УДК 004.056.55; 621.391.26

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С БИНАРНЫМИ МАТРИЦАМИ

[1]В.А. ЛИПНИЦКИЙ, [2]А.И. СЕРГЕЙ, [3]Н.В. СПИЧЕКОВА

[1]*Военная академия Республики Беларусь*
Минск-57, 220057, Беларусь

[2]*Гродненский государственный университет*
Ожешко, 22, Гродно, 230023, Беларусь

[3]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
П.Бровки,6, Минск, 220013, Беларусь

Представлен краткий обзор научно-технических задач, возникающих в различного рода приложениях и связанных с бинарными матрицами, а также различных подходов к классификации множества бинарных матриц.

Ключевые слова: бинарная матрица, динамическое программирование, теория чисел.

Введение

Задачи, появляющиеся в процессе практической деятельности человека, дают мощный импульс для проведения новых теоретических и прикладных исследований. При этом проблемы, возникающие в различных отраслях человеческого знания, могут иметь общую природу и, следовательно, единый подход к решению. Увидеть единую природу проблемы за многообразием формулировок – заслуга и удача исследователя.

В теории и практике распознавания образов и изображений содержится много примеров задач, которые пришли из различных областей человеческой деятельности и имеют близкую формулировку. Здесь нужно упомянуть проблемы радиолокации, когда летающий объект, появившийся на локаторе, нужно распознать как «свой» или «чужой». Здесь и возникающая в медицине проблема классификации бактерий и микроорганизмов, наблюдаемых в бактометре. Здесь и задача классификации кратных ошибок в помехоустойчивых кодах-произведениях, в итерационных кодах с большим кодовым расстоянием.

Перечисленные выше задачи допускают следующее обобщение. На экране размером $n \times n$ пикселей «вспыхивают» n точек. Требуется дать классификацию возникающих при этом образов.

Описанный квадрат однозначно отождествляется с квадратной матрицей порядка n, в которой «вспыхнувшему» пикселю соответствует элемент, равный 1, а «спящему» пикселю – элемент, равный 0.

Проблема классификации бинарных матриц

Бинарные матрицы, т.е. матрицы с элементами 0 и 1, играют важную роль в различных областях математики – в теории графов, групп, дискретной математике, теории информации и помехоустойчивом кодировании [1–3]. В частности, во многих задачах возникает класс P_n бинарных матриц порядка $n, n \geq 2,$ содержащих в точности n единиц. На этот факт в начале XXI века обратил внимание английский математик Питер Кэмерон, приступивший к систематическим исследованиям множества P_n [4–7].

Мощность класса P_n для фиксированного n выражается биномиальным коэффициентом $C_{n^2}^n = \dfrac{n^2!}{n!(n^2-n)!}$. Величина $C_{n^2}^n$ очень быстро растет с увеличением n. Поэтому для получения классификации, пригодной для практического использования, целесообразно отождествить некоторые бинарные матрицы, введя в рассмотрение тождественные или эквивалентные преобразования одних матриц в другие.

Завораживающая стройность теории групп, а также ее неоспоримые успехи в применении к решению различных задач привели к тому, что с середины XIX века идея разбиения множества на орбиты – классы эквивалентности под действием на этих множествах тех или иных групп – стала очень популярна. Приложения класса P_n явственно демонстрируют, что наиболее естественными преобразованиями матриц этого класса являются перестановки строк или столбцов между собой. Другими словами, наибольший интерес представляют орбиты класса P_n, которые образуются под действием группы $G = S_n^2 = S_n \times S_n$ – квадрата симметрической группы S_n.

Группа S_n подстановок на n элементах являлась предметом пристального внимания математиков с XVIII века [8]. Несмотря на долгую историю исследований, в математике имеется немало нерешенных вопросов, относящихся к теории группы подстановок. Так, Питер Кэмерон сформулировал свой список из 27 нерешенных проблем в теории подстановок [9]. Третья проблема в упомянутом списке выглядит следующим образом. Найти общую формулу или алгоритм вычисления количества α_n орбит, на которые разбивается множество P_n под действием группы $G = S_n^2$.

Известные к настоящему времени значения α_n для $n \le 102$ приведены в On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [10] как последовательность *A049311*.

Величина α_n допускает также и другие интерпретации [5, 10]. Так, с каждой матрицей $A = (a_{ij}) \in P_n$ можно связать неориентированный двудольный граф G. Вершины одной доли этого графа индексированы строками матрицы A, а вершины второй доли – столбцами матрицы A. G имеет в точности n ребер, причем ребро e_{ij} графа G соединяет вершины r_i и c_j, только если $a_{ij} = 1$. Тогда α_n равно количеству непомеченных двудольных графов с n ребрами с точностью до изоморфизма.

Ранговая классификация матриц

Разбиение множества P_n на подклассы можно произвести на основании ранга матрицы, отнеся к одной орбите матрицы одинакового ранга. В [11] показано, что орбиты с крайними значениями ранга имеют общее описание, не зависящее от значений основного параметра n. Так, установлено, что все матрицы ранга n принадлежат одной орбите порождаемой единичной матрицей. Доказано, что среди множества всех орбит имеется D орбит ранга 1, где $D = D(n)$ – количество всех делителей числа n, включая 1 и n. При $n > 2$ существует три орбиты ранга $n-1$. Для $n > 5$ множество P_n содержит 16 орбит рангом $n-2$.

Для каждой матрицы $A \in P_n$ ее ранг $r(A)$ принимает конкретное целое значение в диапазоне от 1 до n. Поэтому по значениям ранга матриц все многообразие S_n^2-орбит разбивается на n классов. Как показали исследования, ранговая классификация является достаточно грубой и неравномерной характеристикой. Однако она позволяет выявить закономерности в количестве орбит большого ранга.

Пусть $F_{n,r}$ – количество классов эквивалентности на множестве P_n, ранг которых равен r. Как уже упоминалось выше, $|F_{n,n}| = 1; |F_{n,n-1}| = 3$ при $n > 2; |F_{n,n-2}| = 15$ при $n > 6$.

Установлено, что величина $F_{n,r}$ зависит только от $n-r$, если $r \geq 2n/3$ [12]. А именно, доказано, что число орбит для фиксированного $d, d < n$, количество орбит ранга $n-d$ постоянно при $n \geq 3d$ и растет с ростом n при $n < 3d$, т.е. $|F_{3d,2d}| = |F_{n',n'-d}|$ для значений $n' > 3d$. Доказательство данного факта опирается на взаимосвязь матриц множества P_n с графами.

Связь с классической теорией чисел

Внутреннее строение орбит определяется расположением единиц по строкам и столбцам ее представителей. Описание этого расположения напрямую взаимосвязано с классической проблемой разбиения чисел, хорошо известной в теории чисел и комбинаторике [13–15].

Как известно, разбиением числа n называется последовательность положительных чисел, сумма которых равна n [13]. Слагаемые данной суммы называются частями разбиения. Разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются равными.

Важную роль в теории разбиений играет функция разбиений $p(n)$. Она определяется как количество всех не равных друг другу разбиений числа n. Значения $p(n)$ растут очень быстро с ростом n. Для вычисления $p(n)$ известна рекуррентная формула, называемая формулой Эйлера:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \ldots +$$
$$+(-1)^{q+1}\left(p\left(n - \frac{3q^2 - q}{2}\right) + p\left(n - \frac{3q^2 + q}{2}\right)\right) + \ldots$$

Всякой матрице $A \in P_n$ соответствуют два вектора: $\bar{s}_A = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ и $\bar{c}_A = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Это вектора распределений единиц по строкам и столбцам, здесь число s_i равно количеству единиц в i-й строке данной матрицы, число c_j – числу единиц в j-ом столбце матрицы A. Так как $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{n} c_j = n$, то каждой матрице $A \in P_n$ соответствует пара $(\bar{s}_A, \bar{c}_A)$ разбиений натурального числа n, если допускать наличие в разбиении нулевых частей.

Свойства векторов $\bar{s}_A$ и $\bar{c}_A$ позволяют сформулировать необходимые условия принадлежности двух матриц одной орбите [16, 17].

Динамическое программирование в подсчете числа α_n орбит

В теории групп известна лемма Бернсайда [18], согласно которой количество m орбит, на которые конечное множество M разбивается под конечной действием группы G, может быть найдено по формуле

$$m = \frac{1}{|G|}\sum_{l=1}^{|G|} |Inv(g_l)|, \tag{1}$$

где $|G|$ – мощность группы G, $|Inv(g_l)|$ – количество элементов множества M, оставляемых на месте элементом $g_l \in G$, т.е. $|Inv(g_l)|$ – мощность множества $M^{g_l} = \{x \in M \mid g_l(x) = x\}$.

Лемма Бернсайда может быть применена к вычислению числа α_n орбит. В этом случае формула (1) можно переписать [19] в виде:

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{l=1}^{(n!)^2} |Inv(g_l)|. \tag{2}$$

Здесь $|Inv(g)|$ – это количество матриц из множества P_n, инвариантных относительно действия элемента $g \in G = S_n^2$.

Непосредственное применение формулы (2) предполагает перебор всех элементов группы $G = S_n^2$, которая имеет мощность $(n!)^2$, что вызывает значительные вычислительные трудности. В [19] для вычисления α_n предложен алгоритм развертки, воплощающий идеи метода динамического программирования [20].

Динамическое программирование – это способ решения сложных задач путем разбиения их на вспомогательные, более простые задачи, и последующего объединения решений подзадач в единое общее решение. В алгоритме динамического программирования каждая подзадача решается только один раз, после чего ответ сохраняется. Это позволяет избежать повторных вычислений каждый раз, когда встречается данная, уже решенная, подзадача.

В рамках предлагаемого в [19] алгоритма развертки количество реально вычисляемых слагаемых формулы (2) значительно ниже заявленного числа $(n!)^2$. Сокращение числа перебираемых слагаемых происходит за счет того, что $|Inv(g)|$ оказывается одинаковым для всех подстановок $g = (g_1, g_2) \in S_n^2$, имеющих один и тот же цикленный тип. В случае если известен цикленный тип подстановки g (т.е. последовательность $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_q$ мощностей множеств циклов длиной $i, 1 \le i \le q,$ в разложении подстановки g), то $|Inv(g)|$ может быть найдено по реккурентной формуле. Цикленный тип подстановки g определяется по цикленным типам подстановок $g_1, g_2 \in S_n$. Сложность предложенного в [19] алгоритма составляет $O(p^2(n)n^2 \log(n)),$ где $p(n)$ – число неупорядоченных разбиений числа n.

Заключение

Представленный краткий обзор научно-технических задач, связанных с рассмотрением бинарных матриц, показывает, что бинарные матрицы являются «универсальным» математическим объектом, который позволяет свести практические задачи, возникающее в различного рода приложениях, к единой «эталонной» задаче. Рассматриваемая задача классификации множества бинарных матриц демонстрирует глубокие связи с различными областями математики: комбинаторикой, теорией групп, динамическим программированием.

SCIENTIFIC AND TECHNICAL TASKS, RELATED TO BINARY MATRICES

V.A. LIPNITSKI, A.I. SERGEY, N.V. SPICHEKOVA

Abstract

A brief review of scientific and technical problems arising in various applications and related to binary matrices, as well as various approaches to the classification of the set of binary matrices are presented.

Keywords: binary matrix, dynamic programming, number theory.

Список литературы

1. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
2. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.
3. Теория информации и кодирование / Б.Б. Самсонов [и др.]. Ростов-на-Дону: «Феникс», 2002.
4. *Cameron P.J.* Sequences realized by oligomorphic permutation groups // Integer Sequences. 2000. Vol. 3 (1). Article 00.1.5.
5. *Cameron P.J., Prellberg T., Stark D.* Asymptotics for incidence matrix classes // The Electronic Journal of Combinatorics. 2006. Vol. 14.1.
6. *Cameron P.J., Gewurz D.A., Merola F.* Product action // Discrete Math. 2008. No. 308. P. 386–394.
7. *Cameron P.J.* Notes on counting: An introduction to enumerative counting [Электронный ресурс]. URL: http://www.maths.qmul.ac.uk/~bill/MTHM030/counting.pdf (дата обращения: 19.04.2018).
8. *Супруненко Д.А.* Группы подстановок. Минск: Навука і тэхніка, 1996.
9. *Cameron P.J.* Problems on permutation groups [Электронный ресурс]. URL: http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html (дата обращения: 07.02.2018).
10. *N.J. A. Sloane* (ed.). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. URL: https://oeis.org/search?q=2%2C+6%2C+16%2C+34%2C+90&sort=&language=english&go=Searc (дата обращения: 07.02.2018).
11. *Конопелько В.К., Липницкий В.А., Спичекова Н.В.* Общие семейства в орбитальной классификации точечных образов // Матер. МНТС «Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных». Минск, 2012. С. 18–25.
12. *Липницкий В.А., Сергей А.И.* О стабилизации количества орбит кэмеровских матриц большого ранга // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-матэм. навук. 2017. № 2. С. 60–70.
13. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
14. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
15. *Hardy G.H., Wright E.M.* An Introduction to the Theory of Numbers. Berlin, Springer, 1973.
16. Действие квадрата симметрической группы на специальном классе (0;1)-матриц. Отсутствие полных орбит / В.К. Конопелько [и др.] // Докл. БГУИР. № 5. 2010. С. 40–46.
17. *Конопелько В.К., Липницкий В.А., Спичекова Н.В.* Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел // Докл. БГУИР. 2010. № 8 (54). С. 137–141.
18. *Burnside W.* Theory of groups of finite orders. Cambridge: At The University Press, 1997.
19. *Липницкий В.А., Сергей А.И., Спичекова Н.В.* Алгоритм развертки при подсчете количества S_n^2-орбит кэмеровских матриц // Весн. Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта ім. А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. 2018. С. 23–37.
20. Алгоритмы: построение и анализ / Т.Х. Кормен [и др.]. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2014.