МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Гурец Н.А., Тарасевич И.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Малышева О. Н. – кандидат физ.-мат. наук, доцент

Техасский холдем

Техасский холдем является самой популярной разновидностью игры покер в мире. Очевидно, что блеф является одной из важнейших стратегий этой игры. Хороший игрок использует этот стратегический прием, но не слишком часто. Как же понять, когда игроку стоит блефовать, а когда – нет?

Объектом данного исследования является блеф с математической точки зрения. Целью исследования является выбор оптимальной стратегии, приводящей к выигрышу. Нами рассматривалась ситуация, когда комбинация противника в конкретной игре лучше нашей собственной, причем вероятность этого события равна 0.75, то есть $(1-k)$, где $\boldsymbol{k}$ – вероятность того, что у нас лучшая рука в игре.

Анализируя карточную игру «Техасский холдем» необходимо учитывать случаи, когда игрок блефует (или нет), а также случаи ответа его оппонента. Введем переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – величины частоты ответа со стороны оппонента и блефа со стороны игрока соответственно. В базовых случаях, когда $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равны 0 или 1, игрок либо достоверно проигрывает (имеет худший расклад), либо ничего не получает, либо выигрывает банк (имеет лучший расклад). Также нами учитывалось пересечение возможных стратегий обоих игроков.

В результате оказалось, что существуют такие значения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, при которых независимо от стратегии оппонента вероятность выигрыша игрока остается неизменной (оптимальное значение $\boldsymbol{x}$), и наоборот, вне зависимости от выбора стратегии игрока оппонент имеет одинаковую вероятность выигрыша (оптимальное значение $\boldsymbol{y}$). Профиль таких стратегий является равновесием Нэша [1].

Для вывода оптимальных значений $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ решается система модификаций уравнения вероятности выигрыша в базовых случаях: в вероятностное уравнение подставляются значения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из множества {0; 1}. Было установлено, что оптимальное значение $\boldsymbol{y}$ зависит только от суммы ставки и текущего банка, в то время как оптимальная вероятность $\boldsymbol{x}$ зависит от вероятности наличия лучшей комбинации карт у игрока. В таблице 1 приведен расчет вероятностей выигрыша игрока и оппонента во всех случаях, возникающих во время игры.

Таблица 1. Обобщенные вероятности выигрыша (проигрыша)

	Стратегия 1 (игрок никогда не блефует)	Стратегия 2 (игрок всегда блефует)	Стратегия 3 (игрок блефует с оптимальной частотой)
Стратегия 1 (оппонент никогда не отвечает)	0.25	1	0.375
Стратегия 2 (оппонент всегда отвечает)	0.5	-0.6	0.375
Стратегия 3 (оппонент отвечает с оптимальной частотой)	0.375	37.5	0.375

Отрицательное значение вероятности означает проигрыш.

Нетрудно заметить, что при соблюдении обоими игроками стратегий, равновесных по Нэшу, вероятность выигрыша игрока стабильно равна 0.375. В то же время стратегия абсолютного выигрыша игрока (1) не может быть получена. Оптимальные значения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ позволяют стабилизировать вероятность выигрыша или поддерживать ситуацию нахождения в игре.

Настольная игра «Доббль»

«Доббль» - занимательная настольная игра. В комплекте игры содержится 55 карточек с 8 разными элементами на каждой. Любые две карточки имеют только один одинаковый элемент. Цель игры – найти на своей карточке элемент совпадающий с элементом на карточке соперника. Основания конечной и проективной геометрии позволяют построить математическую модель данной игры.

Целью данного исследования является проверка того является ли существующий набор карточек в игре «Доббль» полным и разработка возможных вариантов формирования игр-клонов.

По условию игры «Доббль» любая пара карточек имеет только один совпадающий элемент. Данное утверждение схоже с аксиомой о пересекающихся прямых на евклидовой плоскости. В плоскости Евклида через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести бесконечно много пересекающих её прямых и лишь одну прямую, параллельную данной. В свою очередь, на проективной плоскости любые две прямые всегда имеют общую точку. Тогда пусть один элемент на карточке есть прямая на проективной плоскости, а карточка – точка проективной плоскости.

Представим проективную плоскость как пучок прямых в трёхмерном пространстве, проходящих через начало координат. Построим произвольную плоскость α, содержащую точку (0,0,0) и проведем нормаль к плоскости α в этой точке. Через произвольную точку этой нормали, не совпадающую с точкой (0,0,0), проведём плоскость β, параллельную α (рисунок 1).

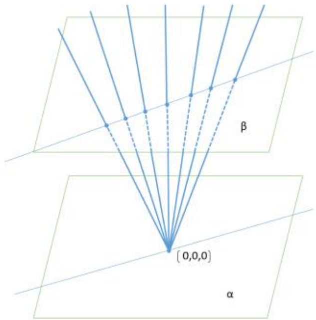

Рисунок 1 – Осуществление перехода к проективной плоскости

Точка проективной плоскости есть прямая в трёхмерном евклидовом пространстве, тогда прямая проективной плоскости – это плоскость трехмерного евклидова пространства.

В игре «Доббль» на одной карточке находится 8 элементов. Будем использовать проективную плоскость 7 порядка, где каждая прямая содержит 8 точек (одна из которых бесконечность). Остатки от деления на простое число 7 образуют поле. Построим афинную конечную плоскость 7 порядка и достроим её до проективной. В общем случае, конечная аффинная плоскость порядка n имеет n^2 точек. Каждая прямая такой плоскости состоит из 7 точек, координаты которых принадлежат полю остатков от деления на простое число 7.

Затем построим трёхмерное пространство над полем из 7 элементов. В таком пространстве существует 7^3 точек. Каждая прямая проходит через некоторую точку с координатами (0,0,0), тогда чтобы задать прямую в трехмерном пространстве (точку на проективной плоскости) надо знать 6 ее остальных координат. В конечной проективной плоскости 7 порядка число прямых и точек равно между собой. Тогда максимальное число прямых и точек, которые можно построить над полем из 7 элементов будет равно:

$$N = \frac{7^3 - 1}{6} = 57,$$

что совпадает с количеством карточек в полном наборе игры «Доббль».

Проведённые исследования показывают, что официальная игра «Доббль» содержит неполное количество карточек (двух недостаёт). Нами были найдены 1287 вариантов построения недостающих карточек по следующему алгоритму:

1) Строим граф, ребра которого будут прямыми проективной плоскости, а его вершины – точки пересечения прямых этой плоскости [2];
2) Для этого графа создаём матрицу инцидентности, в которой количество столбцов будет равно количеству карточек, а количество строк – количеству элементов, формирующих игру;
3) Используя матрицу инцидентности, находим недостающие карточки методом перебора всех элементов.

Для создания шаблонов клон-игр (шаблонов игр с другим количество элементов на карточке) были использованы проективные плоскости больших и меньших порядков. Получены варианты игр с 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 элементами на карточке.

Список использованных источников:

1. Джеймс С. Коулман. Экономическая социология с точки зрения теории рационального выбора | Экономическая социология – 2004. – Т. 5, №3. – стр. 35-44.
2. [Электронный ресурс]: Математическая модель игры Доббль / Хабр - Habr. URL: https://habr.com/ru/post/437140/

ТАЙНЫ СУДОКУ И НЕ ТОЛЬКО

Карымов А.Г., Якимович А.А., Зенькевич И.Н.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Борисенко О.Ф. – к.ф-м.н.,доцент

В данной статье мы рассматриваем алгоритм генерации Судоку и основные методы решения полученных головоломок с частотой их использования.

Алгоритм генерации Судоку

Для рассмотрения методов решения Судоку введём следующие понятия:

- Малый квадрат. Это квадрат размером 3x3. Верхние строки таких квадратов A, D, G, а левые столбцы 1, 4, 7.
- Район. Это 3 рядом стоящих малых квадрата по вертикали или по горизонтали.

1. Заполним первый горизонтальный район. Для этого в первой строке последовательно разместим числа 1-9, две оставшиеся строки верхнего района заполним, сдвинув строку находящуюся выше на 3 позиции влево, т.е. расположив числа 4-9,1-3 и 7-9,1-6 во вторую и третью строку первого района соответственно. Следующие районы заполняются смещением на 1 позицию влево предыдущего района. Таким образом, мы получаем некоторую *базовую сетку.*
2. Введем некоторые действия, которые не изменят правильность заполнения сетки Судоку :
   - Транспонирование сетки Судоку;
   - Перестановка двух строк в одном районе;
   - Перестановка двух столбцов в одном районе;
   - Перестановка двух районов по горизонтали;
   - Перестановка двух районов по вертикали;
   - Перестановка двух цифр по всей сетке Судоку.
3. Преобразовав базовую сетку Судоку нам необходимо создать головоломку. Какое количество подсказок следует убрать, чтобы обеспечить единственность решения? Это один из важнейших факторов, который влияет на сложность Судоку. Так как проектом Sudoku@vtaiwan было доказано, что решаемых Судоку с 16 подсказками не существует, то минимальное число подсказок – 17. При этом в горизонтальном районе не должно оставаться двух пустых строк, а вертикальном – столбцов. Так же очевидно, что среди подсказок должны быть хотя бы 8 различных цифр. Далее, удаляя каждую новую клетку следует проверить полученную головоломку на единственность решения.

Методы решения судоку

Для рассмотрения методов решения Судоку введём следующие понятия:

- Кандидат. Это возможное значение для определённой ячейки на данном этапе решения.

Рассмотрим некоторые методы решения Судоку, использованные в нашей работе:

«Последний герой»

Данный метод используется при рассмотрении малых квадратов и заключается в следующем: если у нас есть некоторое число n, стоящее в строке или столбце поля, и эта строка или столбец в малом квадрате пересекает все пустые ячейки за исключением одной, то в оставшейся непересеченной ячейке находится именно это число n (если в малом квадрате этого числа нет).