УДК 517.977

К УСЛОВИЯМ РЕГУЛЯРНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ

С.В. АКТАНАРОВИЧ, Л.И. МИНЧЕНКО, А.Н. ТАРАКАНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 16 марта 2010

Обобщен один из результатов А. Ауслендера и Р. Коминетти, касающийся дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в параметрических задачах нелинейного программирования при наличии условия регулярности Мангасаряна–Фромовица по направлению. Показывается, что достаточно жесткие дополнительные требования, использованные в работе А. Ауслендера и Р. Коминетти, могут быть заменены ослабленным условием регулярности постоянного ранга.

Ключевые слова: оптимизация, многозначные отображения, псевдолипшицевость отображений.

Введение

Производные по направлениям функции оптимального значения широко используются в исследовании устойчивости и чувствительности экстремальных задач относительно возмущений параметров, при построении алгоритмов решения минимаксных задач, в квазидифференциальном исчислении и в его приложениях [1–6].

Пусть $f(x,y)$, $h_i(x,y)$ $i=1,...,p$ — непрерывно дифференцируемые функции из $R^n \times R^m$ в R. В данной работе мы рассматриваем функцию оптимального значения $\varphi(x)=\inf\{f(x,y)\,|\,y\in F(x)\}$, определенную для задачи минимизации $f(x,y)\to\inf\limits_y$ на множестве $F(x)=\{y\in R^m\,|\,h_i(x,y)\le 0 \quad i\in I,\ h_i(x,y)=0 \quad i\in I_0\}$, где $\mathbf{x}\in R^n$ — вектор параметров, $I=\{1,...,s\}$, $I_0=\{s+1,...,p\}$.

Обозначим через $\omega(x)=\{y\in F(x)\,|\,f(x,y)=\varphi(x)\}$ множество оптимальных решений поставленной задачи, через F — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x\in R^n$ множество $F(x)\subset R^m$. Будем предполагать, что для точки $x_0\in \mathrm{dom}F$ существуют окрестность $V(x_0)$ и ограниченное множество $Y_0\subset R^m$ такие, что $\omega(x)\subset Y_0$ для всех $x\in V(x_0)$.

Введем понятия и обозначения, необходимые для вывода и формулировки результатов. Пусть $z=(x,y)$, $z_0=(x_0,y_0)$, $\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Введем функцию Лагранжа $L(z,\lambda)=f(z)+\langle\lambda,h(z)\rangle$, где $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_p)$, $h=(h_1,...,h_p)$.

Обозначим через $\Lambda(z)=\{\lambda\in \mathrm{R}^p\,|\,\nabla_x L(z,\lambda)=0,\ \lambda_i\ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z)=0, \quad i\in I\}$ множество множителей Лагранжа и через $I(z)=\{i\in I\,|\,h_i(z)=0\}$ множество индексов активных ограничений в точке $z=(x,y)\in \mathrm{gr}F$.

Пусть $\mathbf{x} \in R^n$. Для функции оптимального значения изучим существование производной по направлению $\mathbf{x}$ в точке x_0:

$$\varphi'(x_0; \mathbf{x}) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\varphi(x_0 + t\mathbf{x}) - \varphi(x_0)) .$$

Известно, что дифференцируемость по направлениям функции оптимального значения требует выполнения определенных условий регулярности в оптимальных точках и некоторых дополнительных предположений о структуре многозначного отображения F. Таким образом, в работах, посвященных исследованию дифференцируемости функции оптимального значения, получены результаты, дающие достаточные условия дифференцируемости по направлениям функции φ. В виду сложности изучаемой проблемы, наряду с достаточными условиями, обеспечивающими дифференцируемость функций оптимального значения по всем направлениям, в литературе представлены результаты, гарантирующие их дифференцируемость по некоторым конкретным направлениям, удовлетворяющим определенным требованиям. К такого рода результатам в первую очередь следует отнести известную работу А. Ауслендера и Р. Коминетти [3], использующую понятие регулярности Мангасаряна–Фромовица по направлению, введенное Б. Голланом в [6], и так называемые сильные достаточные условия второго порядка по направлению (SSOSC $\mathbf{x}$) А. Шапиро [4]. В данной статье показывается, что последнее требование можно заменить на введенное в [7, 8] ослабленное условие регулярности постоянного ранга.

Следуя [3], будем говорить, что в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$ выполнено условие регулярности Мангасаряна–Фромовица по направлению $\mathbf{x} \in R^n$ (коротко MF $\mathbf{x}$), если система векторов $\nabla_y h_i(z_0) \quad i \in I_0$ линейно независима и существует вектор $\mathbf{y}_0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(z_0),\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \rangle = 0 \quad i \in I_0, \ \langle \nabla h_i(z_0), (\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \rangle < 0 \quad i \in I(z_0).$$

В [7, 8] предложено ослабленное условие регулярности постоянного ранга (RCR), которое представляет собой ослабленный вариант условия Р. Жанена [9] и по своей природе отлично от условия Мангасаряна–Фромовица. Напомним [7], что в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in grF$ выполнено ослабленное условие регулярности постоянного ранга, если для любого подмножества индексов J такого, что $I_0 \subset J \subset I(z_0) \cup I_0$, система векторов $\nabla_y h_i(z), \quad i \in J$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки z_0.

Изучим условия существования производной

$$\varphi'(x_0; \mathbf{x}) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\varphi(x_0 + t\mathbf{x}) - \varphi(x_0))$$

функции φ в точке x_0 по направлению $\mathbf{x} \in R^n$.

Производные функции оптимального значения

Следуя [2], введем нижнюю производную Дини многозначного отображения F в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$ по направлению $\mathbf{x}$:

$$DF(z_0; \mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in R^m \mid \exists \text{ функция } o(t) \text{ такая, что } o(t)/t \to 0 \text{ для } t \downarrow 0$$
$$\text{и } y_0 + t\mathbf{y} + o(t) \in F(x_0 + t\mathbf{x}) \ \forall t \geq 0\}$$

и множество

$$\Gamma(z_0; \mathbf{x}) = \ \mathbf{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(z_0), \mathbf{z} \rangle \leq 0 \quad i \in I(z_0), \ \langle \nabla h_i(z_0), \mathbf{z} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \ , \ \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

Лемма 1 ([3]). *Если в точке* $z_0=(x_0,y_0)\in \mathrm{gr}F$ *выполнено условие регулярности Мангасаряна–Фромовица по направлению* $\mathbf{x}$, *то* $DF(z_0;\mathbf{x})=\Gamma(z_0;\mathbf{x})\neq\varnothing.$

Лемма 2 ([7]). *Пусть в точке* $z_0=(x_0,y_0)\in \mathrm{gr}F$ *выполнено условие регулярности RCR. Тогда существуют окрестности* $V(x_0)$, $V(y_0)$ *точек* x_0, y_0 *и число* $M>0$ *такие, что для любого* $x\in V(x_0)$ *и любого* $y\in V(y_0)\cap F(x)$ *найдется точка* $y_{01}\in F(x_0)$, *для которой выполнены условия:*

a) $|\ y-y_{01}|\le M\ |\ x-x_0|$, $M=\mathrm{const}>0,$

b) $h_i(x,y)\le h_i(x_0,y_{01})\le 0 \quad i\in I(x_0,y_0)$.

Теорема 1. *Пусть во всех точках* $z_0=(x_0,y_0)$ *таких, что* $y_0\in\omega(x_0)$, *выполнены условия RCR и MF* $\mathbf{x}$. *Тогда функция* φ *дифференцируема в точке* x_0 *по направлению* $\mathbf{x}$, *причем*

$$\varphi'(x_0;\mathbf{x})=\min_{y_0\in\omega(x_0)}\ \min_{y\in\Gamma(z_0;x)}\langle\nabla f(z_0),\mathbf{z}\rangle=\min_{y_0\in\omega(x_0)}\ \max_{\lambda\in\Lambda(z_0)}\langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\mathbf{x}\rangle. \tag{1}$$

Доказательство. 1) Пусть $y_0\in\omega(x_0)$. В силу леммы 1 имеем $\Gamma(z_0;\mathbf{x})=$ $=DF(z_0;\mathbf{x})\neq\varnothing$. Тогда для любого $\mathbf{y}\in\Gamma(z_0;\mathbf{x})$ существует функция $o(t)$ такая, что $o(t)/t\to 0$ при $t\to 0$ и $y_0+t\mathbf{y}+o(t)\in F(x_0+t\mathbf{x})$ для всех $t>0$. Следовательно, $\varphi(x_0+t\mathbf{x})-$ $-\varphi(x_0)\le f(x_0+t\mathbf{x},y_0+t\mathbf{y}+o(t))-f(x_0,y_0)$, откуда $D^+\varphi(x_0;\mathbf{x})=\limsup_{t\downarrow 0} t^{-1}\ \varphi(x_0+t\mathbf{x})-\varphi(x_0)\ \le$ $\le\langle\nabla f(z_0),\mathbf{z}\rangle$ для всех $\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y})$ таких, что $\mathbf{y}\in\Gamma(z_0;\mathbf{x})$. Из данного неравенства следует

$$D^+\varphi(x_0;\mathbf{x})\le\inf_{y_0\in\omega(x_0)}\ \inf_{y\ \in\Gamma(z_0;x)}\langle\nabla f(z_0),\mathbf{z}\rangle. \tag{2}$$

2) Пусть предел $D_+\varphi(x_0;\mathbf{x})=\liminf_{t\downarrow 0} t^{-1}(\varphi(x_0+t\mathbf{x})-\varphi(x_0))$ достигается на последовательности $t_k\downarrow 0$ и пусть $x_k=x_0+t_k\mathbf{x}$, $y_k\in\omega(x_k)$ k=1, 2,… Не ограничивая общности, можно считать последовательность y_k сходящейся. Более того, $y_k\to\tilde{y}_0\in F(x_0)$ вследствие замкнутости многозначного отображения F. Поскольку $\varphi(x_k)\le\varphi(x_0)+t_kD^+\varphi(x_0;\mathbf{x})+o(t_k)$, то переход к пределу в равенстве $f(x_k,y_k)=\varphi(x_k)$ даст нам $f(x_0,\tilde{y}_0)=\limsup_{k\to\infty}\varphi(x_k)\le\varphi(x_0)$, откуда следует, что $\tilde{y}_0\in\omega(x_0)$.

В силу леммы 2 найдется последовательность y_{0k} такая, что $y_{0k}\in F(x_0)$, $|\,y_{0k}-y_k\,|\le M\,|\,x_k-x_0\,|$, $M=\mathrm{const}>0,$ $h_i(x_k,y_k)\le h_i(x_0,y_{0k})\le 0 \quad i\in I(x_0,y_0)$.

Не убавив общности, можно считать, что $t_k^{-1}(y_k-y_{0k})\to\mathbf{y}_0$ и, следовательно, $y_k=y_{0k}+t_k\mathbf{y}_0+o(t_k)$. Тогда

$$h_i(x_k,y_k)-h_i(x_0,y_{0k})\le 0 \quad i\in I(x_0,y_0),\quad h_i(x_k,y_k)-h_i(x_0,y_{0k})=0 \quad i\in I_0,$$

откуда после перехода к пределу получим

$$\langle\nabla h_i(x_0,\tilde{y}_0),(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\rangle\le 0 \quad i\in I(x_0,y_0),\ \langle\nabla h_i(x_0,\tilde{y}_0),(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\rangle=0 \quad i\in I_0,$$

то есть $\mathbf{y}_0\in\Gamma((x_0,\tilde{y}_0);\mathbf{x})$.

С другой стороны,

$$D_+\varphi(x_0;\mathbf{x}) = \liminf_{t_k\downarrow 0} t_k^{-1}(f(x_0+t_k\mathbf{x}, y_k) - f(x_0,\tilde{y}_0)) \geq$$

$$\geq \liminf_{t_k\downarrow 0} t_k^{-1}(f(x_0+t_k\mathbf{x}, y_{0k}+t_k\mathbf{y}_0+o(t_k)) - f(x_0,y_{0k})) = \langle\nabla f(x_0,\tilde{y}_0),(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\rangle,$$

следовательно,

$$D_+\varphi(x_0;\mathbf{x}) \geq \langle\nabla f(x_0,\tilde{y}_0),(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\rangle \geq \inf_{y\in\omega(x_0)}\ \inf_{\mathbf{y}\ \in\Gamma((x_0,y);\mathbf{x})}\langle\nabla f(x_0,y),\mathbf{z}\rangle,$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Сравнивая последнее неравенство с оценкой (2), получаем, что существует конечная производная по направлению

$$\varphi'(x_0;\mathbf{x}) = \min_{y_0\in\omega(x_0)}\ \min_{\mathbf{y}\in\Gamma(z_0;\mathbf{x})}\langle\nabla f(z_0),\mathbf{z}\rangle.$$

Применяя теорему двойственности линейного программирования [10], получаем (1).

Выводы

Получены достаточные условия дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения, которые позволяют избежать более жестких предположений работы [3], заменяя требование выполнения в оптимальной точке так называемых сильных достаточных условий оптимальности второго порядка по направлениям [4], более приемлемым во многих случаях ослабленным условием постоянного ранга. Полученные результаты являются обобщением теоремы 1 [3] для достаточно широкого круга задач нелинейного программирования.

ON CONSTRAINT QUALIFICATIONS AND DIFFERENTIABILITY OF VALUE FUNCTION

S.V. AKTANAROVICH, L.I. MINCHENKO, A.N. TARAKANOV

Abstract

Parametric programming problems are studied and the existences of the first directional derivatives for value function are proved under the directional version of Mangasarian–Fromovitz constraint qualifications without second order sufficient optimality conditions.

Литература

1. *Bonnans J.F., Shapiro A.* Perturbations analysis of optimization problems. Springer-Verlag, New York, 2000.
2. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publ. Dordrecht, 2002.
3. *Auslender A., Cominetti R.* // Optimization. 1990. Vol. 21, P. 351–363.
4. *Shapiro A.* // SIAM J. Control and Optimization. 1988. Vol. 26. P. 628–645.
5. *Minchenko L., Tarakanov A.* // Optimization. 2005. Vol. 54. P. 433–442.
6. Gollan B. // Mathematics of Operation Research. 1984. Vol. 9. P. 208–221.
7. *Минченко Л.И., Стаховский С.М.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. № 5. С. 6–10.
8. *Minchenko L., Stakhovski S.* // Optimization. 2010.
9. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
10. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. М., 1963.