# Об исследовании моделей систем обработки информации в переходном режиме

Статкевич С.Э.; Маталыцкий М.А.
Кафедра стохастического анализа и эконометрического моделирования
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Республика Беларусь
sstat@grsu.by, m.matalytski@gmail.com

***Аннотация*—В докладе рассматриваются разработанные методы и методики нахождения вероятностно-временных характеристик в сетях массового обслуживания с ограниченным временем ожидания заявок в очередях и ненадежными системами в переходном режиме, применяемых в качестве стохастических моделей обработки информации.**

***Ключевые слова: сеть массового обслуживания, переходной режим***

## I. Введение

Сети массового обслуживания (МО) являются адекватными вероятностными моделями систем обработки информации, различных объектов в экономике, связанных с взаимоувязкой во времени процессов функционирования многих разнородных подсистем, из которых состоят вышеуказанные системы.

В случае, когда сети МО используются в качестве моделей при проектировании информационно-телекоммуникационных систем и сетей, то системами обслуживания могут являться, например, сервера сети, а заявками служат запросы пользователей к интернет-ресурсам. Обработка запросов в серверах сети может осуществляться по различным правилам, они могут досрочно покидать очередь на обслуживание, либо сами сервера сети могут функционировать ненадежно. Поэтому в качестве их моделей могут применяться сети с ограниченными временами ожидания заявок в очередях и ненадежными системами обслуживания.

Важной задачей при проектировании и исследовании рассмотренных объектов является то, что необходимо промоделировать их текущее поведение, найти различные вероятностно-временные характеристики в переходном режиме [1, 2]. Данная задача является довольно сложной из-за необходимости решения систем большого числа разностно-дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

В докладе рассматривается методика нахождения средних характеристик сетей с ограниченными временами ожидания заявок в очередях и ненадежными системами обслуживания (СМО) в переходном режиме.

## II. Средние характеристики замкнутой сети с ограниченным временем ожидания заявок

Пусть система обслуживания $S_i$ состоит из $m_i$ идентичных линий обслуживания, время обслуживания в которых распределено по произвольному закону со средним $\mu_i^{-1}$, $i=\overline{1,n}$. Заявка, завершившая обслуживание в $i-$й СМО, мгновенно направляется в $j-$ю с вероятностью $p_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Предположим, что длительность ожидания заявок в очереди $i-$й СМО является случайной величиной (СВ), распределенная по произвольному закону со средним $\theta_i^{-1}$; заявка, время ожидания которой в очереди истекло, переходит в очередь $j-$й СМО с вероятностью $q_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$. Под состоянием сети будем понимать вектор

$$k(t)=(k,t)=(k_1,k_2,\ldots,k_n,t),$$

где $k_i$ – число заявок (в очереди и на обслуживании) в момент времени $t$ в системе $S_i$, $t\in[0,+\infty]$, $i=\overline{1,n}$.

Обозначим через $N_i(t)$, $\tau_i(t)$, $\rho_i(t)$ соответственно среднее число заявок, среднее время пребывания заявок (в очереди и на обслуживании) и среднее число занятых линий обслуживания в $i-$й СМО на интервале времени $[0,t]$, $t<T$. Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$\rho_i(t)=\min\left(N_i(t),m_i\right), \tag{1}$$

$$\tau_i(t)=\frac{N_i(t)}{\mu_i\rho_i(t)+\left(N_i(t)-m_i\right)\theta_i u\left(N_i(t)-m_i\right)}, \tag{2}$$

$$N_i(t+1)=$$

$$=\tau_i(t)\sum_{l=1}^{n}\left[\mu_l\rho_l(t)+\left(N_l(t)-m_l\right)\theta_l u\left(N_l(t)-m_l\right)q_{li}\right], \tag{3}$$

где $u(t)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ – функция Хевисайда, $\sum_{i=0}^{n}N_i(0)=K$, $K-$число заявок в сети. Они вытекают из формулы Литтла и закона сохранения потока заявок для систем сети [3].

Отметим, что с помощью соотношений (1)–(3) можно находить средние характеристики для сетей МО с большим числом систем обслуживания в переходном режиме за небольшое процессорное время.

## III. Средние характеристики сетей с ненадежными системами обслуживания

Рассмотрим замкнутую марковскую сеть с ненадежными системами обслуживания, в которой обслуживается большое количество заявок, $K>>1$. Предположим, что линии обслуживания системы $S_0$

абсолютно надежны, а в других системах $S_1, S_2, \ldots, S_n$ подвергаются случайным поломкам. Допустим, что времена обслуживания заявок в линиях, длительности исправной работы линий и времена восстановления линий обслуживания являются независимыми СВ, имеющими экспоненциальное распределение с параметрами $\beta_i$ и $\gamma_i$ соответственно, $i=\overline{1,n}$.

Под состоянием сети будем понимать вектор

$$z(t)=(z,t)=(d,k,t)=(d_1,\ldots,d_n,k_1,\ldots,k_n,t)= \\ =(d_1(t),\ldots,d_n(t),k_1(t),\ldots,k_n(t)),$$

где $d_i$ – количество исправных линий обслуживания в системе $S_i$, $0 \le d_i \le m_i$, $i=\overline{1,n}$. Будем также предполагать, что если во время обслуживания некоторой заявки линия обслуживания вышла из строя, то после окончания восстановления линии прерванная заявка дообслуживается. На обслуживание заявки выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO. Доказана следующая теорема.

**Теорема.** *В асимптотическом случае при достаточно больших $K$ плотность распределения вероятностей $p(y,x,t)$ вектора относительных переменных* $\xi(t)=\left(\frac{d_1(t)}{K},\ldots,\frac{d_n(t)}{K},\frac{k_1(t)}{K},\ldots,\frac{k_n(t)}{K}\right)$, *при условии, что она дифференцируема по $t$ и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема по $y_i$, $x_i$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяет с точностью до членов порядка малости $\varepsilon^2$, где $\varepsilon=1/K$, уравнению Колмогорова− Фоккера−Планка*

$$\frac{\partial p(y,x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(A_i^{(1)}(y)p(y,x,t)\right)- \\ -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i^{(2)}(y,x)p(y,x,t)\right)+ \\ +\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(B_{ij}^{(1)}(y)p(y,x,t)\right)+ \\ +\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(B_{ij}^{(2)}(y,x)p(y,x,t)\right),$$

*в котором*

$$A_i^{(1)}(y)=\gamma_i(l_i-y_i)-\beta_i y_i,$$

$$A_i^{(2)}(y,x)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^{*}\min(y_j,x_j)+ \\ +\mu_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right),\ i=\overline{1,n},$$

$$p_{ji}^{*}=\begin{cases}p_{ji}, & j\ne i,\\ p_{ii}-1, & j=i;\end{cases}$$

$$B_{ii}^{(1)}(y)=\gamma_i(l_i-y_i)+\beta_i y_i; B_{ij}^{(1)}(y)=0,\ i\ne j,$$

$$B_{ii}^{(2)}(y,x)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^{**}\min(y_j,x_j)+\mu_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

$$p_{ji}^{**}=\begin{cases}p_{ji}, & j\ne i,\\ 1-p_{ii}, & j=i;\end{cases}$$

$$B_{ij}^{(2)}(y,x)=-\mu_i p_{ij}\min(y_i,x_i),\ i\ne j,\ i=\overline{1,n}.$$

Из теоремы следует, что математические ожидания $w_i(t)=M\left\{\frac{d_i(t)}{K}\right\}$, $n_i(t)=M\left\{\frac{k_i(t)}{K}\right\}$, $i=\overline{1,n}$, с точностью до членов порядка малости $O(\varepsilon^2)$ определяются из систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными правыми частями

$$\frac{dw_i(t)}{dt}=A_i^{(1)}(w(t))=\gamma_i(l_i-w_i(t))-\beta_i w_i(t), \quad (4)$$

$$\frac{dn_i(t)}{dt}=A_i^{(2)}(w(t),n(t))=\mu_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}n_i(t)\right)+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^{*}\min(w_j(t),n_j(t)),\ i=\overline{1,n}, \quad (5)$$

которые решаются путем разбиения фазового пространства и нахождения решений в областях линейности их правых частей.

Пусть $\Omega(t)=\{1,\ldots,n\}$ − множество индексов компонент вектора $n(t)$. Разобьем $\Omega(t)$ на два непересекающихся множества:

$$\Omega_0(t)=\{i: w_i(t)<n_i(t)\le 1\},$$

$$\Omega_1(t)=\{j: 0\le n_j(t)\le w_j(t)\}.$$

Каждое разбиение будет задавать в множестве

$$G(t)=\left\{n(t): n_i(t)\ge 0, \sum_{i=1}^{n}n_i(t)\le 1\right\},$$

непересекающиеся области $G_\tau(t)$ такие, что

$$G_\tau(t)=\left\{n(t): w_i(t)<n_i(t)\le 1, i\in\Omega_0(t);\right. \\ \left. 0\le n_j(t)\le w_j(t), j\in\Omega_1(t); \sum_{c=1}^{n}n_c(t)\le 1\right\}.$$

Тогда система уравнений (5) принимает вид

$$\frac{dn_i(t)}{dt}=\mu_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n}n_i(t)\right)+ \\ +\sum\nolimits_0 \mu_j p_{ji}^{*}w_j(t)+\sum\nolimits_1 \mu_j p_{ji}^{*}n_j(t),\ i=\overline{1,n}, \quad (6)$$

для каждой области $G_\tau(t)$, где $\sum_0=\sum_{j\in\Omega_0(t)}$, $\sum_1=\sum_{j\in\Omega_1(t)}$.

Решение систем уравнений (4), (6) позволяет определять среднее относительное число исправных линий обслуживания и среднее относительное число заявок в каждой из систем сети.


[1] Статкевич С.Э. Анализ сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания заявок в переходном режиме. Вестник ГрГУ. Серия 2. – 2011. – №3. – С. 97 – 110.

[2] Matalytski M., Statkevich S. Time-depend state probabilities of queueing network with unreliable systems in transient regime. Scientific Research of the Institute of Mathematics of Czestochowa University of Technology. − 2011. − Vol. 2, №.10. − P. 175−187.

[3] Маталыцкий М.А. Сети массового обслуживания в стационарном и переходном режимах. Монография. Гродно: ГрГУ, 2001, 211 с.