УДК 621.391 -047.58

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

С.Б. САЛОМАТИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Рассматриваются методы и алгоритмы формирования и обработки сигналов с использованием конечных алгебраических структур в виде групп, колец и полей. Определяются преобразования, инвариантные к временным и пространственным сдвигам. Показывается эффективность алгоритмов обработки сигналов в спектральной области.

Ключевые слова: алгебраическая система, группа, кольцо, поле, смежный класс, дискретное преобразование Фурье.

Введение

Алгебраические системы, структурные теоремы алгебры и теории чисел лежат в основе большинства цифровых алгоритмов формирования и обработки сигналов. Основой таких алгоритмов является специальная организация массивов данных в виде конечных алгебраических структур (групп, колец, полей) [1–6].

Модели преобразования сигналов

Алгебра. **C**-алгебра A определяется как кольцо в **C**-векторном пространстве, для которого операции сложения в кольце и векторном пространстве совпадают [3–5]. Дополнительно для $\alpha \in C, g, h \in \mathrm{A}$, должно выполняться условие $\alpha(gh) = (\alpha g)h = g(\alpha h)$.

Модуль. Пусть A будет **C**-алгебра. Левый A-модуль определяется как **C**-векторное пространство M, в котором разрешены операции $\mathrm{A} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $(a, m) \to a \cdot m$, причем, для $a, b, 1 \in \mathrm{A}$ и $m, n \in \mathrm{M}$, $a(m+n) = am + an$, $(a+b)m = am + bm$, $(ab)m = a(bm)$, $1 \cdot m = m$.

Модуль – абелева группа с кольцом операторов. Модуль является обобщением векторного (линейного) пространства над полем *K* для случая, когда *K* заменяется некоторым кольцом.

Примеры модулей.

1. Любая абелева группа M является модулем над кольцом целых чисел Z. Для $a \in Z$ и $m \in Z$ произведение *am* определяется как результат сложения *m a* раз.

2. В случае, когда A – поле, понятие унитарного A-модуля в точности эквивалентно понятию линейного векторного пространства над A.

Матрично-векторная модель. Многие алгоритмы цифровой обработки сигналов основываются на линейном преобразовании дискретного сигнала. Математически такое преобразование может быть записано с помощью матрично-векторного произведения $\mathbf{X} = \mathbf{Mx}$, где $x \in F^N$ – вектор дискретного сигнала; $\mathrm{M} \in F^{N \times N}$ – матрица преобразования над полем *F*; **X** – спектр сигнала.

Полиномиальная модель. В качестве моделей сигналов и фильтров преобразований можно использовать полиномы $S(z^{-1})$ и $H(z^{-1})$ степени *N*–1, а саму операцию фильтрации рассматривать как результат произведения полиномов. В таком представлении результат линейной фильтрации имеет более высокую степень полинома, чем полиномы сигналов и фильтров, и фильтрация как алгебраическая форма не является замкнутой. Пространство сигналов можно замкнуть, используя операцию умножения по модулю $\left(z^{-N}-1\right)$ $H(z^{-1})S(z^{-1})\operatorname{mod}(z^{-N}-1)$.

В этом случае сигналы и фильтры располагаются в пространстве полиномов в z^{-1} по модулю $z^{-N}-1$, которое обозначается $\mathbf{C}[z^{-1}]/(z^{-N}-1)$ и называется полиномиальной алгеброй.

Модели сигналов и операторы сдвига

Модель сигнала определяется через тройку операторов (*A*, Ф, *M*), где *A* – алгебра фильтров, *M* – модуль сигналов, Ф – обобщенное биективное линейное отображение из векторного пространства (т.е. отсчетов сигнала) в модуль *M* [3,4,5].

Ключевую роль в алгебраической модели играет оператор сдвига. Вид сдвига тесно связан с моделью сигнала. В моделях конечных и бесконечных интервалов используются разные операторы сдвига. Другие операторы сдвига ведут к новым моделям сигналов и новым спектральным преобразованиям.

Модель временного сдвига. Модель временного сдвига (рис. 1, *а*) можно определить как $q\langle\rangle t_n = t_{n+1}$, где q – оператор сдвига; $\langle\rangle$ – операция сдвига; t_n – точка дискретного времени.

Модель ассоциируется с бесконечным или конечным *Z*-преобразованиями.

Модель пространственного сдвига. Пространственный сдвиг (рис. 1, *б, в*) в операторной форме можно записать как $q\langle\rangle t_n = \frac{1}{2}(t_{n-1}+t_{n+1})$.С такой моделью ассоциируется дискретное косинусное преобразование (ДКП) [5, 6].

Покажем, что оператор *k*-го пространственного сдвига q_k может быть задан полиномом Чебышева $T_k(q)$: $q_k = T_k(a)$.

Действительно, можно записать следующие соотношения

$$q_{k+1}\langle\ \rangle t_n = \left(t_{n+k+1} - t_{n-k-1}\right)/2 \ = \left(t_{n+k+1}+t_{n+k-1}+t_{n-k+1}+t_{n-k-1}\right)/2 - \left(t_{n+k-1}+t_{n-k+1}\right)/2 =$$
$$= 2q\langle\ \rangle\left(t_{n+k}+t_{n-k}\right)/2 - \left(t_{n+k-1}+t_{n-k+1}\right)/2 = \left(2qq_k - q_{k-1}\right)\langle\ \rangle t_n .$$

Напомним, что последовательность полиномов $T = \left(T_n \mid n \in Z\right)$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $T_{n+1}(v) = 2vT_n(v) - T_{n-1}(v)$, называется последовательностью полиномов Чебышева [5, 6].

Используя рекуррентное свойство полиномов Чебышева, можно получить: $q_{k+1} = T_{k+1}(q)$.

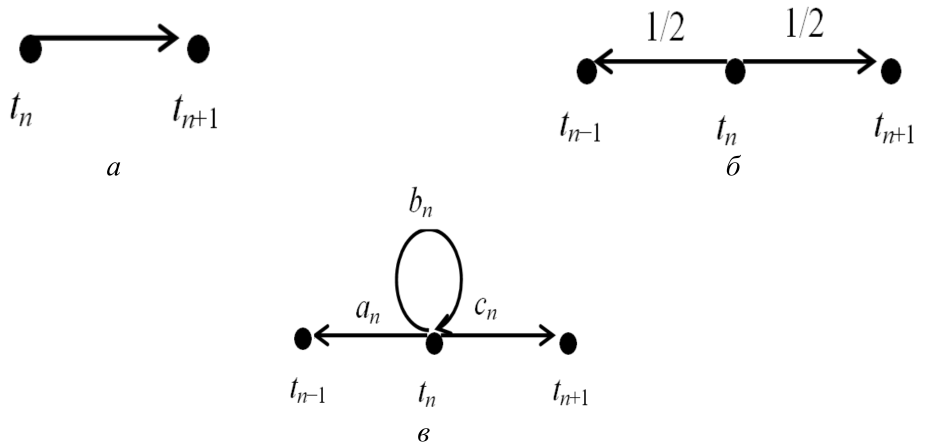

Рис. 1. Примеры возможных сдвигов в алгебраической модели: *а* – временной; *б* – пространственный; *в* – цепь сдвиговых состояний

Инвариантность к сдвигу. Инвариантность к сдвигу является ключевой концепцией обработки сигналов. В алгебраической теории это свойство имеет простую форму представления. А именно, если q оператор сдвига, а h – фильтр, то h обладает свойством инвариантности к сдвигу, если для всех сигналов s, $h(qs) = q(hs)$, что эквивалентно $hq = qh$. Требование инвариантности к сдвигу для всех фильтров запишется как $q \cdot h = h \cdot q$, для всех $h \in A$.

Так как сдвиг q формируется A, то необходимо, чтобы A была коммутативна. Обратно, если A представляет собой коммутативную алгебру, то все фильтры $h \in A$ обладают свойством инвариантности к сдвигу.

Алгебры, инвариантные к сдвигу. В случае одного сдвига алгебра образуется одним элементом v. В бесконечномерном случае получаются алгебры ряда переменной v или полиномов произвольной степени от v. Если обработка ведется на конечных интервалах, то получаются алгебры полиномов вида $A = \mathbf{C}[v]/p(v)$, где p – полином степени n; $\mathbf{C}[v]/p(v)$ – множество всех полиномов степени меньшей, чем n, с операциями сложения и умножения по модулю $p(v)$. Векторное пространство алгебры A имеет размерность n.

Пример. Обозначим через C_N множество комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j), j \in Z$. Элементы этого множества можно условно называть сигналами. В C_N обычным способом вводятся операции умножения на комплексное число, сложения и умножения сигналов. А именно $y = cx \Leftrightarrow y(j) = cx(j), j \in \mathbf{Z}$; $y = x_1 + x_2 \Leftrightarrow y(j) = x_1(j) + x_2(j), j \in \mathbf{Z}$, $y = x_1 x_2 \Leftrightarrow y(j) = x_1(j) x_2(j), j \in \mathbf{Z}$.

В результате C_N становится коммутативной алгеброй с единицей. Единицей является сигнал **1**.

Обратный к x сигнал x^{-1} определяется из условия $x \cdot x^{-1} = 1$. Очевидно, что сигнал x обратим тогда и только тогда, когда все его отсчеты $x(j)$ отличны от нуля. В этом случае $x^{-1}(j) = [x(j)]^{-1}, j \in Z$.

Модель сигнала на конечном интервале может быть построена с помощью алгебры $A = M = \mathbf{C}[v]/(v^N - 1)$, где $v = z^{-1}$, и отображения $\Phi : \mathbf{s} \to \sum_{0 \le n < N} s_n v^n \in M$, где сигнал $\mathbf{s} = (s_0, ..., s_{N-1}) \in V = \mathbf{C}^n$ допускает комплексные значения.

Пространственная модель сигнала может быть построена с помощью полиномиальной алгебры вида $A = M = \mathbf{C}[v]/T_N(v)$ и отображения $\Phi : \mathbf{s} \to \sum_{0 \le n < N} s_n T_n(v) \in M$, где T_n – полиномы Чебышева первого рода. Соответствующее Фурье-преобразование для этой модели носит название дискретного косинусного преобразования.

Модели дискретных спектральных преобразований

Рассмотрим алгоритм дискретного преобразования Фурье F [4]. Действие алгоритма F эквивалентно декомпозиции сигнального модуля в неприводимые компоненты, с помощью которых формируется спектр сигнала. Это созвучно декомпозиции векторного пространства в инвариантные подпространства с соответствующим линейным отображением. Алгебраическая структура дискретного преобразования Фурье (ДПФ), которая имеет декомпозицию матрицы для групповой алгебры $C[Z]$ циклической группы Z_N, состоящей из N элементов, запишется как $F_N : C[Z_N] \to C \oplus ... \oplus C,$ где $\oplus$ – оператор прямой суммы.

В случае полиномиальной алгебры и сигнальной модели $A = M = \mathbf{C}[v]/p(v)$, и такая декомпозиция может быть описана с помощью китайской теоремы об остатках следующим образом: $F : \mathbf{C}[v]/p(v) \to \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_0) \oplus ... \oplus \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_{N-1})$. Здесь $\deg(p) = N$ и $\{\alpha_n\}$ – нули полинома p (предположительно различные). Предполагается, что $\mathbf{C}[v]/p(v)$ представляет собой полную декомпозицию. Если $p(v) = q(r(v))$, то возможна двухэтапная декомпозиция:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}[v]/p(v) \to \mathbf{C}[v]/(r(v) - \beta_0) \oplus ... \oplus \mathbf{C}[v]/(r(v) - \beta_{K-1}) \\ &\to \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_0) \oplus ... \oplus \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_{N-1}) \end{aligned},$$

где β_k – нули $q(v)$, $\deg(q) = K$.

Если $N = KM$, то получается алгоритм преобразования Фурье Кули–Тьюки, с помощью которого проводятся вычисления по модулю $p(v) = v^N - 1 = (v^M)^K$.

Такая структура позволяет обобщить понятие спектрального преобразования на другие классы сигналов.

Свойство декомпозиции ДПФ может быть распространено на произвольную конечную группу $G \neq Z_N$. Такой подход приводит к Фурье-анализу на группах. Использование $\mathbf{C}[G]$-модулей позволяет строить матрицы преобразований, обладающие свойствами симметрии, что удобно для дискретных преобразований, инвариантных к определенным классам сдвигам. Примером таких преобразований служит дискретное тригонометрическое преобразование.

Второе обобщение связано с выбором произвольного полинома $p(v) \neq v^N - 1$ и произвольного базиса $\mathbf{C}[v]/p(v)$. Такой подход приводит к полиномиальным преобразованиям. Так, если выбрать произвольный p и базис вида $\left(1, v, ..., v^N\right)$, то приходим к матричным структурам Вандермонда, имеющим большое значение для пространственно-временных преобразований.

Фурье-анализ на группах

Пусть G будет конечной группой. Построим из элементов группы базис следующего векторного пространства: $\mathbf{C}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in \mathbf{C}\}$.

Очевидно, что $\mathbf{C}[G]$ является векторным пространством, натянутым на элементы группы. Можно определить стандартный вид операции умножения в $\mathbf{C}[G]$, используя дистрибутивный закон и умножение элементов группы. Следовательно, $\mathbf{C}[G]$ представляет собой алгебру. С другой точки зрения, $\mathbf{C}[G]$ можно рассматривать как множество комплексных функций $g \to a_g$ на группе G. Регулярный модуль $M = A = \mathbf{C}[G]$ определяет сигнальную модель следующим образом. Если G состоит из n элементов, то получается множество $M = A = \mathbf{C}[G]$ и отображение $\Phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}[G]$, $\mathrm{s} \to \sum_{g \in G} s_g g$.

В данном случае сигнал и фильтры являются элементами алгебры групп. Операторами сдвига в группе G являются элементы, выбранные как образующие множества элементов группы. Если группа нециклическая, то G, а следовательно, и $\mathbf{C}[G]$ требуют, как минимум, двух образующих – генераторов или сдвигов. Если G некоммутативная группа, тогда не коммутативны и пары генераторов группы. Следовательно, определенная выше модель становится зависимой от сдвига.

Полиномиальные и групповые алгебры. Полиномиальные алгебры всегда коммутативны и ясно, что некоммутативная группа, ассоциированная с групповой алгеброй, не может быть полиномиальной алгеброй. С другой стороны, известно, что каждая групповая алгебра для коммутативной группы является полиномиальной алгеброй с очень специфической структурой.

Рассмотрим пример, когда коммутативная группа G представлена в виде прямого произведения циклических групп $G = \mathbf{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbf{Z}_{n_m}$, где $\mathbf{Z}_{n_i}$ имеет размерность n_i, а образующим элементом является x_i. Тогда можно записать следующим образом:

$\mathbf{C}[G] = \mathbf{C}[x_1, ..., x_m] / < \{x_i^{n_i} - 1 \mid 1 \le i \le m\} >$.

В случае одной переменной (одномерный сигнал), G должна быть циклической, $G = Z_n$. В итоге получается следующее: $\mathbf{C}[\mathbf{Z}_n] = \mathbf{C}[v]/(v^n - 1)$.

Полученная алгебра ассоциирована с дискретным преобразованием Фурье размера n. Тот факт, что ДПФ ассоциировано с $C[Z_n]$, породил значительные усилия по развитию Фурье-анализа для других, некоммутативных групп, и по поиску алгоритмов быстрых вычислений.

С другой стороны, понимание того, что некоммутативные группы создают зависимые от сдвига модели, сдерживает применение таких групп при обработке сигналов.

На рис. 2 показана схема пересечения областей существования алгебр.

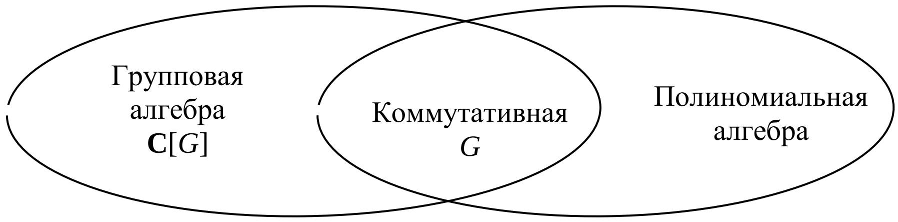

Рис. 2. Структурное расположение алгебр и коммутативной группы

Модели на основе полиномиальной алгебры одной переменной

Пусть $p(v)$ – полином степени $\deg\{p\} = n$. Тогда класс вычетов по модулю p $A = \mathbf{C}[v]/p(v) = \{h(v) \mid \deg\{h\} < n\}$ является алгеброй со сложением полиномов и умножением полиномов по модулю p. Назовем такую алгебру полиномиальной алгеброй одной переменной. Полиномиальная алгебра всегда циклическая, т.е. формируется одним подходящим для этого элементом. Обычно это v, который является и оператором сдвига. Это означает, что все элементы в A получены путем последовательного возведения v в степени, суммирования и умножения на скаляр. Другими словами, элементы алгебры это полиномы переменной v.

Пример. Предположим, что $p(v) = (v-1)(v+1) = v^2 - 1$. Умножая два элемента $v, v+1 \in A$, можно получить $v(x+1) = v^2 + v \equiv v + 1 \operatorname{mod}(v^2 - 1)$. Выражение читается следующим образом: $v^2 + v$ конгруэнтно (или равно) v+1 по модулю $v^2 - 1$. Таким образом, определяется равенство двух полиномом по модулю третьего полинома.

Модель сигналов. Выберем векторное пространство $V = C^n$, полиномиальную алгебру $A = \mathbf{C}[v]/p(v)$, $\deg\{p\} = n$ и модуль М = А. Далее выберем базис $\mathbf{b} = (\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$. Этот выбор позволяет определить конечную n-мерную сигнальную модель (А,М,Ф). Биективное линейное отображение Ф при этом будет иметь вид: $\Phi : \mathbf{C}^n \to M,\ \mathbf{s} \to \sum\limits_{0 \le l < n} s_l p_l$, где $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_{n-1})^T \in C^n$ – сигнальный вектор.

Заметим, что Ф играет роль Z-преобразования и зависит от выбора базиса b. Базисный элемент p_i образует в модуле M единичный импульс, т.е. в векторе **s** компонента $s_i = 1$, а остальные компоненты $s_l = 0$ для $l \ne i$.

Пример. Для рассмотренного выше примера зададим базис $\mathbf{b} = \{1, v\}$ в алгебре $M = A = \mathbf{C}[v]/(v^2 - 1)$. Сигнальная модель для векторного пространства $\mathbf{C}^2$ определится следующим образом: $\Phi : \mathbf{C}^2 \to M,\ (s_0, s_1) \to s_0 + s_1 v.$

Фильтрация. Сигнальная модель определяет фильтрацию на сигнальном пространстве M как операцию A на M. Алгебра A описывает пространство фильтров, а A-модуль – M-пространство сигналов. Заметим, что даже если множества A и M равны, их алгебраические структуры не равны. Например, A воздействует на M, но не наоборот, фильтры (элементы A) могут каскадироваться, т.е. умножаться, в то время как сигналы (элементы M) не могут.

Определим сигнал $s = \Phi(\mathbf{s}) = \sum\limits_{0 \le l < n} s_l p_l \in M$ и фильтр $h \in A$. Тогда фильтрация сигнала s с помощью фильтра h запишется как $h \cdot s \in M$, т.е. произведение полиномов h и s по модулю p. Заметим, что так как результат принадлежит M, его тоже можно рассматривать как сигнал. Операция фильтрации или умножении на h – это линейного отображение, которое имеет матричное представление в базисе b $\phi(h) \cdot \mathbf{s} \in \mathbf{C}^N$.

Пример. Пусть $h = h_0 + h_1 v \in A = \mathbf{C}[v]/(v^2 - 1)$ – произвольный фильтр. Вычислим матрицу $\phi(h)$ его преобразования в базисе $\mathbf{b} = (1, v)$. Столбцы матрицы представляют собой отклики фильтра на воздействия базисных компонентов:
$h \cdot 1 = h_0 + h_1 v \in M$, $h \cdot v = h_0 v + h_1 v^2 \equiv h_1 + h_0 v \bmod (v^2 - 1)$.

Следовательно, $\varphi(h) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{bmatrix}$ и $h \cdot s \Leftrightarrow \phi(h) \cdot \mathbf{s}$.

Спектры и Фурье-преобразование

Предположим, что $p(v)$ сепарабельный полином вида $p(v) = \prod_{k=0}^{N-1} (v - \alpha_k)$, $\alpha_k \neq \alpha_l$, для $k \neq l$.

Преобразование Фурье сигнала s можно записать в виде отображения или регулярного модуля M: $\Delta : \mathbf{C}[v]/p(v) \to \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_0) \oplus ... \oplus \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_{N-1})$, $s = s(v) \to (s(\alpha_0), ..., s(\alpha_{N-1}))$. Компонента регулярного модуля $M_k = \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_k)$ имеет размерность 1. Следовательно, элементы (векторы) $\mathbf{C}[v]/(v - \alpha_k)$ являются полиномами степени 0 или скалярами $c \in \mathbf{C}$. Далее M_k представляет собой A-модуль, т.к. $h = h \in A, c \in M_k$ и $h(v)c \equiv h(\alpha_k)c \bmod (v - \alpha_k) \in M_k$. Спектральное преобразование можно рассматривать как проекцию сигнала $s \in \mathbf{C}[v]/p(v)$ на модуль $\mathbf{C}[v]/(v - \alpha_k)$: $s(v) \equiv s(\alpha_k) \bmod (v - \alpha_k)$.

Множество одномерных, неприводимых подмодулей $M_k = \mathbf{C}[v]/(v - \alpha_k)$ составляют спектр сигнального пространства M. Каждый подмодуль M_k одновременно формирует собственное пространство всех фильтров (или линейных систем) в A.

Спектр сигнала $s \in M$ можно рассматривать как вектор $\Delta(s) = (s(\alpha_0, ..., s(\alpha_{N-1}))$, а скаляр $s(\alpha_k)$ – как его компоненту.

Пример. Найдем спектр Фурье сигнала $s(v) = 1 + 3v$. Запишем преобразование Фурье в полиномиальной форме: $\Delta : \mathbf{C}[v]/(v^2 - 1) \to \mathbf{C}[v]/(v - 1) \oplus \mathbf{C}[v]/(v + 1)$. Корни полинома $p(v)$ равны $\alpha_0 = 1; \alpha_1 = -1$. Спектр сигнала $s = s(v) \to S = (s(1), s(-1)) = (4, -2)$.

Матричная форма преобразования Фурье. Преобразование Фурье – это линейное отображение, которое имеет матрицу преобразования $\mathbf{F}$, соответствующую выбранному базису $\mathbf{b} = (\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_{N-1})$ Столбцы матрицы $\mathbf{F}$ определяются как коэффициенты полинома $p_l(v) \equiv p_l(\alpha_k) \bmod (v - \alpha_k)$. Соответственно, l-й столбец матрицы равен вектору $[p_l(\alpha_0), ..., p_l(\alpha_{N-1})]^T$.

Диагонализирующие свойства преобразования Фурье. Пусть F будет Фурье преобразование для регулярного A-модуля $C[v]/p(v)$ в базисе $\mathbf{b}$ и соответствующая матрица преобразования ϕ. Тогда преобразование $\mathbf{FAF}^{-1} = diag(a_0, ..., a_{N-1})$ диагонализирует матрицу $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A} = \phi(h)$, где фильтр $h \in A$.

В частности, F диагонализирует матрицу сдвига $\phi(v)$, поскольку оператор сдвига v имеет частотный отклик, равный $(\alpha_0, ..., \alpha_{N-1})$. Рассмотренное свойство позволяет найти механизм фильтрации в частотной области. Действительно, рассмотрим соотношение $\phi(h)\mathbf{s} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\phi(h)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Fs} = \mathbf{F}^{-1} diag(h(\alpha_0), ..., h(\alpha_{N-1}))\mathbf{Fs}$, которое показывает, что умножение матрицы преобразования ϕ на вектор s во временной области равносилен умножению в частотной области его спектра $\mathbf{Fs}$ на диагональную матрицу $diag(h(\alpha_0), ..., h(\alpha_{N-1}))$.

Применение алгебраических спектральных преобразований

Смежно-групповое спектральное преобразование Фурье [7]. Пусть над полем комплексных чисел задан характер $\exp(\mp j2\pi/M)$ конечной циклической группы порядка M, тогда элементы $\exp(\mp j2\pi p\vartheta/M)$, $p,\vartheta = 0,1,...M-1$, , $M = L\tilde{Q}$ удовлетворяют условию замкнутости относительно операции умножения и ассоциативности. Из группы выделим подгруппу $\Psi = \{\exp(-j2\pi lk/L),\ l,k = 0,1,...L-1\}$. Произведение подгруппы на элемент группы $a(q) = \exp(-j2\pi ql/M), l = 0,...,L-1$ образует смежный класс по подгруппе Ψ с параметром q, где $q = 0,1,...\tilde{Q}-1$. Подгруппу Ψ можно рассматривать как матрицу дискретно-экспоненциальных функций (ДЭФ) дискретного преобразования Фурье (ДПФ):
$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}(l,k) = \{\exp(-j2\pi lk/L), l.k = 0,1,...,L-1\}$,
тогда с учетом произведения $\mathbf{W}(l,k)\exp(-j2\pi qk/M)$ ядро смежно-группового преобразования Фурье будет иметь вид $\exp(-j2\pi l(q+k\tilde{Q})/M)$.

Свойство вращения ядра преобразования Фурье. В ДПФ нулевой спектральный коэффициент определяется при угле $\theta = 0$ рад радиус-вектора на Z-плоскости. С учетом смежных классов угол поворота радиус-вектора для нулевого спектрального коэффициента определяется из ядра преобразования при $l,q = 1, k = 0$ и равен $\vartheta = 2\pi/M$ рад, что соответствует вращению ядра ДПФ.

Смежно-групповое спектральное (СГС) преобразование Фурье обладает свойством интерполяции спектра сигнала. Причем длина СГС-преобразования меньше длины преобразования ДПФ в количество смежных классов.

Матричное СГС-преобразование обладает свойствами циклического сдвига компонентов спектра сигнала. Величина сдвига определяется коэффициентом кратности значения смежного класса по отношению к количеству смежных классов.

Контраст спектральных коэффициентов и точность оценки частоты сигнала в матричном смежно-групповом спектральном преобразовании пропорционально зависят от числа смежных классов при фиксированной длине преобразования.

Алгоритм формирования частотно-манипулированного (ЧМ) и кодо-фазо-манипулированного (КФМ) сигналов. Алгоритмы управления матрицами циклического сдвига и матрицей образующего смежных классов в СГС-преобразовании могут быть использованы для формирования ансамблей кодовых сигналов с фазовой манипуляцией [7]. Причем углы скачков фазы и значения частот в формируемых сигналах контролируются числом смежных классов. На рис. 3 приведена схема формирования сигнала с динамически изменяемой структурой.

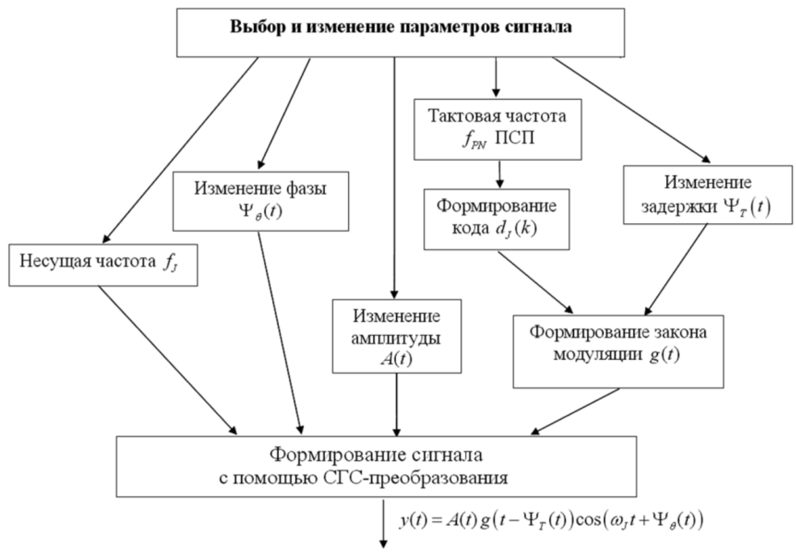

Рис. 3. Схема формирования сигнала с динамически изменяемой структурой

Алгоритмы оценки частоты и задержки сигнала

Пусть определен спектр $F^{0,0}\{E\}=\tilde{E}(k), k=0,1,L-1$ сигнала Е(l). Известно, что при циклическом сдвиге сигнала на величину m, его спектр будет иметь вид: $\tilde{E}_m(k)=\tilde{E}(k)\exp(j2\pi mk/L)$. Оценка задержки сводится к оценке параметра m. Таким образом, задачи оценки частоты и задержки могут быть решены методами спектральных преобразований [7, 8]. Алгоритмы оценки позволяют построить процедуры быстрого последовательно-параллельного поиска сложного сигнала на основе многоканального смежно-группового спектрального преобразования с повышенной точностью оценки частоты (рис. 4).

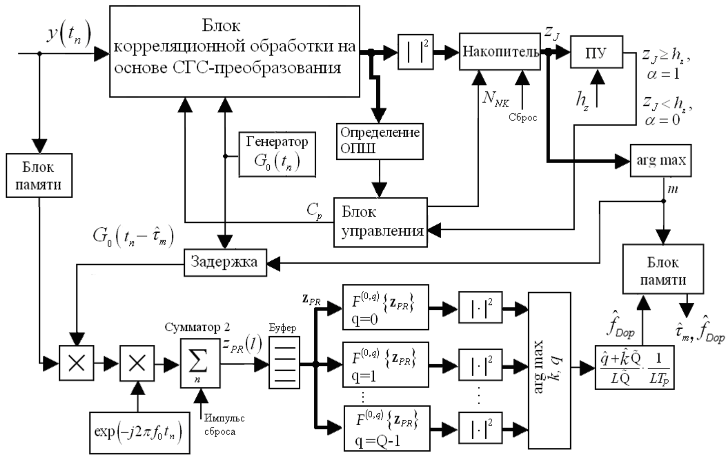

Рис. 4. Структура обнаружителя-измерителя сложного сигнала

При использовании алгоритма БПФ по основанию 2 вычислительная сложность Q-канального СГС-преобразования размерности L составляет $\tilde{Q}L\log_2 L$ операций сложения, $\tilde{Q}(0,5L\log_2(L)+L)$ операций комплексного умножения.

Заключение

Построены модели сигналов и их преобразований во временной и спектральной области с использованием механизмов теории групп, колец и полей. Определены свойства смежно-групповых преобразований, позволяющие разработать схемы формирования сигналов с динамически изменяющей структурой и разработать алгоритмы оценки частоты и задержки.

ALGEBRAIC SYSTEMS OF SIGNALS FORMATION AND PROCESSING

S.B. SALOMATIN

Abstract

Methods and algorithms of signal formation and processing using finite algebraic structures in the form of groups, rings and fields are considered. The transformations invariant to time and spatial shifts are determined. The efficiency of signal processing algorithms in the spectral region is shown.

Keywords: algebraic system, group, ring, field, adjacent class, discrete Fourier transform.

Список литературы

1. *Лосев В.В.* Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: учебное пособие для вузов. Минск: Вышэйшая школа, 1990.
2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ./Р. Блейхут. М.: Мир, 1989.
3. *Вариченко Л.В., Лабунец В.Г., Раков М.А.* Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. Киев: Наукова думка, 1986.
4. *Саломатин С.Б.* Цифровая обработка сигналов в радиоэлектронных системах. Минск: БГУИР, 2002.
5. *Pueschel M., Moura J.M.F.* Algebraic Theory of Signal Processing [Electronic recourse]. URL: http:arxiv.org/abs/cs.IT/0612077 (date of access: 19.04.2018).
6. *Саломатин С.Б.* Моделирование алгоритмов быстрой обработки сигналов в инфокоммуникационных сетях: учеб.-метод. пособие. Минск: БГУИР, 2016.
7. *Ходыко Д.Л., Саломатин С.Б.* Смежно-групповые спектральные преобразования сложных сигналов // Докл. БГУИР. 2012. № 5 (67). С. 93–98.
8. *Ходыко Д.Л., Саломатин С.Б.* Многоканальный частотно-временной адаптивный фильтр на основе двойного смежно-группового преобразования // Докл. БГУИР. 2012. № 6 (68). С. 56–62.