{j+k}$.

В соответствии с формулой Крамера (6.1) для схемы на рис. 6.2 можно записать

$$\left.\begin{aligned} \dot I_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\dot U_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta}\dot U_2; \\ \dot I_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\dot U_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}\dot U_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Так как порядок алгебраических дополнений Δ_{jk} на единицу меньше порядка определителя Δ, то единица измерения коэффициентов в системе (6.2) – сименсы, а сама система уравнений примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot I_1 &= Y_{11}\dot U_1 + Y_{12}\dot U_2; \\ \dot I_2 &= Y_{21}\dot U_1 + Y_{22}\dot U_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Такую форму записи уравнений четырёхполюсников называют *Y-формой.*

Система (6.3) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix}, \text{ или } \left[\dot I\right] = \left[Y\right]\left[\dot U\right],$$

где $$\left[Y\right] = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Y-параметры называют *параметрами короткого замыкания*, так как их определяют путём поочерёдного короткого замыкания входа и выхода четырёхполюсника:

– при $\dot U_2 = 0$ из системы (6.3): $$Y_{11} = \frac{\dot I_1}{\dot U_1}[\text{См}];$$

$$Y_{21} = \frac{\dot I_2}{\dot U_1}[\text{См}];$$

– при $\dot U_1 = 0$ из системы (6.3): $$Y_{12} = \frac{\dot I_1}{\dot U_2}[\text{См}];$$

$$Y_{22} = \frac{\dot I_2}{\dot U_2}[\text{См}].$$

Если $Y_{12} = Y_{21}$, то четырёхполюсники обратимые (так как выполняется принцип взаимности).

Если $Y_{11} = Y_{22}$, то четырёхполюсники симметричные.

6.2.2. Уравнения четырёхполюсников в Z-форме

Уравнения четырёхполюсников в Z-форме получают путём решения системы (6.3) относительно $\dot U_1$ и $\dot U_2$:

$$\left.\begin{aligned} \dot U_1 &= Z_{11}\dot I_1 + Z_{12}\dot I_2; \\ \dot U_2 &= Z_{21}\dot I_1 + Z_{22}\dot I_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

В системе (6.4)

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{|Y|}; \qquad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}; \qquad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{|Y|}; \qquad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{|Y|};$$

$$|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}.$$

Z-параметры называют параметрами холостого хода, так как их определяют в режиме холостого хода на одной из сторон четырёхполюсника:

– при $\dot{I}_2 = 0$ из системы (6.4): $Z_{11} = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}[\text{Ом}]$;

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}[\text{Ом}];$$

– при $\dot{I}_1 = 0$ из системы (6.4): $Z_{22} = \dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}[\text{Ом}]$;

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}[\text{Ом}].$$

Для обратимых (взаимных) четырёхполюсников $Z_{12} = Z_{21}$, для симметричных $Z_{11} = Z_{22}$.

Система (6.4) в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \text{или } \left[\dot{U}\right] = [Z]\left[\dot{I}\right],$$

где $[Z] = \dfrac{1}{\Delta_{11,22}} \begin{bmatrix} \Delta_{22} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{11} \end{bmatrix}$.

Здесь $\Delta_{11,22}$ – двойное алгебраическое дополнение, получаемое из определителя Δ путём вычёркивания двух строк и двух столбцов с номерами 1 и 2.

6.2.3. Уравнения четырёхполюсников в A-форме

Уравнения четырёхполюсников в A-форме получают путём решения системы (6.3) относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}(-\dot{I}_2); \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}(-\dot{I}_2), \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

где $\quad A_{11} = -\dfrac{Y_{22}}{Y_{21}}; \qquad A_{12} = -\dfrac{1}{Y_{21}}; \qquad A_{21} = -\dfrac{|Y|}{Y_{21}}; \qquad A_{22} = -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}}.$

Параметры A_{11} и A_{22} безразмерные, параметр A_{12} измеряется в омах, A_{21} – в сименсах.

Определяют A-параметры в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе четырёхполюсников:

– при $\dot{I}_2 = 0$ из системы (6.5): $\quad A_{11} = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2};\ A_{21} = \dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}[\text{Ом}];$

– при $\dot{U}_2 = 0$ из системы (6.5): $\quad A_{22} = \dfrac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2};\ A_{12} = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}[\text{Ом}].$

Система (6.5) в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Для обратимых четырёхполюсников

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

6.2.4. Уравнения четырёхполюсников в формах B, H, F

Уравнения четырёхполюсников в B-, H- и F-форме получают путём решения системы (6.3) относительно $(\dot{U}_2, \dot{I}_2)$, $(\dot{U}_1, \dot{I}_2)$ и $(\dot{I}_1, \dot{U}_2)$ соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}(-\dot{I}_1); \\ \dot{I}_2 &= B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}(-\dot{I}_1). \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

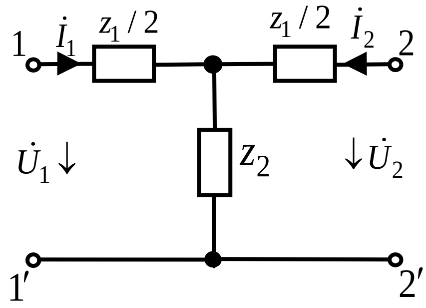
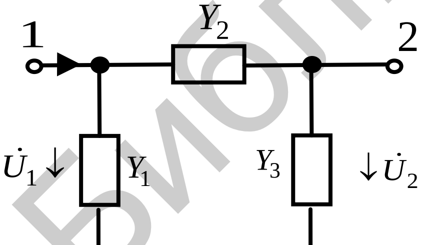
$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= H_{11}\dot I_1 + H_{12}\dot U_2;\\ \dot I_2 &= H_{21}\dot I_1 + H_{22}\dot U_2.\end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot I_1 &= F_{11}\dot U_1 + F_{12}\dot I_2;\\ \dot U_2 &= F_{21}\dot U_1 + F_{22}\dot I_2.\end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

Все шесть форм записи уравнений четырёхполюсников (6.3)–(6.8) могут быть получены одна из другой. Соотношения параметров всех шести форм приведены в прил. 1.

6.3. Способы определения параметров четырёхполюсников

6.3.1. Расчётный способ

 Рис. 6.3	Пример 6.1 (рис. 6.3). Найти *Z*-параметры Т-образного четырёхполюсника. Р е ш е н и е В режиме холостого хода $Z_{11} = Z_{22} = Z_1/2 + Z_2.$ Из системы уравнений четырёхполюсника в *Z*-форме (6.4) в режиме холостого хода: – при $\dot I_2 = 0$ $\quad Z_{21} = \dfrac{\dot U_2}{\dot I_1} = \dfrac{\dot I_1 \cdot Z_2}{\dot I_1} = Z_2;$ – при $\dot I_1 = 0$ $\quad Z_{12} = \dfrac{\dot U_1}{\dot I_2} = \dfrac{\dot I_2 \cdot Z_2}{Z_2} = Z_2$
 Рис. 6.4	Пример 6.2 (рис 6.4). Найти *Y*-параметры П-образного четырёхполюсника. Р е ш е н и е В режиме короткого замыкания: – при $\dot U_2 = 0$ $\quad Y_{11} = Y_1 + Y_2;$ – при $\dot U_1 = 0$ $\quad Y_{22} = Y_1 + Y_3.$ Из системы уравнений четырёхполюсника в *Y*-форме (6.3) в режиме короткого замыкания: – при $\dot U_2 = 0$ $\quad Y_{21} = \dfrac{\dot I_2}{\dot U_1} = \dfrac{-\dot U_1 \cdot Y_2}{\dot U_1} = -Y_2;$ – при $\dot U_1 = 0$ $\quad Y_{12} = \dfrac{\dot I_1}{\dot U_2} = \dfrac{-\dot U_2 \cdot Y_2}{\dot U_2} = -Y_2.$

6.3.2. Экспериментальный способ

Пример 6.3. Определить *A*-параметры обратимого четырёхполюсника.

Р е ш е н и е

Так как четырёхполюсник обратимый, опытным путём определим только три параметра: два сопротивления (холостого хода и короткого замыкания) на входных зажимах и одно сопротивление (холостого хода) на выходных зажимах.

Для этого сначала подключим вольтметр, амперметр и фазометр к входу четырёхполюсника (рис. 6.5).

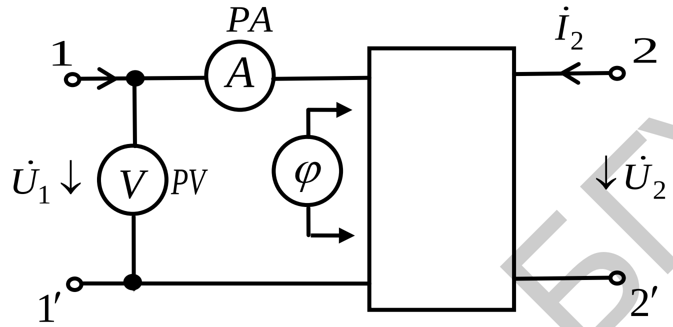


Рис. 6.5

В режиме холостого хода ($\dot{I}_2 = 0$) измерим ток $\dot{I}_{1X}$, напряжение $\dot{U}_{1X}$ и φ_{1X}. Система уравнений (6.5) в этом режиме принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{1X} &= A_{11}\dot{U}_2;\\ \dot{I}_{1X} &= A_{21}\dot{U}_2.\end{aligned}\right\}$$

Разделим первое уравнение этой системы на второе:

$$\dot{U}_{1X}/\dot{I}_{1X} = (U_{1X}/I_{1X})e^{j\varphi_{1X}}, \qquad (6.9)$$

откуда

$$Z_{1X} = \dot{U}_{1X}/\dot{I}_{1X} = A_{11}/A_{21}.$$

В режиме короткого замыкания ($\dot{U}_2 = 0$) измерим ток $\dot{I}_{1K}$, напряжение $\dot{U}_{1K}$ и фазу $\dot{\varphi}_{1K}$. Система уравнений (6.5) в этом режиме примет вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{1K} &= -A_{12}\dot{I}_2;\\ \dot{I}_{1K} &= -A_{22}\dot{I}_2.\end{aligned}\right\}$$

Разделим первое уравнение этой системы на второе:

$$\dot{U}_{1K}/\dot{I}_{1K} = A_{11}/A_{22} = Z_{1K}. \qquad (6.10)$$

В результате проведения опыта со стороны входных зажимов 1–1′ получено два уравнения (6.9) и (6.10) с четырьмя неизвестными.

В качестве третьего уравнения используем соотношение для обратимых четырёхполюсников:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1. \qquad (6.11)$$

Для получения четвёртого уравнения подключим приборы к выходным зажимам четырёхполюсника 2–2′ и в режиме холостого хода ($\dot{I}_2 = 0$) измерим ток $\dot{I}_{2\text{X}}$, напряжение $\dot{U}_{2\text{X}}$ и $\dot{\varphi}_{2\text{X}}$. Система уравнений (6.5) в этом режиме принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{2\text{X}} &= A_{22}\dot{U}_1;\\ \dot{I}_{2\text{X}} &= A_{21}\dot{U}_1.\end{aligned}\right\}$$

Разделим первое уравнение этой системы на второе:

$$\dot{U}_{2\text{X}}/\dot{I}_{2\text{X}} = (U_{2\text{X}}/I_{2\text{X}})e^{j\varphi_{2\text{X}}},$$

откуда

$$Z_{2\text{X}} = \dot{U}_{2\text{X}}/\dot{I}_{2\text{X}} = A_{22}/A_{21}. \qquad (6.12)$$

Уравнения (6.9)–(6.12) образуют систему

$$\left.\begin{aligned}A_{11}/A_{21} = Z_{1\text{X}};\ \ A_{12}/A_{22} = Z_{1\text{K}};\\ A_{22}/A_{21} = Z_{2\text{X}};\ \ A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.\end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

Решив систему уравнений (6.13), определим все четыре *A*-параметра четырехполюсника:

$$A_{11} = A_{22}\frac{Z_{1\text{X}}}{Z_{2\text{X}}}; \qquad A_{12} = A_{22}Z_{1\text{K}}; \qquad A_{21} = \frac{A_{22}}{Z_{2\text{X}}}; \qquad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2\text{X}}}{Z_{1\text{X}} - Z_{2\text{K}}}}$$

Примечание. Для необратимых четырёхполюсников уравнение $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ в системе (6.13) можно заменить соотношением $Z_{2\text{K}} = A_{12}/A_{11}$.

6.4. Комплексное входное сопротивление четырёхполюсника

Комплексное входное сопротивление четырёхполюсника (рис. 6.6) можно получить, разделив первое уравнение системы (6.5) на второе.

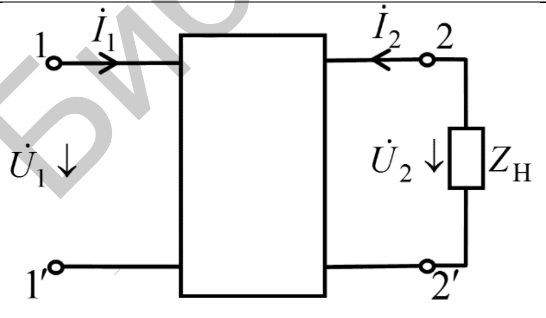


Рис. 6.6

$$Z_{\text{BX}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}(-\dot{I}_2)}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}(-\dot{I}_2)}$$

Так как $\dot{U}_2 = -\dot{I}_2 Z_\text{H}$, то

$$Z_{ВХ} = \frac{A_{11}Z_{Н} + A_{12}}{A_{21}Z_{Н} + A_{22}}. \qquad (6.14)$$

При $Z_{Н} = \infty$ (режим холостого хода) $Z_{Х} = \dfrac{A_{11}}{A_{21}}$.

При $Z_{Н} = 0$ (режим короткого замыкания) $Z_{К} = \dfrac{A_{12}}{A_{22}}$.

Произведение $Z_{К}Z_{Х} = \dfrac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}$ при симметричном четырёхполюснике (когда $A_{11}= A_{22}$) принимает вид

$$Z_{Х}Z_{К} = \frac{A_{12}}{A_{21}}. \qquad (6.15)$$

Воспользовавшись прил. 1, можно выразить *A*-параметры в формуле (6.15) через *Y*-, *Z*-параметры и др.

6.5. Комплексные передаточные функции четырёхполюсника

Для системы передачи, представленной на рис. 6.7, комплексная передаточная функция по напряжению, учитывающая внутреннее сопротивление источника, равна

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1 + Z_i\dot{I}_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}.$$

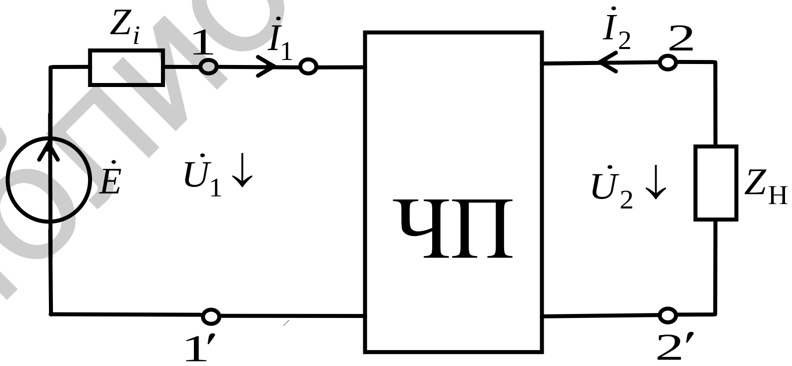


Рис. 6.7

Комплексная передаточная функция по напряжению, учитывающая сопротивление нагрузки, имеет вид

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Y_{21}}{1/Z_{Н} + Y_{22}}.$$

Комплексная передаточная функция по напряжению (или рабочий коэффициент передачи по напряжению), учитывающая как внутреннее сопротивление источника, так и сопротивление нагрузки, равна

$$K_{U_{\text{раб}}}(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{E}}=\frac{-Y_{21}}{(1+Y_{11}/Y_i)(Y_{12}+Y_{\text{Н}})}.$$

Номинальный рабочий коэффициент передачи активной мощности есть отношение активной мощности в нагрузке $P=U_2^2/r_{\text{Н}}$ к максимальной активной мощности $P_{O\max}=E^2/(4r_i)$:

$$K_{\text{раб}}=\frac{P}{P_{o\max}}=\frac{4r_iU_2^2}{r_{\text{Н}}E^2}=\frac{4r_i}{r_{\text{Н}}}\left|K_U(j\omega)\right|^2=\left|\hat{K}_U(j\omega)\right|^2,$$

где нормированная передаточная функция по напряжению

$$\hat{K}_U(j\omega)=2K_U(j\omega)\sqrt{\frac{r_i}{r_{\text{Н}}}}=2\frac{\dot{U}_2}{\dot{E}}\sqrt{\frac{r_i}{r_{\text{Н}}}}.$$

6.6. Характеристические параметры четырёхполюсника

6.6.1. Характеристическое сопротивление

Характеристическое (или согласованное) сопротивление $Z_{\text{С}}$ симметричного четырёхполюсника – такое сопротивление, при подключении которого к выходным зажимам 2–2′ (см. рис. 6.6), т. е. $Z_{\text{Н}}=Z_{\text{С}}$, входное сопротивление $Z_{\text{вх}}$ на зажимах 1–1′ будет равно $Z_{\text{С}}$.

Подставив в выражение (6.14) $Z_{\text{вх}}=Z_{\text{С}}$ и $Z_{\text{Н}}=Z_{\text{С}}$, для симметричного четырёхполюсника ($A_{11}=A_{22}$) получим

$$A_{21}Z_{\text{С}}^2=A_{12},\ \text{откуда}\ Z_{\text{С}}=\sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}.$$

Учитывая соотношение (6.15), получим

$$Z_{\text{С}}=\sqrt{Z_{\text{Х}}Z_{\text{К}}}.\qquad(6.16)$$

Формулы для расчёта сопротивлений холостого хода и короткого замыкания Т- и П-образного четырёхполюсников (рис. 6.8 и 6.9) приведены ниже.

Для Т-образного четырёхполюсника

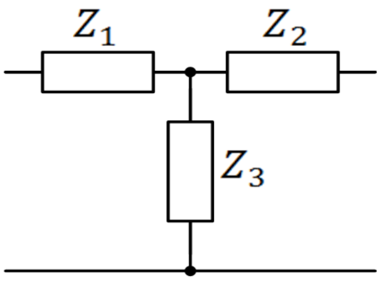


Рис. 6.8

$$\left.\begin{aligned} Z_X &= Z_1 + Z_3; \\ Z_K &= Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}; \end{aligned}\right\} \text{ со стороны входа}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_X &= Z_2 + Z_3; \\ Z_K &= Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} \end{aligned}\right\} \text{ со стороны выхода}$$

Для П-образного четырёхполюсника

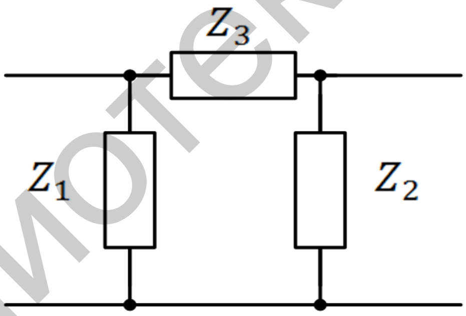


Рис. 6.9

$$\left.\begin{aligned} Z_X &= \frac{Z_1(Z_3 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \\ Z_K &= \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}; \end{aligned}\right\} \text{ со стороны входа}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_X &= \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \\ Z_K &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \end{aligned}\right\} \text{ со стороны выхода}$$

6.6.2. Характеристическая постоянная передачи

Характеристическая постоянная передачи согласованного четырёхполюсника по току $$g_с = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\cdot\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right]. \qquad (6.17)$$ При $\dot{U}_1 = -Z_C\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2 = -Z_C\dot{I}_2$ $$g_с = \frac{1}{2}\ln\frac{Z_C\dot{I}_1^{\,2}}{Z_C\dot{I}_2^{\,2}} = \ln\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}$$
Характеристическая постоянная передачи согласованного четырёхполюсника по напряжению $$g_с = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\frac{\frac{\dot{U}_1}{Z_C}}{\frac{\dot{U}_2}{Z_C}} = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$$ или $$e^{g_с} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{1}{K_U(j\omega)} = \frac{1}{K_I(j\omega)}$$
Характеристическое затухание и характеристическая фаза $$g_с = a_с + jb_с,$$ $$e^{g_с} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2}e^{\underbrace{j(\psi_1-\psi_2)}_{b_с}} = e^{a_с}e^{jb_с}.$$ Характеристическое затухание $$a_с = \ln\frac{U_1}{U_2} = \ln\frac{I_1}{I_2}\ [\text{Нп}]\ \text{или}\ [\text{дБ}].$$ Характеристическая фаза $$b_с = \psi_1 - \psi_2\ \ [\text{град}]\ \text{или}\ [\text{рад}]$$

Характеристическая постоянная передачи согласованного четырёхполюсника по мощности $$\frac{\dot U_1}{\dot U_2}\cdot\frac{\dot U_1}{\dot U_2}=e^{2a_c}e^{j2b_c};$$ $$\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}=\frac{S_1}{S_2}=e^{2a_c},$$ где S_1 и S_2 – полные мощности соответственно на входе и выходе четырёхполюсника. $$a_c=\frac{1}{2}\ln\frac{S_1}{S_2}\ [\text{Нп}];$$ $$a_c=20\frac{1}{2}\lg\frac{S_1}{S_2}=10\lg\frac{S_1}{S_2}\ [\text{дБ}]$$	
1 Нп = 8,686 дБ	1 дБ = 0,115 Нп

6.6.3. Рабочие параметры четырёхполюсников

Рабочая постоянная передачи $$g=a+jb=\ln\frac{1}{\hat K_U(j\omega)}=\ln\left\|\frac{1}{\hat K_U(\omega)}\right\|-j\varphi(\omega),$$ где $\hat K_U(j\omega)$ – нормированная передаточная функция четырёхполюсника по напряжению; $1/\hat K_U(j\omega)$ – рабочий коэффициент передачи. $$a=\ln\left\|\frac{1}{\hat K_U(\omega)}\right\|=\ln\frac{E}{2U_2}\sqrt{\frac{r_\text{Н}}{r_i}}$$ – рабочее затухание; $$b=-\varphi(\omega)=\psi_1(\omega)-\psi_2(\omega)$$ – рабочая фаза

6.7. Уравнения четырёхполюсника в гиперболических функциях

Для анализа электрических цепей с распределёнными параметрами (например, длинных линий) используют уравнения четырёхполюсника в гиперболических функциях.

Выразим *A*-параметр четырёхполюсника в уравнениях системы (6.5) через характеристическую постоянную передачи g_c, учитывая, что

$$\text{ch}\,g_c=\frac{e^{g_c}+e^{-g_c}}{2};\ \ \text{sh}\,g_c=\frac{e^{g_c}-e^{-g_c}}{2},$$

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= A_{11}\dot U_2 + A_{12}(-\dot I_2);\\ \dot I_1 &= A_{21}\dot U_2 + A_{22}(-\dot I_2).\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\dot U_1}{\dot U_2} = A_{11} + \frac{A_{12}(-\dot I_2)}{\dot U_2};$$

$$e^{g_\text{c}} \qquad\qquad\qquad -Z_C\dot I_2$$

$$e^{g_\text{c}} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_C};$$

$$\sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}$$

$$e^{g_\text{c}} = A_{11} + \sqrt{A_{21}A_{12}};$$

$$e^{-g_\text{c}} = \frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{21}A_{12}}} \cdot \frac{A_{11} - \sqrt{A_{21}A_{12}}}{A_{11} - \sqrt{A_{21}A_{12}}} = \frac{A_{11} - \sqrt{A_{21}A_{12}}}{A_{11}^2 - A_{21}A_{12}},$$

$$A_{11} = A_{22}$$

но $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{21} = 1$, тогда $e^{-g_\text{c}} = A_{11} - \sqrt{A_{21}A_{12}}$.

Так как $\begin{cases}\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ ch } x & \text{(косинус гиперболический);}\\[2mm] \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{ sh } x & \text{(синус гиперболический),}\end{cases}$

то $\begin{cases}\dfrac{e^{g_\text{c}} + e^{-g_\text{c}}}{2} = A_{11} = A_{22} = \text{ch } g_\text{c};\\[2mm] \dfrac{e^{g_\text{c}} + e^{-g_\text{c}}}{2} = A_{11} = A_{22} = \text{sh } g_\text{c}.\end{cases}$

$Z_C = \sqrt{\dfrac{A_{12}}{A_{21}}}$, но $A_{21} = \dfrac{A_{12}}{Z_\text{C}^2}$, тогда $\text{sh } g_\text{c} = \sqrt{A_{21}A_{12}} = \dfrac{A_{12}}{Z_\text{C}}$,

откуда $\boxed{A_{12} = Z_C \text{sh } g_\text{c}}$

$Z_C = \sqrt{\dfrac{A_{12}}{A_{21}}}$, но $A_{12} = Z_C^2 A_{21}$, тогда $\text{sh } g_\text{c} = \sqrt{A_{21}A_{12}} = Z_C A_{21}$,

откуда $\boxed{A_{21} = \dfrac{\text{sh } g_\text{c}}{Z_\text{C}}}$

Таким образом,

$$A_{11} = A_{22} = \mathrm{ch}\, g_{\text{c}};$$

$$A_{21} = \frac{\mathrm{sh}\, g_{\text{c}}}{Z_C};$$

$$A_{12} = Z_C \mathrm{sh}\, g_{\text{c}}.$$

Тогда уравнения ЧП в гиперболических функциях

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \mathrm{ch}\, g_{\text{c}} \dot{U}_2 + Z_C \mathrm{sh}\, g_{\text{c}} (-\dot{I}_2); \\ \dot{I}_1 &= \frac{\mathrm{sh}\, g_{\text{c}}}{Z_C} \dot{U}_2 + \mathrm{ch}\, g_{\text{c}} (-\dot{I}_2). \end{aligned}\right\}$$

6.8. Основные виды соединений согласованных четырёхполюсников

Основные виды соединений:
- каскадное (рис. 6.10);
- последовательное (рис. 6.11);
- параллельное (рис. 6.12);
- последовательно-параллельное (рис. 6.13);
- параллельно-последовательное (рис. 6.14).

Каскадное соединение

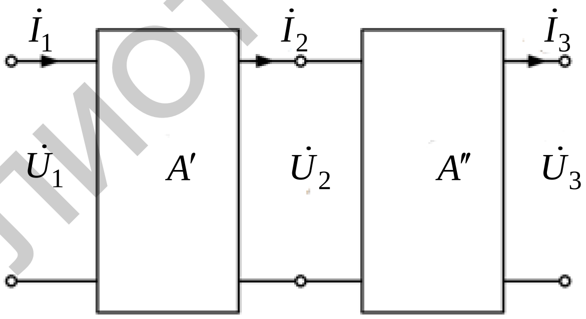


Рис. 6.10

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$

Последовательное соединение (по току)

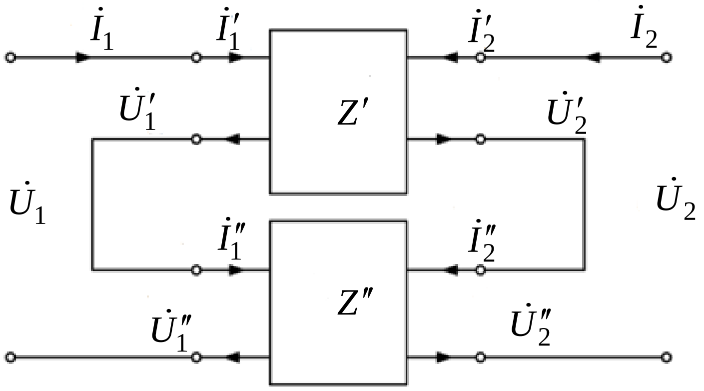


Рис. 6.11

Вход:
$\dot U_1 = \dot U_1' + \dot U_1''$;
$\dot I_1 = \dot I_1' = \dot I_1''$.

$$\begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot I_2 \end{bmatrix},$$

Выход:
$\dot U_2 = \dot U_2' + \dot U_2''$;
$\dot I_2 = \dot I_2' + \dot I_2''$.

где $\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix}$

Параллельное соединение (по напряжению)

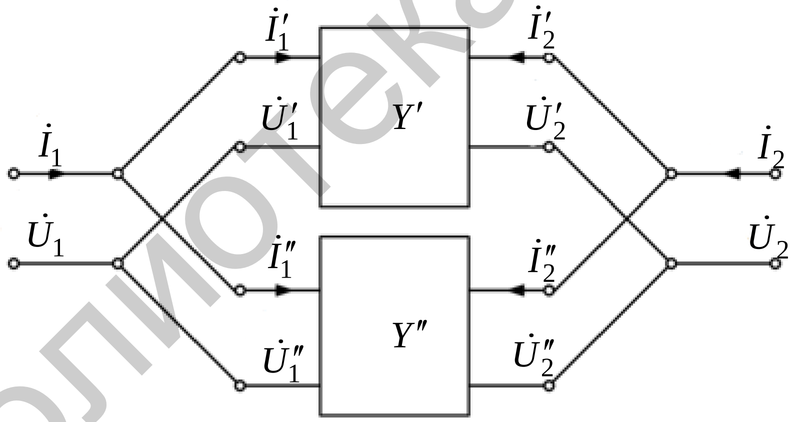


Рис. 6.12

Вход:
$\dot U_1 = \dot U_1' = \dot U_1''$;
$\dot I_1 = \dot I_1' + \dot I_1''$.

$$\begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix},$$

Выход:
$\dot U_2 = \dot U_2' = \dot U_2''$;
$\dot I_2 = \dot I_2' + \dot I_2''$.

где $\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11}'' & Z_{12}'' \\ Y_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix}$

Последовательно-параллельное соединение

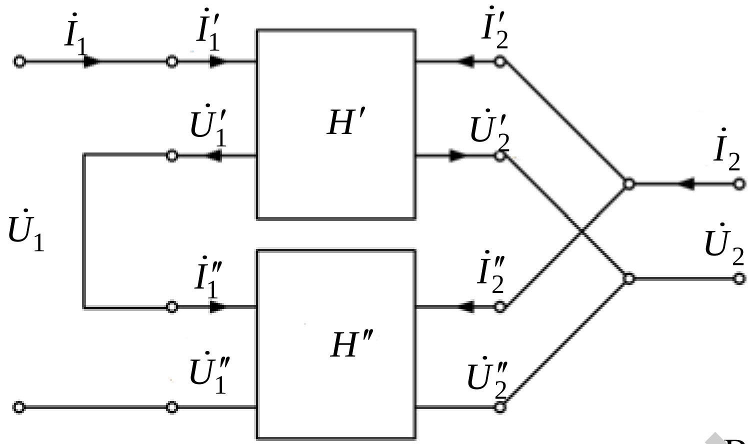


Рис. 6.13

Вход:
$\dot U_1 = \dot U_1' + \dot U_1''$;
$\dot I_1 = \dot I_1' = \dot I_1''$.

Выход:
$\dot U_2 = \dot U_2' = \dot U_2''$;
$\dot I_2 = \dot I_2' + \dot I_2''$.

$$\begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}' & H_{12}' \\ H_{21}' & H_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}'' & H_{12}'' \\ H_{21}'' & H_{22}'' \end{bmatrix}$

Параллельно-последовательное соединение

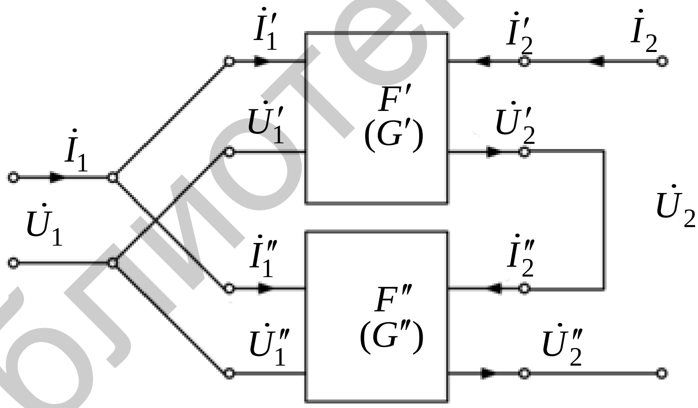


Рис. 6.14

Вход:
$\dot U_1 = \dot U_1' = \dot U_1''$;
$\dot I_1 = \dot I_1' + \dot I_1''$.

Выход:
$\dot U_2 = \dot U_2' + \dot U_2''$;
$\dot I_2 = \dot I_2' = \dot I_2''$.

$$\begin{bmatrix} \dot I_1 \\ \dot U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot U_1 \\ \dot I_2 \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}' & F_{12}' \\ F_{21}' & F_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11}'' & F_{12}'' \\ F_{21}'' & F_{22}'' \end{bmatrix}$

6.9. *Обратная связь в четырёхполюсниках*

В структурной схеме электрической цепи, представленной в виде однонаправленных четырёхполюсников, не нагружающих друг друга, сложение или вычитание сигналов изображают *сумматором* (рис. 6.15), разветвление сигналов изображают *узлом* (рис. 6.16).

При цепочечных соединениях однонаправленных четырёхполюсников (рис. 6.17) их коэффициенты передачи перемножаются, а параллельно включённых (рис. 6.18) – складываются.

<table>
<tr>
<td>Сумматор

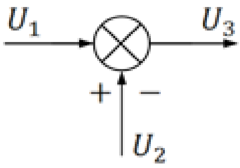



Рис. 6.15</td>
<td>Узел

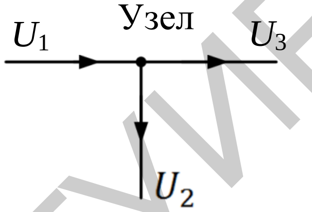
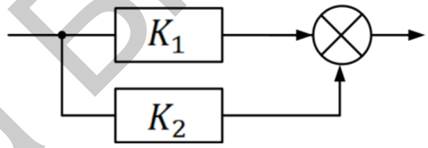



Рис. 6.16</td>
</tr>
<tr>
<td>
$K = K_1K_2$
Рис. 6.17</td>
<td>
$K = K_1 + K_2$
Рис. 6.18</td>
</tr>
</table>

В структурной схеме электрической цепи с обратной связью (рис. 6.19) $K_a(j\omega) = U_{\text{вых}}(j\omega)/U_1(j\omega)$ – коэффициент передачи активного четырёхполюсника без обратной связи; $K_{\text{ОС}}(j\omega) = U_{\text{ОС}}(j\omega)/U_{\text{вых}}(j\omega)$ – коэффициент передачи цепи обратной связи.

В формуле (6.18) произведение $K_a K_{\text{ОС}} = \dfrac{U_{\text{ОС}}}{U_1}$ называют *возвратным отношением*, а знаменатель $1 \mp K_a K_{\text{ОС}}$ – *возвратной разностью*.

Модуль возвратной разности $|1 \mp K_a K_{\text{ОС}}| >> 1$ называют *глубиной обратной связи*.

Если $|1 \mp K_a K_{\text{ОС}}| >> 1$, то $K \approx 1/K_{\text{ОС}}$ и обратную связь называют *глубокой*.

Обратную связь называют *положительной* (ПОС) при совпадении по фазе сигнала на входе цепи $U_{\text{вх}}$ и выходе цепи обратной связи $U_{\text{ОС}}$.

Если сигналы $U_{\text{ОС}}$ и $U_{\text{вх}}$ находятся в противофазе, то обратная связь *отрицательная* (ОСС).

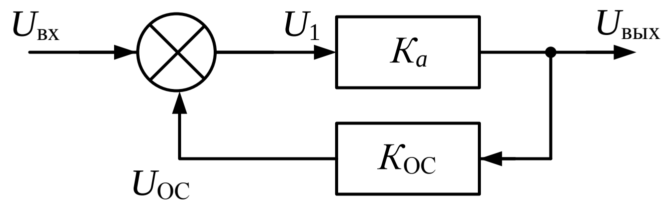


Рис. 6.19

При $U_1 = U_{вх} \pm U_{ОС}$

$$\downarrow$$

$$U_{вх} = U_1 \mp U_{ОС}$$

$$K = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{U_{вых}}{U_1 \mp U_{ОС}} = \frac{\dfrac{U_{вых}}{U_1}}{1 \mp \dfrac{U_{ОС}}{U_{вых}} \cdot \dfrac{U_{вых}}{U_1}} = \frac{K_a}{1 \mp K_a K_{ОС}}, \qquad (6.18)$$

где $\boxed{K_a K_{ОС} = \dfrac{U_{ОС}}{U_1}}$ – возвратное отношение

В общем случае возвратное отношение является функцией частоты и сдвиг по фазе между $U_{ОС}$ и $U_{вх}$ может быть в пределах от 0 до π. При этом обратную связь считают положительной, если возвратная разность в формуле (6.18) $\left|1 \mp K_a K_{ОС}\right| < 1$, а $\left|K\right| > \left|K_a\right|$, и отрицательной, если $\left|1 \mp K_a K_{ОС}\right| > 1$, а $\left|K\right| < \left|K_a\right|$.

Обратную связь называют *жёсткой*, когда передаточная функция цепи обратной связи не зависит от частоты: $K_{ОС}(j\omega) = K_{ОС}$.

Для более сложных структурных схем цепей с обратной связью (рис. 6.20) вначале определяется передаточная функция части схемы, в которую входят четырёхполюсники K_a и $K_{ОС}$:

$$K' = \frac{K_a}{1 \mp K_a K_{ОС}}.$$

Затем, учитывая, что четырёхполюсники $K_{пр}$ и $K_{вх}$ являются однонаправленными, записывают передаточную функцию всей цепи:

$$K = K' \cdot K_{вх} + K_{пр}.$$

С учётом формулы (6.18) передаточную функцию более сложной цепи с обратной связью (рис. 6.20) записывают формулой (6.19).

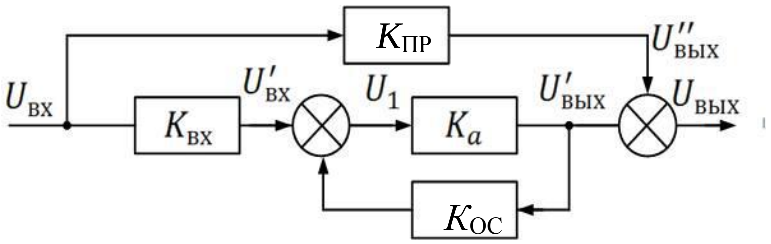


Рис. 6.20

Для пассивной цепи $K_{пр} = \dfrac{U''_{вых}}{U_{вх}}$,

для входной цепи $K_{вх} = \dfrac{U'_{вх}}{U_{вх}}$, тогда $K = \dfrac{U_{вых}}{U_{вх}} = \left\{\left[\dfrac{K_a}{1 \mp K_a K_{ОС}}\right] K_{вх} + K_{пр}\right\}$ (6.19)

6.10. Влияние обратной связи на характеристики цепи

6.10.1. Влияние обратной связи на коэффициент усиления цепи

Если $K_a(j\omega)$ и $K_{ОС}(j\omega)$ в схеме на рис. 6.19 не зависят от частоты входного сигнала и напряжение обратной связи отрицательно, то коэффициент усиления данной цепи

$$K = \frac{K_a}{1 - K_a K_{ОС}}. \qquad (6.20)$$

Изменяя в формуле (6.20) $K_{ОС}$ (при $K_a = \text{const}$), на рис. 6.21 строим график $K = f(K_{ОС})$.

$K_{ОС} = 0;$	$K = K_a;$
$K_{ОС} = \dfrac{1}{K_a};$	$K \to \infty;$
$K_{ОС} = \dfrac{2}{K_a};$	$K = -K_a;$
$K_{ОС} \to \infty;$	$K \to 0$

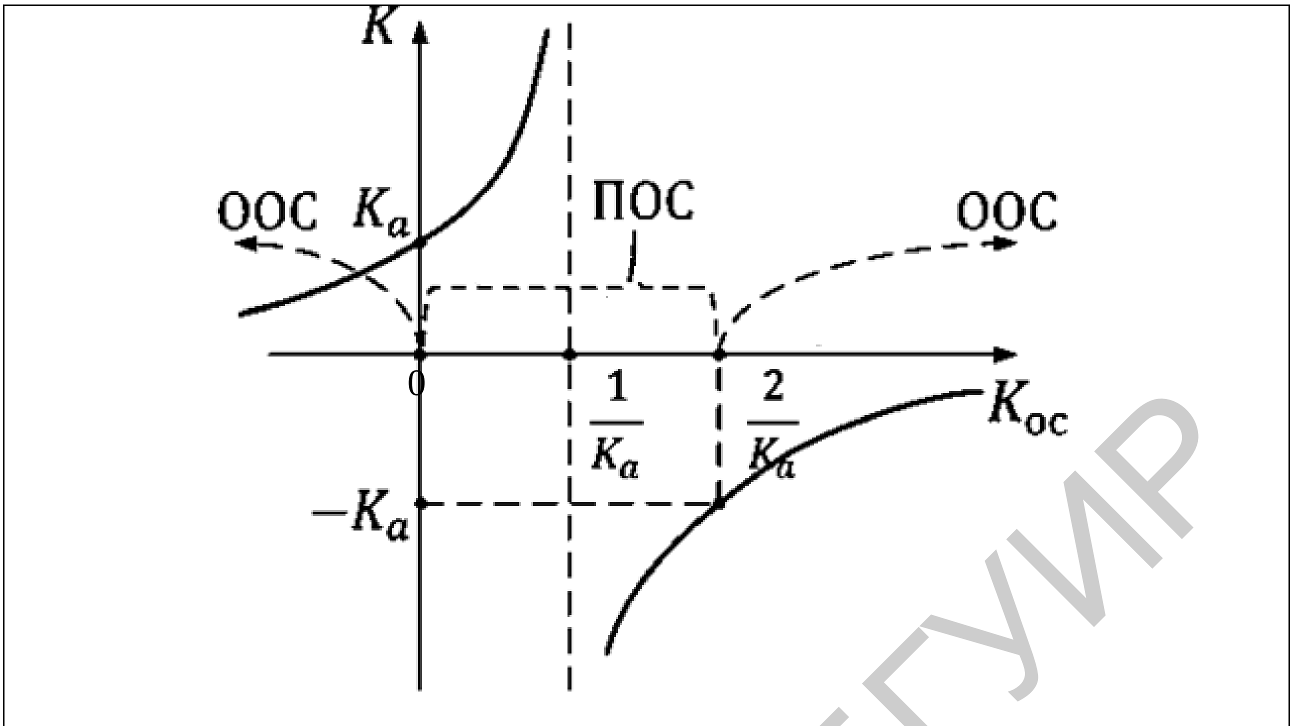


Рис. 6.21

Из графика на рис. 6.21 видно, что при $0 < K_{ОС} < \frac{2}{K_a}$ обратная связь положительна и $|K| > |K_a|$, а при $K_{ОС} < 0$ и $K_{ОС} > \frac{2}{K_a}$ – отрицательна и $|K| < |K_a|$.

6.10.2. Влияние изменения коэффициента усиления активной цепи на коэффициент усиления цепи с обратной связью

Если $K_a(j\omega)$ и $K_{ОС}(j\omega)$ в схеме на рис. 6.19 не зависят от частоты входного сигнала и напряжение обратной связи отрицательно, то коэффициент усиления цепи определяется по формуле (6.20).

Изменяя в формуле (6.20) K_a (при $K_{ОС}$ = const), строим график (рис. 6.22).

$$\begin{array}{|ll|} K_a = 0; & K = 0; \\ K_a = \dfrac{1}{K_{ОС}}; & K \to \infty; \\ K_a = \dfrac{2}{K_{ОС}}; & K = -\dfrac{2}{K_{ОС}}; \\ K_a \to \infty; & K \to -\dfrac{1}{K_{ОС}} \end{array}$$

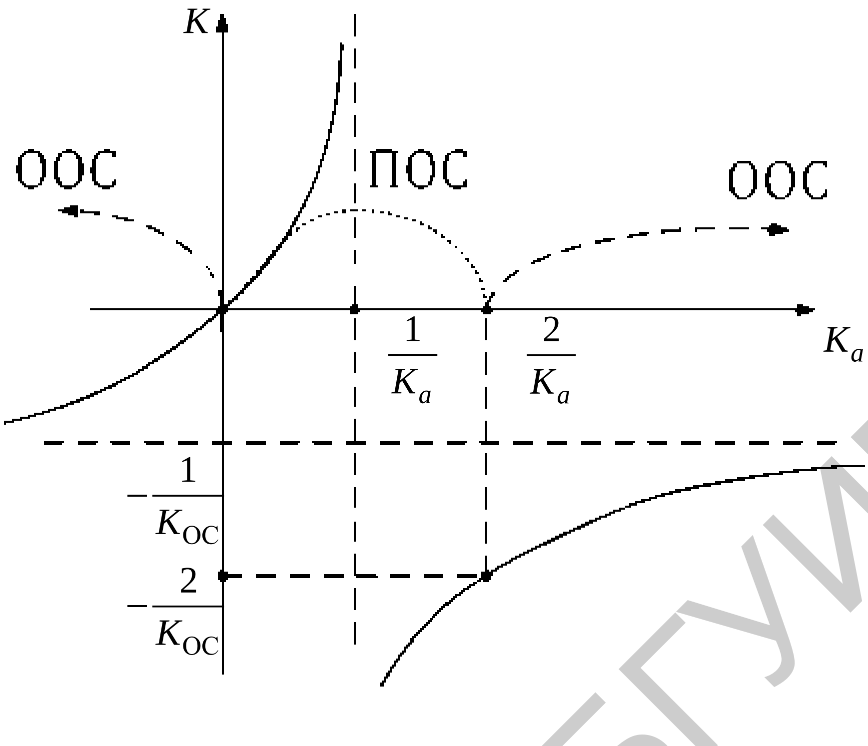


Рис. 6.22

Из графика на рис. 6.22 видно, что при $K_a > \dfrac{2}{K_{ОС}}$ и $K_a < 0$ обратная связь отрицательна и $|K| > |K_a|$, а при $0 < K_a < \dfrac{2}{K_{ОС}}$ – положительна и $|K| > |K_a|$.

6.10.3. Влияние нестабильности коэффициента усиления активной части цепи на стабильность коэффициента усиления цепи с обратной связью

Влияние нестабильности коэффициента усиления активной части цепи $K_a(j\omega)$ на стабильность коэффициента усиления цепи с обратной связью $K(j\omega)$ (см. рис. 6.19) характеризуется *чувствительностью* $S_{K_a}^{K}$, под которой понимают отношение относительного изменения величины $K(j\omega)$ к относительному изменению величины $K_a(j\omega)$:

$$S_{K_a}^{K} = \frac{d\,K/K}{d\,K_a/K_a} = \frac{K_a}{K}\frac{dK}{dK_a}. \qquad (6.21)$$

Подставив в выражение (6.21) формулу (6.20) и взяв производную, получим

$$S_{K_a}^{K} = 1/(1 - K_a K_{\text{OC}}). \tag{6.22}$$

Анализ соотношения (6.22) показывает, что ООС $(|1 - K_a K_{\text{OC}}| > 1)$ уменьшает чувствительность цепи $S_{K_a}^{K}$, а значит, улучшает стабильность коэффициента усиления цепи с обратной связью. ПОС $(|1 - K_a K_{\text{OC}}| < 1)$ ухудшает стабильность цепи.

Для повышения стабильности коэффициента усиления цепи применяют глубокую ООС $(|1 - K_a K_{\text{OC}}| >> 1)$. При этом стабильность коэффициента усиления цепи с обратной связью зависит только от стабильности цепи обратной связи.

6.10.4. Влияние обратной связи на характеристики интегрирующей цепи

Интегрирующая цепь (рис. 6.23) имеет комплексную передаточную функцию

$$K_a(j\omega) = \frac{K_a}{1 + j\omega\tau_{\text{ц}}}, \tag{6.23}$$

т. е. цепь является апериодической.

Схема интегрирующей цепи, охваченной жёсткой обратной связью $(K_{\text{OC}}(j\omega) = K_{\text{OC}})$, приведена на рис. 6.24.

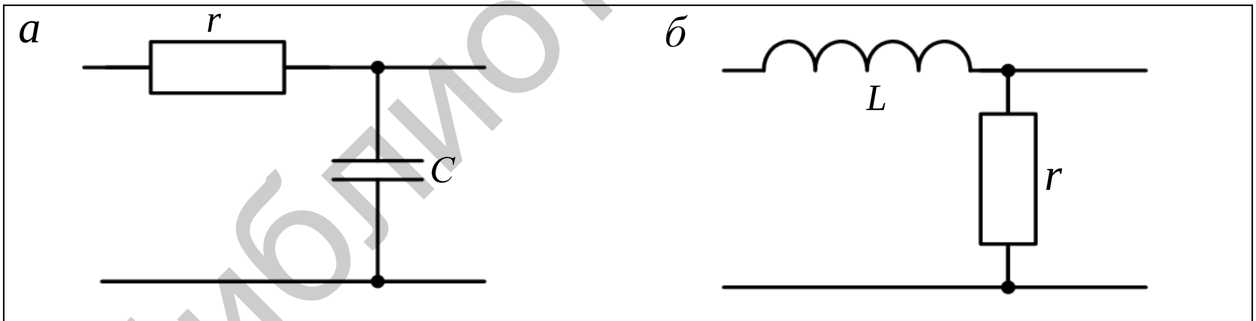


Рис. 6.23

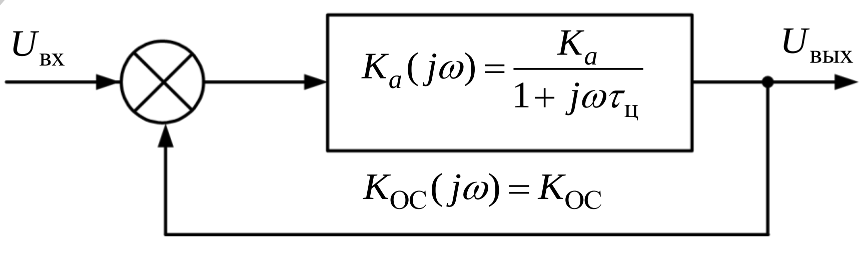


Рис. 6.24

Подставив соотношения (6.23) и $K_{\text{ОС}}(j\omega)=K_{\text{ОС}}$ в формулу (6.18), получим комплексную передаточную функцию интегрирующей цепи (6.24), охваченной жёсткой обратной связью:

$$K(j\omega)=\frac{\dfrac{K_a}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}}}{1\mp K_{\text{ОС}}\dfrac{K_a}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}}}=\frac{K_a}{\underbrace{1\mp K_{\text{ОС}}K_a}_{\text{Возвратная разность}}+j\omega\tau_{\text{ц}}}= \tag{6.24}$$

$$=\frac{\dfrac{K_a}{1\mp K_{\text{ОС}}K_a}}{1+j\omega\dfrac{\tau_{\text{ц}}}{1\mp K_{\text{ОС}}K_a}}=\frac{K_a'}{1+j\omega\tau_{\text{ц}}'}.$$

Соотношения (6.23) и (6.24) идентичны, т. е. при охвате апериодического звена (интегрирующей цепи) жёсткой обратной связью цепь остается апериодической, но изменяются её частотные характеристики.

При ООС K_a' и $\tau_{\text{ц}}'$ уменьшаются, а при ПОС – увеличиваются.

Поэтому для улучшения равномерности амплитудно-частотной характеристики интегрирующей цепи, охваченной жёсткой обратной связью, и расширения полосы пропускания применяют отрицательную обратную связь.

Приравняв модуль АЧХ цепи (6.24) к уровню $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,707$, получим граничную частоту полосы пропускания (6.25):

$$\frac{K_a'}{\sqrt{1+\omega^2(\tau_{\text{ц}}')^2}}=\frac{K_a'}{\sqrt{2}};$$

$$1+\omega^2(\tau_{\text{ц}}')^2=2;$$

$$\omega_{\text{гр}}=\frac{1}{\tau_{\text{ц}}'}=\frac{1}{\dfrac{\tau_{\text{ц}}}{1\mp K_aK_{\text{ОС}}}}. \tag{6.25}$$

График нормированной АЧХ цепи приведён на рис. 6.25.

$$\text{ООС: } |1\mp K_{\text{ОС}}K_a|>1 \quad \tau_{\text{ц}}\downarrow \quad \omega_{\text{гр}}\uparrow$$
$$\text{ПОС: } |1\mp K_{\text{ОС}}K_a|<1 \quad \tau_{\text{ц}}\uparrow \quad \omega_{\text{гр}}\downarrow$$

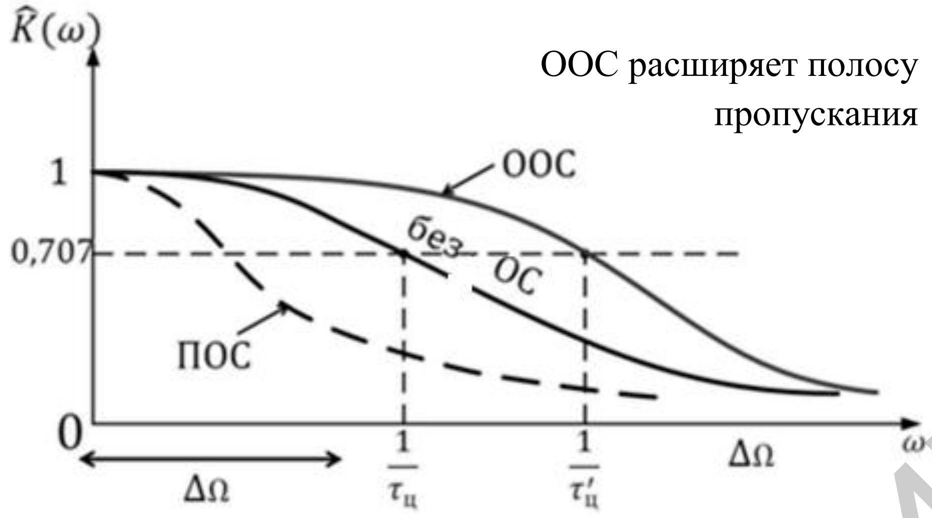


Рис. 6.25

Из рис. 6.25 видно, что ПОС сужает, а ООС расширяет полосу пропускания цепи.

6.10.5. Влияние обратной связи на характеристики дифференцирующей цепи

Дифференцирующая цепь (рис. 6.26) имеет комплексную передаточную функцию

$$K_a(j\omega) = \frac{K_a}{1 + \dfrac{1}{j\omega\tau_ц}} = \frac{K_a j\omega\tau_ц}{1 + j\omega\tau_ц}, \tag{6.26}$$

т. е. цепь является апериодической.

Схема дифференцирующей цепи, охваченной жёсткой обратной связью $(K_{ОС}(j\omega) = K_{ОС})$, приведена на рис. 6.27.

Из рис. 6.27 видно, что прямая цепь $K_a(j\omega)$ является апериодическим звеном, а передаточная функция цепи обратной связи $K_{ос}(j\omega)$ не зависит от частоты.

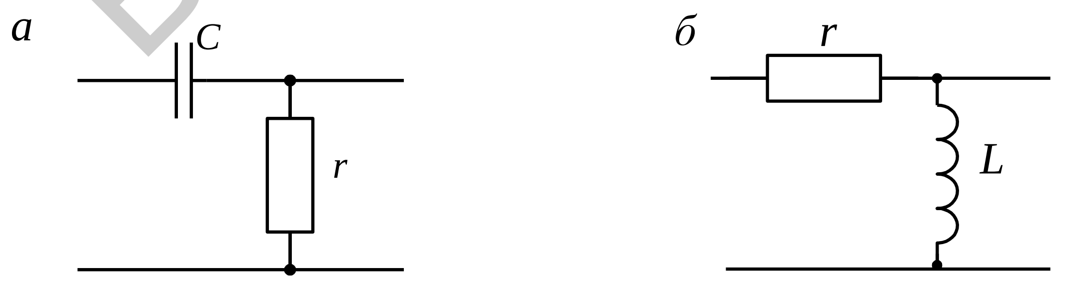


Рис. 6.26

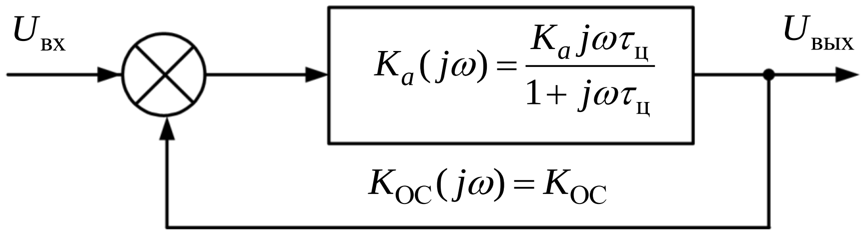


Рис. 6.27

Подставив соотношения (6.26) и $K_{OC}(j\omega)=K_{OC}$ в формулу (6.18), получим комплексную передаточную функцию (6.27) дифференцирующей цепи, охваченной жёсткой обратной связью.

$$K(j\omega)=\frac{K_a}{1\mp K_{OC}K_a}=\frac{\dfrac{K_a j\omega\tau_ц}{1+j\omega\tau_ц}}{1\mp\dfrac{K_{OC}K_a j\omega\tau_ц}{1+j\omega\tau_ц}}=$$

$$=\frac{K_a j\omega\tau_ц}{1\mp K_{OC}K_a j\omega\tau_ц+j\omega\tau_ц}=\frac{K_a}{\dfrac{1}{j\omega\tau_ц}+1\mp\underbrace{K_{OC}K_a}_{\text{Возвратная разность}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{K_a}{1\mp K_{OC}K_a}}{1+\dfrac{1}{j\omega\tau_ц(1\mp K_{OC}K_a)}}=\frac{K'_a}{1+\dfrac{1}{j\omega\tau'_ц}},$$

$$K(j\omega)=\frac{K'_a}{1+\dfrac{1}{j\omega\tau'_ц}} \qquad (6.27)$$

Соотношения (6.26) и (6.27) идентичны, т. е. при охвате дифференцирующей цепи жёсткой обратной связью цепь остаётся апериодической.

При ООС K_a' уменьшается, а $\tau'_ц$ возрастает, тогда как при ПОС K_a' возрастает, а $\tau_ц$' уменьшается.

Приравняв модуль АЧХ цепи (6.27) к уровню $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, получим граничную часть полосы пропускания (6.28).

$$\frac{K_a^{'}}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega_{\text{гр}}^2(\tau_{\text{ц}}^{'})^2}}} = \frac{K_a^{'}}{\sqrt{2}};$$

$$1+\frac{1}{\omega_{\text{гр}}^2(\tau_{\text{ц}}^{'})^2} = 2; \qquad \tau_{\text{ц}}^{'} = \tau_{\text{ц}}(1 \mp K_{\text{ОС}}K_a);$$

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{1}{\tau_{\text{ц}}^{'}} \qquad (6.28)$$

График нормированной АЧХ цепи приведён на рис. 6.28.

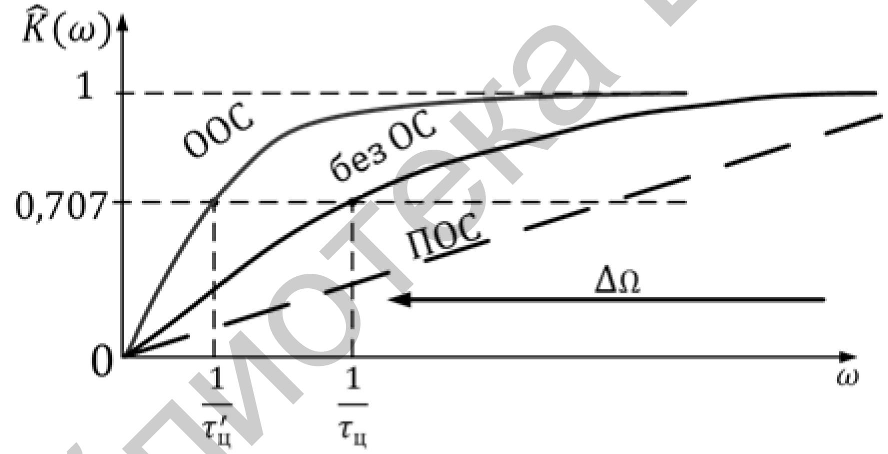


Рис. 6.28

Из рис. 6.28 следует, что ООС расширяет, а ПОС сужает полосу пропускания цепи.

7. Активные цепи

7.1. Эквивалентные схемы активных цепей

Активные электрические цепи содержат зависимые источники тока или напряжения (например, транзисторы, интегральные микросхемы и пр.).

Особенности активных цепей:

- в них возможно усиление сигналов по мощности (за счёт энергии источников, находящихся в цепях питания активных элементов);
- они, как правило, однонаправлены и необратимы, т. е. сигнал передаётся в одном направлении (например, $Z_{12} \neq Z_{21}$, $Y_{12} \neq Y_{21}$);
- они позволяют изменять знак сопротивлений цепи (например, с помощью активных сопротивлений и ёмкостей получать индуктивные сопротивления);
- они позволяют осуществлять операции суммирования, дифференцирования, интегрирования сигналов.

Методы анализа активных цепей:

1) метод, использующий эквивалентные схемы активных цепей;
2) матричный метод.

Первый метод осуществляется с применением *двух подходов*.

Первый подход. Один из них основан на представлении активной части цепи в виде четырёхполюсника. Например, биполярный транзистор (рис. 7.1–7.3) рассматривается как четырёхполюсник, параметры которого определяют с помощью одной из шести систем уравнений (6.3)–(6.8). Такой подход не требует рассмотрения внутренних физических процессов активных элементов цепи.

Биполярный транзистор с общим эмиттером

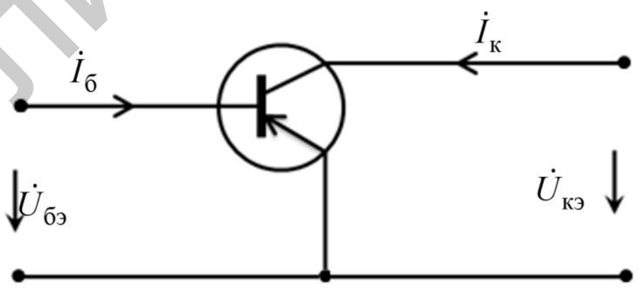


Рис. 7.1

Биполярный транзистор с общей базой

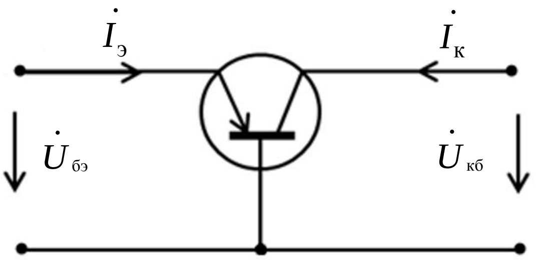


Рис. 7.2

Биполярный транзистор с общим коллектором

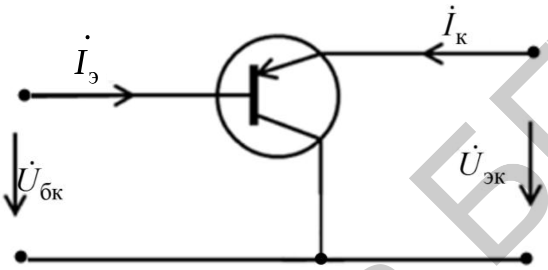


Рис. 7.3

Схемы замещения активных четырёхполюсников в соответствии с уравнениями в *Y*-, *Z*- и *H*-формах приведены на рис. 7.4–7.6.

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned}\right\}$$

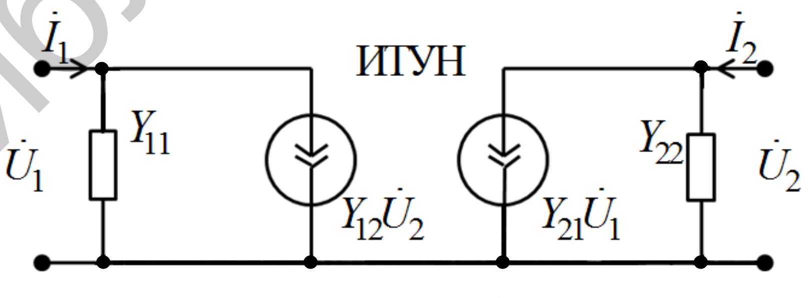


Рис. 7.4

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= Z_{11}\dot I_1 + Z_{12}\dot I_2;\\ \dot U_2 &= Z_{21}\dot I_1 + Z_{22}\dot I_2\end{aligned}\right\}$$

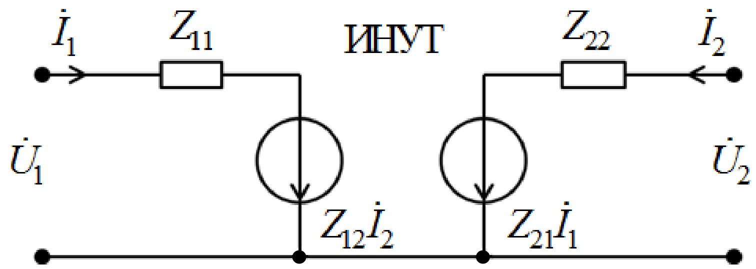


Рис. 7.5

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= H_{11}\dot I_1 + H_{12}\dot U_2;\\ \dot I_2 &= H_{21}\dot I_1 + H_{22}\dot U_2\end{aligned}\right\}$$

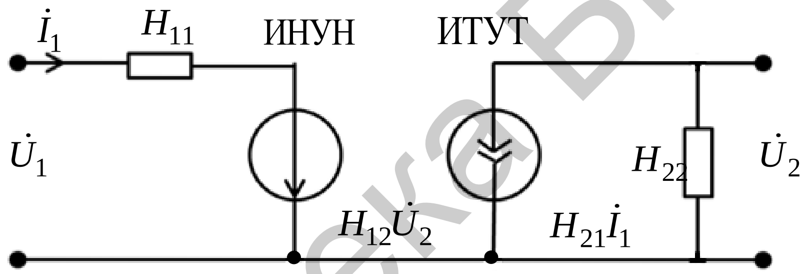


Рис. 7.6

На рис. 7.4 генератор тока $Y_{12}\dot U_2$ учитывает влияние $\dot U_2$ на входной ток $\dot I_1$, а генератор $\dot Y_{21}\dot U_1$ – на входной ток $\dot I_2$. Оба генератора являются зависимыми источниками тока, управляемыми напряжениями (сокращенно ИТУН).

На рис. 7.5 источник напряжения $Z_{12}\dot I_2$ учитывает влияние тока $\dot I_2$ на $\dot U_1$, а источник $Z_{21}\dot I_1$ – влияние $\dot I_1$ на $\dot U_2$. Оба генератора являются зависимыми источниками напряжения, управляемыми токами (сокращенно ИНУТ).

На рис. 7.6 источник напряжения $H_{12}\dot U_2$ учитывает влияние напряжения $\dot U_2$ на напряжение $\dot U_1$ (сокращенно ИНУН – источник напряжения, управляемый напряжением), а источник тока $H_{21}\dot I_1$ учитывает влияние тока $\dot I_1$ на ток $\dot I_2$ (сокращенно ИТУТ – источник тока, управляемый током).

Второй подход анализа активных цепей – использующий эквивалентные схемы – основан на учёте процессов, протекающих внутри активного электронного прибора.

Так, для биполярного транзистора (рис. 7.7) низкочастотная схема замещения с общей базой, содержащая зависимый источник ЭДС (ИНУТ), приведена на рис. 7.8, а схема, содержащая зависимый источник тока, – на рис. 7.9. Схемы замещения на рис. 7.8 и 7.9 учитывают физические параметры $r_э$, $r_б$, $r_к$ (активные сопротивления соответственно эмиттера, базы и коллектора транзистора) или проводимости $g_э, g_б, g_к$, а также α (коэффициент усиления транзистора по току).

Для анализа схем с транзистором применяют *H*-параметры.

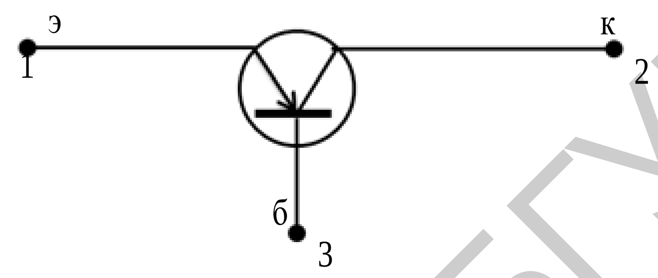


Рис. 7.7

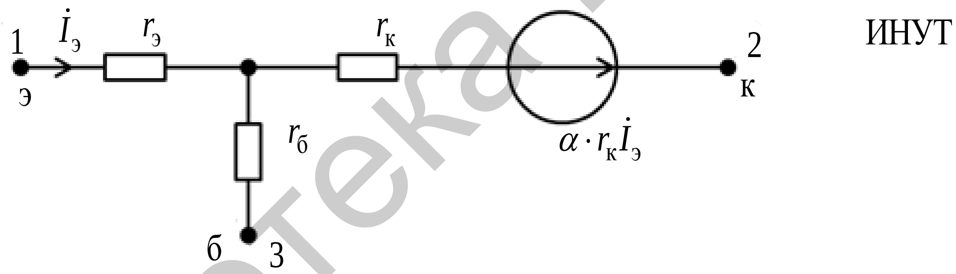


Рис. 7.8

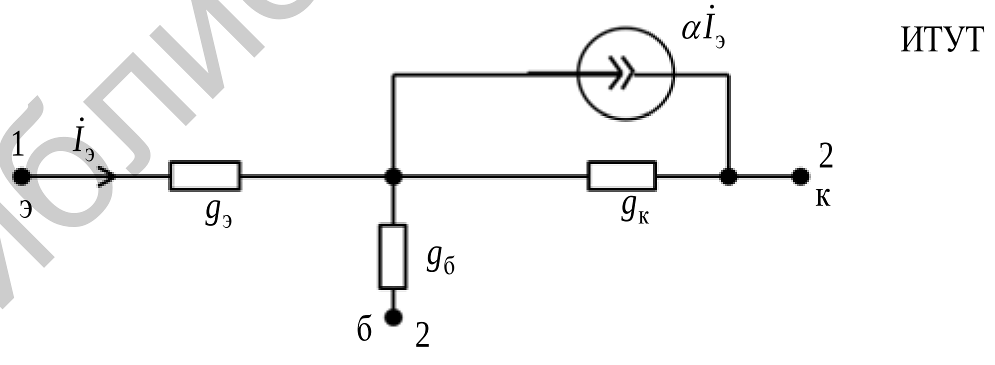


Рис. 7.9

Анализ активных схем с использованием эквивалентных схем нагляден, но громоздок и не позволяет формализовать решение.

Формализовать определение передаточных функций и частотных характеристик активных электрических цепей позволяет *матричный метод.*

7.2. Матричный метод анализа активных цепей

7.2.1. Неопределённая матрица проводимостей и её свойства

Матричный метод анализа активных электрических цепей основан на использовании узловых уравнений цепи.

Для электрической цепи, имеющей *n* узлов, система содержит *n* узловых напряжений:

$$\left.\begin{aligned}
Y_{11}\dot{\varphi}_1 + Y_{12}\dot{\varphi}_2 + \ldots + Y_{1n}\dot{\varphi}_n &= \dot{I}_1;\\
Y_{21}\dot{\varphi}_1 + Y_{22}\dot{\varphi}_2 + \ldots + Y_{2n}\dot{\varphi}_n &= \dot{I}_2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
Y_{n1}\dot{\varphi}_1 + Y_{n2}\dot{\varphi}_2 + \ldots + Y_{nn}\dot{\varphi}_n &= \dot{I}_n,
\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

где Y_{kn} – собственные (если $k = n$) и взаимные проводимости узлов; $\dot{\varphi}_k$ – потенциалы узлов; $\dot{J}_k$ – узловые токи.

Системе уравнений (7.1) соответствует неопределённая матрица проводимостей (7.2). Данную матрицу называют *неопределённой*, так как система (7.2) неразрешима, поскольку число неизвестных (потенциалы узлов) больше числа независимых уравнений. Система (7.2) становится разрешимой, если (согласно методу узловых потенциалов) один из узлов назначается базовым, его потенциал принимается за нулевой. Так, из системы (7.2) вычёркивается, например, при $\dot{\varphi}_3 = 0$ третий столбец и третья строка, и тогда получают *определённую* матрицу проводимостей (7.3).

Неопределённая матрица проводимостей

$$[Y_{\text{Н}}] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{2n} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3} & Y_{n4} & Y_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

Определённая матрица проводимостей при $\dot{\varphi}_3 = 0$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

Неопределённая матрица проводимостей (7.2) имеет свойства, облегчающие её составление и позволяющие проверять правильность её составления.

Свойство 1. Алгебраическая сумма элементов каждого столбца равна нулю

Пусть $\dot{\varphi}_1 \neq 0,$ тогда система уравнений (7.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} Y_{11}\dot{\varphi}_1 &= \dot{I}_1; \\ Y_{21}\dot{\varphi}_1 &= \dot{I}_2; \\ &\dots\dots\dots \\ Y_{n1}\dot{\varphi}_1 &= \dot{I}_n, \end{aligned}\right\} \quad \text{откуда } (Y_{11} + Y_{21} + \dots + Y_{n1})\dot{\varphi}_1 = \underbrace{\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots \dot{I}_n}_{0},$$

но $\dot{\varphi}_1 \neq 0$ и в соответствии с первым законом Кирхгофа

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} Y_{kj} = 0} \tag{7.4}$$

Свойство 2. Алгебраическая сумма элементов каждой строки равна нулю

Пусть потенциалы всех узлов увеличились на постоянную величину $\dot{\varphi}_0$, тогда первое уравнение системы (7.1) примет вид

$$Y_{11}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_0) + Y_{12}(\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_0) + \dots + Y_{1n}(\dot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_0) = \dot{I}_1.$$

После группировки

$$\underbrace{(Y_{11}\dot{\varphi}_1 + Y_{12}\dot{\varphi}_2 + \dots + Y_{1n}\dot{\varphi}_n)}_{\dot{I}_1} + \underbrace{(Y_{11} + Y_{12} + \dots + Y_{1n})}_{0}\dot{\varphi}_0 = \dot{I}_1,$$

но $\dot{\varphi}_0 \neq 0,$ тогда

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} Y_{jk} = 0} \tag{7.5}$$

Матрицу проводимостей, обладающую свойствами 1 и 2, называют *особенной*. Её определитель равен нулю.

7.2.2. Метод короткого замыкания

Способ определения собственных и взаимных проводимостей узлов неопределённой матрицы (7.1), пригодный как для активных, так и для пассивных электрических цепей, называют *методом короткого замыкания*.

Суть метода. Для электрической цепи, содержащей n узлов, можно составить n узловых уравнений (см. формулу (7.1)). Для k-го узла уравнение имеет вид

$$Y_{k1}\dot{\varphi}_1 + Y_{k2}\dot{\varphi}_2 + ... + Y_{kj}\dot{\varphi}_j + ... + Y_{kn}\dot{\varphi}_n = \dot{J}_k. \tag{7.6}$$

Из этого уравнения видно, что ток k-го узла определяется наложением частичных токов, вызванных каждым из приложенных потенциалов $\dot{\varphi}_1,\ \dot{\varphi}_2,\ ...\ ,\ \dot{\varphi}_n,$ действующих независимо друг от друга. Поэтому проводимость Y_{kj} можно определить, если все узлы заземлить, а к узлу j подключить источник ЭДС $\dot{\varphi}_j$. Тогда из уравнения (7.6) получаем

$$\boxed{Y_{kj} = \frac{\dot{J}_k}{\dot{\varphi}_j}}, \tag{7.7}$$

где первый индекс k у проводимости Y_{kj} относится к току, а второй j – к потенциалу узла.

При $\dot{\varphi}_j = 1$ В Y_{kj} численно равна $\dot{J}_k$.

7.2.3. Неопределённая матрица проводимостей транзистора

С помощью метода короткого замыкания составим неопределённую матрицу проводимостей транзистора с общей базой (см. рис. 7.9).

Поскольку узлов в схеме на рис. 7.9 четыре, то неопределённая матрица проводимостей будет содержать четыре столбца и четыре строки. Элементы первых трёх столбцов и строк найдём методом короткого замыкания, а элементы четвёртого столбца и четвёртой строки получим, используя свойства (7.4) и (7.5) неопределённой матрицы проводимостей.

Для упрощения разделим схему, приведённую на рис. 7.9, на две части: активную (рис. 7.10, *а*) и пассивную (рис. 7.10, *б*).

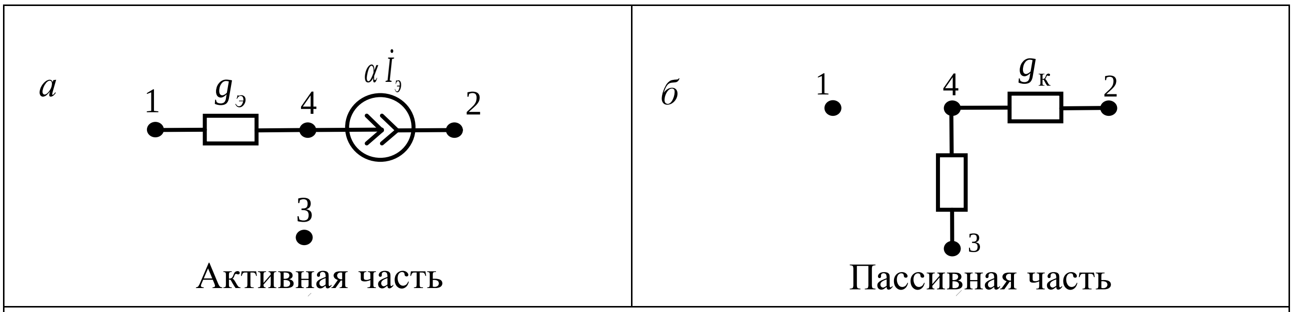


Рис. 7.10

Найдём неопределённую матрицу проводимостей $\left[Y_{\text{Н акт}}\right]$ активной части схемы (см. рис. 7.10, *а*).

Согласно методу короткого замыкания, подключив источник ЭДС $\dot{\varphi}_1$ к узлу 1 и заземлив остальные узлы, получим схему, приведённую на рис. 7.11.

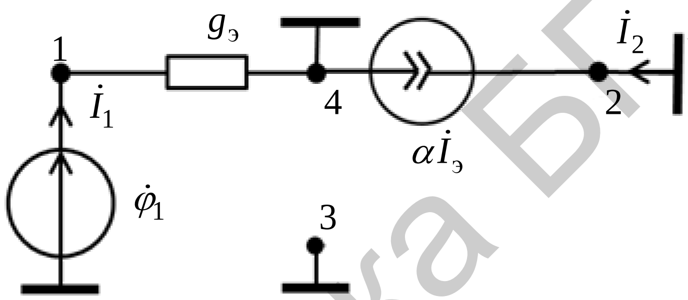


Рис. 7.11

Для этой схемы элементы первого столбца матрицы равны:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{\varphi}_1} = \frac{g_э \dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_1} = g_э. \quad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{\varphi}_1} = -\frac{\alpha g_э \dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_1} = -\alpha g_э.$$

$$Y_{31} = \frac{\dot{I}_3}{\dot{\varphi}_1} = \frac{0}{\dot{\varphi}_1} = 0. \quad Y_{41} = \frac{\dot{I}_4}{\dot{\varphi}_1} = \frac{-g_э \dot{\varphi}_1 + \alpha \dot{I}}{\dot{\varphi}_1} = (\alpha - 1) g_э$$

Далее, подключив источник ЭДС $\dot{\varphi}_2$ к узлу 2 и заземлив остальные узлы, получим схему, приведённую на рис. 7.12.

При этом сила токов всех узлов равна нулю, так как $\alpha i_э = 0$. Следовательно, $Y_{12} = Y_{22} = Y_{32} = Y_{42} = 0$.

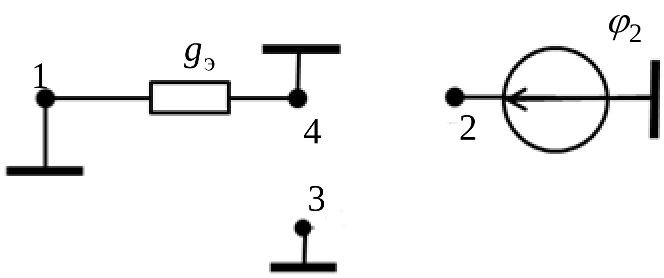


Рис. 7.12

Для этой схемы элементы второго столбца матрицы равны:

$$Y_{12}=\frac{\dot I_1}{\dot\varphi_2}=\frac{0}{\dot\varphi_2}=0.\quad Y_{22}=\frac{\dot I_2}{\dot\varphi_2}=\frac{0}{\dot\varphi_2}=0.$$

$$Y_{32}=\frac{\dot I_3}{\dot\varphi_2}=\frac{0}{\dot\varphi_2}=0.\quad Y_{42}=\frac{\dot I_4}{\dot\varphi_2}=\frac{0}{\dot\varphi_2}=0$$

Подключив источник ЭДС $\dot\varphi_3$ к узлу 3 и заземлив остальные узлы, получим схему, приведённую на рис. 7.13.

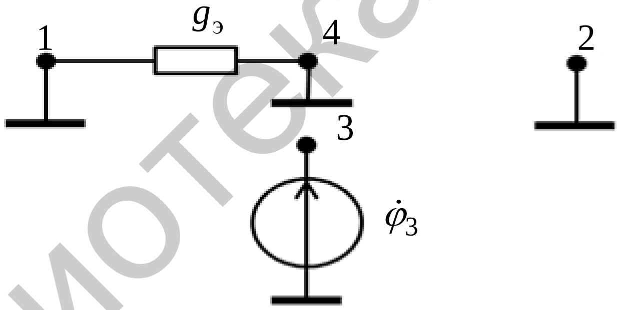


Рис. 7.13

Для этой схемы элементы третьего столбца матрицы равны:

$$Y_{13}=\frac{\dot I_1}{\dot\varphi_3}=0.\quad Y_{23}=\frac{\dot I_2}{\dot\varphi_3}=0.$$

$$Y_{33}=\frac{\dot I_3}{\dot\varphi_3}=0.\quad Y_{43}=\frac{\dot I_4}{\dot\varphi_3}=0$$

В результате неопределенная матрица проводимостей $\left[Y_{\text{Н акт}}\right]$ активной части схемы (см. рис. 7.10, *а*) будет следующая:

$$[Y_{\text{Н акт}}] = \begin{bmatrix} g_э & 0 & 0 & -g_э \\ -\alpha g_э & 0 & 0 & \alpha g_э \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1-\alpha)g_э & 0 & 0 & (1-\alpha)g_э \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

В матрице (7.8) элементы четвертого столбца получены с помощью свойства (7.4), а элементы четвертой строки – с помощью свойства (7.5) неопределённой матрицы проводимостей.

Найдём неопределённую матрицу проводимостей $[Y_{\text{Н пас}}]$ пассивной части схемы (см. рис. 7.10, *б*).

Для этого, согласно методу короткого замыкания, подключив источник ЭДС $\dot{\varphi}_1$ к узлу 1 и заземлив остальные узлы, получим схему, приведённую на рис. 7.14.

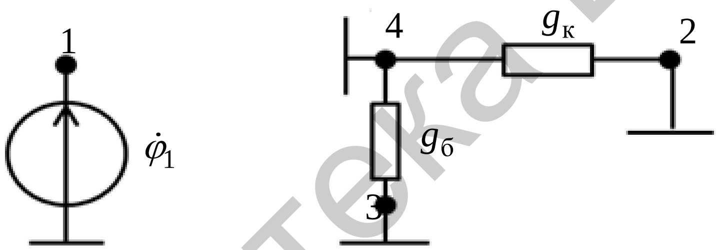


Рис. 7.14

Для этой схемы элементы первого столбца матрицы равны:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{\varphi}_1} = 0;$$

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{\varphi}_1} = 0;$$

$$Y_{31} = \frac{\dot{I}_3}{\dot{\varphi}_1} = 0$$

Далее, подключив источник ЭДС $\dot{\varphi}_2$ к узлу 2 и заземлив остальные узлы, получим схему, приведённую на рис. 7.15.

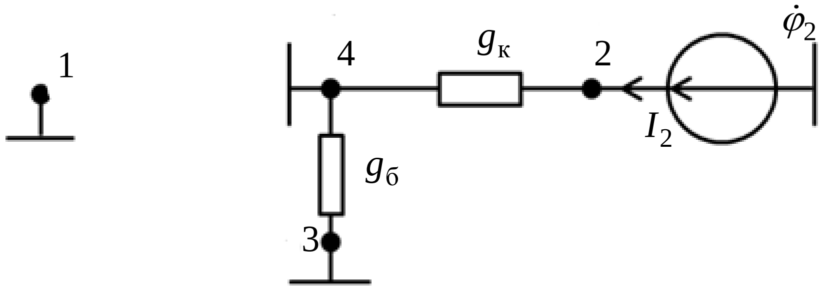


Рис. 7.15

Для этой схемы элементы второго столбца матрицы равны:

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{\varphi}_2} = 0;$$

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{\varphi}_2} = \frac{g_к \dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_2} = g_к;$$

$$Y_{32} = \frac{\dot{I}_3}{\dot{\varphi}_2} = 0$$

Подключив источник ЭДС $\dot{\varphi}_3$ к узлу 3 и заземлив остальные узлы, получим схему, приведённую на рис. 7.16.

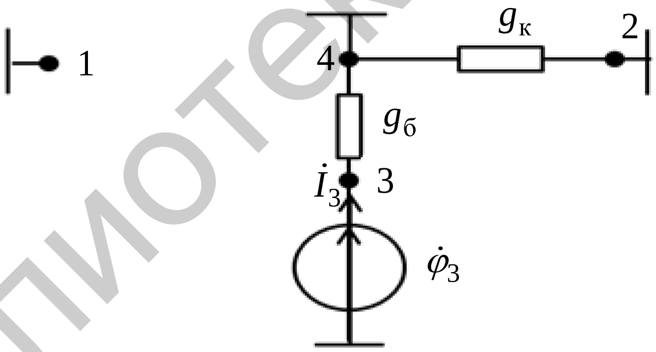


Рис. 7.16

Для этой схемы элементы третьего столбца матрицы равны:

$$Y_{13} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{\varphi}_3} = 0;$$

$$Y_{23} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{\varphi}_3} = 0;$$

$$Y_{33} = \frac{\dot{I}_3}{\dot{\varphi}_3} = \frac{g_б \dot{\varphi}_3}{\dot{\varphi}_3} = g_б$$

В результате неопределённая матрица проводимостей $\left[Y_{\text{Н пас}}\right]$ пассивной части схемы (см. рис. 7.10, *б*) будет следующая:

$$\left[Y_{\text{Н пас}}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{\text{к}} & 0 & -g_{\text{к}} \\ 0 & 0 & g_{\text{б}} & -g_{\text{б}} \\ 0 & -g_{\text{к}} & -g_{\text{б}} & g_{\text{к}}+g_{\text{б}} \end{bmatrix}. \qquad (7.9)$$

В матрице (7.9) элементы четвёртого столбца получены с помощью свойства (7.4), а элементы четвёртой строки – с помощью свойства (7.5) неопределённой матрицы проводимостей.

В итоге неопределённая матрица проводимостей транзистора, приведённого на рис. 7.9, равна сумме двух матриц (7.8) и (7.9).

$$\left[Y_{\text{Н акт}}\right]+\left[Y_{\text{Н пас}}\right]=\left[Y_{\text{Н}}\right]$$

$$\left[Y_{\text{Н}}\right]=\begin{bmatrix} g_{\text{э}} & 0 & -g_{\text{э}} \\ -\alpha g_{\text{э}} & g_{\text{к}} & \alpha g_{\text{э}}-g_{\text{к}} \\ -(1-\alpha)g_{\text{э}} & -g_{\text{к}} & g_{\text{к}}+g_{\text{б}}+(1-\alpha)g_{\text{э}} \end{bmatrix}. \qquad (7.10)$$

Заземлив третий узел, получим определённую матрицу

$$\left[Y\right]=\begin{bmatrix} g_{\text{э}} & 0 & -g_{\text{э}} \\ -\alpha g_{\text{э}} & g_{\text{к}} & \alpha g_{\text{э}}-g_{\text{к}} \\ -(1-\alpha)g_{\text{э}} & -g_{\text{к}} & g_{\text{к}}+g_{\text{б}}+(1-\alpha)g_{\text{э}} \end{bmatrix} \qquad (7.11)$$

7.3. Гиратор

Гиратор – это такой активный четырёхполюсник, реактивное входное сопротивление которого имеет знак, обратный знаку реактивного сопротивления, подключённого к его выходу.

В частности, если к выходу гиратора подключить конденсатор, то входное его сопротивление будет иметь индуктивный характер (рис. 7.17). Обобщённая схема гиратора приведена на рис. 7.18, эквивалентная – на рис. 7.4.

Рис. 7.17

Рис. 7.18

Для анализа гиратора используем систему Y-параметров (7.12), полагая, что $Z_{11} = r_{11}$, $Z_{12} = r_{12}$, $Z_{21} = r_{21}$, $Z_{22} = r_{22}$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned}\right\} \quad (7.12)$$

Входная проводимость гиратора (см. рис. 7.18) равна $Y_{вх} = \dot{I}_1/\dot{U}_1$.

Разделив первое уравнение системы (7.12) на $\dot{U}_1$, получим

$$Y_{вх} = Y_{11} + Y_{12}\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}. \quad (7.13)$$

Для определения соотношения $\dot{U}_2/\dot{U}_1$, разделив второе уравнение системы (7.12) на $\dot{U}_1$ и учитывая, что $\dot{I}_2 = -\dot{U}_2 Y_Н$, получим $-Y_Н\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = Y_{21} + Y_{22}\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, откуда

$$\dot{U}_2/\dot{U}_1 = -Y_{21}/(Y_{22} + Y_Н). \quad (7.14)$$

Подставив равенство (7.14) в уравнение (7.13), получим

$$Y_{вх} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_Н}. \quad (7.15)$$

При $Y_{11} \approx 0,\ Y_{22} \approx 0$

$$\boxed{Y_{вх} = -\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_Н}};$$

$$Y_{вх} = \frac{1}{j\omega L} \qquad Y_Н = j\omega C$$

$$\frac{1}{j\omega L} = -\frac{Y_{12}Y_{21}}{j\omega C};$$

$$\boxed{L_{\text{экв}} = -\frac{C}{Y_{12}Y_{21}}}. \qquad (7.16)$$

Так как величины C и $L_{\text{экв}}$ положительны, то для выполнения условия (7.16) Y_{12} и Y_{21} должны быть различны по знаку, при этом Y-матрица гиратора имеет вид

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & -Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

или

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} \\ -g_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

откуда уравнения гиратора записывают следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= -Y_{21}\dot{U}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.17)$$

Из уравнения (7.17) следует, что для реализации гиратора необходимы два зависимых источника. При построении гиратора на основе Y-матрицы требуется два зависимых источника тока ($Y_{21}\dot{U}_1$ и $Y_{12}\dot{U}_2$), управляемых напряжениями $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ соответственно.

Согласно системе (7.17) эквивалентная схема гиратора приведена на рис. 7.19.

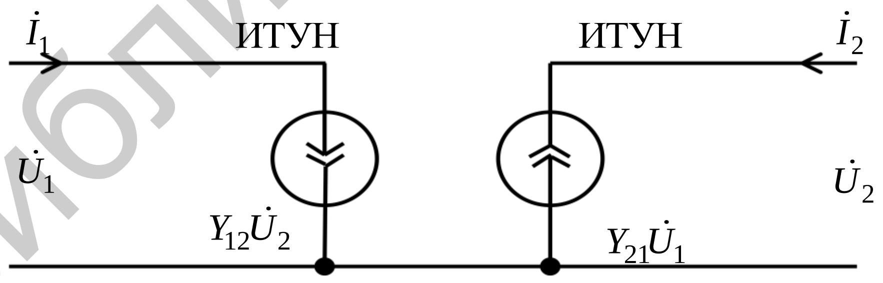


Рис. 7.19

Возможны также схемы, основанные на ИНУН и ИТУТ, т. е. на использовании H-матрицы.

8. Электрические фильтры

8.1. Классификация фильтров

Электрическим фильтром называют четырёхполюсник, через который электрические колебания одних частот проходят с малым затуханием, а других – с большим.

Диапазон частот, в пределах которого затухание не превышает некоторого установленного значения, называют *полосой пропускания* (или *прозрачности*) фильтра, а диапазон частот, где затухание меньше некоторого заданного значения, – *полосой затухания* (или *задерживания*).

Классификация электрических фильтров

По расположению полос пропускания и затухания электрические фильтры подразделяются на:

- ФНЧ – фильтры нижних частот (рис. 8.1);
- ФВЧ – фильтры верхних частот (рис. 8.2);
- ПФ – полосовые фильтры (рис. 8.3);
- ЗФ (РФ) – заграждающие (режекторные) фильтры (рис. 8.4).

На рис. 8.1–8.4 показаны нормированные АХЧ (амплитудно-частотные характеристики) идеальных фильтров, где заштрихованы области частот, пропускаемых фильтрами; $\omega_{\text{с}}, \omega_{\text{с}1}(\omega_{\text{гр}1}), \omega_{\text{с}2}(\omega_{\text{гр}2})$ – частоты среза (граничные), определяющие полосу пропускания фильтра.

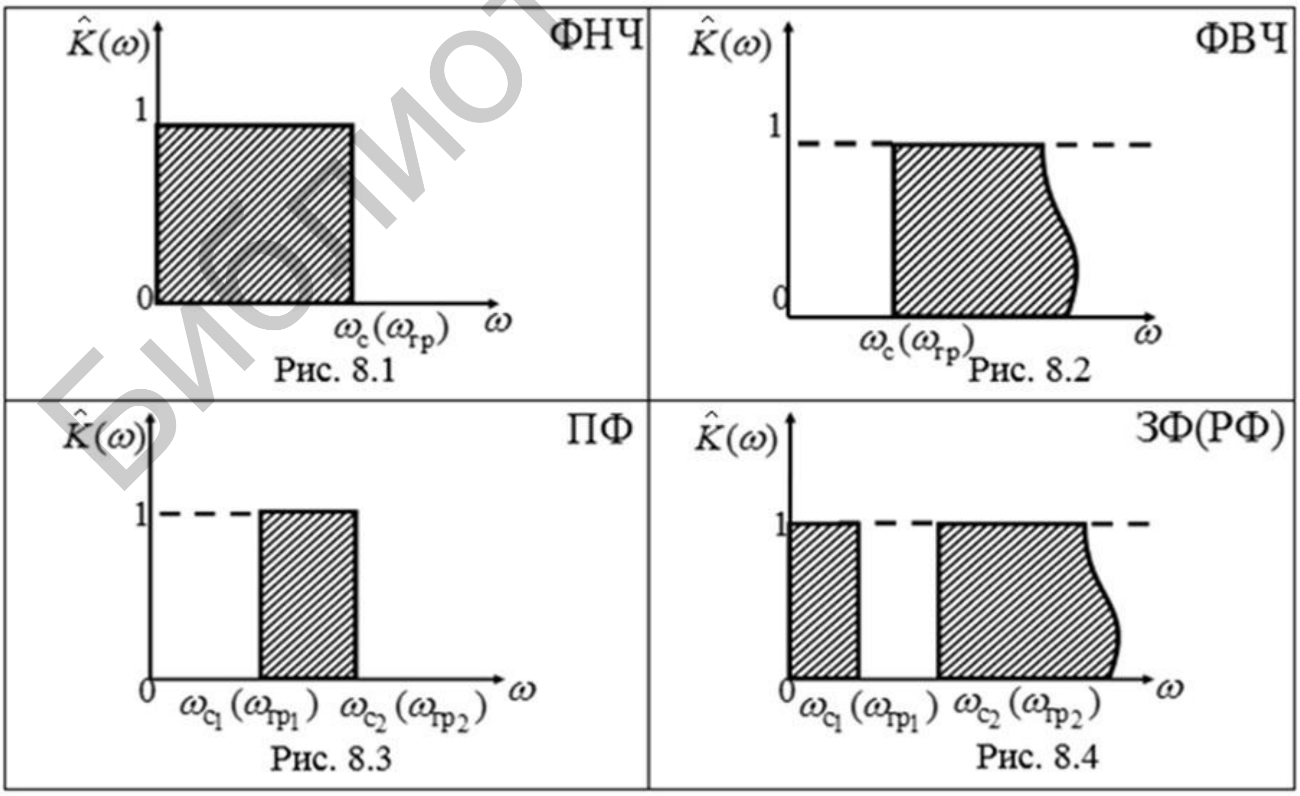


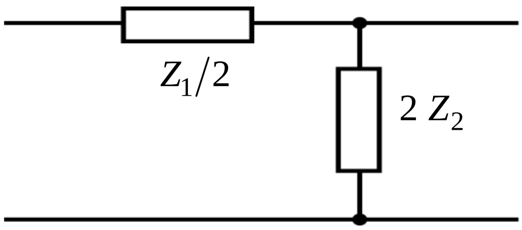
Рис. 8.1

Рис. 8.2

Рис. 8.3

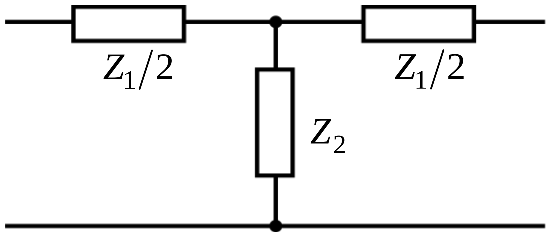
Рис. 8.4

По схемам электрические фильтры могут быть Г-, Т- , П-образными и мостовыми четырёхполюсниками (рис. 8.5–8.8 соответственно).



«Г»

Рис. 8.5



«Т»

Рис. 8.6

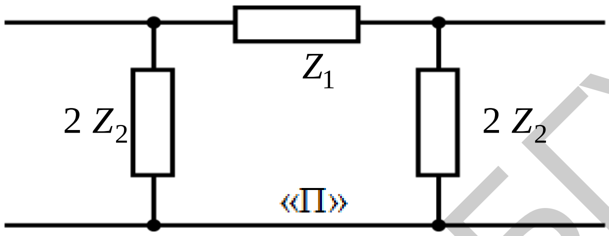


Рис. 8.7

Мостовая схема

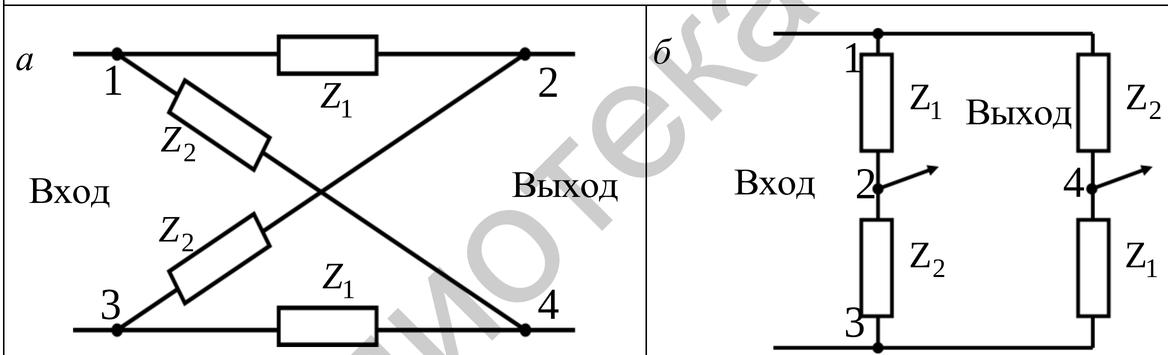


Рис. 8.8

Значения сопротивлений в схеме на рис. 8.5 и 8.6 ($Z_1/2$ и Z_2) и в схеме на рис. 8.7 (Z_1 и $2Z_2$) приняты такими для того, чтобы при стыковке следующих каскадов сопротивление продольного плеча фильтра оставалось равным Z_1 (рис. 8.9), а поперечного – Z_2 (рис. 8.10).

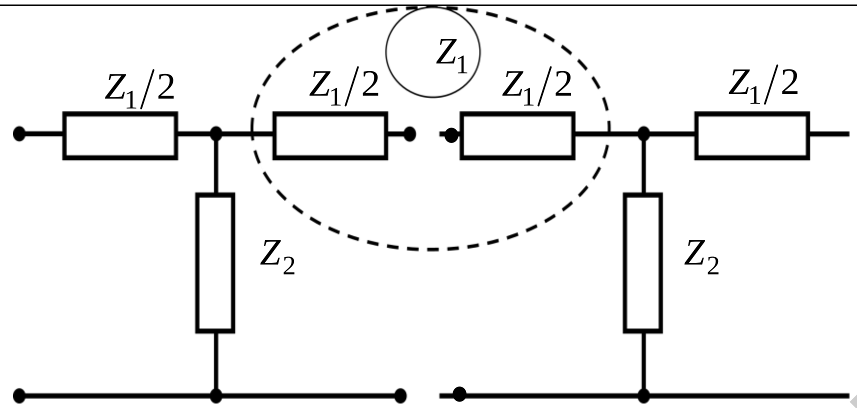


Рис. 8.9

$$Z_1 = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_1}{2}$$

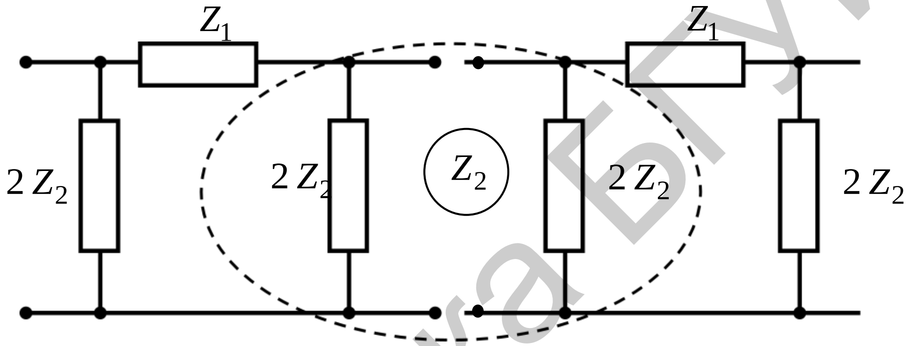


Рис. 8.10

$$Z_2 = \frac{2Z_2 \cdot 2Z_2}{2(Z_2 + Z_2)} = \frac{4{Z_2}^2}{4Z_2}$$

По числу звеньев фильтры могут быть однозвенными, двухзвенными и многозвенными.

По типу входящих в них элементов фильтры классифицируются на реактивные (содержащие только элементы L и C), электромеханические, пьезоэлектрические (кварцевые), безындуктивные (типа RC), активные RC-фильтры.

Фильтры могут быть типа k и типа m. Фильтры, у которых произведение сопротивлений продольного и поперечного плеч представляет собой некоторое постоянное для данного фильтра число k, не зависящее от частоты, называют *k-фильтрами*. Фильтры, у которых это произведение зависит от частоты, называют *m-фильтрами*.

Сопротивление нагрузки $Z_\text{Н}$ на выходе фильтра может быть согласовано с характеристическим сопротивлением фильтра $Z_\text{С}$ ($Z_\text{Н} = Z_\text{С}$).

Входное сопротивление *k*-фильтра при этом также равно $Z_С$.

В *k*-фильтрах $Z_С$ существенно изменяется в зависимости от частоты входного сигнала ω в пределах полосы пропускания. Это обстоятельство вызывает необходимость изменять сопротивление нагрузки *k*-фильтра с изменением частоты входного сигнала (особенно вблизи границы полосы пропускания), что нежелательно.

В *m*-фильтрах при определенных значениях коэффициента *m* сопротивление $Z_С$ мало изменяется с изменением частоты ω (в пределах полосы пропускания), поэтому нагрузка по модулю может быть практически одна и та же для различных ω, находящихся в этих пределах.

8.2. Характеристические параметры фильтров

Характеристическое сопротивление. Для симметричных Т- и П-образных схем фильтров, как и для симметричных четырехполюсников, характеристическое сопротивление $Z_С$ определяется выражением

$$Z_С = \sqrt{Z_Х \cdot Z_К},$$

где для Т-образной схемы фильтра (см. рис. 8.6) сопротивления холостого хода $Z_Х$ и короткого замыкания $Z_К$ соответственно равны

$$Z_Х = \frac{Z_1}{2} + Z_2; \qquad (8.1)$$

$$Z_К = \frac{Z_1}{2} + \frac{\frac{Z_1 Z_2}{2}}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}, \qquad (8.2)$$

а для П-образной схемы фильтра (см. рис. 8.7) $Z_Х$ и $Z_К$ соответственно равны

$$Z_Х = \frac{2Z_2 \cdot (Z_1 + 2Z_2)}{2Z_2 + Z_1 + 2Z_2}; \qquad (8.3)$$

$$Z_К = \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + 2Z_2}. \qquad (8.4)$$

Подставим формулы (8.1) и (8.2) в $Z_С$, получим $Z_{СТ}$ для Т-образной схемы:

$$Z_{СТ} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2} \cdot \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}. \qquad (8.5)$$

При подстановке формул (8.3) и (8.4) в $Z_\text{С}$ получим $Z_\text{СП}$ для П-образной схемы:

$$Z_\text{СП} = \frac{\sqrt{Z_1 \cdot Z_2}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \quad (8.6)$$

Характеристическая постоянная передачи. Для определения характеристической постоянной передачи $g_\text{c} = a_\text{c} + jb_\text{c}$ для Т- и П-образных схем фильтров воспользуемся известными из теории четырёхполюсников соотношениями

$$g_\text{c} = \text{Arch} A_{11}; \quad (8.7)$$

$$A_{11} = A_{22} = \sqrt{Z_\text{Х} / (Z_\text{Х} - Z_\text{К})}. \quad (8.8)$$

Подставив в соотношение (8.8) сопротивления $Z_\text{Х}$ и $Z_\text{К}$ (формулы (8.1)–(8.4)) для Т- и П-образных схем фильтров, получим

$$A_{11_\text{т}} = A_{11_\text{П}} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (8.9)$$

С учётом выражения (8.9) характеристическая постоянная передачи (8.7) имеет вид

$$g_\text{c} = \text{Arch}(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}). \quad (8.10)$$

Используя соотношение

$$\text{sh}\frac{g_\text{c}}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}\, g_\text{c} - 1}{2}},$$

характеристическую постоянную передачи можно определять и по следующей формуле:

$$g_\text{c} = 2\text{Arsh}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (8.11)$$

8.3. Полосы пропускания и затухания. Условие прозрачности фильтра

Качество фильтра тем выше, чем более выражены его фильтрующие свойства, т. е. чем более ослабляется сигнал в полосе затухания, а в полосе пропускания идеального фильтра характеристическое затухание равно нулю ($a_\text{c} = 0$). Так как в полосе пропускания фильтра $a_\text{c} = 0$, то

$$\text{ch}\, g_\text{c} = \text{ch}(a_\text{c} + jb_\text{c}) = \text{ch}(0 + jb_\text{c}) = \text{ch}\, b_\text{c} = \cos\, b_\text{c} = 1 + Z_1/2Z_2.$$

Но cos b_c изменяется в пределах $-1 \le \cos b_c \le 1$, тогда $-1 \le 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \le 1$. Прибавив ко всем членам последнего неравенства –1 и разделив их на 2, получим *условие прозрачности реактивного фильтра*:

$$-1 \le \frac{Z_1}{4Z_2} \le 0. \qquad (8.12)$$

Неравенство (8.12) выполняется, если в полосе пропускания сопротивления Z_1 и Z_2 *чисто реактивны и противоположны по знаку* (x_c и x_L), причем $Z_1 \le 4Z_2$.

За пределами этого неравенства выполняются условия полосы затухания фильтра:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} \le 1; \qquad \frac{Z_1}{4Z_2} \ge 0. \qquad (8.13)$$

Формулы расчёта характеристического затухания a_c и характеристической фазы b_c для реактивного фильтра:

а) в *полосе пропускания* $a_c = 0$; подставив $g_c = jb_c$ в выражение (8.11), получим

$$b_c = 2\arcsin\frac{1}{2j}\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}; \qquad (8.14)$$

б) в *полосе затухания* $g_c = a_c + jb_c$, тогда

$$\text{sh}\,\frac{g_c}{2} = \text{sh}\,(\frac{a_c}{2} + j\frac{b_c}{2}) = \text{sh}\frac{a_c}{2}\cos\frac{b_c}{2} + j\,\text{ch}\frac{a_c}{2}\sin\frac{b_c}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \qquad (8.15)$$

Если сопротивления Z_1 и Z_2 реактивны и имеют противоположный знак:

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{-\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|} = j\sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|},$$

то уравнение (8.15) примет вид

$$\text{sh}\,\frac{a_c}{2}\cos\frac{b_c}{2} + j\,\text{ch}\frac{a_c}{2}\sin\frac{b_c}{2} = j\sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|}. \qquad (8.16)$$

Чтобы равенство (8.16) выполнялось, необходимо выполнить условие $\text{sh}\,\frac{a_c}{2}\cos\frac{b_c}{2} = 0$. Но так как в полосе затухания $a_c \ne 0$, то в последнем равенстве $\cos\frac{b_c}{2} = 0$, откуда

$$b_{\text{c}} = \pm\pi. \tag{8.17}$$

Подставив это значение b_{c} в выражение

$$j\ \text{ch}\frac{a_{\text{c}}}{2}\sin\frac{b_{\text{c}}}{2} = j\sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|},$$

получим

$$a_{\text{c}} = 2\ \text{Arch}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|}. \tag{8.18}$$

На практике полного согласования фильтра с нагрузкой обеспечить не удаётся, поэтому рассматривают не характеристическую, а рабочую постоянную передачи.

Рабочая постоянная передачи

$$g = a + jb = \ln\frac{1}{\widehat{K}_u(j\omega)} =$$

$$= \ln\frac{1}{\widehat{K}_u(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}} = \ln\left[\frac{1}{\widehat{K}_u(\omega)}\cdot e^{-j\varphi(\omega)}\right] = \ln\frac{1}{\widehat{K}_u(\omega)} - j\varphi(\omega), \tag{8.19}$$

где рабочее затухание

$$a = \ln\frac{1}{\widehat{K}_u(\omega)}\quad [\text{Нп}];$$

$$a = 20\ \lg\frac{1}{\widehat{K}_u(\omega)}\quad [\text{дБ}],$$

рабочая фаза

$$b = -\varphi(\omega)\ \ [\text{град}]\ \text{или}\ [\text{рад}]$$

Таким образом, для Т- и П-образных фильтров в полосе пропускания $a_{\text{c}}=0$; $b_{\text{c}} = 2\arcsin\frac{1}{2j}\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$; а в полосе затухания $b_c = \pm\pi$; $a_{\text{c}} = 2\ \text{Arch}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|}$.

8.4. LC-фильтры нижних частот типа k

На рис. 8.11, *а* и *б* приведены соответственно Т- и П-образные схемы фильтра нижних частот (ФНЧ).

ФНЧ

$$Z_1 = j\omega L\ ,\ Z_2 = \frac{1}{j\omega C}.$$

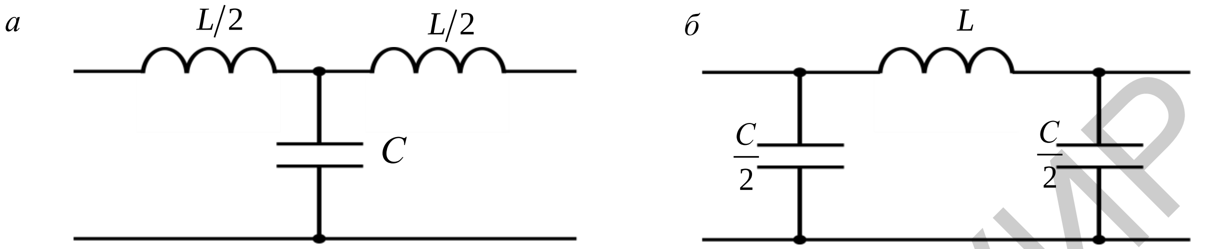


Рис. 8.11

Принцип работы ФНЧ поясняется на рис. 8.12 и 8.13.

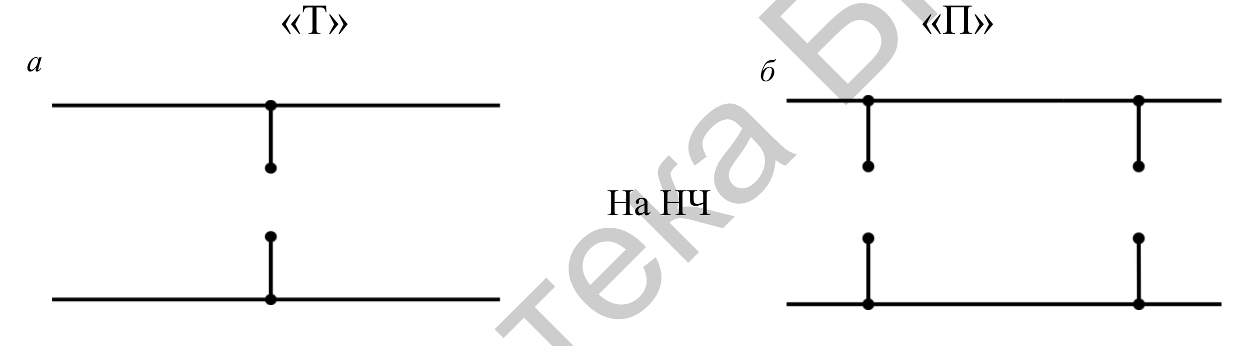


Рис. 8.12

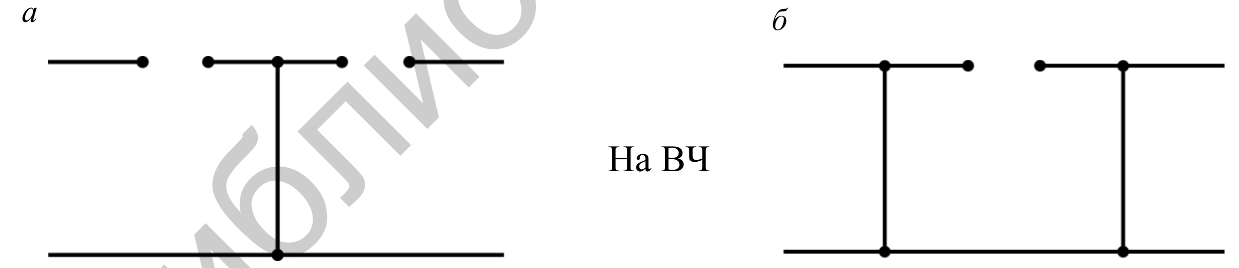


Рис. 8.13

Сигналы на низких частотах (НЧ) практически без затухания проходят через продольное плечо фильтра (индуктивное сопротивление которого на НЧ мало: $Z_1 = j\omega L \to 0$) и почти не шунтируются поперечным ёмкостным плечом: $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C} \to \infty$ (см. рис. 8.12, *а* для Т-фильтра и рис. 8.12, *б* для П-фильтра).

Колебания высоких частот (ВЧ) значительно затухают при прохождении продольного плеча фильтра и шунтируются поперечным плечом (см. рис. 8.13, *а* для Т-фильтра и рис. 8.13, *б* для П-фильтра).

Условие прозрачности ФНЧ в согласованном режиме (т. е. $Z_\text{Н} = Z_\text{C}$) получим, подставив $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$ в неравенство (8.12):

$$-1 \le \frac{j\omega L}{4/(j\omega c)} \le 0,$$

откуда частота среза (граничная частота) ФНЧ

$$\omega_{\text{гр}_\text{ФНЧ}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{8.20}$$

Характеристические параметры $a_\text{с}, b_\text{с}$ и $Z_\text{С}$ ФНЧ:

1. *В полосе пропускания* характеристическое затухание

$$a_\text{с} = 0, \tag{8.21}$$

характеристическая фаза $b_\text{с}$ при подстановке $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$ в выражение (8.14) с учетом формулы (8.20) равна

$$b_\text{с} = 2\ \arcsin\frac{1}{2j}\sqrt{\frac{j\omega L}{1/(j\omega C)}} = 2\ \arcsin\frac{\omega}{\omega_\text{гр}}. \tag{8.22}$$

Характеристическое сопротивление для Т-образной схемы ФНЧ $Z_{\text{С}_\text{Т}}$ при подстановке $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$ в выражение (8.5) равно

$$Z_{\text{С}_\text{Т}} = \sqrt{Z_1 Z_2}\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \rho\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_\text{гр}{}^2}}, \tag{8.23}$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – номинальное характеристическое сопротивление фильтра.

В *полосе пропускания* при $\omega = 0$ $Z_{\text{С}_\text{Т}} = \rho$, а при $\omega = \omega_\text{гр}$ $Z_{\text{С}_\text{Т}} = 0$.

Характеристическое сопротивление для П-образной схемы ФНЧ $Z_{\text{С}_\text{Т}}$ при подстановке $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$ в выражение (8.6) равно

$$Z_{\text{С}_\text{П}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\omega^2/\omega_{\text{гр}}^2}}. \qquad (8.24)$$

В полосе пропускания при $\omega = 0$ $Z_{\text{С}_\text{П}} = \rho$, а при $\omega = \omega_{\text{гр}}$ $Z_{\text{С}_\text{П}} = \infty$.

2. *В полосе затухания* характеристическое затухание $a_\text{с}$ при подстановке $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$ в выражение (8.18) с учётом формулы (8.20) равно

$$a_\text{с} = 2\,\text{Arch}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|} = 2\,\text{Arch}\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 LC} = 2\,\text{Arch}\frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}. \qquad (8.25)$$

Характеристическая фаза $b_\text{с}$, учитывая формулу (8.17) и то, что выражение (8.22) – положительная величина, равна

$$b_c = \pi. \qquad (8.26)$$

Характеристическое сопротивление для Т-образной схемы ФНЧ $Z_{\text{С}_\text{Т}}$ в полосе затухания при подстановке $\omega \to \infty$ в выражение (8.23) носит индуктивный характер:

$$Z_{\text{С}_\text{Т}} = \rho\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}} \approx \rho\sqrt{-\frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}} \approx \rho\sqrt{j^2\frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}} \approx \rho\cdot j\frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}} \approx j\omega L \to \infty,$$

где $L = \rho/\omega_{\text{гр}}$. (8.27)

Характеристическое сопротивление для П-образной схемы ФНЧ $Z_{\text{С}_\text{П}}$ в полосе затухания при подстановке $\omega \to \infty$ в выражение (8.24) носит ёмкостный характер:

$$Z_{\text{С}_\text{П}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}}} \approx \frac{\rho}{\sqrt{j^2\dfrac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}}} \approx \frac{\rho}{j\omega/\omega_{\text{гр}}} \approx \frac{\rho}{j\omega L} \approx\to 0, \qquad (8.28)$$

где $C = 1/\rho\omega_{\text{гр}}$.

Из приведённых зависимостей (8.27) и (8.28) видно, что с изменением частоты изменяется и характеристическое сопротивление $Z_\text{С}$. Для того чтобы обеспечить согласованный режим, т. е. чтобы ФНЧ работал на согласованную нагрузку, при изменении частоты входного сигнала необходимо изменять и сопротивление нагрузки. В этом и заключается ограниченность метода расчёта фильтров типа k по характеристическим параметрам.

По полученным формулам (8.21), (8.22), (8.25) и (8.26) на рис. 8.14 построены графики $a_c = f(\omega)$ и $b_c = f(\omega)$.

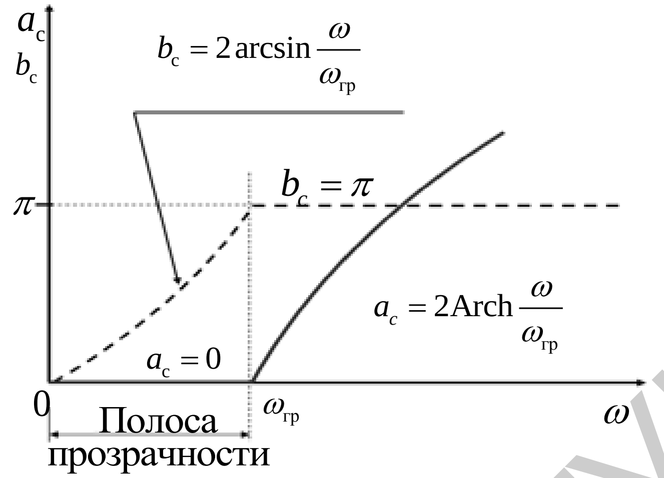


Рис. 8.14

Из рис. 8.14 видно, что в полосе пропускания постоянной величиной является характеристическое затухание a_c = 0, а в полосе затухания – характеристическая фаза $b_c = \pi$.

По полученным формулам (8.23), (8.24), (8.27) и (8.28) на рис. 8.15 построены графики $Z_{C_T} = f(\omega)$ и $Z_{C_П} = f(\omega)$.

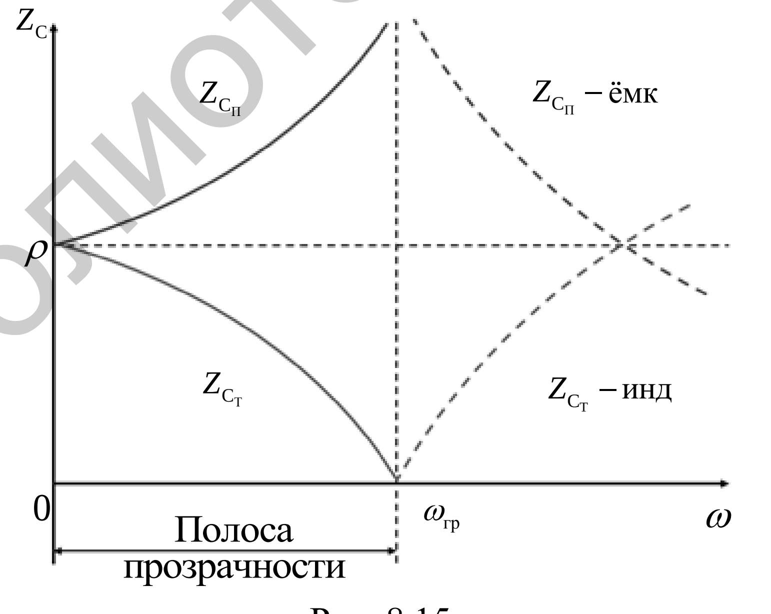


Рис. 8.15

Из рис. 8.15 видно, что на низких частотах $Z_{C_T} \approx Z_{C_T} \approx \rho$, т. е. на НЧ, для согласованного каскадного соединения не имеет значения схема ФНЧ

(Т- или П-образная). На границе полосы пропускания (при $\omega = \omega_{гр}$) для согласованного низкоомного каскадного соединения целесообразно использовать Т-образную схему ФНЧ (так как на $\omega = \omega_{гр}$ $Z_{С_Т} \to 0$). Если же каскадное соединение высокоомное, то целесообразно выбирать П-образную схему ФНЧ (так как на $\omega = \omega_{гр}$ $Z_{С_П} \to \infty$).

При ориентированных расчётах ФНЧ по характеристическим параметрам задают активное сопротивление нагрузки ($r_н = \rho$) и полосу пропускания фильтра $\omega_{гр}$, т. е.

$$r_н = \rho = \sqrt{L/C}; \qquad \omega_{гр} = 2/\sqrt{LC},$$

откуда сопротивления продольного и поперечного плеч ФНЧ

$$L = 2r_н/\omega_{гр}; \qquad C = 2/(\omega_{гр} r_н).$$

8.5. LC-фильтры верхних частот типа k

По известным параметрам ФНЧ путём преобразования частоты расчёт фильтра верхних частот (ФВЧ) можно свести к расчёту ФНЧ, который в этом случае называют фильтром-прототипом.

Графики идеальных амплитудно-частотных характеристик ФНЧ и ФВЧ (рис. 8.16) будут симметричны относительно граничной частоты $\omega_{гр}$, если в расчётных формулах для ФНЧ произвести замену:

$$\omega_{ФНЧ} = -\omega_{гр}^2 / \omega_{ФВЧ}, \qquad (8.29)$$

где $\omega_{ФНЧ}$ – текущая частота ФНЧ; $\omega_{гр}$ – граничная частота ФВЧ; $\omega_{ФВЧ}$ – текущая частота ФВЧ.

Преобразование ФНЧ в ФВЧ производится путём математического распространения значения текущей частоты ω на область отрицательных частот. При этом отрицательная полуось частоты $\omega_{ФНЧ}$ переходит в положительную полуось частоты $\omega_{ФВЧ}$. Причём точке $\omega_{ФНЧ}$ = – ∞ соответствует точка $\omega_{ФНЧ}$ = 0, точке $\omega_{ФНЧ}$ = – $\omega_{гр}$ – точка $\omega_{ФВЧ}$ = $\omega_{гр}$, точке $\omega_{ФНЧ}$ = 0 – точка $\omega_{ФНЧ}$ = +∞, а в полосе пропускания у ФВЧ – будет находиться в пределах $\omega_{гр} \le \omega_{ФНЧ} \le +\infty$.

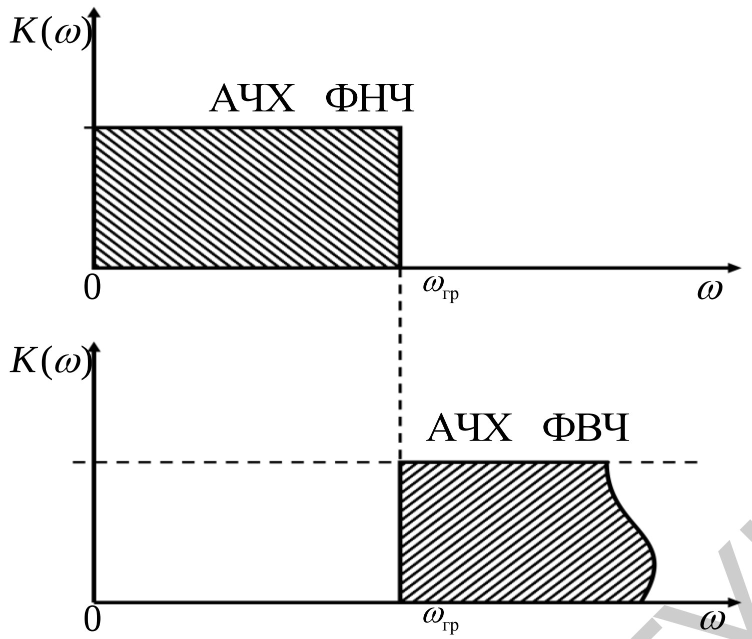


Рис. 8.16

Граничную частоту $\omega_{гр}$ в выражении (8.29) получим из условия прозрачности фильтра, подставив в неравенство (8.12) значения сопротивлений продольного $Z_1 = 1/(j\omega C)$ и поперечного $Z_2 = j\omega L$ плеч ФВЧ:

$$-1 \le \frac{1/(j\omega C)}{4j\omega L} \le 0\ ,$$

откуда

$$\omega_{гр} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \tag{8.30}$$

Элементы продольного и поперечного плеч ФВЧ определяют путём подстановки формул преобразования частоты (8.29) и граничной частоты (8.30) в выражения для сопротивления соответствующих плеч ФНЧ-прототипа:

$$Z_1 = j\omega_{ФНЧ} L = -j\frac{\omega_{гр}^2}{\omega_{ФНЧ}} L = \frac{1}{j\omega_{ФВЧ} \cdot \dfrac{1}{\omega_{гр}^2 L}} = \frac{1}{j\omega_{ФВЧ} C_{ФВЧ}}, \tag{8.31}$$

где $C_{ФВЧ} = \dfrac{1}{\omega_{гр}^2 L}$;

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega_{ФНЧ} C} = -\frac{1}{j\dfrac{\omega_{гр}^2}{\omega_{ФВЧ}} C} = j\omega_{ФВЧ} \cdot \frac{1}{\omega_{гр}^2 C} = j\omega_{ФВЧ} L_{ФВЧ}, \tag{8.32}$$

где $L_{\text{ФВЧ}} = \dfrac{1}{\omega_{\text{гр}}^2 C}$.

Согласно формулам (8.31) и (8.32) схемы Т- и П-образного ФВЧ приведены на рис. 8.17, *а* и *б* соответственно.

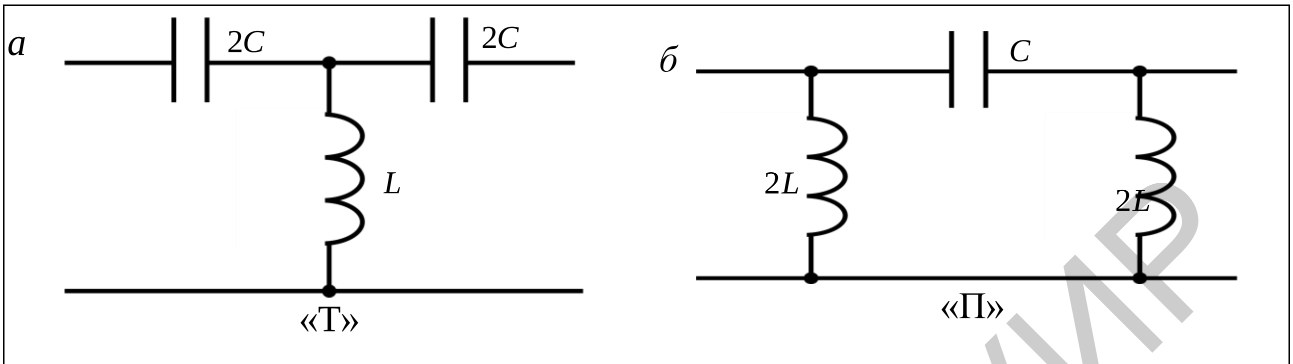


Рис. 8.17

Принцип работы ФВЧ поясняют рис. 8.18 и 8.19.

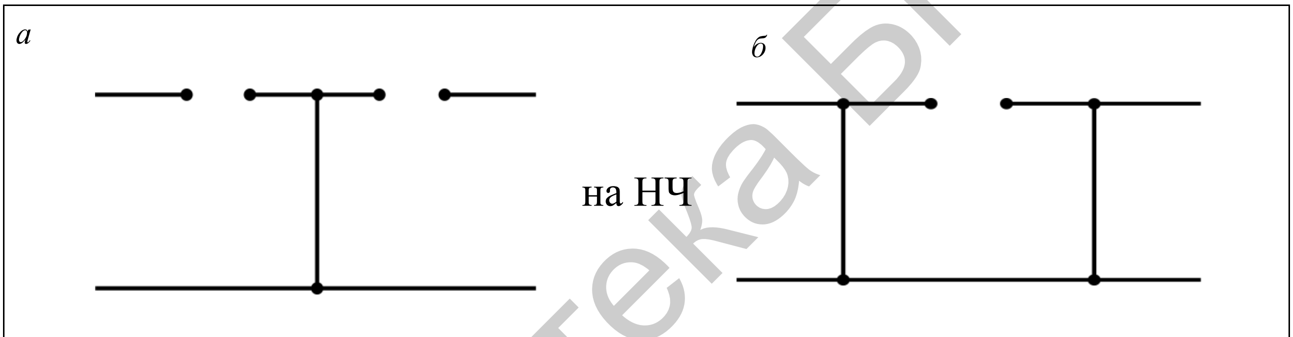


Рис. 8.18

На низких частотах (НЧ) сопротивление продольного плеча (как у Т-фильтра (рис. 8.18, *а*), так и у П-фильтра (рис. 8.18, *б*)) очень большое, так как $Z_1 = 1/(j\omega_{\text{ФВЧ}} C_{\text{ФВЧ}})$, и колебания низких частот проходят через продольное плечо с очень большим затуханием. Кроме того, эти колебания шунтируются малым сопротивлением поперечных плеч ($Z_2 = j\omega L$). Колебания высоких частот (см. рис. 8.19, *а* для Т-фильтра и рис. 8.19, *б* для П-фильтра), напротив, проходят через ФВЧ практически без затухания.

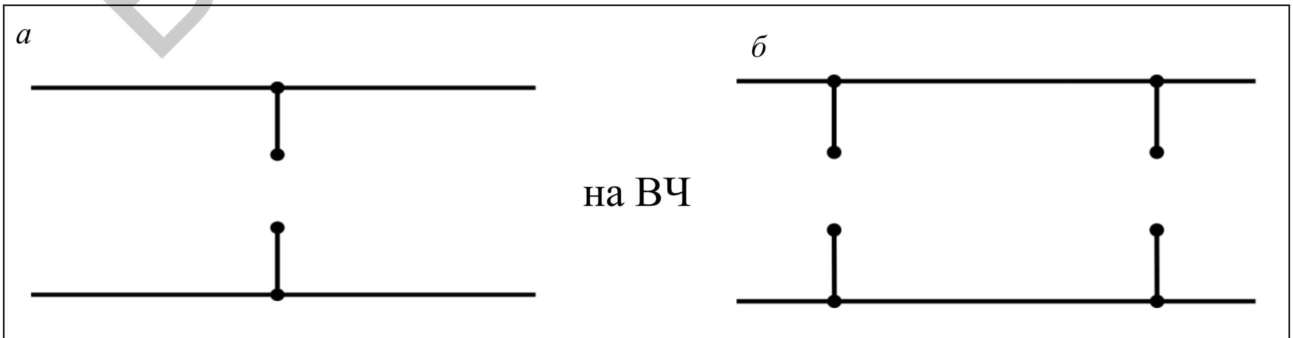


Рис. 8.19

Характеристические параметры a_c, b_c и z_c ФВЧ

1. В *полосе пропускания* характеристическое затухание $a_c = 0$ (по определению), характеристическая фаза b_c при подстановке равенства (8.29) в выражение (8.22) с учётом формулы (8.30) равна

$$b_c = 2\ \arcsin\frac{\omega_{ФНЧ}}{\omega_{гр}} = -2\ \arcsin\ \frac{\omega_{гр}}{\omega_{ФВЧ}}. \tag{8.33}$$

Характеристическое сопротивление для Т-образной схемы ФВЧ Z_{C_T} при подстановке равенства (8.29) в формулу (8.23) равно

$$Z_{C_т} = \rho\sqrt{1-\frac{\omega_{ФНЧ}^2}{\omega_{гр}^2}} = \rho\sqrt{1-\frac{\omega_{гр}^2}{\omega_{ФВЧ}^2}}. \tag{8.34}$$

В полосе пропускания при $\omega = \omega_{гр}$ $Z_{C_т} = 0$, а при $\omega \to \infty$ $Z_{C_т} \to \rho$.

Характеристическое сопротивление для П-образной схемы ФВЧ $Z_{C_П}$ при подстановке равенства (8.29) в формулу (8.24) равно

$$Z_{C_п} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{\omega_{ФНЧ}^2}{\omega_{гр}^2}}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{\omega_{гр}^2}{\omega_{ФВЧ}^2}}}. \tag{8.35}$$

В полосе пропускания $Z_{C_п}$ при подстановке $\omega = \omega_{гр}$ в выражение (8.35) носит индуктивный характер:

$$Z_{C_п} = \frac{\rho}{1-\frac{\omega_{гр}^2}{\omega_{ФВЧ}^2}} \to \infty, \tag{8.36}$$

а при $\omega \to \infty$

$$Z_{C_п} \to \rho. \tag{8.37}$$

2. В *полосе затухания* характеристическое затухание a_C при подстановке равенства (8.29) в формулу (8.25) равно

$$a_C = 2\ \mathrm{Arch}\frac{-\frac{\omega_{гр}^2}{\omega_{ФВЧ}^2}}{\omega_{гр}} = 2\ \mathrm{Arch}\frac{\omega_{гр}}{\omega_{ФВЧ}}. \tag{8.38}$$

Характеристическая фаза b_C, учитывая формулу (8.17) и то, что выражение (8.33) – отрицательная величина, равна

$$b_C = -\pi. \tag{8.39}$$

Характеристическое сопротивление для Т-образной схемы ФВЧ $Z_{\text{С}_\text{т}}$ в полосе затухания при подстановке $\omega = 0$ в выражение (8.34) носит ёмкостный характер:

$$Z_{\text{С}_\text{т}} = \rho\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_{\text{ФВЧ}}^2}} \to \infty. \tag{8.40}$$

Характеристическое сопротивление для П-образной схемы ФВЧ $Z_{\text{С}_\text{п}}$ при подстановке $\omega = 0$ в выражение (8.35) носит индуктивный характер

$$Z_{\text{С}_\text{п}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_{\text{ФВЧ}}^2}}} \to 0. \tag{8.41}$$

По полученным формулам (8.33), (8.38), (8.39) на рис. 8.20 построены графики $a_\text{С} = f(\omega)$ и $b_\text{С} = f(\omega)$.

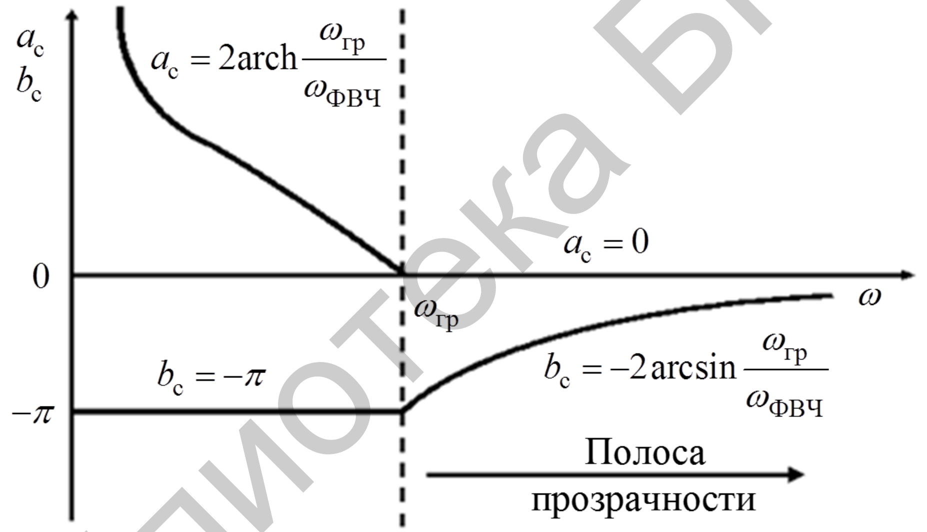


Рис. 8.20

По полученным формулам (8.34), (8.35), (8.40) и (8.41) на рис. 8.21 построены графики $Z_{\text{С}_\text{Т}} = f(\omega)$ и $Z_{\text{С}_\text{П}} = f(\omega)$.

Из выражений (8.40) и (8.41) видно, что при преобразовании ФНЧ-прототипа в ФВЧ необходимо каждую индуктивность ФНЧ заменить ёмкостью, а каждую ёмкость ФНЧ заменить индуктивностью. При этом граничные частоты ФНЧ и ФВЧ будут одинаковы. При этом, например, в П-образном ФВЧ на низких частотах сопротивление продольного плеча очень большое. Кроме того, НЧ-сигнал шунтируется малым сопротивлением поперечных плеч. Колебания же ВЧ, напротив, проходят через ФВЧ практически без потерь.

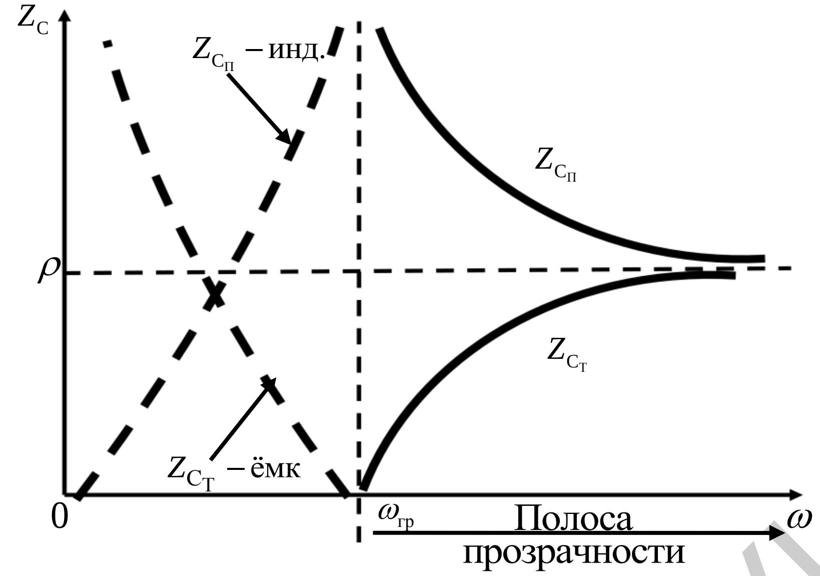


Рис. 8.21

Из рис. 8.21 видно, что на сверхвысоких частотах (СВЧ) $Z_С = Z_{С_П} \approx \rho$, т. е. на СВЧ при каскадном соединении, не имеет значения схема ФВЧ (Т- или П-образная). На границе полосы пропускания (при $\omega = \omega_{гр}$) для согласованного низкоомного каскадного соединения целесообразно использовать Т-образную схему ФВЧ (так как на $\omega = \omega_{гр}$ $Z_{С_Т} \to 0$). Если же каскадное соединение высокоомное, то для согласования целесообразно выбирать П-образную схему ФВЧ (так как на $\omega = \omega_{гр}$ $Z_{С_П} \to \infty$).

8.6. Полосовые LC-фильтры типа k

При преобразовании фильтра – прототипа ФНЧ в полосовой фильтр (ПФ) используется формула пересчета:

$$\omega_{ФНЧ} = \frac{\omega_{ПФ}^2 - \omega_0^2}{\omega_{ПФ}}, \tag{8.42}$$

где $\omega_{ПФ}$ – текущая частота ПФ; ω_0 – центральная частота ПФ:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}. \tag{8.43}$$

Здесь ω_1 и ω_2 – граничные частоты ПФ.

На рис. 8.22 изображена идеальная АЧХ ФНЧ-прототипа, на рис. 8.23 – идеальная АЧХ ПФ.

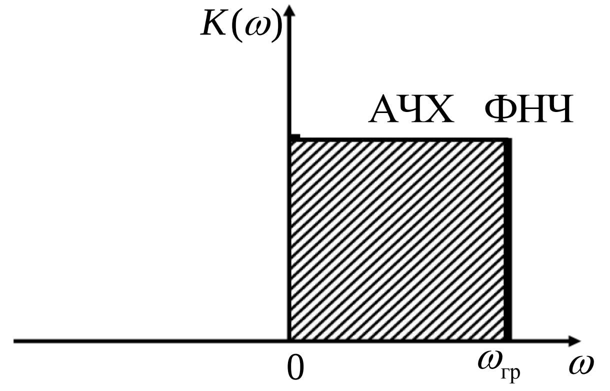


Рис. 8.22

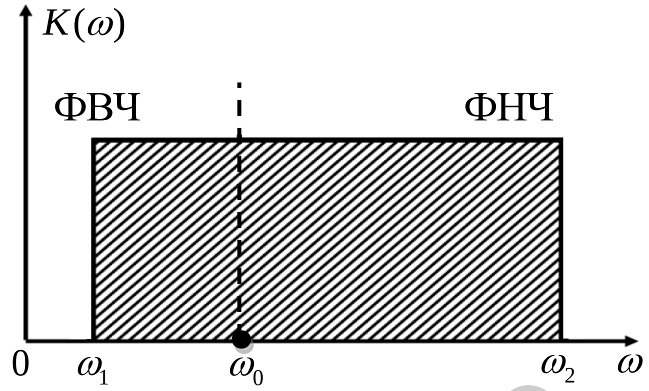


Рис. 8.23

Поэтому графики характеристических параметров ПФ $a_с$, $b_с$ и $Z_с$ представляют собой геометрическое наложение графиков этих параметров ФНЧ-прототипа и ФВЧ (рис. 8.24 и 8.25) относительно центральной частоты ω_0.

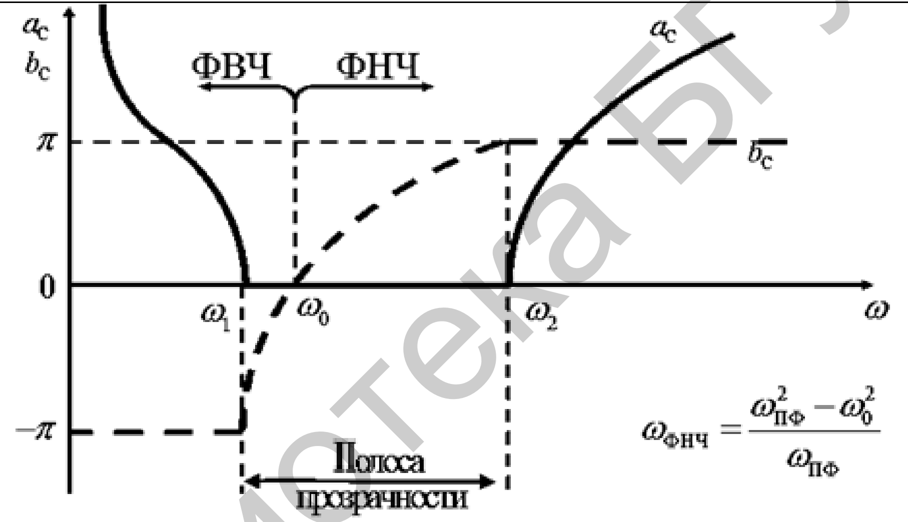


Рис. 8.24

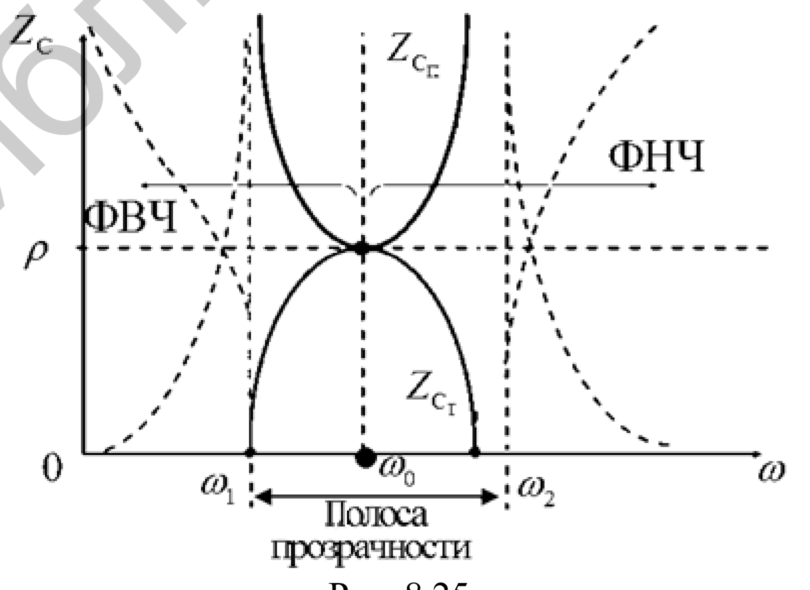


Рис. 8.25

Граничные частоты ПФ ω_1 и ω_2 получают из уравнения (8.42) подстановкой $\omega_{\text{ФНЧ}} = \omega_{\text{гр}}$:

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{ПФ}}^2 - \omega_0^2}{\omega_{\text{ПФ}}}.$$

После преобразования последнее равенство имеет вид

$$\omega_{\text{ПФ}}^2 - \omega_{\text{гр}}\omega_{\text{ПФ}} - \omega_0^2 = 0,$$

откуда

$$\omega_1 = -\frac{\omega_{\text{гр}}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{\text{гр}}^2}{4} + \omega_0^2}; \tag{8.44}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_{\text{гр}}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{\text{гр}}^2}{4} + \omega_0^2}. \tag{8.45}$$

Отрицательные частоты физического смысла не имеют, поэтому в выражениях (8.44) и (8.45) перед радикалом оставим знак «+».

Элементы плеч ПФ определяют путём подстановки в сопротивление продольного $Z_1 = j\omega L$ и поперечного $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ плеч ФНЧ-прототипа текущей частоты $\omega = \omega_{\text{ФНЧ}}$, используя формулу пересчета (8.42).

При этом сопротивление продольного плеча ПФ

$$Z_1 = j\omega_{\text{ФНЧ}} L_{\text{ФНЧ}} = j\,\frac{\omega_{\text{ПФ}}^2 - \omega_0^2}{\omega_{\text{ПФ}}} L_{\text{ФНЧ}} =$$

$$= j\omega_{\text{ПФ}} L_{1_{\text{ПФ}}} - j\,\frac{\omega_0^2 L_{\text{ФНЧ}}}{\omega_{\text{ПФ}}} =$$

$$= j\omega_{\text{ПФ}} L_{1_{\text{ПФ}}} + \frac{1}{j\omega_{\text{ПФ}} C_{1_{\text{ПФ}}}}, \tag{8.46}$$

где $L_{1_{\text{ПФ}}} = L_{\text{ФНЧ}}$; $\text{C}_{1_{\text{ПФ}}} = \frac{1}{\omega_0^2 C_{\text{ФНЧ}}}$.

Из формулы (8.46) следует, что в продольном плече ПФ последовательно соединены индуктивность $L_{1_{\text{ПФ}}}$ и ёмкость $C_{1_{\text{ПФ}}}$, т. е. продольное плечо ПФ представляет собой идеальный последовательный колебательный контур (рис. 8.26 и 8.28).

Проводимость поперечного плеча ПФ:

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{1/(j\omega_{\text{ФНЧ}} C_{\text{ФНЧ}})} = j\omega_{\text{ФНЧ}} C_{\text{ФНЧ}} =$$

$$= j\frac{\omega_{\text{ПФ}}^2 - \omega_0^2}{\omega_{\text{ПФ}}} C_{\text{ФНЧ}} = j\omega_{\text{ПФ}} C_{\text{ФНЧ}} - j\frac{\omega_0^2 C_{\text{ФНЧ}}}{\omega_{\text{ПФ}}} =$$

$$= j\omega_{\text{ПФ}} C_{\text{ФНЧ}} + \frac{1}{j\omega_{\text{ПФ}} / (\omega_0^2\, C_{\text{ФНЧ}})} =$$

$$= j\omega_{\text{ПФ}} C_{2_{\text{ПФ}}} + \frac{1}{j\omega_{\text{ПФ}} L_{2_{\text{ПФ}}}}, \tag{8.47}$$

где $C_{2_{\text{ПФ}}} = C_{\text{ФНЧ}}$; $L_{2_{\text{ПФ}}} = \dfrac{1}{\omega_0^2 C_{\text{ФНЧ}}}$.

Из формулы (8.47) следует, что в поперечном плече ПФ параллельно соединены индуктивность $L_{2_{\text{ПФ}}}$ и ёмкость $C_{2_{\text{ПФ}}}$, т. е. поперечное плечо ПФ представляет собой идеальный параллельный колебательный контур (см. рис. 8.26 и 8.28).

Физика работы полосового фильтра поясняется схемами замещения, приведенными на рис. 8.27 и 8.29. Колебательные контуры плеч настраивают на частоту проходящего через ПФ сигнала. Это – центральная частота $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, она же является резонансной для контуров плеч ПФ. Сопротивление продольного плеча, являющегося идеальным последовательным колебательным контуром, на резонансной частоте ω_0 равно нулю (на схемах замещения, приведенных на рис. 8.27 и 8.29, продольное плечо изображено короткозамкнутым проводником). Сопротивление поперечного плеча на этих схемах замещения изображено в виде разрыва (или холостого хода XX), так как на резонансной частоте ω_0 сопротивление идеального параллельного колебательного контура равно бесконечности.

Поэтому колебания входных сигналов с частотами, близкими к ω_0, будут проходить через ПФ с минимальным затуханием. В диапазоне частот входного сигнала $\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$ сопротивление последовательных контуров резко возрастает, а параллельных – падает. В связи с этим сигналы с частотами вне полосы прозрачности ПФ проходят по продольному плечу фильтра с большим затуханием и шунтируются поперечным плечом фильтра.

Т-образный полосовой фильтр

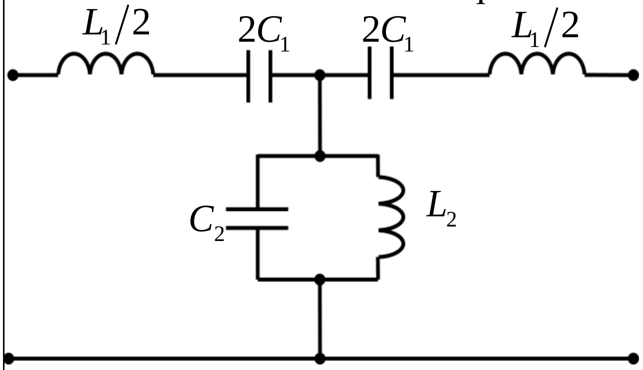


Рис. 8.26

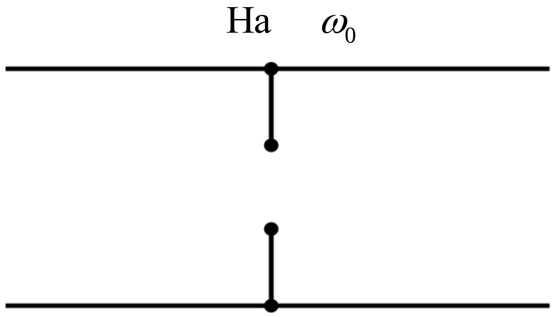


Рис. 8.27

П-образный полосовой фильтр

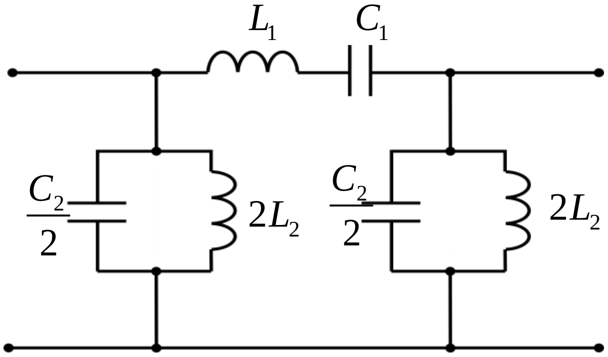


Рис. 8.28

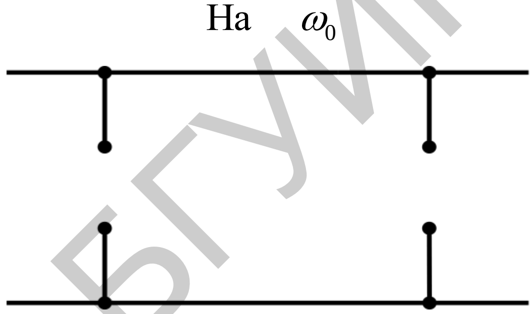


Рис. 8.29

Для эффективной работы ПФ его параметры должны удовлетворять условию $L_{1\text{П}}C_{1\text{ПФ}} = L_{2\text{ПФ}}C_{1\text{ПФ}}$.

8.7. Заграждающие (режекторные) LC-фильтры типа k

При преобразовании ФНЧ-прототипа в заграждающий (режекторный) фильтр (ЗФ или РФ) замену текущей частоты ЗФ (РФ) производят по формуле

$$\omega_{\text{ФНЧ}} = \frac{\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_0^2 - \omega_{\text{ЗФ}}^2}, \qquad (8.48)$$

где $\omega_{\text{ЗФ}}$ – текущая частота ЗФ; ω_0 – центральная (режектируемая) частота; $\omega_{\text{гр}}$ и $\omega_{\text{ФНЧ}}$ – соответственно граничная и текущая частоты ФНЧ-прототипа.

Идеальная АЧХ ЗФ изображена на рис. 8.30.

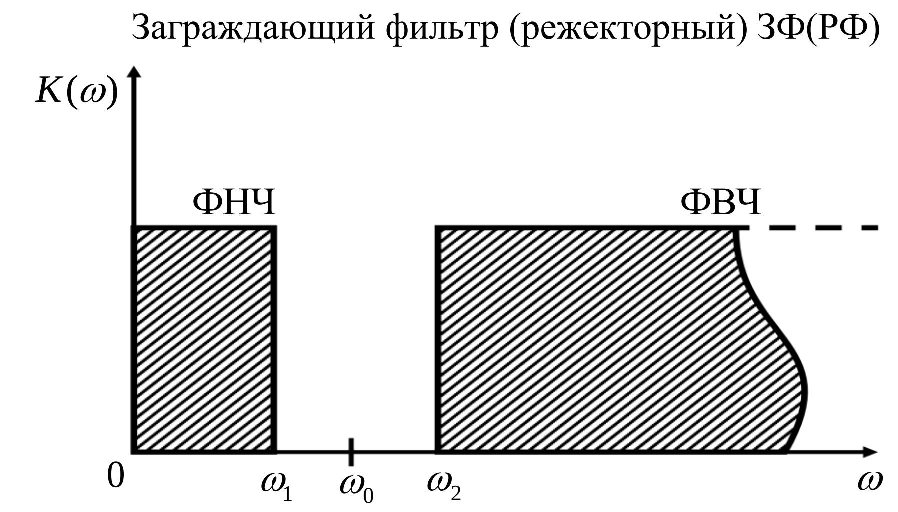


Рис. 8.30

На частотах $\omega < \omega_1$ ЗФ имеет характеристические параметры ФНЧ-прототипа, а на $\omega > \omega_2$ – ФВЧ. Поэтому графики a_C, b_C (рис. 8.31) и Z_C (рис. 8.32) являются наложением друг на друга относительно центральной частоты ω_0 графиков соответствующих характеристик ФНЧ и ФВЧ.

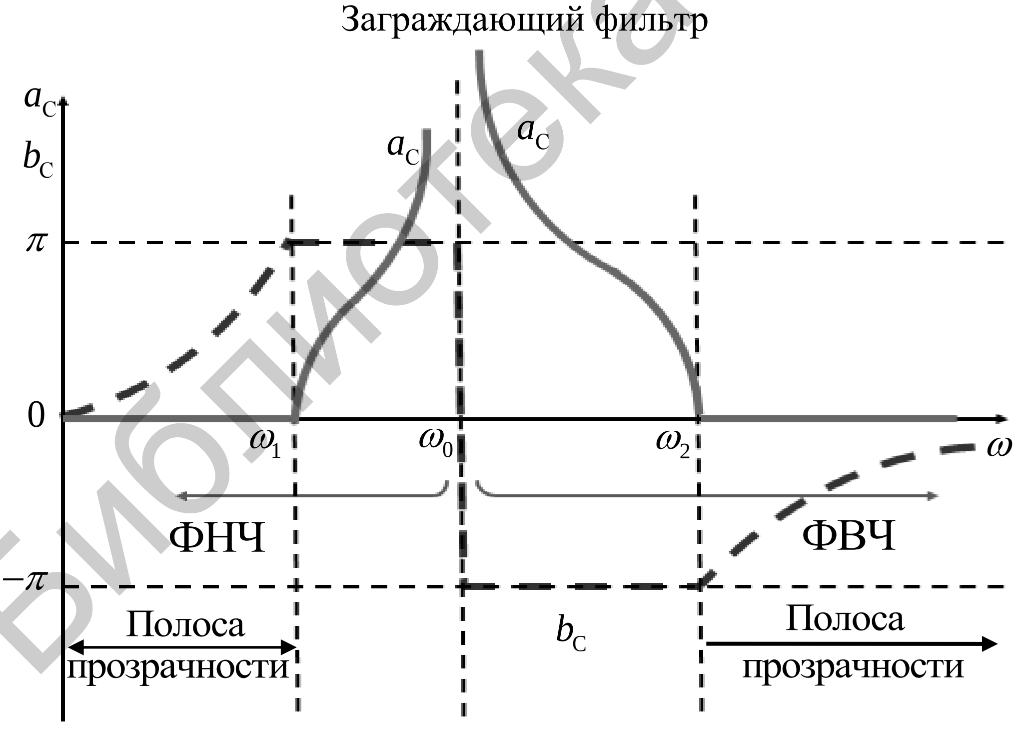


Рис. 8.31

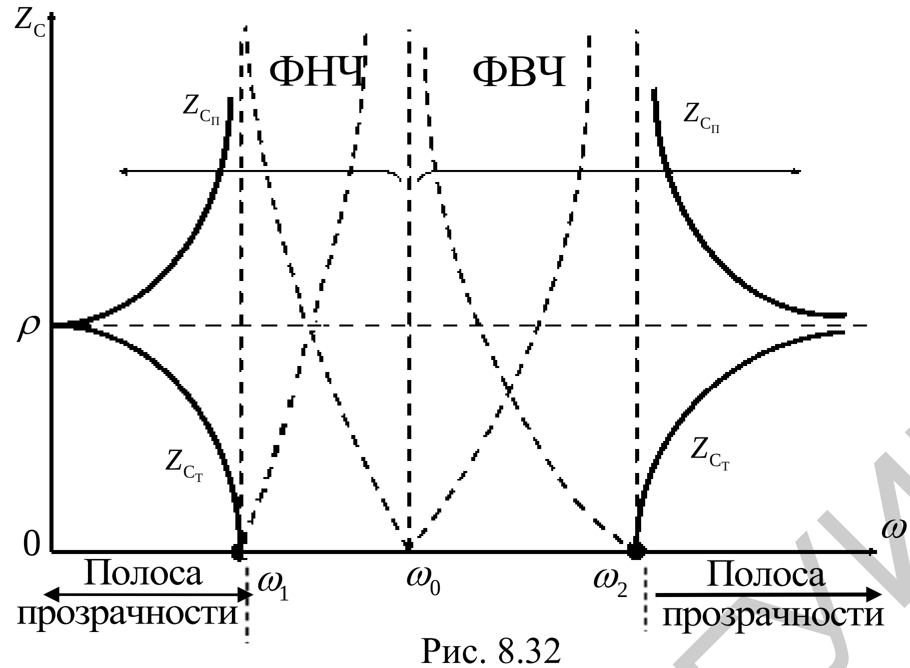


Рис. 8.32

Элементы плеч ЗФ определяют путём подстановки в сопротивление продольного $Z_1 = j\omega L$ и поперечного $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$ плеч ФНЧ-прототипа текущей частоты $\omega = \omega_{\text{ФНЧ}}$, используя формулу пересчёта (8.48).

При этом проводимость продольного плеча ЗФ

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{j\omega_{\text{ФНЧ}} L_{\text{ФНЧ}}} = \frac{1}{j\,\dfrac{\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_0^2 - \omega_{ЗФ}^2} L_{\text{ФНЧ}}} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{j\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2 L_{\text{ФНЧ}}} + j\,\frac{\omega_{ЗФ}^2}{\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2 L_{\text{ФНЧ}}} =$$

$$= \frac{1}{j\omega_{\text{ЗФ}} L_{1\text{ЗФ}}} + j\omega_{\text{ЗФ}} C_{1\text{ЗФ}}, \tag{8.49}$$

где $L_{1\text{ЗФ}} = \dfrac{\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_0^2} = L_{\text{ФНЧ}}$; $\quad \text{С}_{1\text{ЗФ}} = \dfrac{1}{\omega_{\text{гр}}^2 L_{\text{ФНЧ}}}$.

Из формулы (8.49) следует, что в продольном плече ЗФ параллельно соединены индуктивность $L_{1\text{ЗФ}}$ и ёмкость $C_{1\text{ЗФ}}$, т. е. продольное плечо ЗФ представляет собой идеальный параллельный колебательный контур (рис. 8.33 и 8.35).

Сопротивление поперечного плеча ЗФ

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega_{\text{ФНЧ}} C_{\text{ФНЧ}}} = \frac{1}{j\,\dfrac{\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_0^2 - \omega_{\text{ЗФ}}^2} \cdot C_{\text{ФНЧ}}} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{j\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2 C_{\text{ФНЧ}}} - \frac{\omega_{ЗФ}^2}{\omega_{\text{ЗФ}}\omega_{\text{гр}}^2 C_{\text{ФНЧ}}} =$$

$$= \frac{1}{j\omega_{\text{ЗФ}} C_{2\,\text{ЗФ}}} + j\omega_{\text{ЗФ}} L_{2\,\text{ЗФ}}, \qquad (8.50)$$

где $C_{2\,\text{ЗФ}} = \dfrac{\omega_{\text{гр}}^2}{\omega_0^2} \cdot C_{\text{ФНЧ}}$; $L_{2\,\text{ЗФ}} = \dfrac{1}{\omega_{\text{гр}}^2 C_{\text{ФНЧ}}}$.

Из формулы (8.50) следует, что в продольном плече ЗФ параллельно соединены индуктивность $L_{2\,\text{ЗФ}}$ и ёмкость $C_{2\,\text{ЗФ}}$, т. е. продольное плечо ЗФ представляет собой идеальный параллельный колебательный контур (см. рис. 8.33 и 8.35).

Физика работы заграждающего фильтра поясняется схемами замещения, приведёнными на рис. 8.34 и 8.36. Колебательные контуры плеч настраивают на частоту режектируемого сигнала. Это центральная частота $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$, она же является резонансной для контуров плеч ЗФ. Так как продольные плечи ЗФ – параллельные колебательные контуры, сопротивление которых на резонансной частоте большое (на схемах замещения продольное плечо есть разрыв или ХХ (холостой ход) – см. рис. 8.34 и 8.36), а поперечные плечи – последовательные контуры с малым сопротивлением на ω_0 (на схемах замещения поперечное плечо – короткозамкнутый проводник), то режектируемый сигнал на частоте, близкой к ω_0, шунтируется поперечными плечами, а через продольные плечи – проходит с большим затуханием. На частотах $\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$ сопротивление продольного плеча уменьшается, а поперечного – растёт, поэтому сигналы на этих частотах проходят ЗФ с малым затуханием.

Т-образный полосовой фильтр

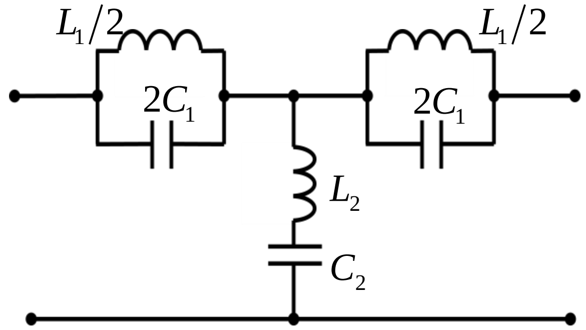


Рис. 8.33

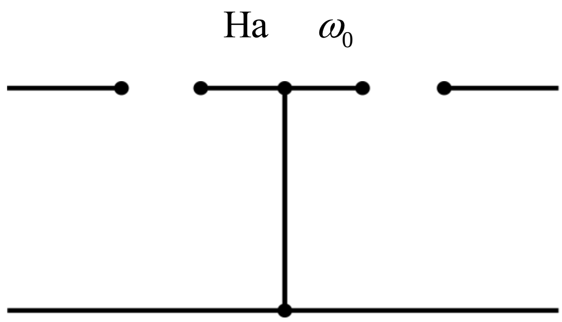


Рис. 8.34

П-образный полосовой фильтр

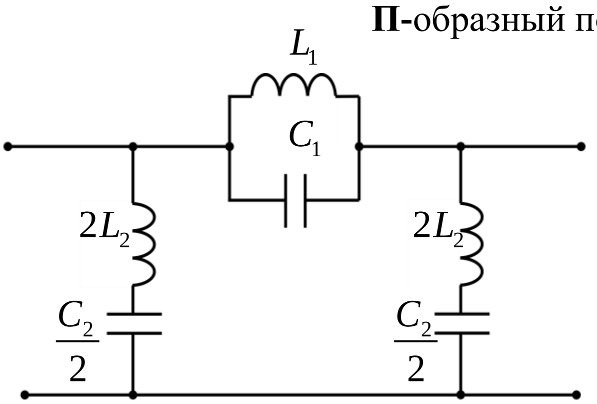


Рис. 8.35

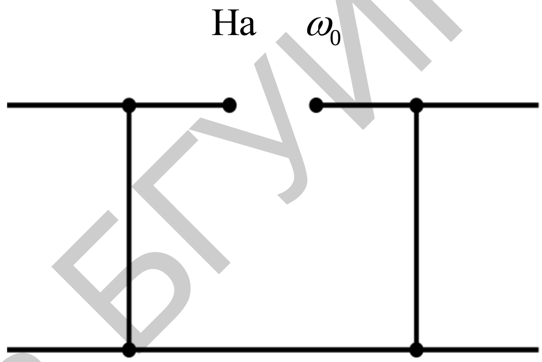


Рис. 8.36

8.8. Мостовые LC-фильтры

Мостовая схема симметричного фильтра в различных режимах работы приведена на рис. 8.37, 8.38, 8.39.

Характеристические параметры мостового фильтра – a_C, b_C и Z_C. Характеристическая постоянная передачи g_C мостового фильтра определяется из соотношений

$$\text{th}\,\frac{g_C}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}\,g_C - 1}{\text{ch}\,g_C + 1}}; \quad \text{ch}\,g_C = A_{11};$$

$$A_{11} = \frac{1}{K_U(j\omega)},$$

где $K_U(j\omega)$ – комплексная передаточная функция фильтра по напряжению:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3}{\dot{\varphi}_1} = \frac{\dot{U}_1 \cdot \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \dot{U}_1 \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}{\dot{U}_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

тогда $A_{11} = (Z_1 + Z_2)/(Z_2 - Z_1)$, а

$$\text{th}\,\frac{g_C}{2} = \sqrt{\frac{A_{11} - 1}{A_{11} + 1}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \tag{8.51}$$

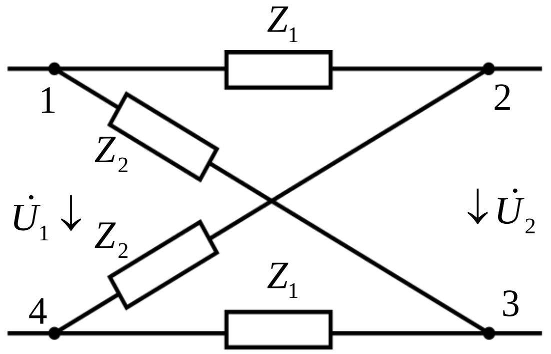


Рис. 8.37

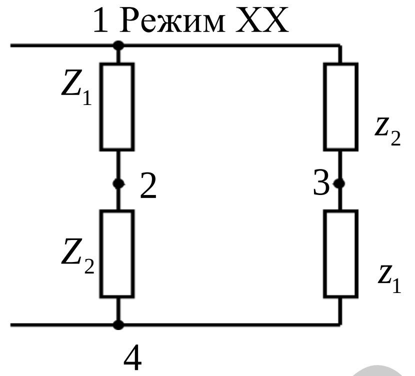


Рис. 8.38

Режим КЗ

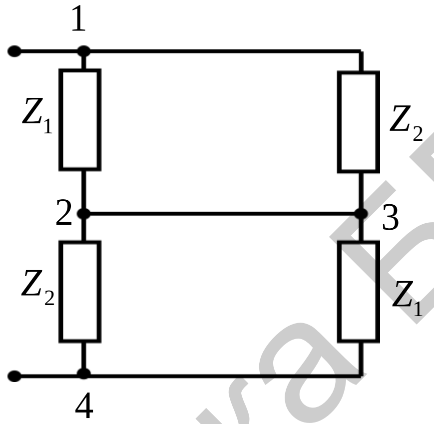


Рис. 8.39

В полосе пропускания $a_{\text{C}} = 0$, тогда

$$\operatorname{tg}\frac{g_{\text{C}}}{2} = \operatorname{th}\left(\frac{a_{\text{C}}}{2} + j\frac{b_{\text{C}}}{2}\right) = \operatorname{th} j\frac{b_{\text{C}}}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}},$$

но так как гиперболический тангенс мнимой величины является мнимой величиной, то $b_{\text{C}} = 2\operatorname{Arth}\sqrt{|Z_1/Z_2|}$. Из этого соотношения следует, что *условием прозрачности мостового фильтра* является неравенство $Z_1/Z_2 \le 0$. Значит, полоса пропускания мостового фильтра будет на частотах, где сопротивления Z_1 и Z_2 – чисто реактивны и противоположны по знаку, а полоса затухания – на частотах, где эти сопротивления имеют одинаковые знаки.

Характеристическое сопротивление Z_{C} мостового фильтра имеет вид $Z_{\text{C}} = \sqrt{Z_{\text{X}} Z_{\text{K}}}$. Согласно схеме на рис. 8.38 в режиме ХХ

$$Z_{\text{XX}} = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_2)}{2(Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_1 + Z_2}{2},$$

а по схеме на рис. 8.39 в режиме КЗ

$$Z_{\text{КЗ}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 2\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

тогда

$$Z_{\text{С}} = \sqrt{Z_{\text{Х}} \cdot Z_{\text{К}}} = \sqrt{\frac{Z_1 + Z_2}{2} + \frac{2Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \sqrt{Z_1 Z_2}. \qquad (8.52)$$

Из выражения (8.52) следует, что в полосе пропускания мостового фильтра, где сопротивления Z_1 и Z_2 реактивны и противоположны по знаку, $Z_{\text{С}}$ – активное, а в полосе затухания $Z_{\text{С}}$ – реактивное ($Z_C = j\sqrt{|Z_1 Z_2|}$). При $Z_1 = Z_2$ имеет место *полюс затухания (или полюс бесконечности)* $f(\infty)$. На этой частоте характеристическое затухание фильтра $a_{\text{С}}$ очень большое. Примеры мостовых *LC*-фильтров и графики их характеристик, полученные из условия прозрачности $Z_1/Z_2 \leq 0$, приведены в прил. 2.

8.9. *Пьезоэлектрические фильтры*

Для создания узкополосных фильтров с высокой селективностью и стабильностью в одну пару плеч мостовой схемы ставят кварцевые (или пьезоэлектрические) резонаторы, обладающие очень высокой добротностью (Q = = $10^4 - 10^6$).

Для упрощения рисунка идентичные плечи фильтра заменяют штриховыми линиями (рис. 8.40).

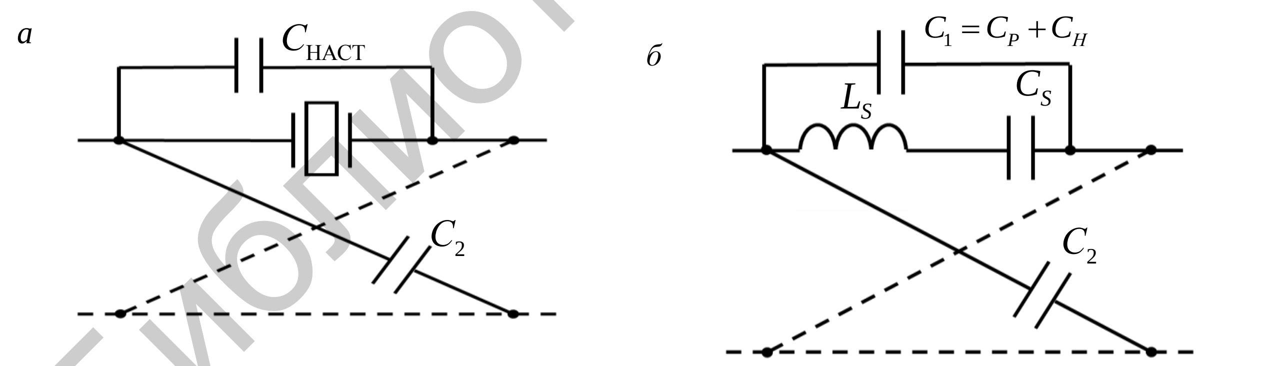


Рис. 8.40

Кварцевый резонатор состоит из пьезоэлектрической пластины с электродами и держателя (рис. 8.41, *а*). Пластины вырезают из природных кристаллов кварца или синтетических пьезоэлектрических кристаллов. Схема замещения резонатора приведена на рис. 8.41, *б*, где C_S – динамическая ёмкость пластины (измеряется от долей до единиц пикофарад), L_S – динамическая индуктивность пластины (от единиц до нескольких сотен генри), r_S – активное сопротивление пластины, характеризующее потери энергии в резонаторе (от нескольких десятков и сотен до нескольких тысяч ом), $C_{\text{Р}}$ – статическая ёмкость конденсатора, образованного электродами и пластиной (от единиц до десятков пикофарад). Поскольку добротность резонатора очень высока, сопротивлением r_S в схеме замещения можно пренебречь.

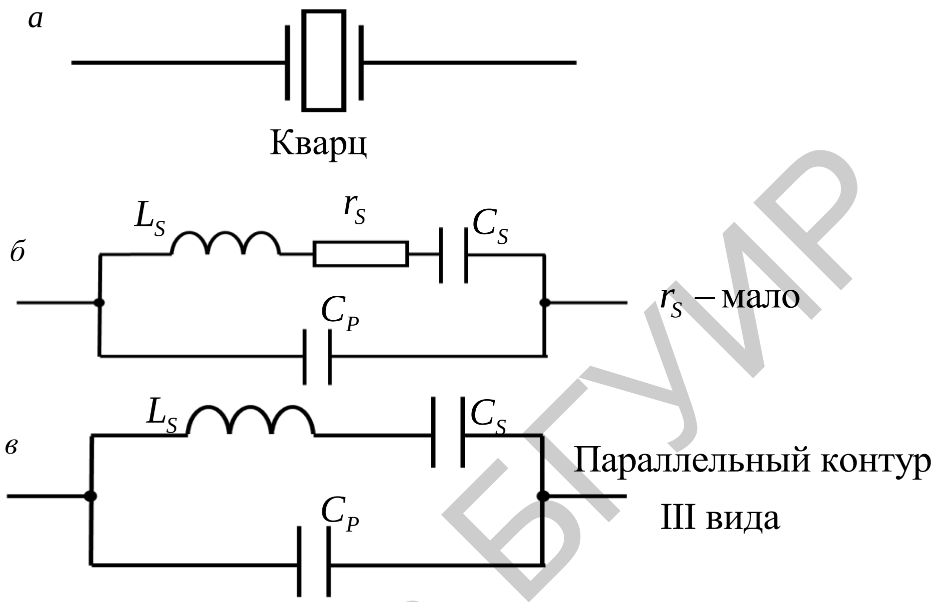


Рис. 8.41

Полученная схема (рис. 8.41, *в*) является параллельным контуром III вида, эквивалентное сопротивление которого реактивно:

$$Z_{\text{ЭКВ}} = \frac{(j\omega L_S + 1/(j\omega C_S))/j\omega C_P}{j\omega L_S + 1/(j\omega C_S) + 1/(j\omega C_P)} = \frac{1}{j2\pi f C_P} \cdot \frac{f^2 - f_S^2}{f^2 - f_P^2}, \qquad (8.53)$$

где $f_s = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}}$ – частота последовательного резонанса; $f_P = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_{\text{экв}}}}$ – частота параллельного резонанса; $C_{\text{экв}} = \dfrac{C_1 \cdot C_S}{C_1 + C_S}$.

График зависимости $Z_{\text{ЭКВ}} / j$ от частоты f приведён на рис. 8.42.

Полосу частот $\Delta F = f_p - f_s$ называют *резонансным промежутком*. Величину промежутка регулируют путём подключения параллельно резонатору дополнительной настроечной ёмкости $C_{\text{наст}}$ (см. рис. 8.40, *а*). При этом будет изменяться $C_{\text{экв}}$, а значит, и частота f_P, и резонансный промежуток ΔF.

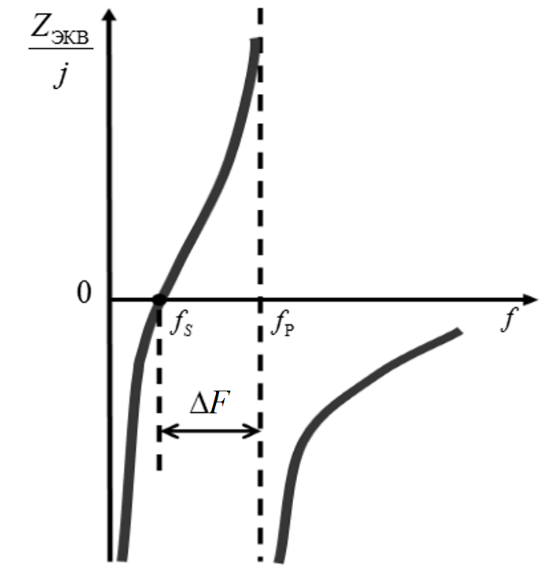


Рис. 8.42

Схема замещения мостового пьезоэлектрического фильтра при $r_S = 0$ приведена на рис. 8.40, *б*. Для этой схемы в соответствии с рис. 8.37

$$Z_1 = \frac{(j\omega L_S + \frac{1}{j\omega C_S}) \cdot \frac{1}{j\omega(C_P + C_{\text{наст}})}}{j\omega L_S + \frac{1}{j\omega C_S} + \frac{1}{j\omega(C_P + C_{\text{наст}})}} = \frac{1}{j2\pi f C_1} \cdot \frac{f^2 - f_S^2}{f^2 - f_P^2};$$

$$Z_2 = \frac{1}{j2\pi C_2} \cdot \frac{1}{f},$$

где $C_1 = C_P + C_{\text{наст}}$.

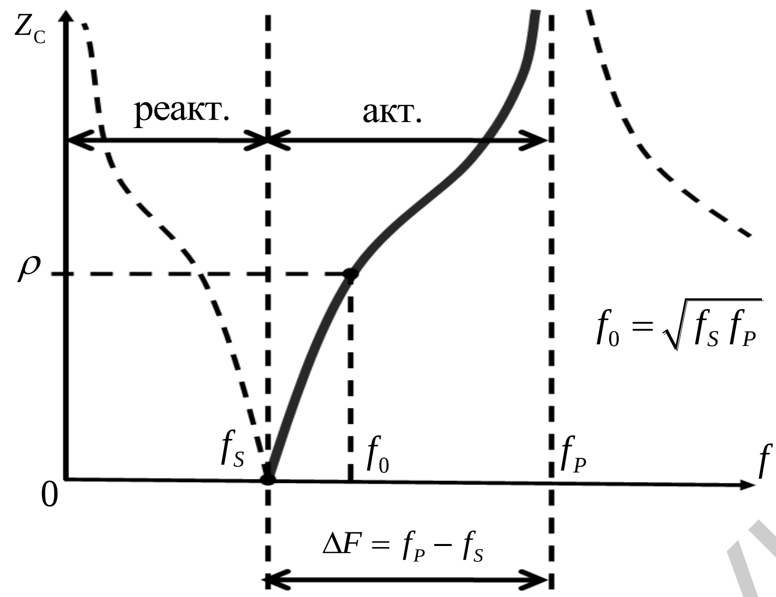
При подстановке этих значений Z_1 и Z_2 в выражение (8.51) получим характеристическую постоянную передачи фильтра:

$$g_{\text{c}} = 2\text{Arth}\sqrt{\frac{C_2}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{f^2 - f_S^2}{f^2 - f_P^2}}.$$

Характеристическое сопротивление рассматриваемого фильтра Z_{C} с учётом формулы (8.52) равно

$$Z_{\text{C}} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2} = \frac{1}{j2\pi f \sqrt{C_1 \cdot C_2}} \cdot \sqrt{\frac{f^2 - f_S^2}{f^2 - f_P^2}}. \tag{8.54}$$

График Z_{C} приведён на рис. 8.43. Из этого графика следует, что Z_{C} в полосе пропускания (в резонансном промежутке) активно, а в полосе затухания ($f < f_{\text{C}}$ и $f > f_P$) – реактивно.



Резонансный промежуток

Рис. 8.43

Характеристическое сопротивление Z_C полосового пьезоэлектрического фильтра на центральной частоте f_0 при подстановке значения $f = f_0 = \sqrt{f_S f_P}$ в равенство (8.54) является номинальным:

$$Z_C = \rho = \frac{1}{j2\pi f_P \sqrt{C_1 C_2}}.$$

8.10. RC-фильтры

На инфранизких частотах проблематично изготовление катушек индуктивности с высокой добротностью. Поэтому в схемах фильтров индуктивность L заменяют активным сопротивлением r.

На рис. 8.44, *а–в* изображены простейшие схемы ФНЧ (см. рис. 8.44, *а*), ФВЧ (см. рис. 8.44, *б*) и полосового *rC*-фильтра (см. рис. 8.44, *в*), а на рис. 8.45, *г–е* – соответствующие им графики характеристического затухания a_c.

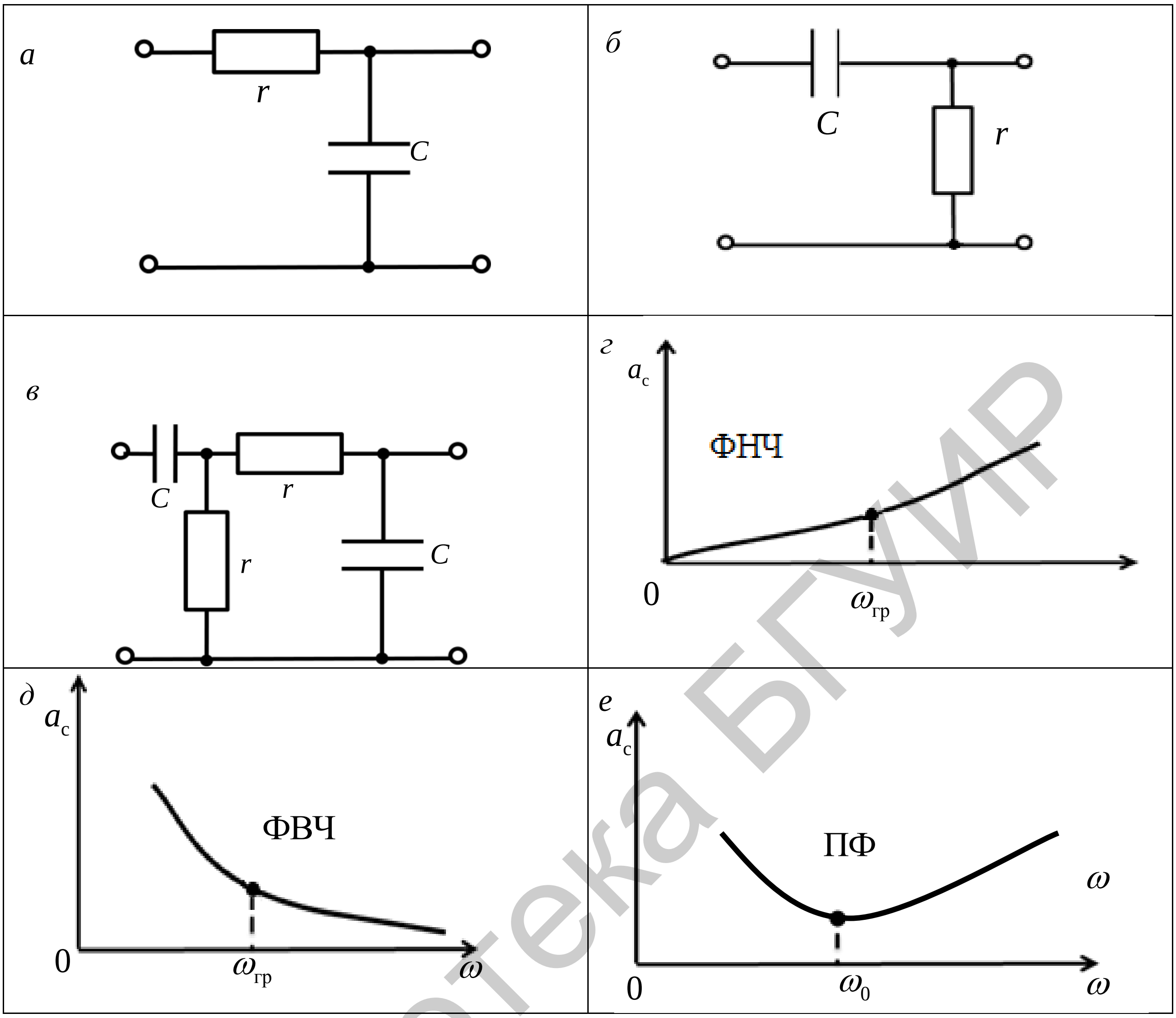


Рис. 8.44

Для всех *rC*-фильтров на рабочем участке полосы пропускания $a_с \neq 0$. Поэтому принято, что рабочая зона ФНЧ находится в диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{гр} = \dfrac{1}{rC}$ (где $a_с = 3$ дБ), а для ФВЧ – в диапазоне от $\omega = \omega_{гр}$ (при $a_с = 3$ дБ) до $\omega = \infty$ (где $a_с \to 0$). В полосовых *rC*-фильтрах минимальное затухание – на частоте $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{rC}}$.

8.11. Фильтры типа m

Для согласования нагрузки с фильтром необходимо, чтобы характеристическое сопротивление фильтра было по возможности постоянным в полосе пропускаемых частот.

Одним из существенных недостатков, например, ФНЧ типа k является то, что в полосе пропускания характеристические сопротивления $Z_{C_Т}$ и $Z_{C_П}$ вблизи $\omega_{гр}$ значительно отличаются от своего номинального значения ρ. Другой недостаток – малая крутизна характеристического затухания $a_с$ при переходе от полосы пропускания к полосе затухания.

Устранить эти недостатки можно путём изменения характера сопротивлений продольных и поперечных плеч фильтра. Например, если в продольное плечо ФНЧ вместо индуктивности L включить параллельный колебательный контур (рис. 8.45, *а*), резонансная частота ω_0 которого будет несколько выше граничной частоты $\omega_{гр}$ ФНЧ, то на частоте ω_0 будет полюс затухания (рис. 8.45, *б*). Характеристическое затухание $a_с$ у такого фильтра при переходе от полосы пропускания к полосе затухания будет расти быстрее, чем у фильтра типа k.

Аналогичный результат можно получить, если в поперечном плече ФНЧ ёмкость C заменить последовательным колебательным контуром (рис. 8.45, *в*). На частоте последовательного резонанса сопротивление этого контура равно нулю. Следовательно, характеристическое затухание $a_с$ такого фильтра очень большое.

Фильтр первого типа, приведенный на рис. 8.45, *а*, называют *параллельно-производным*, а второго типа (см. рис. 8.45, *в*) – *последовательно-производным*.

Соединяя последовательно звенья типа k и m, можно достигнуть постоянства характеристических сопротивлений и крутизны затухания при одновременном сохранении необходимой величины затухания ниже или выше частоты бесконечно большого затухания. На рис. 8.46, *а* показан полосовой фильтр, состоящий из Т-образного фильтра типа k (в середине) и двух Г-образных звеньев фильтра типа m (в начале и конце). На рис. 8.46, *б* изображена характеристика затухания такого полосового фильтра.

Условие согласования характеристических сопротивлений фильтров типа k и типа m является важным при конструировании многозвенных (цепочечных) фильтров, состоящих из звеньев типа k и m. Пример такого согласования, соответствующие схемы и графики приведены в прил. 3.

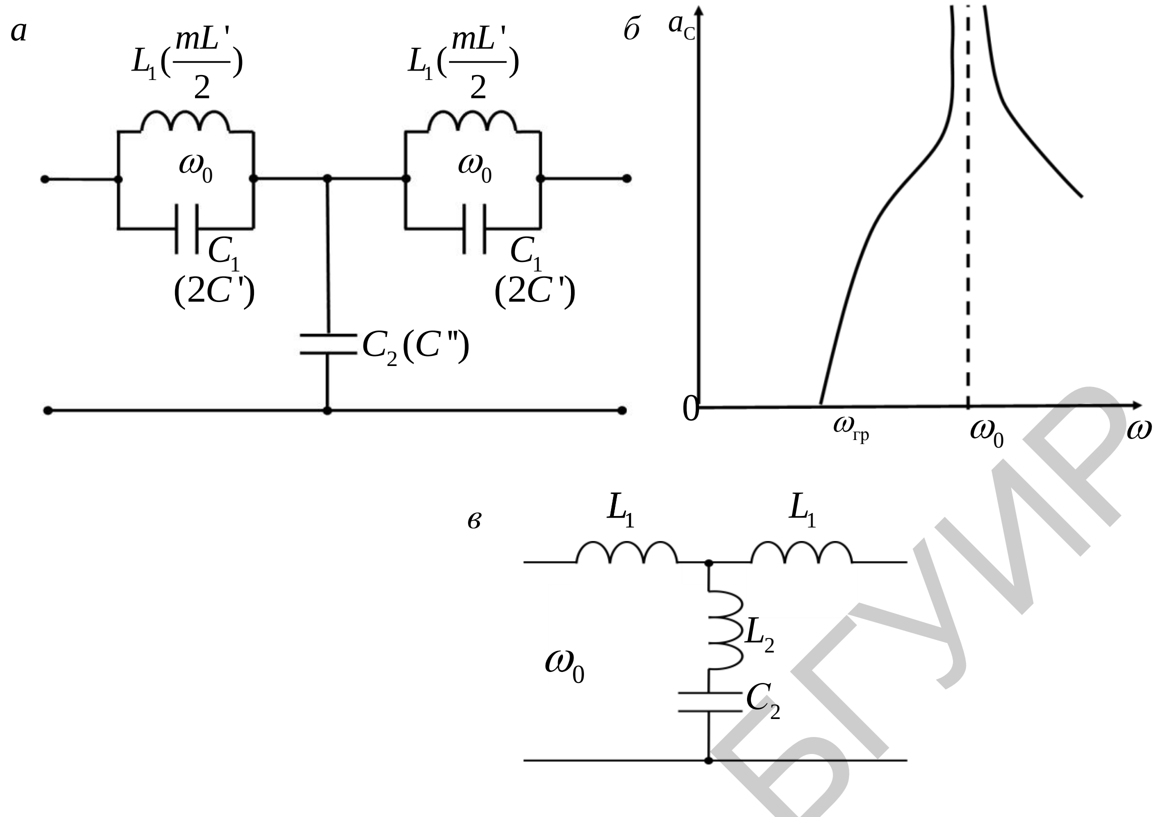


Рис. 8.45

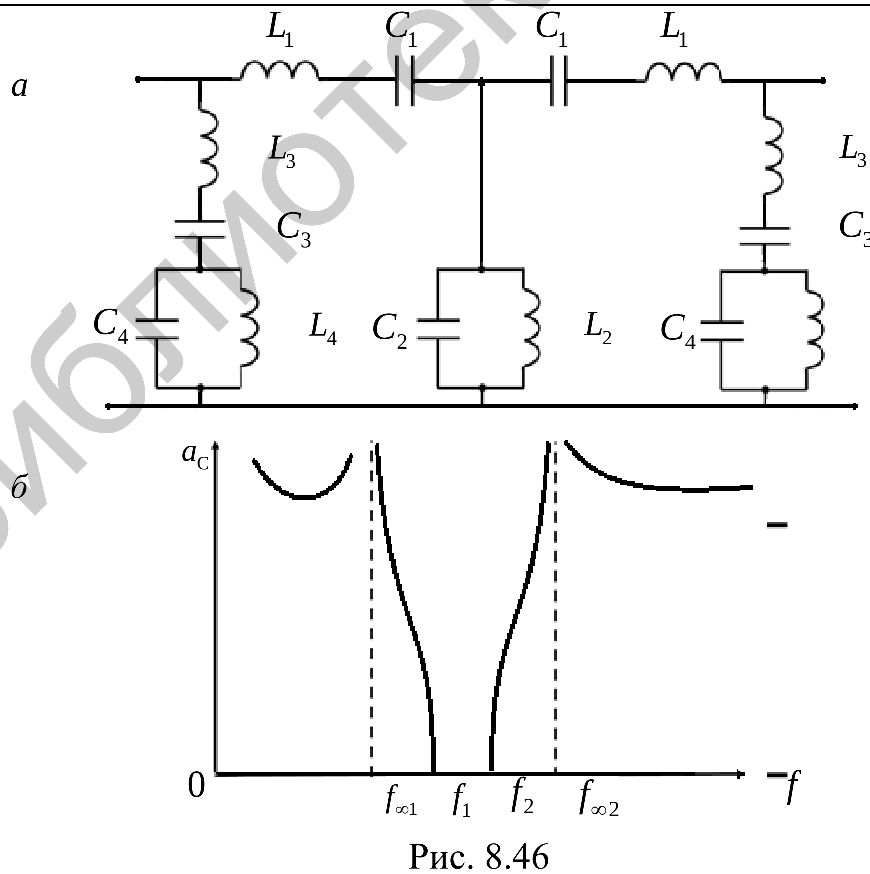


Рис. 8.46

9. Длинные линии (цепи с распределёнными параметрами)

9.1. Параметры длинной линии

В предыдущих разделах рассматривались электрические цепи с *сосредоточенными параметрами.* Такие цепи представляют собой совокупность самостоятельно существующих элементов r, L и C (рис. 9.1), сосредоточенных на различных её участках. Напряжение и ток в этих элементах связаны соотношениями

$$U_r = r \cdot i, \quad U_L = L\frac{di}{dt}, \quad i = C\frac{dUc}{dt}, \tag{9.1}$$

основанными на предположении, что ток, входящий в эти элементы цепи, равен току, выходящему из него.

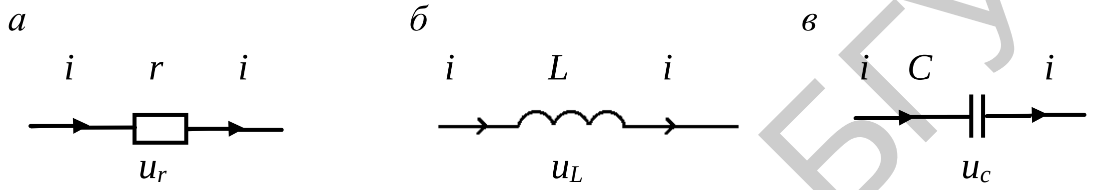


Рис. 9.1

В длинных же линиях (или в линиях с *распределёнными параметрами,* например в двухпроводных или коаксиальных, приведённых на рис. 9.2, *а* и *б* соответственно), с помощью которых электрическая энергия или сигналы передаются на расстояние, магнитное и электрическое поля распределены (рассредоточены) по всей длине линии. При этом на произвольно выделенном участке длинной линии токи в начале и в конце этого участка будут неодинаковыми вследствие наличия:

а) токов смещения, обусловленных ёмкостью между токоведущими проводниками;

б) токов утечки через изоляцию;

в) потерь в проводах в виде тепла.

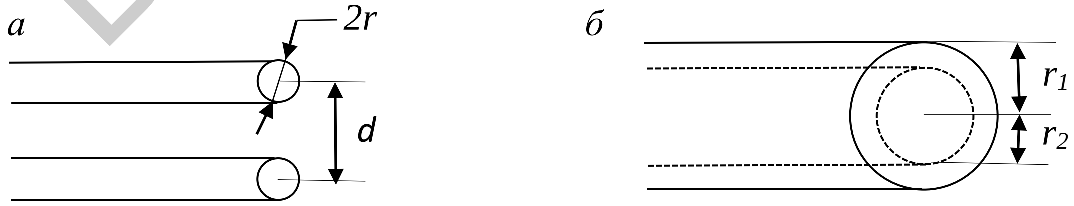


Рис. 9.2

Поэтому уравнения (9.1) ко всей линии в целом неприменимы, они могут быть применимы только к участкам линии, длина которых бесконечно мала.

Процессы же в длинной линии длиной l (рис. 9.3) описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, причем токи и напряжения в однородной длинной линии являются функциями двух переменных – времени t и координаты x, указывающей на конкретное место рассматриваемого участка dx в длинной линии от генератора или от нагрузки.

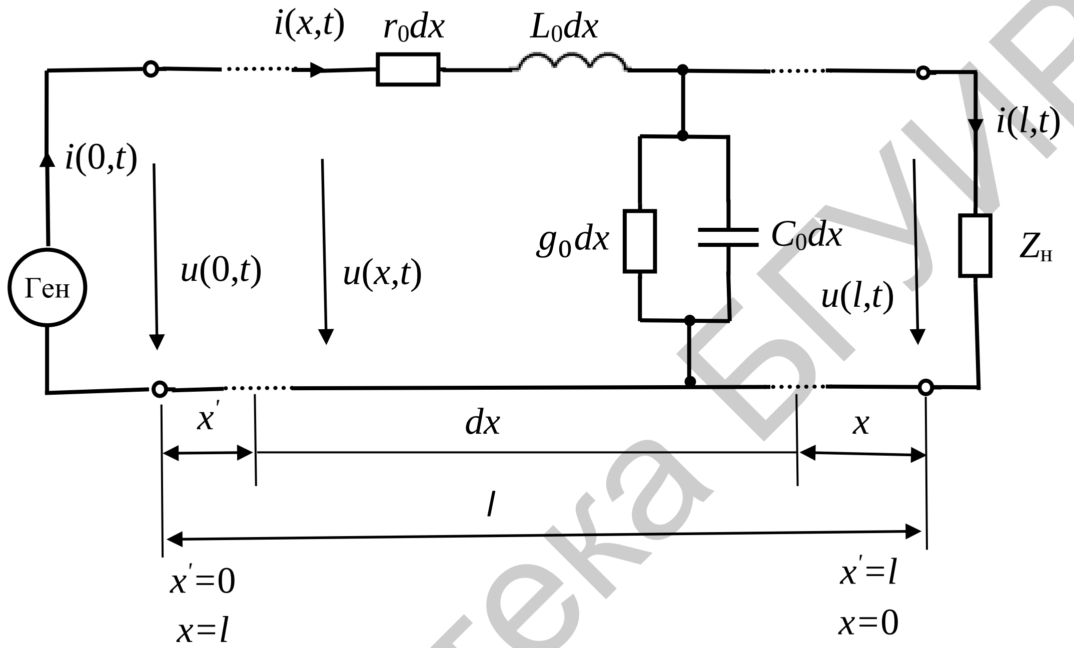


Рис. 9.3

Однородная длинная линия – это такая линия, в которой индуктивность L_0, ёмкость C_0, активное сопротивление r_0 и проводимость g_0 *равномерно* распределены вдоль всей длины линии.

Эти электрические параметры (L_0, C_0, r_0, g_0), отнесённые к единице длины линии, называются *первичными параметрами* линии (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Определение	Обозначение и единицы измерения
1	2
Продольное активное сопротивление проводов на единицу длины линии (погонное сопротивление)	r_0 [Ом/км]
Индуктивность между проводами на единицу длины линии (погонная индуктивность)	L_0 [Гн/км]

Окончание табл. 9.1

1	2
Ёмкость между проводами на единицу длины линии (погонная ёмкость)	C_0 [Ф/км]
Проводимость утечки проводов линии (или поперечная активная проводимость изоляции воздуха между проводами) на единицу длины (погонная проводимость)	g_0 [См/км]
Комплексное продольное сопротивление на единицу длины линии	$Z_0 = r_0 + j\,\omega\, L_0$ [Ом/км]
Комплексная поперечная проводимость на единицу длины линии	$Y_0 = G_0 + j\,\omega C_0$ [См/км]
Комплексный коэффициент распространения (постоянная распространения), характеризующий распространение волн напряжения и тока вдоль линии на единицу длины	$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} =$ $= \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} =$ $= \alpha + j\beta$
Коэффициент ослабления (затухания) амплитуды волны на единицу длины линии	α
Коэффициент фазы, характеризующий изменение фазы волны на единицу длины линии	β
Длина волны – расстояние, на которое распространяется волна за один период	$\lambda = \upsilon T$ [км]
Фазовая скорость, т. е. скорость перемещения точки бегущей волны вдоль линии, при этом фаза точки остаётся постоянной	$V_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$, при $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ $\upsilon_ф = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$
Волновое (характеристическое) сопротивление линии падающей или отражённой волны	$Z_В$ [Ом] $Z_В = \frac{z_0}{\gamma} = \sqrt{Z_0/Y_0} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}$ $= z_В \cdot e^{j\varphi_c}$

Зависимости L_0, C_0, r_0, g_0 и $Z_с$ от геометрических размеров воздушной линии, изображённой на рис. 9.2, *а*, приведены ниже.

Индуктивность на единицу длины воздушной линии $L_0 = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{r} \approx 0{,}921\cdot10^{-6}\,\lg\frac{d}{r}$ [Гн/м], где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ [Гн/м] – относительная диэлектрическая проницаемость изоляции воздуха
Ёмкость на единицу длины воздушной линии $C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{r}} \approx \frac{12{,}07\cdot10^{-12}}{\ln\frac{d}{r}}$ [Ф/м], где $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ [Ф/м] – относительная магнитная проницаемость воздуха
Продольное активное сопротивление проводов воздушной линии $r_0 \approx \frac{8{,}33\sqrt{f}}{r}\cdot10^{-8}$ [Ом/м]
Поперечная активная проводимость изоляции воздуха $g_0 \approx \omega\cdot C_0\cdot \mathrm{tg}\delta$ [См/м], где δ – угол диэлектрических потерь (до 90°), $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
Волновое сопротивление $Z_В = \frac{1}{\pi}\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\ln\frac{d}{r}$

Зависимости L_0, C_0, r_0 и g_0 от геометрических размеров коаксиальной линии, изображенной на рис. 9.2, *б*, приведены ниже.

$$L_0 \approx 0{,}46\lg\frac{r_1}{r_2}\cdot10^{-6}\ [\text{Гн/м}]$$

$$C_0 \approx \frac{0{,}241\ \varepsilon}{\lg\frac{r1}{r2}}\cdot10^{-10}\ [\text{Ф/м}]$$

$$r_0 \approx\ 4{,}16\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\cdot\sqrt{f}\cdot10^{8}[\text{Ом/м}]$$

$$g_0 \approx \omega\cdot C_0\cdot \mathrm{tg}\delta\ [\text{См/м}],$$

$$Z_с = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\mu_0/\varepsilon\varepsilon_0}\,\ln(r_2/r_1)$$

Примечание. ε – относительная диэлектрическая проницаемость изоляции проводов коаксиальной линии.

9.2. Основные уравнения однородной длинной линии с потерями

Для комплексных значений:

– падение напряжения на участке *dx*

$$d\dot{U} = -(r_0\,dx + j\omega L_0 dx)\cdot\dot{I}\,; \tag{9.2}$$

– уменьшение тока на участке *dx*

$$d\dot{I} = -(g_0 dx + j\omega C_0 dx)\cdot\dot{U}. \tag{9.3}$$

При записи уравнений (9.2) и (9.3) через мгновенные значения получают *телеграфные уравнения* длинной линии в частных производных:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0\dfrac{\partial i}{\partial t}\;; \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0\dfrac{\partial u}{\partial t}\;. \end{cases} \tag{9.4}$$

Исключая из уравнений (9.2) и (9.3) ток $\dot{I}$, а затем напряжение $\dot{U}$, получают систему

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)\cdot\dot{U}\;; \\ \dfrac{d^2\dot{I}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)\dot{I}\;. \end{cases} \tag{9.5}$$

Учитывая, что в системе (9.5) $(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0) = \gamma^2$, получают следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2\dot{U}\;; \\ \dfrac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \gamma^2\dot{I}\;. \end{cases} \tag{9.6}$$

В системе (9.6) – однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Решение первого уравнения из этой системы имеет вид

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}, \tag{9.7}$$

где $\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$; $\dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$; ψ_1 и ψ_2 – аргументы комплексных величин $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$.

Ток $\dot{I}$ находят путём подстановки уравнения (9.7) в уравнение (9.2):

$$\dot{I} = \frac{1}{r_0 + j\omega L_0}\left(A_1\gamma e^{-\gamma x} - A_2\gamma e^{\gamma x}\right)$$

или

$$\dot{I} = \sqrt{\frac{g_0 + j\omega C_0}{r_0 + j\omega L_0}}\left(A_1\gamma e^{-\gamma x} - A_2\gamma e^{\gamma x}\right),$$

или

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_{\text{в}}}\left(\mathrm{A}_1\gamma e^{-\gamma x} - \mathrm{A}_2\gamma e^{jx}\right), \tag{9.8}$$

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{g_0 + j\omega C_0}{r_0 + j\omega L_0}} \tag{9.9}$$

называют *волновым сопротивлением* линии.

Подставляя в (9.7) и (9.8) значения $\gamma = \alpha + j\beta$, получают

$$\begin{cases} \dot{U} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi_1)} + A_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2)}; \\ \dot{I} = \frac{A_1}{Z_{\text{в}}} e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi_1 - \varphi)} - \frac{A_2}{Z_{\text{в}}} e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2 - \varphi)}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Система (9.10), записанная через мгновенные значения u и i в сечении x, принимает вид

$$\begin{cases} u(t,x) = \underbrace{\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi_1)}_{u_{\text{пад}} \left(\substack{\text{падающие, или прямые} \\ \text{бегущие волны}}\right)} + \\ \quad + \underbrace{\sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2)}_{\substack{U_{\text{отр}} \text{ (отражённые,} \\ \text{или обратные бегущие волны)}}}; \\ i(t,x) = \underbrace{\sqrt{2} \frac{A_1}{Z_{\text{В}}} e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi)}_{i_{\text{пад}}} - \\ \quad - \underbrace{\sqrt{2} \frac{A_2}{Z_{\text{В}}} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi)}_{i_{\text{отр}}}, \end{cases} \tag{9.11}$$

где φ – угол сдвига фазы между током и напряжением; $Z_{\text{В}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$; на ВЧ $\omega L_0 \gg r_0$, $\omega C_0 \gg g_0$, тогда $Z_{\text{В}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

$$\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = Z_{\text{В}} \to \text{const};$$

$$\frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{отр}}} = -Z_{\text{В}} \to \text{const}.$$

Так как в системе (9.11) $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}$, то $\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0$, откуда $\omega = \beta \frac{dx}{dt}$, где $\frac{dx}{dt} = V_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}$ – фазовая скорость.

Через падающие и отражённые бегущие волны систему (9.11) записывают в следующем виде:

$$\begin{cases} u(t,x) = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i(t,x) = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}}. \end{cases} \tag{9.12}$$

На рис. 9.4 в соответствии с системой (9.11) изображены падающие и отражённые бегущие волны:

а) *падающая* волна: амплитуда уменьшается, фазовое отставание $(-\beta x)$ растёт (рис. 9.4, *а*);

б) *отражённая* волна: амплитуда увеличивается, фазовое опережение $(+\beta x)$ растёт (рис. 9.4, *б*).

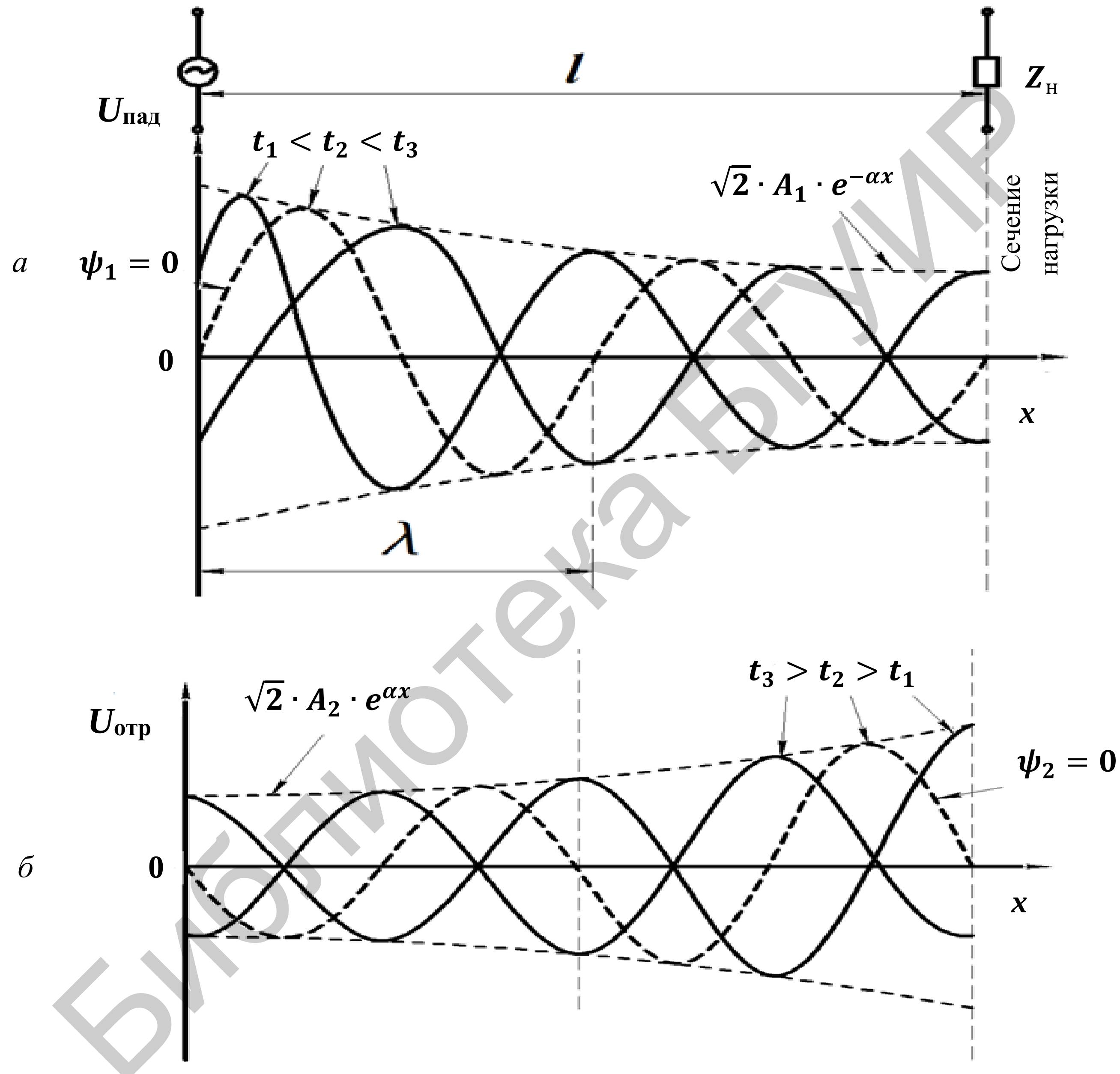


Рис. 9.4

9.3. Длинная линия без потерь

Для уменьшения потерь энергии в воздушной линии необходимо, чтобы активное сопротивление r_0 и проводимость изоляции g_0 были малы. С ростом частоты индуктивное сопротивление линии ωL_0 значительно превышает r_0, а ёмкостная проводимость $\omega \mathrm{C}_0$ значительно превышает g_0:

$$\omega L_0 \gg r_0\,, \omega \mathrm{C}_0 \gg g_0. \tag{9.13}$$

При выполнении неравенств (9.13) исходным *условием* линии без потерь является предположение

$$r_0 \approx 0 \text{ и } g_0 \approx 0\,, \tag{9.14}$$

тогда основные параметры линии рассчитывают по формулам

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha = 0, \\ &\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}\,, \\ &\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta, \\ &Z_\text{В} = \sqrt{L_0/C_0} \end{aligned}} \tag{9.15}$$

Для воздушной линии $Z_\text{В} \approx 276 \lg\dfrac{d}{r} \geq 200 \text{ Ом}$, при $d_{\min} = 5r$ $Z_\text{В} = 350 - 600 \text{ Ом}$.

Для коаксиальной линии $Z_\text{В} \approx 40 - 150 \text{ Ом}$.

Основные уравнения воздушной линии без потерь с использованием формул Эйлера

$$\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = \mathrm{ch}\alpha x\,, \qquad \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} = \mathrm{sh}\alpha x$$

в системе (9.11) записывают в гиперболических функциях

$$\begin{cases} \dot U_1 = \dot U_2 \mathrm{ch}\gamma x + Z_\text{В} \dot I_2 \mathrm{sh}\gamma x\ ; \\ \dot I_1 = \dot I_2 \mathrm{ch}\gamma x + \frac{1}{Z_\text{В}} \dot U_2 \mathrm{sh}\gamma x\ , \end{cases} \tag{9.16}$$

где $\dot U_1$ и $\dot I_1$ – напряжение и ток в сечении генератора; $\dot U_2$ и $\dot I_2$ – напряжение и ток в сечении нагрузки.

Переходя в системе (9.16) от ch и sh к cos и sin при $x = l$, получим

$$\begin{cases} \dot U_1 = \dot U_2 \cos\beta l + jZ_\text{В} \dot I_2 \sin\beta l\ ; \\ \dot I_1 = \dot I_2 \cos\beta l + j\frac{\dot U_2}{Z_\text{В}} \sin\beta l\ . \end{cases} \tag{9.17}$$

Степень согласования линии с источником энергии и нагрузкой в общем случае характеризуется *коэффициентами отражения* по напряжению $\dot p_u$ и току $\dot p_i$:

$$\dot p_u = \dot U_{\text{отр}}/\dot U_{\text{пад}}; \quad \dot p_i = \dot I_{\text{отр}}/\dot I_{\text{пад}}; \quad \dot p_i = -\dot p_u. \tag{9.18}$$

При $\dot U_2/\dot I_2 = Z_{\text{н}}$

$$\begin{cases} \dot p_u = \frac{Z_{\text{н}}-Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}}+Z_{\text{в}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}; \\ \dot p_i = -\frac{Z_{\text{н}}-Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}}+Z_{\text{в}}} \cdot e^{-j2\beta l}. \end{cases} \tag{9.19}$$

Для линии без потерь

$$0 \le |\dot p_u| \le 1; \;\; 0 \le |\dot p_i| \le 1 \text{ при } Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}} \;\; |\dot p_u| = |\dot p_i| = 0. \tag{9.20}$$

Входное сопротивление линии $Z_{\text{вх}} = \dot U_1/\dot I_1$ при $x = l$ в гиперболических функциях согласно (9.16) равно

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot U_2 \mathrm{ch}\gamma l + Z_{\text{В}} \dot I_2 \mathrm{sh}\gamma l}{\frac{\dot U_2}{Z_{\text{В}}} \mathrm{sh}\gamma l + \dot I_2 \mathrm{ch}\gamma l}. \tag{9.21}$$

Так как в равенстве $\gamma = \alpha + j\beta \;\; \alpha = 0$, для линии без потерь $Z_{\text{вх}}$ через cos и sin записывают в следующем виде:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot U_2 \cos\beta l + jZ_{\text{В}} \dot I_2 \sin\beta l}{\dot I_2 \cos\beta l + j\frac{\dot U_2}{Z_{\text{В}}} \sin\beta l}. \tag{9.22}$$

9.4. Режимы работы линии без потерь

В зависимости от сопротивления нагрузки $Z_{\text{н}}$ режимы работы линии могут быть следующие:

1) режим *бегущих* волн (при $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$ и $\dot U_2 = Z_{\text{в}} \cdot \dot I_2$);
2) режим *стоячих* волн:
   а) при холостом ходе (ХХ) $Z_{\text{н}} = \infty$, $\dot I_2 = 0$;
   б) при коротком замыкании (КЗ) $Z_{\text{н}} = 0$, $\dot U_2 = 0$;
   в) при чисто реактивной нагрузке, когда $Z_{\text{н}} = jx$ (индуктивная нагрузка) и $Z_{\text{н}} = -jx$ (ёмкостная нагрузка);
3) режим несогласованной нагрузки, когда $Z_{\text{н}} \neq Z_{\text{в}}$.

9.4.1. Режим бегущих волн

В режиме *бегущих* волн $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$ и коэффициент отражения согласно формуле (9.20) $\dot p_u = \dot p_i = 0$. При этом в линии существует только одна *падающая* волна, обратная (отражённая) волна отсутствует (рис. 9.5), а $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}} = \mathrm{const}$ по всей длине линии.

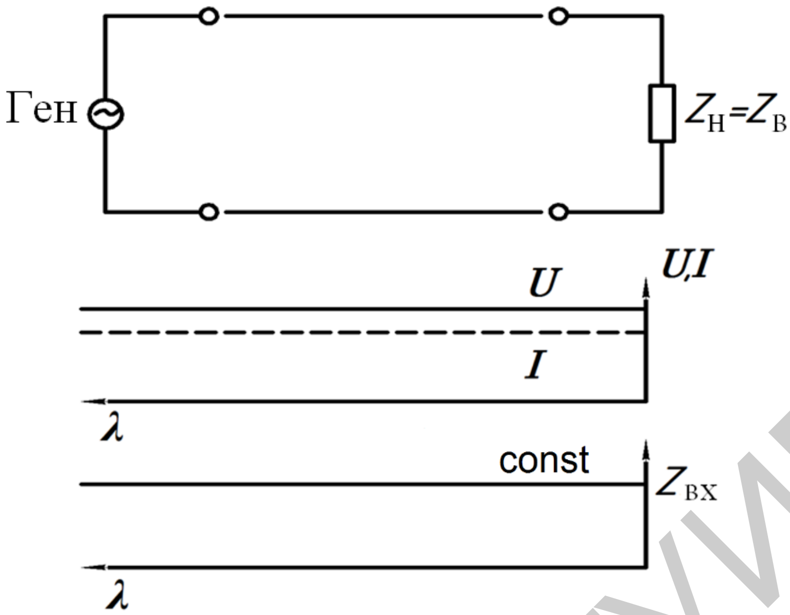


Рис. 9.5

Для режима бегущих волн характерно то, что потери энергии в линии минимальны и отсутствует эффект эха, вызываемый отраженной волной в начале линии.

9.4.2. Режим стоячих волн

Для режима *стоячих* волн характерно то, что при выполнении условия линии без потерь $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$ (см. формулу (9.15)) коэффициенты отражения $\dot{p}_u$ и $\dot{p}_i$ (9.19) представляют собой комплексную величину:

$$\dot{p}_u = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в} \qquad \text{и} \qquad \dot{p}_i = -\frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}. \tag{9.23}$$

В этом случае комплексное напряжение в любой точке длинной линии складывается из напряжений падающей и отражённой волн, амплитуды которых находятся в соотношении $1/|p_u|$, а комплексный ток равен разности токов падающей и отражённой волн с тем же соотношением амплитуд.

Точкам на длинной линии, где соблюдается условие

$$e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x} + p_u \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} = 1 + |p_u|,$$

соответствует максимальное действующее напряжение U, так как при этом фазы напряжений падающей и отражённой волн совпадают.

На расстоянии λ/4 от этих точек падающая и отражённая волны оказываются в противофазе, и действующее напряжение имеет минимум. При этом

$$e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x} - p_u \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} = 1 - |p_u|.$$

Координаты максимумов и минимумов напряжения U, являющиеся функциями p_u и λ, не зависят от времени.

Минимум напряжения U (называемый *узлом*) располагается посередине между двумя соседними максимумами напряжения U (называемыми *пучностями*), причём расстояние между ближайшими максимумами (или минимумами) составляет $\lambda/2$.

Таким образом, кривая действующих напряжений вдоль линии без потерь представляет собой *стоячие* волны с чередованием пучностей и узлов через $\lambda/4$.

При ***холостом ходе***, когда $Z_н = \infty$, а $I_2 = 0$, в линии наблюдаются стоячие волны напряжения с узлами и пучностями через $\lambda/4$ с отсчётом λ от конца линии (т. е. от нагрузки). На рис. 9.6, согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos\beta\ell; \\ \dot{I}_1 &= j\frac{\dot{U}_2}{Z_В}\sin\beta\ell, \end{aligned}\right\} \qquad (9.24)$$

полученным из системы (9.17) при $I_2 = 0$, изображены стоячие волны в линии в режиме холостого хода, когда нагрузка $Z_н = \infty$. При этом напряжение в сечении нагрузки имеет пучность, т. е. $U = U_{\max}$.

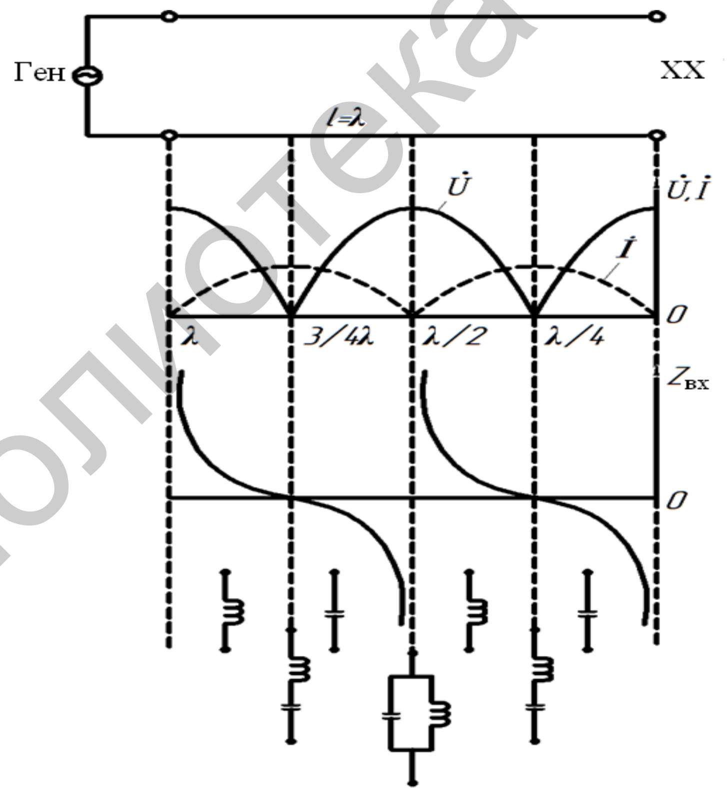


Рис. 9.6

Кривая действующего тока вдоль линии, начиная от сечения нагрузки, где $I = 0$, представляет собой (см. рис. 9.6) стоячие волны, смещённые в сторону генератора относительно напряжения U на $\lambda/4$. При этом максимумы (пучности) тока I совпадают с минимумами (узлами) напряжения U на $\lambda/4$ и $3/4\lambda$.

Входное сопротивление линии в режиме холостого хода определяется при $I_2 = 0$ из уравнения (9.22):

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cos\beta\ell}{j\frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{В}}}\sin\beta\ell} = -jZ_{\text{В}}\text{ctg}\beta\ell, \tag{9.25}$$

т. е. $Z_{\text{ВХ}}$ пропорционально котангенсу со знаком « – » и значениям $Z_{\text{ВХ}} = \pm\infty$ на $\lambda = 0$ и $\lambda/2$ и $Z_{\text{ВХ}} = 0$ на $\lambda/4$ и $3/4\lambda$.

На рис. 9.6 показано также, что линия на $\lambda/4$ и на $3/4\lambda$ имеет $Z_{\text{ВХ}} = 0$, т. е. представляет собой настроенный в резонанс идеальный последовательный колебательный контур. Линия же длиной $\lambda/2$ имеет $Z_{\text{ВХ}} = \pm\infty$, т. е. аналогична настроенному в резонанс идеальному параллельному колебательному контуру. Линия длиной от $\lambda/4$ до $\lambda/2$ эквивалентна индуктивности, а длиной менее $\lambda/4$ – ёмкости. Эти свойства используются при подвешивании длинной линии с помощью изоляторов на опоры, а также при её настройке.

В режиме ***короткого замыкания***, когда $Z_{\text{н}} = 0$, изображения стоячих волн в линии строят по уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= jZ_{\text{В}}\dot{I}_2\sin\beta\ell; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2\cos\beta\ell, \end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

полученным из системы (9.17) при $U_2 = 0$ (рис. 9.7).

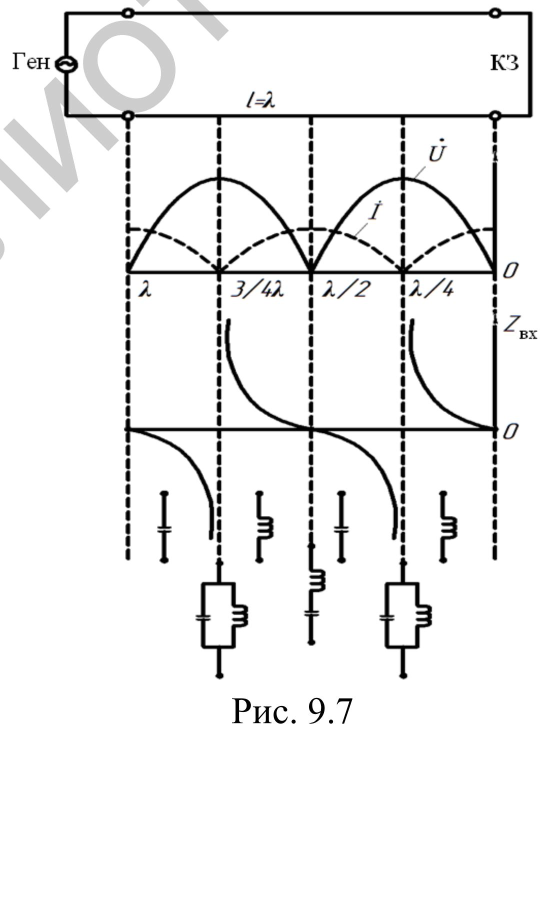


Рис. 9.7

Входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания пропорционального тангенсу:

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{jZ_{\text{В}}\dot{I}_2\sin\beta\ell}{\dot{I}_2\cos\beta\ell} = jZ_{\text{В}} \cdot \text{tg}\beta\ell. \qquad (9.27)$$

На рис. 9.7 показано, что в этом режиме, в отличие от режима холостого хода, линия на $\lambda/2$ аналогична настроенному в резонанс идеальному последовательному колебательному контуру и параллельному – на $\lambda/4$ и 3/4 λ.

Линия длиной менее $\lambda/4$ эквивалентна индуктивности, а длиной от $\lambda/4$ до $\lambda/2$ – ёмкости.

Режим ***чисто реактивной нагрузки***. При нагрузке линии на чисто реактивное сопротивление в ней образуются стоячие волны, так же как и в режимах холостого хода и короткого замыкания, так как чисто реактивное сопротивление можно заменить эквивалентным отрезком линии (разомкнутым или короткозамкнутым) в зависимости от характера реактивного сопротивления.

Так, подключение к длинной линии нагрузки в виде чисто ёмкостного сопротивления $Z_{\text{н}} = -jX = -j\frac{1}{\omega c}$ (рис. 9.8, *а*) эквивалентно разомкнутому отрезку линии длиной $\lambda/4$ (рис. 9.8, *б*). При этом узлы и пучности стоячих волн по сравнению с режимом ХХ (см. рис. 9.6) смещаются вправо, в сторону сечения нагрузки (рис. 9.9).

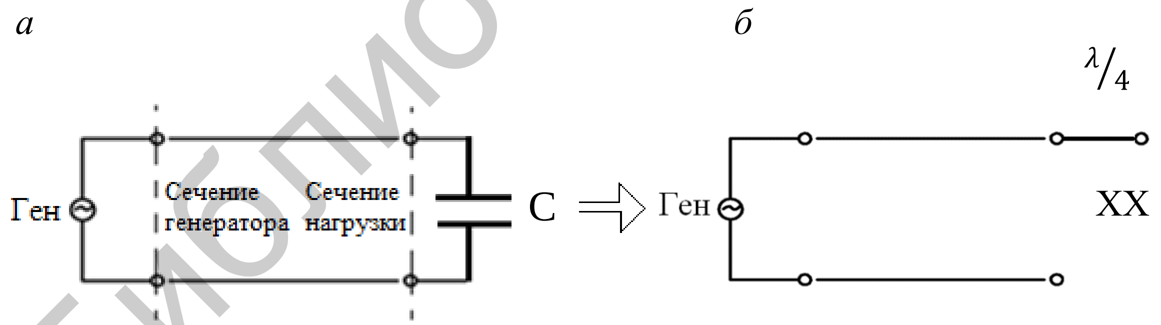


Рис. 9.8

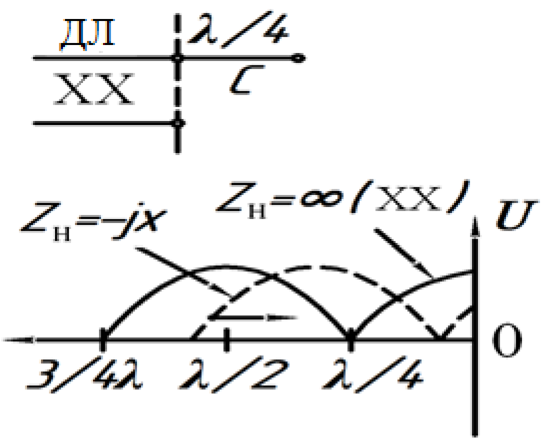


Рис. 9.9

Подключение же к длинной линии нагрузки в виде чисто индуктивного сопротивления $Z_н = jX = j\omega L$ (рис. 9.10, *а*) приводит к тому, что узлы и пучности стоячих волн по сравнению с режимом КЗ (см. рис. 9.7) смещаются влево, в сторону генератора (рис. 9.11).

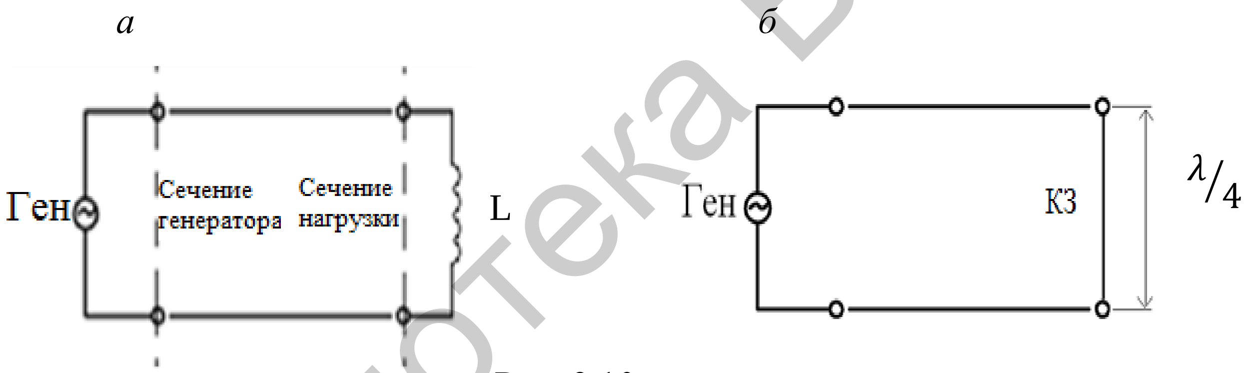


Рис. 9.10

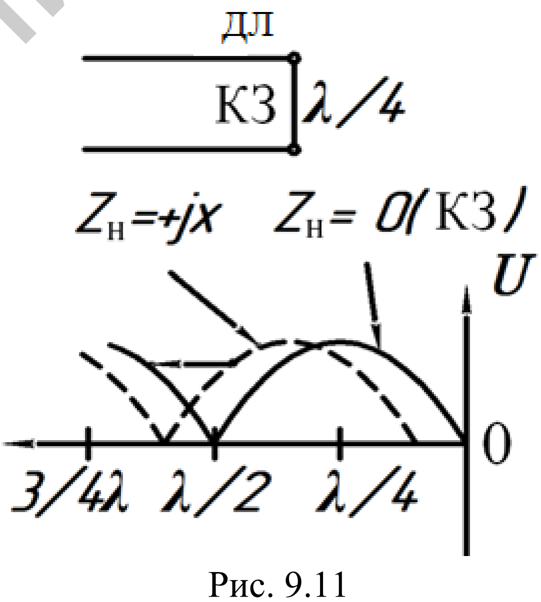


Рис. 9.11

9.4.3. Режим несогласованной нагрузки

При нагрузке линии сопротивлением, не равным волновому ($Z_н \neq Z_в$), в линии наблюдаются *смешанные волны*, у которых, в отличие от режимов XX и КЗ, из-за потерь ток и напряжение в узлах не равны нулю (рис. 9.12). Причём чем больше разница между сопротивлением нагрузки $Z_н$ и волновым сопротивлением $Z_в$, тем больше разница между напряжением (токами) в пучностях $U_{\max}$ ($I_{\max}$) и в узлах $U_{\min}$ ($I_{\min}$).

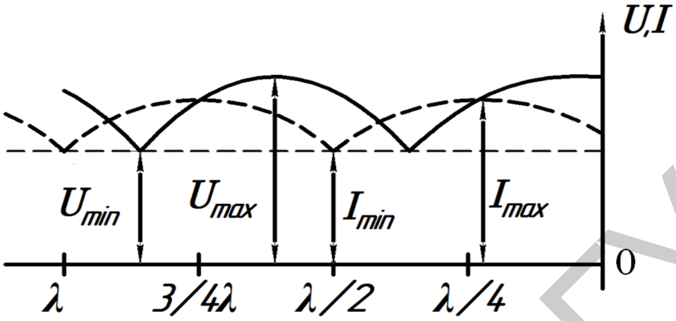


Рис. 9.12

Если известны максимальные и минимальные напряжения и токи, то коэффициент отражения рассчитывается по формулам

$$p_U = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + \mathrm{U}_{\min}} \text{ и } p_i = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{U_{\max} - I_{\min}}. \tag{9.28}$$

Для количественной оценки степени согласования длинной линии с нагрузкой А. А. Пистолькорсом предложено использовать *коэффициент бегущей волны* (КБВ), под которым понимают отношение минимума U или I к их максимуму:

$$K_б = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} \tag{9.29}$$

или с учетом формул (9.28)

$$K_б = \frac{1 - p_U}{1 + p_U}, \quad K_б = \frac{1 - p_i}{1 + p_i}. \tag{9.30}$$

В случае активной нагрузки r_2
при $r_2 > z_В$ $p = \frac{r_2 - z_В}{r_2 + z_В}$ и $K_б = \frac{z_В}{r_2}$;   при $r_2 < z_В$ $p = \frac{z_В - r_2}{z_В + r_2}$ и $K_б = \frac{r_2}{z_В}$

Коэффициент бегущей волны в общем случае

$$0 \leq K_б \leq 1, \tag{9.31}$$

в реальных условиях $K_б$ обычно не менее 0,5–0,6.

Татариновым В. В. для оценки степени согласования длинной линии с нагрузкой предложено использовать *коэффициент стоячей волны* (КСВ), под которым понимают отношение максимума U или I к их минимуму:

$$K_С = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}}, \tag{9.32}$$

т. е. $K_С = \frac{1}{K_б}$ и $1 \leq K_С \leq \infty$.

При $Z_н = Z_в$ в режиме бегущих волн $K_С = K_б = 1$, в режиме стоячих волн $K_б = 0$, $K_С = \infty$.

9.5. Частотные свойства входного сопротивления длинной линии

Входное сопротивление короткого замыкания линии $Z_{КЗ}$ и холостого хода $Z_{ХХ}$ при изменении длины линии ℓ и постоянной частоте генератора f с постоянным коэффициентом фазы β или при изменении частоты f и неизменной длине линии ℓ будет изменяться волнообразно. Причем колебания, соответствующие двум рядом находящимся максимумам или минимумам на кривой входного сопротивления, находятся в фазе:

при постоянной длине линии ℓ $2\beta_1\ell - 2\beta_2\ell = 2\pi$ или $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{\ell}$ (9.33)
при постоянной частоте f $(\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{V_Ф})$, $2\beta\ell_1 - 2\beta\ell_2 = 2\pi$ или $\ell_1 - \ell_2 = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{2}$ (9.34)

Соотношение (9.34) показывает, что максимумы и минимумы стоячих волн чередуются через $\lambda/2$. Аналогичные рассуждения можно провести, анализируя выражение (9.22) для входного сопротивления $Z_{ВХ}$ при произвольной нагрузке.

Эти свойства частотной характеристики входного сопротивления линии используются для определения места повреждения линии или для определения места включения какой-либо неоднородности в линию, которые вызывают волнообразное изменение входного сопротивления $Z_{ВХ}$. Исследуя частотную характеристику входного сопротивления линии путём изменения частоты входного генератора, фиксируют два следующих друг за другом максимума или минимума $Z_{ВХ}$, соответствующих частотам f_1 и f_2:

$$\beta_2 - \beta_1 = 2\pi\left(\frac{f_2}{V_{\Phi_2}} - \frac{f_1}{V_{\Phi_1}}\right) = \frac{\pi}{\ell_0},$$

где

$$\ell_0 = \frac{V_{\Phi_1} \cdot V_{\Phi_2}}{2(V_{\Phi_1} \cdot f_2 - V_{\Phi_2} \cdot f_1)}. \qquad (9.35)$$

При частоте f_2, близкой к частоте f_1, разница между фазовыми скоростями мала, поэтому можно предположить, что $V_{\Phi_1} \approx V_{\Phi_2} = V_{\Phi}$, тогда соотношение (9.35) примет вид

$$\ell_0 = \frac{V_{\Phi}}{2(f_2 - f_1)}, \qquad (9.36)$$

где $V_{\Phi} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda \cdot f$, а коэффициент фазы

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0} = 2\pi f\sqrt{L_0 C_0}. \qquad (9.37)$$

9.6. Примеры решения задач

П р и м е р 1. Линия без потерь нагружена на сопротивление, равное волновому $Z_{н} = Z_{в} = 500$ Ом. Длина линии $\ell = 30$ км, коэффициент затухания $\alpha = 0{,}003$ Нп/км, напряжение генератора $U_{г} = 120$ В.

Определить напряжение и ток в нагрузке, а также КПД линии.

Р е ш е н и е. Поскольку $Z_{н} = Z_{в}$, то фазовые сдвиги между напряжениями и токами в начале линии те же, что и в конце. Поэтому КПД линии рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{U_2 I_2 \cdot \cos\varphi_2}{U_1 I_1 \cdot \cos\varphi_1} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} \cdot e^{-2\alpha\ell} = e^{-0{,}18} = 0{,}835.$$

Напряжение и ток в нагрузке:

$$U_2 = U_r \cdot e^{-\alpha\ell} = 120 \cdot e^{-0{,}09} = 109 \text{ В};$$

$$I_2 = \frac{U_2}{500} = 0{,}218 \text{ А}.$$

П р и м е р 2. Линия без потерь, разомкнутая на конце, запитана генератором синусоидального напряжения. Длина линии $\ell = 30$ км.

Определить частоты, на которых линия будет эквивалентна контуру, настроенному в резонансе напряжения, и частоты, при которых линия будет настроена в резонанс токов.

Р е ш е н и е. Резонансу напряжений соответствуют частоты, при которых входное сопротивление линии без потерь $Z_{ВХ} = 0$, а при резонансе токов – $Z_{ВХ} = \infty$.

Так как $Z_{\text{ВХ}} = -jZ_{\text{В}}\text{ctg}2\pi\frac{\ell}{\lambda}$, то при резонансе напряжений

$$Z_{\text{ВХ}} = -jZ_{\text{В}}\text{ctg}2\pi\frac{\ell}{\lambda} = 0,$$

откуда

$$2\pi\frac{\ell}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{где } k = 1,2,3 \dots .$$

Тогда

при $\lambda_1 = 120$ м, $\quad f_1 = 2{,}5$ МГц;
при $\lambda_2 = 40$ м, $\quad f_2 = 7{,}5$ МГц;
при $\lambda_3 = 24$ м, $\quad f_3 = 12{,}5$ МГц и т. д.

При резонансе токов $Z_{\text{ВХ}} = \infty$, тогда $f_1 = 5$ МГц; $f_2 = 10$ МГц; $f_3 = 15$ МГц и т. д.

П р и м е р 3. Двухпроводная линия без потерь запитана от генератора с частотой f = 1,5 МГц. Расстояние между проводами d = 300 мм, диаметры проводов d = 5 мм. Линия нагружена на конденсатор ёмкостью C = 222 пФ.

Определить расстояние от нагрузки линии до ближайших пучностей напряжения и тока, величины максимумов напряжения и тока, если напряжение на конденсаторе $U_{\text{н}} = U_{\text{с}}$ = 200 В.

Р е ш е н и е. Поскольку линия нагружена на конденсатор, то приёмник линии следует заменить разомкнутым отрезком линии (см. п. 9.4.2). Входное сопротивление линии $Z_{\text{ВХ}} = -jZ_{\text{В}}\text{ctg}\beta\ell$ должно равняться

$$x = -\frac{1}{\omega c} = -\frac{10^{12}}{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 222} = -480 \text{ Ом},$$

тогда $Z_{\text{В}}$ = 572 Ом, $\beta\ell = \frac{50°\, 2\pi}{360°} = 2\pi f \cdot \frac{\ell}{V_{\Phi}}$, откуда $\ell = \frac{50°}{360°} \cdot \frac{V_{\Phi}}{f} = 27{,}8$ м.

Таким образом, вместо конденсатора линию удлиняют отрезком в 27,8 м. В конце этого отрезка будет находиться узел тока и пучность напряжения. Следующая пучность напряжения отстоит от конца уже удлинённой линии на расстоянии $\frac{V_{\Phi}}{2f}$ = 100 м, т. е. на расстоянии 72,2 м от конца уже удлинённой линии. Пучность тока окажется на расстоянии 22,2 м от конца заданной линии.

Таким образом, на расстоянии 27,8 м от конца новой линии напряжение $U_{\text{н}} = U_{\text{с}}$ = 200 В. Напряжение на конце новой линии определяем по формуле

$$200 = U_{\max}\sin\frac{22{,}2}{50} \cdot 90°,$$

откуда $U_{\max}$ = 312 В.

Пучность тока

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_{\text{В}}} = \frac{312}{572} = 0{,}544 \text{ А}.$$

П р и м е р 4. Линия без потерь нагружена индуктивностью. Длина линии ℓ = 15 м, её волновое сопротивление $Z_В = 500$ Ом, частота входного генератора f = 7,5 МГц.

Подобрать индуктивность нагрузки так, чтобы вся цепь оказалась эквивалентна контуру, настроенному в резонанс напряжений.

Р е ш е н и е. Используя методику примера 3 и сведения из п. 9.4.2, заменив индуктивность короткозамкнутым отрезком линии, получим $L = 10{,}62$ мкГн.

П р и м е р 5. Воздушная линия без потерь длиной ℓ = 60 км разомкнута на конце и подключена к источнику постоянного напряжения $E = 60$ кВ. Погонные индуктивность и ёмкость известны: $L_0 = 4$ мГн/км, $С_0 = 2780$ пФ/км. Сопротивлением источника пренебречь.

Определить запас электромагнитной энергии линии через время $t_1 = 0{,}2$ мс, $t_2 = 0{,}4$ мс, $t_3 = 0{,}6$ мс, $t_4 = 0{,}8$ мс, прошедшее после подключения линии к источнику напряжения.

Р е ш е н и е. Скорость распространения волн вдоль линии

$$V_Ф = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 2780 \cdot 10^{-12}}} = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

Электромагнитная волна пробегает всю линию за время

$$t = \frac{\ell}{V_Ф} = \frac{60}{3 \cdot 10^5} = 0{,}2 \text{ мс}.$$

К концу первого заданного отрезка времени напряжение вдоль всей линии установится $E = 6$ кВ, а ток будет равен

$$I = \frac{E}{Z_В} = \frac{60 \cdot 10^3}{1200} = 50 \text{ А}.$$

Волновое сопротивление $Z_в = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ = 1200 Ом.

Запас энергии электрической составляющей поля

$$W_{1э} = \frac{C_0 U^2}{2} \cdot \ell = \frac{2780(60 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot 60 = 300 \text{ Дж}.$$

Запас энергии магнитной составляющей поля

$$W_{1М} = \frac{L_0 I^2}{2} \ell = 300 \text{ Дж},$$

тогда $W_1 = W_{1э} + W_{1М} = 600$ Дж.

Ещё через 0,2 мс, т. е. через $t_2 = 0{,}4$ мс, волны напряжения и тока, отражённые от конца линии, дойдут до её начала. При этом напряжение в любой точке линии окажется равным $2E$, а ток – нулю.

К концу второго заданного отрезка времени $W_{2Э} = 1200$ Дж, а $W_{2М} = 0$.

К концу времени $t_3 = 0{,}6$ мс вдоль линии пройдут волны напряжения и тока, отражённые от начала линии, вдоль неё восстановится напряжение E и ток, равный $\frac{E}{Z_В}$, изменит своё направление на обратное.

Запас энергии вновь окажется равным

$$W_3 = W_{3Э} + W_{3М} = (300 + 300) \text{Дж}.$$

К концу четвёртого отрезка времени ($t_4 = 0{,}8$ мс) линия разрядится и ток прекратится. Запас электромагнитной энергии окажется равным нулю. Начнётся новый цикл.

П р и м е р 6. Воздушная линия без потерь (данные см. в примере 5) короткозамкнута на конце, подключена к источнику постоянного напряжения $E = 60$ кВ.

Определить запас электромагнитной энергии линии через время $t_1 = 0{,}2$ мс, $t_2 = 0{,}4$ мс, $t_3 = 0{,}6$ мс, $t_4 = 0{,}8$ мс, прошедшее после подключения линии к источнику напряжения. Сопротивлением источника пренебречь.

Р е ш е н и е. Используя методику примера 5 и сведения из п. 9.4.2, получим

$$W_1 = W_м + W_э = 300 + 300 = 600 \text{ Дж},$$
$$W_2 = 1200 + 0 = 1200 \text{ Дж},$$
$$W_3 = 2700 + 300 = 300 \text{ Дж},$$
$$W_4 = 4800 + 0 = 4800 \text{Дж}.$$

П р и м е р 7. Волновое сопротивление длинной линии без потерь $Z_B = 500$ Ом. Длина линии $\ell = 120$ км. К концу линии подключена нагрузка – активное сопротивление $r_н = 500$ Ом. Линия подключена к источнику постоянного напряжения $E = 500$ В.

Определить мощность, расходуемую в сопротивлении нагрузки $r_н = 500$ Ом, через время $t_1 = 0{,}5$ мс и $t_2 = 1{,}3$ мс после включения линии. Как изменится мощность, если сопротивление уменьшить в 10 раз, т. е. $r_2 = 50$ Ом? Сопротивлением источника напряжения пренебречь.

Р е ш е н и е. Время распространения волны вдоль линии

$$t = \frac{\ell}{V_Ф} = \frac{120}{3 \cdot 10^5} = 0{,}4 \text{ мс}.$$

Если $r_н = r_в = 500$ Ом, то отражённых волн не будет, и процесс установится через $t = 0{,}4$ мс после включения линии. Затуханием в линии пренебрегаем, поэтому

$$U_2 = 500 \text{ В и } I_2 = \frac{500}{500} = 1 \text{ А}, \qquad P_\text{Н} = U_2 I_2 = 500 \text{ Вт}.$$

Если нагрузка $r_2 = 50$ Ом, то после включения генератора появится отражение от конца линии, при этом коэффициент отражения будет равен

$$p_\text{Н} = \frac{r_\text{Н} - Z_\text{В}}{r_\text{Н} + Z_\text{В}} = \frac{50 - 500}{50 + 500} = -0{,}818.$$

Коэффициент отражения генератора

$$p_\Gamma = \frac{0 - Z_\text{В}}{0 + Z_\text{В}} = -1.$$

К концу первого отрезка времени $t = 0{,}4$ мс электромагнитная волна достигнет конца линии и частично отразится. Отражённая волна напряжения

$$p_\text{Н} E = -0{,}818 \cdot 500 = -409 \text{ В}.$$

Следовательно, через $t = 0{,}4$ мс напряжение на конце линии $U'_\text{Н} = 500 -$ $- 409 = 91$ В, а ток в приёмнике $I'_\text{Н} = \frac{91}{50} = 1{,}82$ А.

Отражённая от приёмника волна с напряжением 409 В дойдет до генератора и, отразившись, вновь вернется к приёмнику и снова частично отразится. Отражённая повторно волна

$$U''_\text{Н} = 409 \cdot (-0{,}818) = -334{,}6 \text{ В}.$$

Напряжение в нагрузке через время $t = 1{,}2$ мс после включения линии окажется равным

$$U'''_\text{Н} = 91 + 409 - 334{,}6 = 165{,}4 \text{ В}.$$

Это напряжение продержится в течение $0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$ мс. Ток в нагрузке в течение этого времени

$$I'''_\text{Н} = \frac{165{,}4}{50} = 3{,}31 \text{ А},$$

а мощность $P_\text{н} = 3{,}31 \cdot 165{,}4 = 546$ Вт.

Приложение 1

Соотношение параметров шести форм записи уравнений четырехполюсников

Определяемый параметр	Зависимость между параметрами					
	Y	Z	A	B	H	F
Y	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\lvert Z\rvert} & \frac{-Z_{12}}{\lvert Z\rvert} \\ \frac{-Z_{21}}{\lvert Z\rvert} & \frac{Z_{11}}{\lvert Z\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\lvert A\rvert}{A_{12}} \\ \frac{1}{A_{12}} & \frac{-A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{11}}{B_{12}} & \frac{-1}{B_{12}} \\ \frac{-\lvert B\rvert}{B_{12}} & \frac{B_{22}}{B_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\lvert H\rvert}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert F\rvert}{F_{22}} & \frac{F_{12}}{F_{22}} \\ \frac{F_{21}}{F_{22}} & \frac{1}{F_{22}} \end{matrix}$
Z	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\lvert Y\rvert} & \frac{-Y_{12}}{\lvert Y\rvert} \\ \frac{-Y_{21}}{\lvert Y\rvert} & \frac{Y_{11}}{\lvert Y\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\lvert A\rvert}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{-A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{22}}{B_{21}} & \frac{1}{B_{21}} \\ \frac{\lvert B\rvert}{B_{21}} & \frac{B_{11}}{B_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert H\rvert}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{F_{11}} & \frac{-F_{12}}{F_{11}} \\ \frac{F_{21}}{F_{11}} & \frac{\lvert F\rvert}{F_{11}} \end{matrix}$
A	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\lvert Y\rvert}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{-Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{22}}{\lvert B\rvert} & \frac{B_{12}}{\lvert B\rvert} \\ \frac{B_{21}}{\lvert B\rvert} & \frac{B_{11}}{\lvert B\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\lvert H\rvert}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{F_{21}} & \frac{F_{22}}{F_{21}} \\ \frac{F_{11}}{F_{21}} & \frac{\lvert F\rvert}{F_{21}} \end{matrix}$
B	$\begin{matrix} \frac{-Y_{11}}{Y_{12}} & \frac{-1}{Y_{12}} \\ \frac{-\lvert Y\rvert}{Y_{12}} & \frac{-Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{\lvert A\rvert} & \frac{A_{12}}{\lvert A\rvert} \\ \frac{A_{21}}{\lvert A\rvert} & \frac{A_{11}}{\lvert A\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{12}} & \frac{H_{11}}{H_{12}} \\ \frac{H_{22}}{H_{12}} & \frac{\lvert H\rvert}{H_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\lvert F\rvert}{F_{12}} & \frac{-F_{22}}{F_{12}} \\ \frac{F_{11}}{F_{12}} & \frac{1}{F_{12}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\lvert Y\rvert}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\lvert A\rvert}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{12}}{A_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B_{12}}{B_{11}} & \frac{1}{B_{11}} \\ \frac{-\lvert B\rvert}{B_{11}} & \frac{B_{21}}{B_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{F_{22}}{\lvert F\rvert} & \frac{-F_{12}}{\lvert F\rvert} \\ \frac{-F_{21}}{\lvert F\rvert} & \frac{F_{11}}{\lvert F\rvert} \end{matrix}$
F	$\begin{matrix} \frac{\lvert Y\rvert}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{-\lvert A\rvert}{A_{11}} \\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{-\lvert A\rvert}{A_{11}} \\ \frac{1}{A_{11}} & \frac{A_{12}}{A_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{H_{22}}{\lvert H\rvert} & \frac{-H_{12}}{\lvert H\rvert} \\ \frac{-H_{21}}{H_{21}} & \frac{H_{11}}{\lvert H\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{matrix}$

Приложение 2

Мостовые *LC*-фильтры

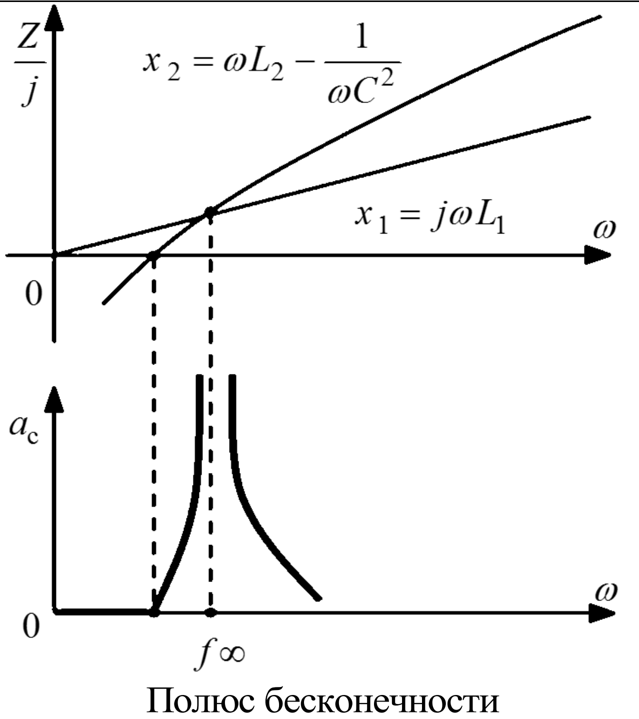


Рис. П.2.1

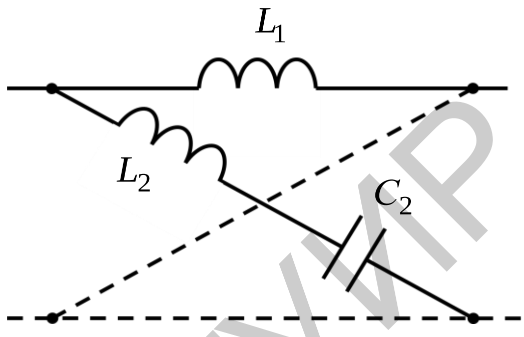


Рис. П.2.2

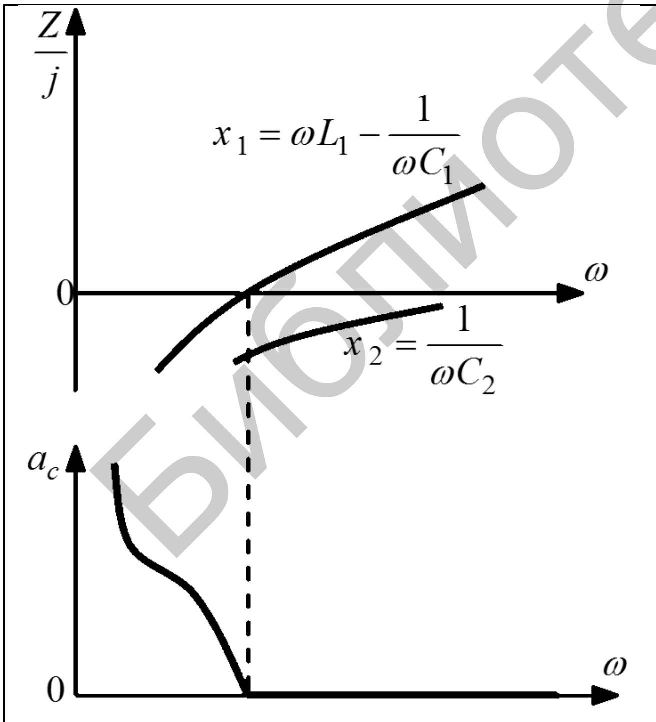


Рис. П.2.3

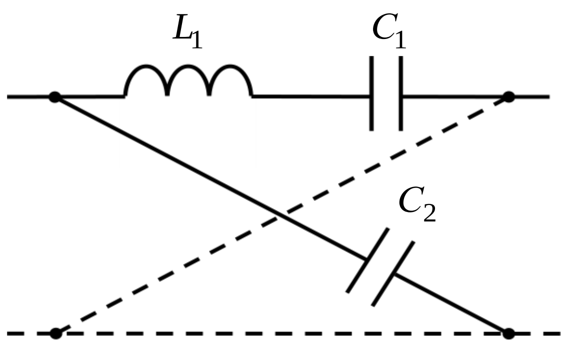


Рис. П.2.4

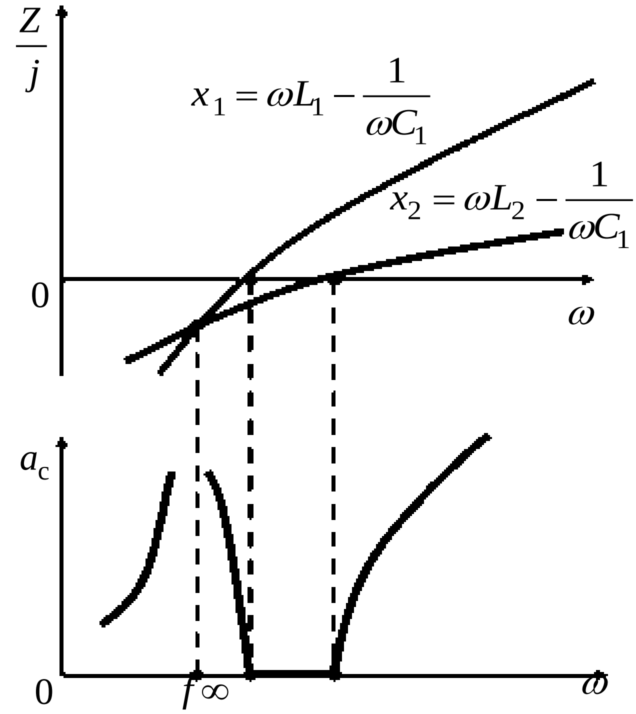


Рис. П.2.5

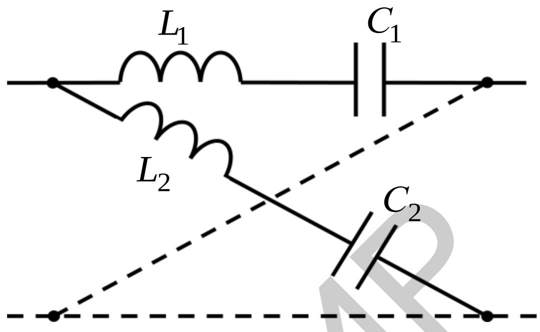


Рис. П.2.6

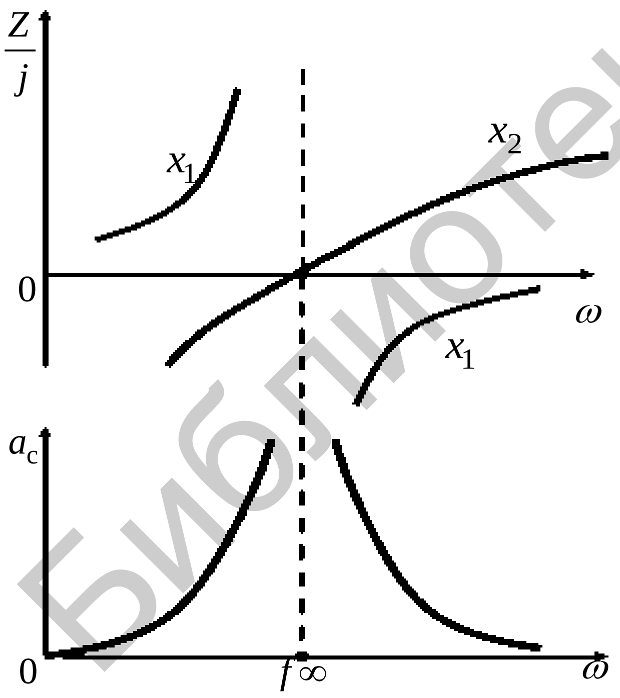


Рис. П.2.7

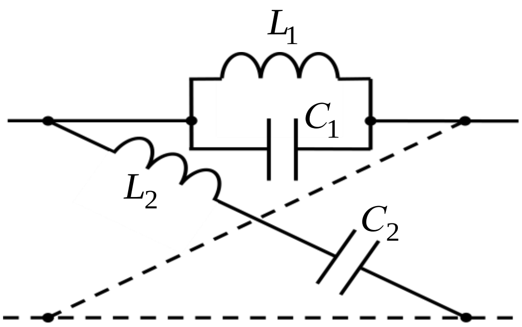


Рис. П.2.8

Приложение 3

Пример согласования характеристических сопротивлений фильтров типа *m* и *k*

Рассмотрим Т-образные схемы двух ФНЧ – типа *k* и последовательно-производного тип *m* (рис. П.3.1, *а* и *б*) и потребуем равенства их характеристических сопротивлений, т. е. $Z_{\text{сТ}m} = Z_{\text{сТ}k}$.

Подставим в формулу

$$Z_{\text{сТ}} = \sqrt{Z_X Z_K} = \sqrt{Z_1 Z_2} \cdot \sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}$$

значения сопротивлений плеч ФНЧ типа *m* (см. рис. П.3.1, *б*) $Z_{1m} = j\omega L'$ и $Z_{2m} = j(\omega L'' - \dfrac{1}{\omega C''})$:

$$\sqrt{\omega L'\left(\frac{1}{\omega C''} - \omega L''\right)} \cdot \sqrt{1 + \frac{\omega L'}{4(\omega L'' - 1/(\omega C''))}} = \sqrt{\frac{1}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}},$$

или

$$\omega L'\left(\frac{1}{\omega C''} - \omega L''\right) - \frac{\omega^2 (L')^2}{4} = \frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}. \qquad (\text{П.3.1})$$

Индуктивность в продольном плече L' фильтра типа *m* в общем случае может отличаться в *m* раз от индуктивности L фильтра типа *k* (т. е. $L' = mL$), поэтому, подставив в выражение (П.3.1) вместо L' значение mL, получим

$$\frac{1}{\omega C''} - \omega L'' = \frac{1}{\omega mC} - \omega L \frac{1 - m^2}{4m},$$

откуда

$$C'' = mC; \; L'' = \frac{1 - m^2}{4m} L.$$

Из последней формулы для L'' видно, что коэффициент *m* не должен превышать единицы, иначе индуктивность L'' будет отрицательной.

Схема последовательно-произвольного ФНЧ приведена на рис. П.3.1, *в*.

Граничную частоту ФНЧ типа *m* определим из общего для реактивных фильтров условия $-1 \le 1 + \dfrac{Z_1}{2Z_2} \le 1$, которое в рассматриваемом примере примет вид $Z_{1m} = 4Z_{2m}$ или

$$\omega_{\text{гр}\,m} mL = 4\left(\frac{1}{\omega_{\text{гр}\,m} mC} - \omega_{\text{гр}m} \frac{1 - m^2}{4m} L\right),$$

откуда $\omega_{\text{гр}\,m} = \omega_{\text{гр}} = 2/\sqrt{LC}$, т. е. граничная частота у фильтров типа *m* (см. рис. П.3.1, *в*) остаётся такой же, как и у фильтра – прототипа *k*, приведённого на рис. П.3.1, *а*.

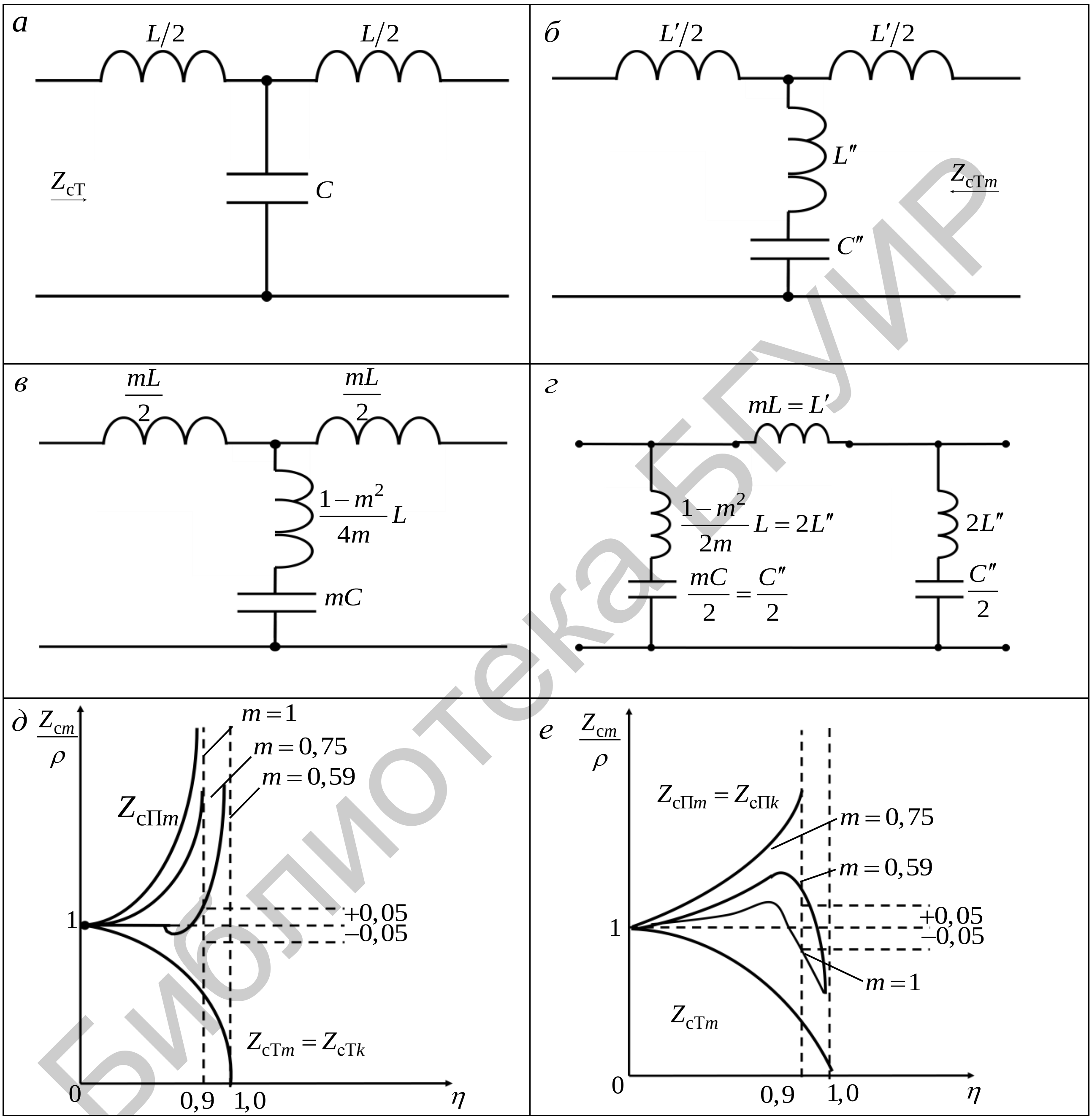


Рис. П.3.1

Резонансная частота поперечного плеча ФНЧ типа *m*, на которой затухание бесконечно велико, определяется выражением

$$\omega_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{L''C''}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-m^2}{4m} LmC}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \omega_{\text{гр}}. \qquad \text{(П.3.2)}$$

Решив уравнение (П.3.2) относительно *m*, получим

$$m = \sqrt{1 - \omega_{\text{гр}}^2 / \omega_\infty^2},$$

где ω_∞ – частота полюса затухания.

Из выражения (П.3.2) следует, что $\omega_{\text{гр}} > \omega_\infty$, т. е. полюс затухания находится за граничной частотой, причём он тем ближе к $\omega_{\text{гр}}$, чем меньше коэффициент *m*. При *m* = 1 фильтр типа *m* трансформируется в фильтр типа *k*.

Характеристическое сопротивление Т-образной схемы последовательно-производного ФНЧ типа *m* такое же, как и у ФНЧ типа *k*:

$$Z_{\text{СТ}m} = Z_{\text{СТ}k} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{гр}}^2}},$$

где $\eta = \omega / \omega_{\text{гр}}$.

Рассмотрим П-образную схему ФНЧ типа *m* (рис. П.3.1, *г*). Используя формулу для ФНЧ типа *k*:

$$Z_{\text{сП}} = \sqrt{Z_X Z_K} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}},$$

найдем характеристическое сопротивление:

$$Z_{\text{сП}m} = \frac{\sqrt{Z_{1m} Z_{2m}}}{\sqrt{1 + Z_{1m}/(4Z_{2m})}} = Z_{\text{сП}k}\left[1 - \left(1 - m^2\right)\eta^2\right], \qquad \text{(П.3.3)}$$

где $Z_{\text{сП}k}$ – характеристическое сопротивление фильтра типа *k*:

$$Z_{\text{сП}k} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_{\text{гр}}^2}}.$$

На рис. П.3.1, *д* приведены графики $Z_{\text{сТ}m} = Z_{\text{сТ}k}$ и $Z_{\text{сП}m}$ в полосе пропускания. Из рис. П.3.1, *д* следует, что при *m* = 0,59 в интервале частот $0 \le \eta \le 0{,}9$ характеристическое сопротивление $Z_{\text{сП}m}$ отклоняется от номинального значения ρ не более чем на ±5 %.

Таким образом, особенность рассмотренного фильтра состоит в том, что в Т-образном исполнении его характеристическое сопротивление не зависит от коэффициента *m*, а в П-образном – зависит. У параллельно-производного фильтра наоборот: для П-образной схемы $Z_{\text{сТ}m} = Z_{\text{сТ}k}$, а для Т-образной $Z_{\text{сТ}m}$ зависит от коэффициента *m* (рис. П.3.1, *е*). Поэтому на практике часто используют многокаскадные фильтры, состоящие из фильтров типа *m* и *k*.

Литература

1. Теоретические основы электротехники / Г. И. Атабеков [и др.] ; под ред. Г. И. Атабекова. – СПб., 2010.

2. Батура, М. П. Теория электрических цепей : учебник / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв ; под общ. ред. А. П. Курулёва. – 3-е изд., перераб. – Минск, 2015.

3. Борисов, Ю. М. Электротехника / Ю. М. Борисов, Д. Н. Липатов, Ю. Н. Зорин. – 3-е изд., стереотип. – СПб., 2014.

4. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М., 2006.

5. Иванов, М. Т. Радиотехнические цепи и сигналы / М. Т. Иванов, А. Б. Сергиенко, В. Н. Ушаков. – СПб., 2014.

6. Каганов, В. И. Радиотехнические цепи и сигналы / В. И. Каганов. – М., 2012.

7. Коваленко, В. М. Преобразовательная техника / В. М. Коваленко, И. Л. Свито. – Минск, 2013.

8. Кононенко, В. В. Электротехника и электроника / В. В. Кононенко. – 6-е изд. – Ростов н/Д, 2010.

9. Коваленко, В. М. Применение MathCad в электротехнических расчетах / В. М. Коваленко, И. Л. Свито. – Минск, 2008.

10. Киреева, Э. А. Полный справочник по электрооборудованию и электротехнике / Э. А. Киреева, С. Н. Шерстнев. – 2-е изд., стереотип. – М., 2013.

11. Курулёв, А. П. Преобразование спектров сигналов в электрорадиоцепях / А. П. Курулёв. – Минск, 2017.

12. Курулёв, А. П. Синтез электрических цепей / А. П. Курулёв. – Минск, 2010.

13. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Справочник : учеб.-метод. пособие. В 3 ч. Ч. 1 : Электрические цепи постоянного и переменного тока / А. П. Курулёв. – Минск, 2012.

14. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Справочник : учеб.-метод. пособие. В 3 ч. Ч. 2 : Классический и операторный методы анализа переходных процессов в линейных электрических цепях / А. П. Курулёв. – Минск, 2012.

15. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Справочник : учеб.-метод. пособие. В 3 ч. Ч. 3 : Четырехполюсники. Активные цепи. Электрические фильтры. Длинные линии / А. П. Курулёв. – Минск, 2016.

16. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Неустановившиеся процессы в электрорадиотехнических цепях / А. П. Курулёв, М. П. Батура, А. П. Кузнецов ; под общ. ред. А. П. Курулёва. – Минск, 2003.

17. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Установившиеся процессы в линейных электрических цепях / А. П. Курулёв, М. П. Батура, А. П. Кузнецов ; под общ. ред. А. П. Курулёва. − Минск, 1999.

18. Маркелов, С. Н. Электротехника и электроника / С. Н. Маркелов, Б. Я. Сазанов. – М., 2014.

19. Молчанов, А. П. Курс электротехники и радиотехники / А. П. Молчанов, П. Н. Занадворов. – СПб., 2011.

20. Основы теории цепей. В 2 т. / А. И. Астайкин [и др.]. – М., 2009.

21. Покотило, С. А. Справочник по электротехнике и электронике / С. А. Покотило. – Ростов н/Д, 2012.

22. Сборник задач по электротехнике и электронике / Ю. В. Бладыко [и др.] ; под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск, 2013.

23. Теоретические основы электротехники. В 3 т. / К. С. Демирчян [и др.]. – 5-е изд. – СПб., 2009.

24. Улахович, Д. А. Основы теории линейных электрических цепей / Д. А. Улахович. – СПб., 2012.

25. Шебес, М. Р. Задачник по теории электрических цепей / М. Р. Шебес, Н. В. Каблукова. – М., 1991.

26. Электротехника / Н. В. Бараш [и др.] ; под общ. ред. И. А. Федоровой. – Минск, 1990.

27. Kurulyov, A. Electrical Circuit Theory Handbook. In 3 vol., Vol. 1 : DC and AC Circuits / A. Kurulyov, Ye. Zadedyurin. – Minsk, 2013.

Содержание

Предисловие 3
Список сокращений и условных обозначений 5
1. Линейные электрические цепи постоянного тока.....................................8
1.1. Основные понятия и определения теории электрических цепей...............8
1.2. Законы Ома и Кирхгофа в цепях постоянного тока 15
1.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей...........................18
1.4. Методы расчёта электрических цепей постоянного тока.......................23
1.5. Теорема компенсации и принцип взаимности 28
2. Электрические цепи синусоидального тока 29
2.1. Основные характеристики синусоидального тока 29
2.2. Представление синусоидального тока проекциями вращающегося вектора и комплексными величинами 32
2.3. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме......................................35
2.4. Элементы R, L и C в цепи синусоидального тока.................................37
2.5. Мощность в цепи синусоидального тока 45
2.6. Цепи трёхфазного тока 48
2.7. Цепи с индуктивной связью...53
2.8. Трансформатор 56
3. Избирательные электрические цепи 59
3.1. Комплексные функции и частотные характеристики электрических цепей (ЭЦ) 59
3.2. Дифференцирующая цепь 63
3.3. Интегрирующая цепь..66
3.4. Последовательный колебательный контур 69
3.5. Простой параллельный колебательный контур 76
3.6. Сложные параллельные колебательные контуры....................................81
3.7. Связанные колебательные контуры 85
3.8. Частотные характеристики индуктивно связанных контуров 91
4. Классический (временной) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях 93
4.1. Общие сведения о переходных процессах в линейных электрических цепях 93
4.2. Переходные процессы в электрических цепях первого порядка 97
4.2.1. Свободные процессы в цепях первого порядка при подключении к источнику постоянного напряжения 97

4.2.2. Переходные процессы в цепях первого порядка при подключении к источнику постоянного напряжения 99
4.2.3. Переходные процессы при скачкообразном изменении схемы цепи с источником постоянного напряжения 100
4.2.4. Переходные процессы в разветвлённых цепях первого порядка при подключении к источнику постоянного напряжения 101
4.2.5. Анализ переходных процессов в разветвлённых цепях первого порядка с источником постоянного напряжения без составления дифференциального уравнения 102
4.2.6. Переходные процессы в цепях первого порядка при подключении к источнику синусоидального напряжения 104
4.3. Переходные процессы в цепях второго порядка 108
4.3.1. Свободные процессы в цепях второго порядка с источником постоянного напряжения 108
4.3.2. Свободная и принуждённая составляющие в цепях второго порядка с источником постоянного и синусоидального напряжения 113
4.4. Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях методом наложения 116
4.4.1. Типовые функции воздействия 116
4.4.2. Временные характеристики электрических цепей 121
4.4.3. Определение реакции цепи на воздействие произвольной формы с помощью временных характеристик 124
5. Операторный метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях 128
5.1. Свойства и теоремы преобразований Лапласа 128
5.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Схема замещения 130
5.3. Связь операторных передаточных функций электрических цепей с временными характеристиками 133
5.4. Примеры определения временных характеристик электрических цепей операторным методом 134
6. Четырёхполюсники 139
6.1. Определения и классификация четырёхполюсников 139
6.2. Уравнения четырёхполюсников и схемы замещения 140
6.2.1. Уравнения четырёхполюсников в *Y*-форме 140
6.2.2. Уравнения четырёхполюсников в *Z*-форме 142
6.2.3. Уравнения четырёхполюсников в *A*-форме 144
6.2.4. Уравнения четырёхполюсников в формах *B*, *H*, *F* 144
6.3. Способы определения параметров четырёхполюсников 145
6.3.1. Расчётный способ 145

6.3.2. Экспериментальный способ 146
6.4. Комплексное входное сопротивление четырёхполюсника....................147
6.5. Комплексные передаточные функции четырёхполюсника 148
6.6. Характеристические параметры четырёхполюсника 149
6.6.1. Характеристическое сопротивление...149
6.6.2. Характеристическая постоянная передачи 151
6.7. Уравнения четырёхполюсника в гиперболических функциях 152
6.8. Основные виды соединений согласованных четырёхполюсников........154
6.9. Обратная связь в четырёхполюсниках 157
6.10. Влияние обратной связи на характеристики цепи 159
6.10.1. Влияние обратной связи на коэффициент усиления цепи 159
6.10.2. Влияние изменения коэффициента усиления активной цепи на коэффициент усиления цепи с обратной связью 160
6.10.3. Влияние нестабильности коэффициента усиления активной части цепи на стабильность коэффициента усиления цепи с обратной связью ...161
6.10.4. Влияние обратной связи на характеристики интегрирующей цепи.....162
6.10.5. Влияние обратной связи на характеристики дифференцирующей цепи… 164
7. Активные цепи 167
7.1. Эквивалентные схемы активных цепей 167
7.2. Матричный метод анализа активных цепей 171
7.2.1. Неопределённая матрица проводимостей и её свойства 171
7.2.2. Метод короткого замыкания..173
7.2.3. Неопределённая матрица проводимостей транзистора 173
7.3. Гиратор 178
8. Электрические фильтры 181
8.1. Классификация фильтров 181
8.2. Характеристические параметры фильтров 184
8.3. Полосы пропускания и затухания. Условие прозрачности фильтра 185
8.4. *LC*-фильтры нижних частот типа *k*...188
8.5. *LC*-фильтры верхних частот типа *k* 192
8.6. Полосовые *LC*-фильтры типа *k*. 197
8.7. Заграждающие (режекторные) *LC*-фильтры типа *k* 201
8.8. Мостовые *LC*-фильтры 205
8.9. Пьезоэлектрические фильтры 207
8.10. *RC*-фильтры..210
8.11. Фильтры типа *m* 212
9. Длинные линии (цепи с распределёнными параметрами)......................214
9.1. Параметры длинной линии...214
9.2. Основные уравнения однородной длинной линии с потерями 218
9.3. Длинная линия без потерь 221

9.4. Режимы работы линии без потерь 222
9.4.1. Режим бегущих волн 222
9.4.2. Режим стоячих волн 223
9.4.3. Режим несогласованной нагрузки.. 228
9.5. Частотные свойства входного сопротивления длинной линии 229
9.6. Примеры решения задач 230
Приложение 1. Соотношение параметров шести форм записи уравнений четырёхполюсников 235
Приложение 2. Мостовые *LC*-фильтры. 236
Приложение 3. Пример согласования характеристических сопротивлений фильтров типа *m* и *k*.. 238
Литература. 241

Св. план 2018, резерв

Учебное издание

Батура Михаил Павлович
Кузнецов Александр Петрович
Курулёв Александр Петрович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Костина*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 08.10.2018. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 14,53. Уч.-изд. л. 15,3. Тираж 200 экз. Заказ 65.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6