

УДК 53.072, 53.004

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

Н.Г. КУХАЛЬСКИЙ, А.Е. ВИНОГРАДОВ

*Военная академия Республики Беларусь
ул. Калиновского, 4, Минск, 220103, Беларусь**Поступила в редакцию 12 ноября 2007*

Рассмотрен вопрос построения математической модели движения человека. Данная модель приведена в виде совокупности составляющих: математической модели движения локтей, кистей, коленей, ступней и туловища человека по заданной траектории.

Ключевые слова: человек, модель, движение.

Постановка задачи

В поверхностном слое земли на глубине h_{ss} установлен сейсмодатчик (СД). С местом установки СД совмещен центр декартовой системы координат (СК) датчика $X_s Y_s Z_s$, причем ось $O_s X_s$ ориентирована на север. В произвольном направлении относительно СД движется человек с постоянной скоростью v_{sr} , обладающий среднестатистическими антропометрическими и биомеханическими параметрами, к которым относятся: его масса m_{chl} , длина шага S_{sh} , высота подъема стопы h_{st} . С точкой O_t совмещен центр массы человека, являющийся началом второй декартовой СК $X_t Y_t Z_t$, причем направление оси $O_t X_t$ совпадает с вектором скорости движения человека v_{sr} (рис. 1).

Необходимо разработать математическую модель (ММ) движения человека, включающую уравнения движения отдельных частей тела: головы, корпуса, верхних и нижних конечностей (локтей, кистей, коленей, ступней).

Математическая модель движения локтя человека

Траектория движения локтя человека в СК человека $X_t Y_t Z_t$ за время одного шага описывается уравнением окружности с центром в области плечевого сустава.

Пусть скорость движения локтя человека относительно оси $O_t X_t$ изменяется во времени по закону эллипса. Значение скорости движения локтя человека вдоль оси $O_t X_t$ в течение одного шага находится согласно выражению [1]:

$$v_{l-x}(t) = v_{l-x_{\max}} \sqrt{1 - \frac{t/2 - T_{sh}/2}{T_{sh}/2}}$$

где $v_{l-x_{\max}}$ — максимальное значение скорости локтя вдоль оси $O_t X_t$; T_{sh} — время одного шага человека.

Так как путь, пройденный телом при неравномерном движении, равен интегралу от функции скорости, то уравнение для расчета величины $v_{l_x_max}$ будет иметь вид:

$$v_{l_x_max} = \frac{\Delta h_{lp} + \Delta h_{lz}}{\int_0^{T_{sh}} \sqrt{1 - \frac{t/2 - T_{sh}/2}{T_{sh}/2}} dt}, \quad (1)$$

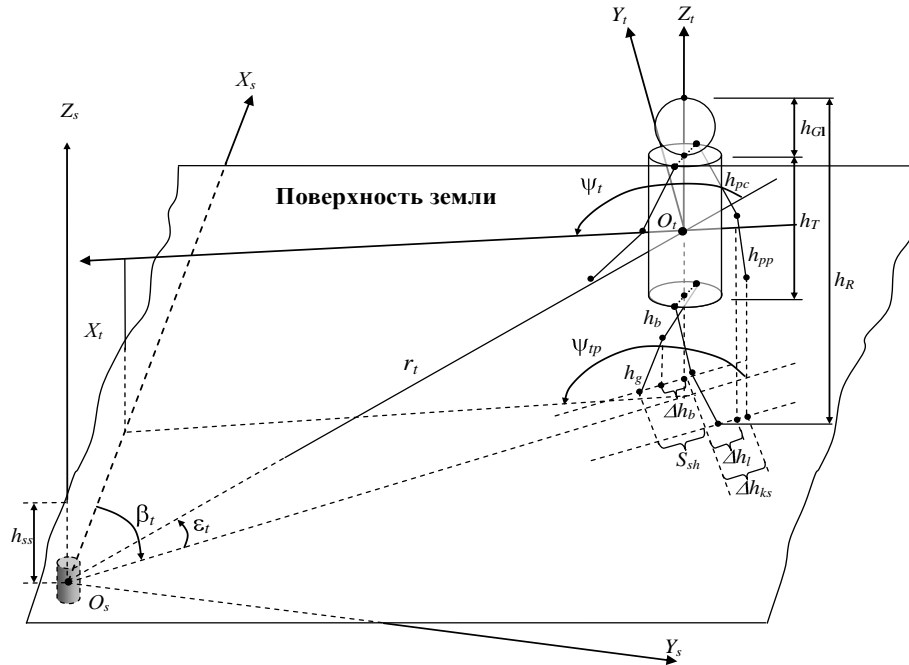


Рис. 1. Пояснение к математической модели движения человека

где Δh_{lp} — начальное значение выноса локтя вперед относительно тела вдоль оси $O_l X_l$; Δh_{lz} — конечное значение выноса локтя назад относительно тела вдоль оси $O_l X_l$.

Для нахождения значения координаты x_l необходимо из начального положения локтя человека вычесть путь, пройденный за время t :

$$x_l(t) = x_{l_0} - \int_0^{T_{sh}} v_{l_x_max} \sqrt{1 - \frac{t/2 - T_{sh}/2}{T_{sh}/2}} dt + rnd(-0,02; 0,02),$$

где x_{l_0} — начальное значение координаты x_l .

Оператор $rnd(-0,02; 0,02)$ генерирует псевдослучайное значение с равномерным законом распределения в интервале $-0,02; 0,02$ отклонения координаты от среднестатистической траектории движения.

Для нахождения значения координаты $z_l(t)$ в СК человека в течение одного шага воспользуемся уравнением окружности с вынесенным центром в область плечевого сустава:

$$z_l(t) = \frac{h_T}{2} - \sqrt{h_{pc}^2 - x_l^2(t)},$$

где h_T — длина туловища человека; h_{pc} — длина плеча человека.

На рис. 2 представлена траектория движения локтя человека в СК человека (рис. 2,а), левого и правого локтей в СК СД (рис. 2,б), причем сплошной линией обозначена траектория правого локтя, а пунктирной — левого.

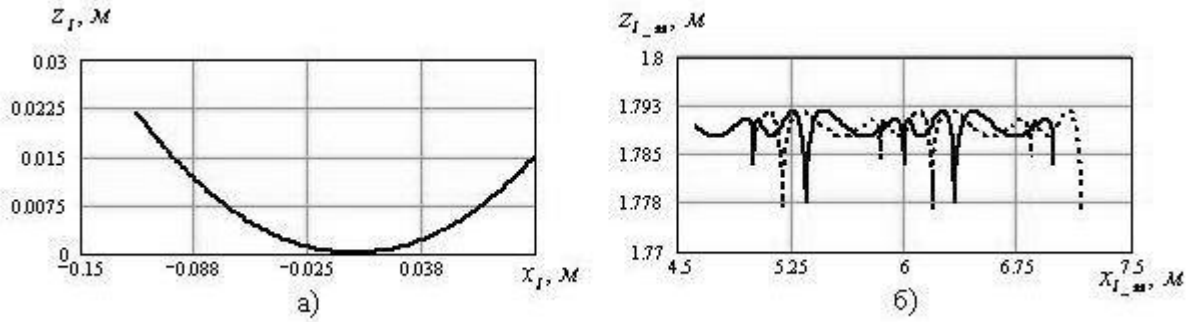


Рис. 2. Траектория движения локтя человека
(а — одного локтя в СК человека; б — двух локтей в СК СД)

Значение координаты $y_l(t)$ в СК человека равно половине расстояния между левым и правым плечевым суставом вдоль оси $O_t Y_t$, и имеет противоположные знаки для левой и правой руки:

$$y_l(t) = \pm \frac{h_{pl}}{2} + rnd(-0, 02; 0, 02), \quad (2)$$

где h_{pl} — расстояние между левым и правым плечевым суставом вдоль оси $O_t Y_t$, знак плюс соответствует правой руке, а минус — левой.

Математическая модель движения кисти человека

Траектория движения кисти человека в СК человека $X_t Y_t Z_t$ за время одного шага описывается уравнением окружности с центром в области плечевого сустава, поэтому построение ММ движения кисти будет таким же, как и для локтя.

Значение скорости движения кисти человека вдоль оси $O_t X_t$ в течение одного шага определяется по формуле:

$$v_{ks_x}(t) = v_{ks_x_max} \sqrt{1 - \frac{t/2 - T_{sh}/2}{T_{sh}/2}}^2.$$

Максимальное значение скорости кисти вдоль оси $O_t X_t$ находится согласно выражению:

$$v_{ks_x_max} = \frac{\Delta h_{ksp} + \Delta h_{ksz}}{\int_0^{T_{sh}} \sqrt{1 - \frac{t/2 - T_{sh}/2}{T_{sh}/2}}^2 dt},$$

где Δh_{ksp} — начальное значение выноса кисти вперед относительно тела вдоль оси $O_t X_t$; Δh_{ksz} — конечное значение выноса кисти назад относительно тела вдоль оси $O_t X_t$.

Значение координаты x_{ks} определяется следующим образом:

$$x_{ks}(t) = x_{ks_0} - \int_0^{T_{sh}} v_{ks_x_max} \sqrt{1 - \frac{t/2 - T_{sh}/2}{T_{sh}/2}}^2 dt + rnd(-0, 02; 0, 02),$$

где x_{ks_0} — начальное значение координаты x_{ks} .

Координата $z_{ks}(t)$ находится по уравнению окружности с центром в плечевом суставе и радиусом, равным сумме длины плеча и предплечья:

$$z_{ks}(t) = \frac{h_r}{2} - \sqrt{h_{pc} + h_{pp}^2 - x_{ks}^2(t)},$$

где h_{pp} — размер предплечья человека.

На рис. 3 представлена траектория движения одной кисти человека в СК человека (рис. 3,а), левой и правой кистей в СК СД (рис. 3,б), причем сплошной линией обозначена траектория правой кисти, а пунктирной — левой.

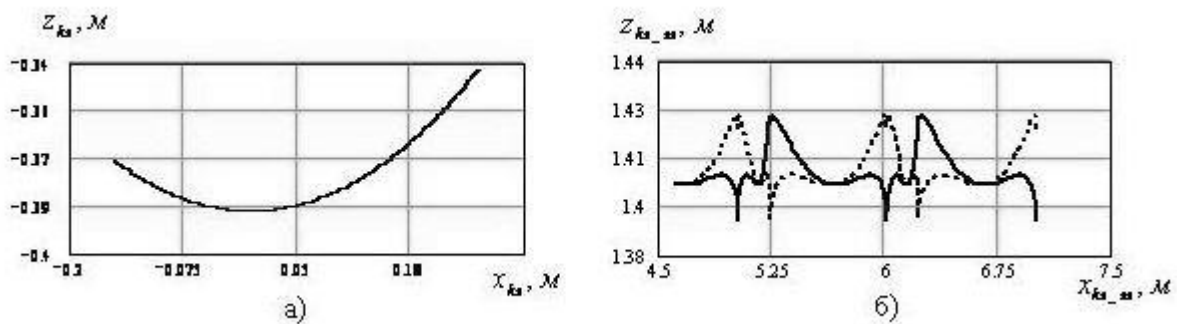


Рис. 3. Траектория движения кисти человека (а — одной кисти в СК человека; б — двух кистей в СК СД)

Значение координаты $y_{ks}(t)$ рассчитывается аналогично (2):

$$y_{ks}(t) = \pm \frac{h_{pl}}{2} + rnd(-0,02; 0,02).$$

Математическая модель движения колена человека

Траектория движения колена человека для ноги, находящейся в воздухе за время одного шага и ноги, находящейся на земле, имеет различный вид. При перемещении человека происходит чередование левой и правой ноги, т.е. в одно и то же время одна нога совершает движение в воздухе, а другая движется, находясь на земле.

Скорость движения коленей относительно оси O_tX_t находится согласно выражению:

$$v_{kl} = \frac{2\Delta h_b}{T_{sh}}.$$

Расстояние выноса бедра вперед (назад) относительно туловища в СК человека вдоль оси O_tX_t определяется как:

$$\Delta h_b = h_b \frac{S_{sh}}{2 h_b + h_g},$$

где h_b — длина бедра человека; h_g — длина голени человека.

Уравнение для расчета координаты x_{kl} коленей будет иметь вид:

$$x_{kl} \ t = \Delta h_b - v_{kl}t + rnd(-0,02; 0,02).$$

Для нахождения значения координаты колена в течение одного шага вдоль оси $O_t Z_t$ необходимо найти его начальное положение z_{kl0} :

$$z_{kl0} = -\frac{h_r}{2} - h_b - h_g + \sqrt{h_g^2 - S_{sh}/2 - \Delta h_b^2}.$$

Значение координаты z_{kl_v} колена ноги, находящейся в воздухе в течение одного шага в СК человека, описывается уравнением эллипса и находится согласно выражению:

$$z_{kl_v}(t) = z_{kl0} + h_{st} \sqrt{1 - \frac{x_{kl}^2 t}{\Delta h_b^2}}.$$

Значение координаты z_{kl_z} колена ноги, находящейся на земле в течение одного шага в СК человека, описывается уравнением эллипса и находится согласно выражению:

$$z_{kl_z}(t) = z_{kl0} + h_{pk} \sqrt{1 - \frac{x_{kl}^2 t}{\Delta h_b^2}},$$

где h_{pk} — высота подъема колена находящейся на земле ноги.

Выражение для расчета h_{pk} будет иметь вид:

$$h_{pk} = h_g - \sqrt{h_g^2 - S_{sh}/2 - \Delta h_b^2}.$$

На рис. 4,а представлена траектория движения колена человека в СК человека, где сплошной линией обозначена траектория движения колена ноги, находящейся в воздухе, пунктирной — траектория движения колена ноги, находящейся на земле. На рис. 4,б представлены траектории движения левого и правого коленей в СК СД (сплошной линией, соответственно, траектория правого колена, пунктирной — левого).

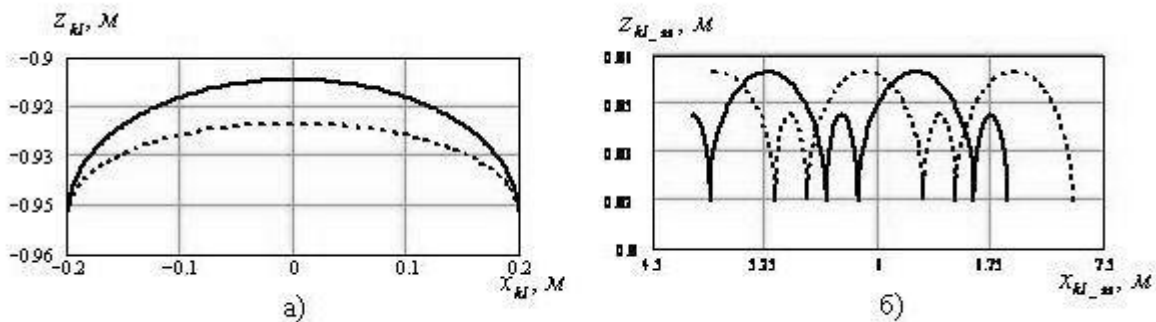


Рис. 4. Траектория движения колена человека
(а — одного колена в СК человека; б — двух коленей в СК СД)

Значение координат y_{kl} для обоих коленей в СК человека равно половине расстояния между левой и правой ногой вдоль оси $O_t Y_t$ и имеет противоположные знаки для левой и правой ноги:

$$y_{kl}(t) = \pm \frac{h_{nog}}{2} + rnd(-0,02; 0,02), \quad (3)$$

где h_{nog} — расстояние между левой и правой ногой вдоль оси $O_t Y_t$, знак плюс соответствует правой ноге, а минус — левой.

Математическая модель движения ступни человека

При построении ММ движения человека особое внимание необходимо уделить движению ступней человека в пространстве, поскольку они воздействуют на почву.

Изменение координат ступни человека в пространстве описывается следующим образом: координата x_{st} изменяется равноускоренно, y_{st} остается практически без изменений, а z_{st} изменяется по закону синуса. Значение координаты x_{st} определяется согласно [2]:

$$x_{st}(t) = x_{st_0} + \frac{a_{x_{st}} t^2}{2} + rnd(-0,02; 0,02),$$

где x_{st_0} — начальное значение координаты x_{st} ; $a_{x_{st}}$ — ускорение движения ступни вдоль оси $O_t X_t$, которое находится согласно выражению:

$$a_{x_{st}} = \frac{4S_{sh}}{T_{sh}^2}. \quad (4)$$

Значение числителя в (4) взято с множителем 2, так как ступня человека за время одного шага проходит расстояние, равное двум шагам.

Скорость движения ступни вдоль оси $O_t Z_t$ за время одного шага изменяется по закону синуса:

$$v_z(t) = v_{z_{max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{sh}} t\right),$$

где $v_{z_{max}}$ — максимальное значение скорости ступни вдоль оси $O_t Z_t$.

Величина $v_{z_{max}}$ определяется аналогично (1):

$$v_{z_{max}} = \frac{h_{st}}{\frac{T_{sh}}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_{sh}} t\right) dt}.$$

Значение координаты z_{st} будет иметь вид:

$$z_{st}(t) = z_{st_0} + \int_0^t v_{z_{max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{sh}} t\right) dt,$$

где z_{st_0} — начальное значение координаты z_{st} .

Следует отметить, что при движении человека ступня перемещается через один шаг вследствие чередования движения левой и правой ног.

На рис. 5 представлена траектория движения ступни человека в СК человека (рис. 5,а), левой и правой ступней в СК СД (рис. 5,б), причем сплошной линией обозначена траектория правой ступни, а пунктирной — левой.

Значение координаты y_{st} находится аналогично (3):

$$y_{st}(t) = \pm \frac{h_{nog}}{2} + rnd(-0,02; 0,02).$$

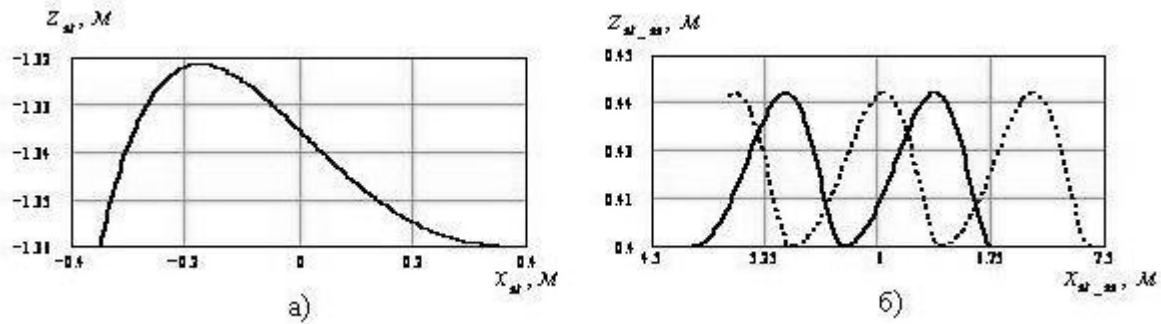


Рис. 5. Траектория движения ступни человека
(а — одной ступни в СК человека; б — двух ступней в СК СД)

При пересчете траекторий движения головы, туловища и верхних конечностей из собственной СК перемещающегося человека в СК СД необходимо ввести поправку в траекторию движения головы и туловища, частей верхних конечностей (локти, кисти), связанную с колебаниями человека при ходьбе или беге. Значение поправки будет изменяться за время шага по закону движения колена находящейся на земле ноги. Выражения для поправки будет иметь вид:

$$k_{popr} t = z_{kl0} - z_{kl_z}(t).$$

Для определения истинного положения головы и туловища, а также верхней конечности вдоль оси O_1Z_1 необходимо к координате $z t$ этой части тела прибавить $k_{popr} t$.

Заключение

Таким образом, разработана ММ движения человека, включающая уравнения движения отдельных частей тела.

Представленная ММ может быть использована при моделировании сейсмограмм движения человека в сейсмических датчиках и сейсмометрических комплексах, отраженного сигнала в датчиках движения и РЛС, акустического сигнала в акустических датчиках и звукометрических комплексах.

THE MATHEMATICAL MODEL OF HUMAN MOTION

N.G. KUKHALSKI, A.E. VINOGRADOV

Abstract

Mathematical model of human motion is reviewed in the article. The model is adduced as an aggregate of following components: mathematical model of elbows, hands, knees, soles and human trunk motion along back trajectory.

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1973.
2. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы: Учебное пособие. М., 1991.