

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления
Кафедра теоретических основ электротехники

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. СБОРНИК ЗАДАЧ

В четырёх частях

Часть 2

КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОДЫ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальностей 1-36 04 01 «Программно-управляемые электронно-оптические системы», 1-36 04 02 «Промышленная электроника», 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети», 1-40 02 02 «Электронные вычислительные средства», 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации», 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах», 1-58 01 01 «Инженерно-психологическое обеспечение информационных технологий», 1-98 01 02 «Защита информации в телекоммуникациях», групп специальностей 39 01 «Схемы радиоэлектронных устройств и систем», 39 02 «Конструкции радиоэлектронных средств», 39 03 «Проекты радиоэлектронных систем и их применение на объектах», 41 01 «Радио-, микро- и наноэлектронная техника», 45 01 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

УДК 621.3.011.7(076.1)
ББК 31.211я73
Т33

А в т о р ы:
А. П. Курулёв, И. Л. Свито,
В. М. Коваленко, И. И. Петровский

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра электротехники и систем электропитания учреждения образования
«Военная академия Республики Беларусь»
(протокол №5 от 21.01.2019);

доцент кафедры автоматизации технологических процессов и электроники
учреждения образования «Белорусский государственный технологический
университет» кандидат технических наук, доцент И. Ф. Кузьмицкий

Теория электрических цепей. Сборник задач. В 4 ч. Ч. 2 : Классический
Т33 и операторный методы : учеб.-метод. пособие / А. П. Курулёв [и др.]. –
Минск : БГУИР, 2019. – 112 с. : ил.
ISBN 978-985-543-498-7 (ч. 2).

Содержит основные теоретические положения по расчёту переходных процессов в
линейных электрических цепях постоянного и переменного тока классическим и
операторным методами, примеры расчёта переходных процессов в цепях данного типа, а
также задачи для самостоятельного решения.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2017 г.

УДК 621.3.011.7(076.1)
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-543-498-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-543-361-4

© УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», 2019

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ТЕОРИЯ И УСЛОВИЯ ЗАДАЧ	5
1. Классический (временной) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами ...	5
1.1. Переходные процессы в цепях первого порядка с источником постоянного напряжения.....	5
1.1.1. Свободные токи и напряжения в цепях первого порядка	5
1.1.2. Переходные процессы в цепях первого порядка.....	13
1.1.3. Переходные процессы в цепях первого порядка без составления дифференциального уравнения	18
1.1.4. Переходные процессы при скачкообразном изменении схемы цепи	22
1.2. Переходные процессы в цепях первого порядка с источником синусоидального напряжения	34
1.3. Переходные процессы в цепях второго порядка с источником постоянного напряжения.....	39
1.4. Переходные процессы в цепях второго порядка с источником синусоидального напряжения	43
1.5. Временные характеристики электрических цепей.....	45
1.5.1. Переходная и импульсная характеристики.....	45
1.5.2. Интеграл Дюамеля.....	51
1.6. Задачи для самостоятельного решения	61
2. Операторный метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях	74
2.1. Основные свойства и теоремы преобразований Лапласа.....	74
2.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме	75
2.3. Связь операторных передаточных функций цепи с временными характеристиками	88
2.4. Задачи для самостоятельного решения	91
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ	95
Приложение 1. Формы интеграла Дюамеля	107
Приложение 2. Свойства преобразований Лапласа	108
Приложение 3. Основные теоремы преобразования Лапласа	109
Приложение 4. Таблица преобразований Лапласа	111
ЛИТЕРАТУРА	112

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач в четырёх частях соответствует программе курса «Теория электрических цепей». Часть 2 сборника содержит: задачи по анализу переходных процессов в электрических цепях как первого, так и второго порядка классическим (временным) методом; задачи по анализу переходных процессов в линейных электрических цепях методом наложения с использованием типовых функций воздействия и шести форм интеграла Дюамеля; задачи по анализу переходных процессов в электрических цепях операторным методом с использованием свойств и теорем преобразований Лапласа.

В учебно-методическом пособии также представлены задачи для самостоятельного решения с методическими указаниями и ответами к ним, приведены формулы для решения задач повышенной трудности.

Задачи, представленные в данном учебно-методическом пособии, могут быть использованы для домашних заданий, контрольных работ, проведения зачетов, экзаменов и олимпиад.

Авторы выражают благодарность рецензентам (кафедре электротехники и систем электропитания учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь» и доценту кафедры автоматизации технологических процессов и электроники учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет» кандидату технических наук, доценту И. Ф. Кузьмицкому) за полезные замечания и рекомендации, которые учтены при доработке рукописи.

Отзывы и предложения просим направлять по адресу: 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, БГУИР.

Авторы

ТЕОРИЯ И УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Классический (временной) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами

1.1. Переходные процессы в цепях первого порядка с источником постоянного напряжения

1.1.1. Свободные токи и напряжения в цепях первого порядка

Определение начальных условий

Пример 1. В схеме на рис. 1 происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $E = 100$ В; $r_1 = 10$ кОм; $r_2 = 50$ кОм. Необходимо определить напряжение $U_{r_1}(0+)$, возникающее на сопротивлении r_1 в момент размыкания ключа.

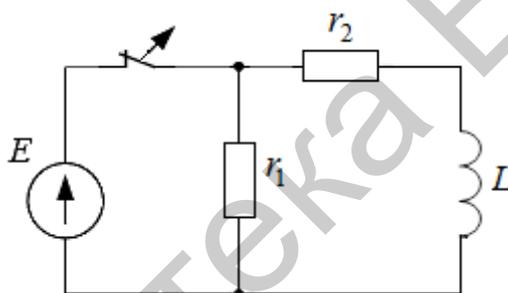


Рис. 1

Решение. В задаче необходимо определить зависимые начальные условия $U_{r_1}(0+)$. Для решения задачи сначала определим независимые начальные условия, к которым в задаче относится ток в индуктивности. До коммутации ток в индуктивности

$$i_L(0-) = \frac{E}{r_2} = \frac{100}{50} = 2 \text{ А.}$$

В соответствии с законом коммутации ток в индуктивности не может изменяться мгновенно:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 2 \text{ А.}$$

В результате коммутации образовалась одноконтурная цепь, состоящая из индуктивности L и сопротивлений r_1 и r_2 . Ток во всех элементах цепи равен $i_L(0+) = 2$ А.

Следовательно, искомое напряжение

$$U_{r_1}(0+) = i_L(0+)r_1 = 20 \text{ кВ.}$$

Численный результат решения задачи показывает важность изучения процессов в электрических цепях в переходных режимах. Представим, что вместо сопротивления r_1 в рассматриваемой цепи включён вольтметр с высоким входным сопротивлением. В момент размыкания ключа на зажимах вольтметра возникает большое напряжение, которое может привести к аварийной ситуации, если не принять мер по защите оборудования.

Пример 2. На рис. 2 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $e(t) = 30\sin 10^3 t$, $L = 20$ мГн, $C = 200$ мкФ, $r_1 = r_2 = 10$ Ом, $r_3 = 5$ Ом. Составить эквивалентную схему замещения цепи для момента времени $t = 0+$ для расчёта зависимых начальных условий.

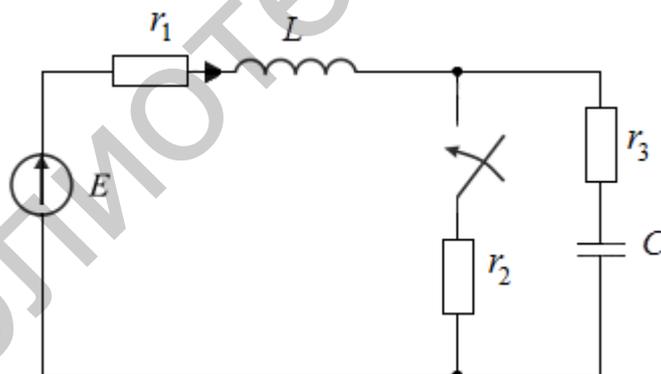


Рис. 2

Решение. Рассчитаем цепь до коммутации с целью определения независимых начальных условий:

$$x_L = \omega L = 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом,}$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 5 \text{ Ом.}$$

Комплексная амплитуда тока в цепи до коммутации равна

$$\begin{aligned} \dot{i}_{Lm} &= \frac{\dot{E}_m}{Z} = \frac{E_m e^{j0^\circ}}{r_1 + r_3 + jx_L - jx_C} = \frac{30}{10 + 5 + j20 - j5} = \\ &= \frac{30}{15 + j15} = \frac{30}{15\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}. \end{aligned}$$

Комплексная амплитуда напряжения на ёмкости в цепи до коммутации равна

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{I}_{Cm}(-jx_C) = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}(-j5) = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}e^{-j90^\circ} = 5\sqrt{2}e^{-j135^\circ}.$$

По найденным комплексным амплитудам тока в индуктивности и напряжения на ёмкости запишем соответствующие мгновенные значения:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \sqrt{2} \sin(10^3 t - 45^\circ), \\ U_C(t) &= 5\sqrt{2} \sin(10^3 t - 135^\circ). \end{aligned}$$

Полагая в последних выражениях $t = 0-$, определим независимые начальные условия:

$$\begin{aligned} i_L(0-) &= \sqrt{2} \sin(10^3 \cdot 0 - 45^\circ) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 \text{ A}, \\ U_C(0-) &= 5\sqrt{2} \sin(10^3 \cdot 0 - 135^\circ) = 5\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -5 \text{ В}. \end{aligned}$$

С учётом законов коммутации:

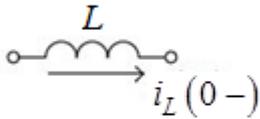
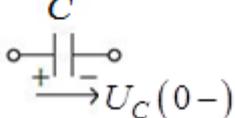
$$i_L(0-) = i_L(0+) = -1 \text{ A}, \quad U_C(0-) = U_C(0+) = -5 \text{ В}.$$

Напряжение источника ЭДС в момент коммутации было равным 0:

$$e(0+) = 30 \sin(10^3 \cdot 0) = 0.$$

Следовательно, источник ЭДС на эквивалентной схеме заменим его внутренним сопротивлением, которое равно 0, т. е. перемычкой. Для эквивалентной замены реактивных элементов в момент $t = 0+$ воспользуемся табл. 1, следующей из законов коммутации. Из таблицы следует, что в момент $t = 0+$ при нулевых начальных условиях индуктивность может быть заменена источником тока $i_L(0+)$, а ёмкость – источником ЭДС с напряжением $U_C(0+)$.

Таблица 1

Элемент	Ненулевые начальные условия	Нулевые начальные условия
	$i_L(0+)$ 	$i_L(0+) = 0$ 
	$U_C(0+)$ 	$U_C(0+) = 0$ 

Так как $i_L(0+)$ и $U_C(0+)$ при расчёте получились отрицательными, на эквивалентной схеме полярность на включении можно заменить на противоположную, заменив минус в числителях на плюс.

С учётом изложенного эквивалентная схема рассматриваемой цепи, справедливая для момента времени $t = 0+$, будет иметь вид (рис. 3).

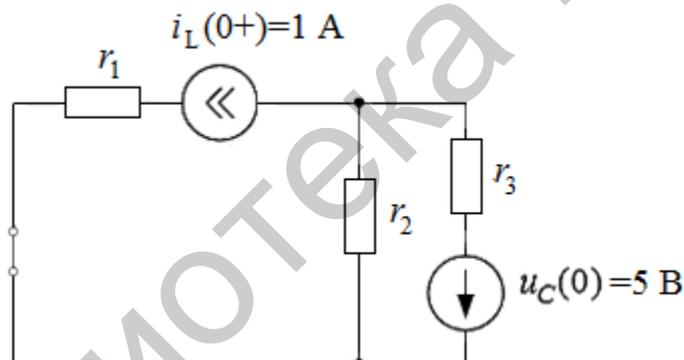


Рис. 3

По полученной схеме можно рассчитать требуемые зависимые начальные условия, используя любые методы расчёта электрических цепей.

Переходный процесс в линейных электрических цепях (ЛЭЦ) первого порядка с сосредоточенными параметрами (рис. 4) описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t). \quad (1)$$



Рис. 4

Решение этого уравнения записывается в виде

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{пр}}(t). \quad (2)$$

Здесь $x_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t}$ – свободная составляющая, в которой A_1 – постоянная интегрирования, определяемая законами коммутации и начальными условиями в цепи, p_1 – корень характеристического уравнения $a_1 p_1 + a_0 = 0$; $x_{\text{пр}}(t)$ – принуждённая составляющая, т. е. ток или напряжение установившегося после окончания переходного процесса режима при $t \rightarrow \infty$:

$$x_{\text{пр}}(t) = x_{\text{уст}}(t). \quad (3)$$

Свободные процессы в rC-цепи

Пример 3. В схеме на рис. 5 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 100$ В, $R_i = 100$ Ом, $R = 10$ Ом, $C = 100$ пФ. Найти и построить зависимости $U_{C \text{ св}}(t)$ и $i_{C \text{ св}}(t)$.

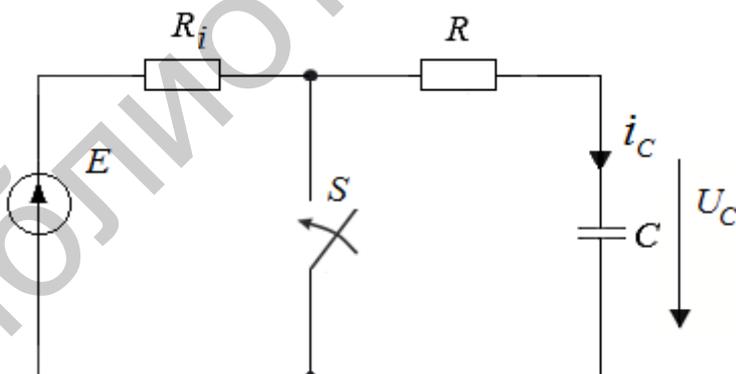


Рис. 5

Решение. До коммутации (рис. 5) ёмкость C заряжена до напряжения $U_C(0-) = E$. После замыкания ключа S ёмкость начинает разряжаться через сопротивление R и в цепи возникает переходный процесс. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для цепи после коммутации можно записать

$U_R(t) + U_C(t) = 0$. Так как $U_R(t) = ri(t) = rC \frac{dU_C}{dt}$, то получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$rC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t) = 0, \quad (4)$$

общее решение которого ищем в виде $U_{C_{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t}$.

Для нахождения корня p_1 составим характеристическое уравнение:

$$RCp_1 + 1 = 0, \text{ откуда } p_1 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau_{ц}} = 10^{-9} \text{ с}^{-1}, \text{ где постоянная времени цепи}$$

после коммутации $\tau_{ц} = RC = 1 \text{ нс}$.

Постоянная интегрирования A_1 определяется из начальных условий и закона коммутации:

$$U_C(0-) = U_C(0+).$$

Так как $U_C(0-) = E = 100 \text{ В}$, а $U_C(0+) = A_1 e^{p_1 \cdot 0}$, то $E = A_1 e^{p_1 \cdot 0}$, откуда

$$A_1 = E. \text{ Тогда } U_{C_{св}}(t) = E e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} = 100 e^{-10^9 t} \text{ В.}$$

При $t = \tau_{ц}$ $U_{C_{св}}(t) = 100 e^{-1} = \frac{100}{e} \approx 36,78 \text{ В}$. График $U_{C_{св}}(t)$ приведён на

рис. 6.

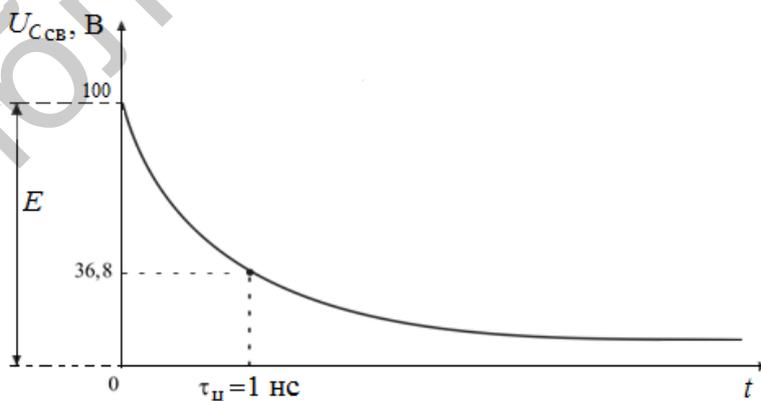


Рис. 6

$$\text{Ток } i_{C_{\text{св}}}(t) = C \frac{dU_C}{dt} = C \frac{d \left[E e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right]}{dt} = -\frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} = -10 e^{-10^9} \text{ А. При } t = \tau_{\text{ц}}$$

$i_{C_{\text{св}}}(t) = \frac{-10}{e} \approx -3,7 \text{ А}$. График $i_{C_{\text{св}}}(t)$ приведён на рис. 7.

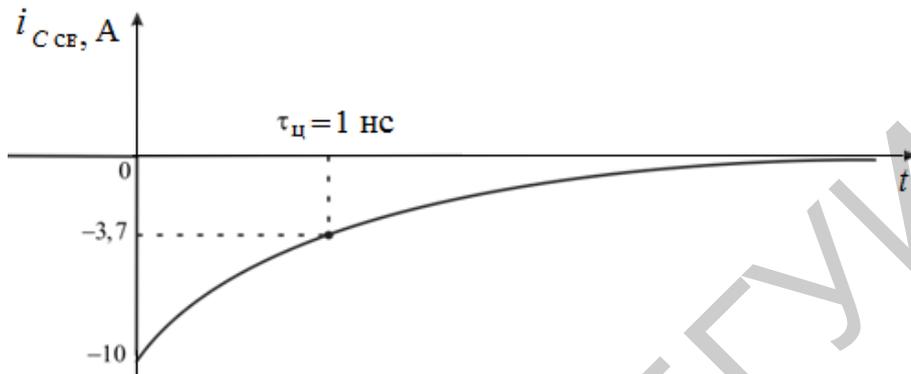


Рис. 7

Пример 4. На рис. 8 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 300 \text{ В}$; $R_i = 10 \text{ Ом}$; $R = 50 \text{ Ом}$; $L = 0,2 \text{ Гн}$. Найти $i_{L_{\text{св}}}(t)$ и $U_{L_{\text{св}}}(t)$ классическим методом и построить графики.

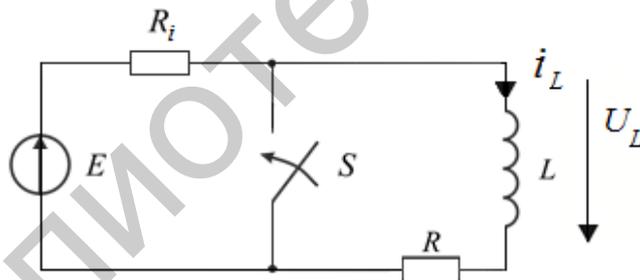


Рис. 8

Решение. После коммутации $U_R(t) + U_L(t) = 0$. Так как $U_L = L \frac{di}{dt}$ и

$U_R(t) = Ri(t)$, то $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$. Решение этого уравнения: $i_{L_{\text{св}}}(t) = A_1 e^{p_1 t}$.

Из характеристического уравнения $Lp_1 + R = 0$ следует

$$p_1 = \frac{-R}{L} = \frac{-1}{\tau_{\text{ц}}} = -250 \text{ с}^{-1},$$

где $\tau_{\Pi} = \frac{L}{R} = 4$ мс.

Постоянную интегрирования A_1 найдём из начальных условий и закона коммутации: $i_L(0-) = i_L(0+)$.

Так как $i_L(0-) = \frac{E}{R_i + R} = 5$ А, то $i_L(0+) = A_1 e^0$.

Тогда $A_1 = \frac{E}{R_i + R} = 5$ А, а $i_{L_{\text{св}}}(t) = I_0 e^{\frac{-t}{\tau_{\Pi}}} = \frac{E}{R_i + R} e^{\frac{-t}{\tau_{\Pi}}} = 5e^{-250t}$ А.

При $t = \tau_{\Pi}$ $i_{L_{\text{св}}}(t) = \frac{E}{R_i + R} = \frac{5}{2,72} = 1,84$ А. График $i_{L_{\text{св}}}(t)$ приведён на рис. 9.

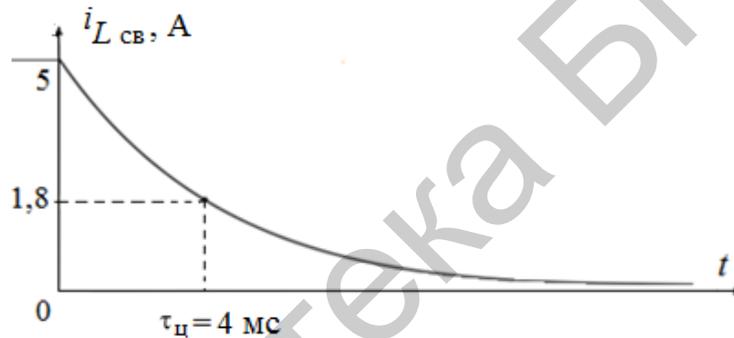


Рис. 9

$$U_{L_{\text{св}}}(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d \left[\frac{E}{R_i + R} e^{\frac{-t}{\tau_{\Pi}}} \right]}{dt} = -U_0 e^{\frac{-t}{\tau_{\Pi}}} = -I_0 R e^{\frac{-t}{\tau_{\Pi}}} = -250 e^{-250t} \text{ В.}$$

При $t = \tau_{\Pi}$ $U_{L_{\text{св}}}(t) = -\frac{U_0}{e} \approx -92$ В. График $U_{L_{\text{св}}}(t)$ приведён на рис. 10.

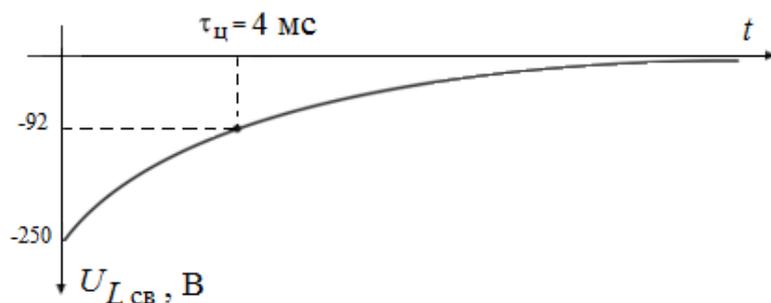


Рис. 10

1.1.2. Переходные процессы в цепях первого порядка

Пример 5. На рис. 11 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 300$ В; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 40$ Ом; $L = 2$ Гн. Найти $i_L(t)$ и $U_L(t)$ временным методом и построить графики.

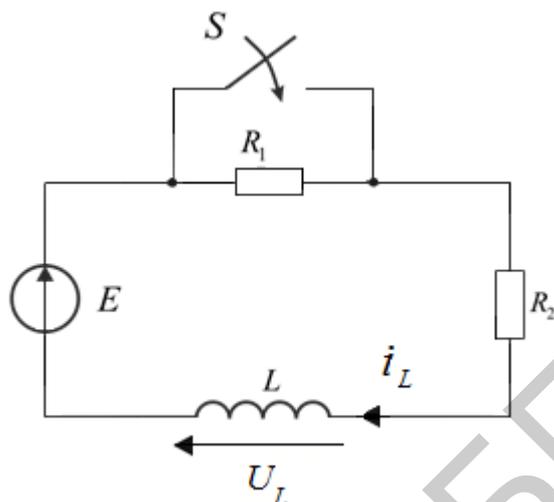


Рис. 11

Решение. Согласно второму закону Кирхгофа в цепи после коммутации

$$U_L + U_{R_2} = E \text{ или } L \frac{di}{dt} + iR_2 = E.$$

Решение будем искать в виде

$$i_L(t) = i_{L\text{св}}(t) + i_{L\text{пр}}(t).$$

Принуждённая составляющая $i_{L\text{пр}}(t)$ в цепи после коммутации в установившемся режиме $i_{L\text{пр}}|_{t \rightarrow \infty} = \frac{E}{R_2} = \frac{300}{40} = 7,5$ А. Свободная составляющая

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t}.$$

Из характеристического уравнения $p_1 L + R_2 = 0$ найдём

$$p_1 = -\frac{R_2}{L} = -\frac{1}{\frac{L}{R_2}} = -\frac{1}{\tau_{\text{ц}}} = -20 \text{ с}^{-1},$$

где $\tau_{\text{ц}} = \frac{L}{R_2} = \frac{2}{40} = 0,05 \text{ с} = 50 \text{ мс}$.

Постоянную интегрирования найдём из начальных условий и закона коммутации:

$$i_L(0-) = i_L(0+), i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2}, i_L(0+) = A_1 e^0 + \frac{E}{R_2},$$

откуда $\frac{E}{R_1 + R_2} = A_1 e^0 + \frac{E}{R_2}, A_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{E}{R_2} = \frac{300}{60} - \frac{300}{40} = -2,5 \text{ A}.$

Окончательно $i_L(t) = -2,5e^{\frac{-t}{\tau_{II}}} + 7,5.$

На графике (рис. 12)

$$i_L(0) = -2,5 + 7,5 = 5 \text{ A}; i_L(\tau_{II}) = -2,5e^{-1} + 7,5 = -2,5 \cdot 0,368 + 7,5 = 6,58 \text{ A};$$

$$i_L(\infty) = -2,5e^{-\infty} + 7,5 = 7,5 \text{ A}.$$

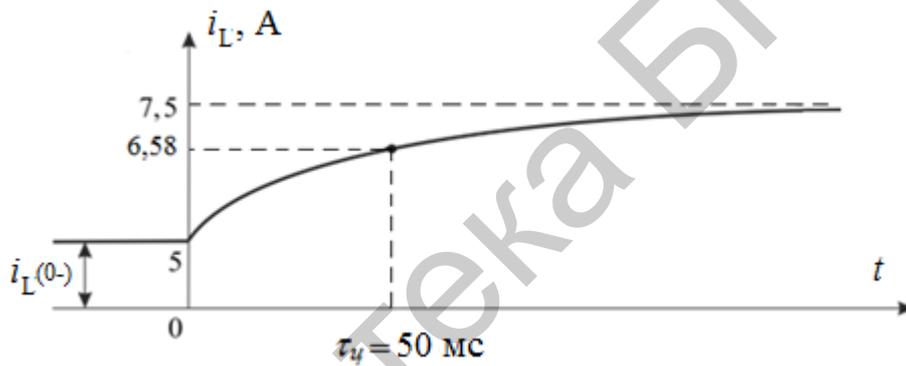


Рис. 12

На графике (рис. 13)

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d \left[A_1 e^{\frac{-t}{\tau_{II}}} + \frac{E}{R_2} \right]}{dt} = -2 \cdot \frac{-2,5 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_{II}}}}{\tau_{II}} = 100e^{-20t} \text{ В}.$$

$$U_L(0) = \frac{-2 \cdot (-2,5)}{50 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ В}; U_L(\tau_{II}) = \frac{-2 \cdot (-2,5) \cdot e^{-1}}{50 \cdot 10^{-3}} \approx 36,79 \text{ В}; U_L(\infty) = 0.$$

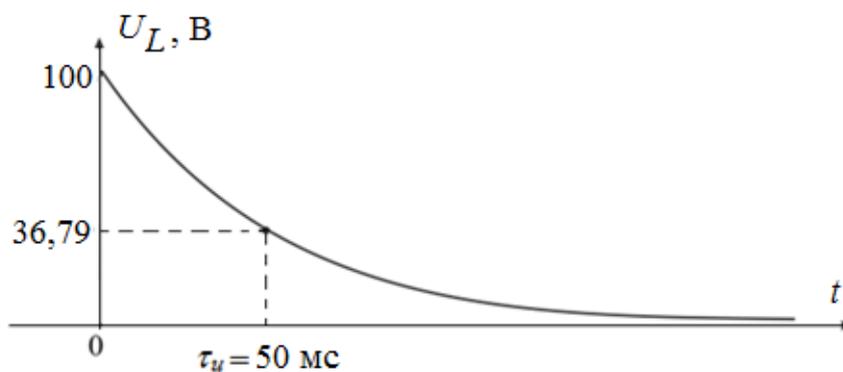


Рис. 13

Пример 6. На рис. 14 происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $E = 100$ В; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $C = 100$ пФ. Найти $U_C(t)$ и $i_L(t)$ временным методом и построить графики.

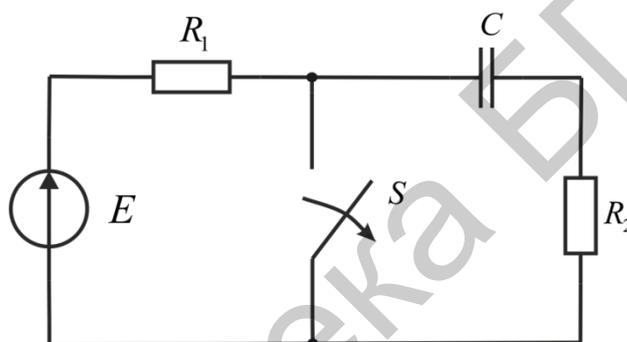


Рис. 14

Решение. В цепи после коммутации по второму закону Кирхгофа

$$U_C + U_{R_1} + U_{R_2} = E$$

или

$$U_C + i(R_1 + R_2) = E,$$

$$(R_1 + R_2)C \frac{dU_C}{dt} + U_C = E.$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$U_C(t) = U_{C_{св}}(t) + U_{C_{пр}}(t).$$

Из схемы (см. рис. 14) следует, что принуждённая составляющая $U_{C_{пр}} = E$. Свободная составляющая имеет вид $U_{C_{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t}$.

Корень p_1 характеристического уравнения $p_1(R_1 + R_2)C + 1 = 0$ равен

$$p_1 = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -9,09 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}, \text{ а } \tau_{ц} = (R_1 + R_2)C = 11 \text{ нс.}$$

Постоянную интегрирования A_1 найдём исходя из начальных условий и закона коммутации: $U_C(0-) = U_C(0+)$.

Если $U_C(0-) = 0$, получаем $U_C(0+) = A_1 e^0 + E$. Тогда $0 = A_1 + E$, откуда

$$A_1 = -E = -100 \text{ В. Окончательно } U_C(t) = -Ee^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} + E = (-100e^{-9,09 \cdot 10^7 t} + 100) \text{ В.}$$

На графике (рис. 15) $U_C(0) = -100 + 100 = 0$;

$$U_C(\tau_{ц}) = -100e^{-1} + 100 \approx 63,2 \text{ В; } U_C(\infty) = 100 \text{ В.}$$

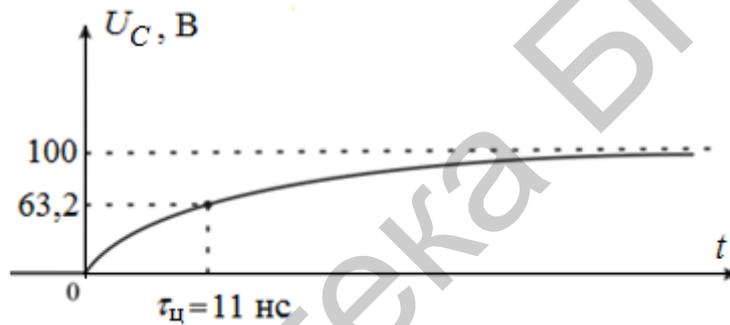


Рис. 15

$$\text{Ток } i_C(t) = C \frac{dU_C}{dt} = C \frac{d[-Ee^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} + E]}{dt} = 0,909e^{-9,09 \cdot 10^7 t} \text{ А.}$$

На графике (рис. 16) $i_C(0) = 0,909 \text{ А; } i_C(\tau_{ц}) = 0,334 \text{ А; } i_C(\infty) = 0$.

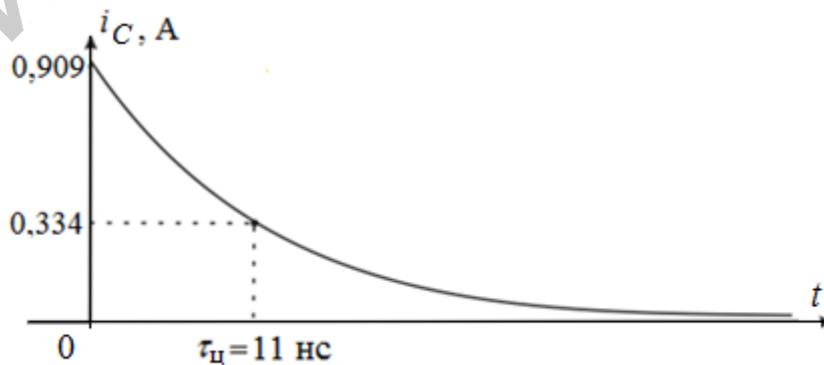


Рис. 16

Пример 7. На рис. 17 определить напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, если $E_1 = 100$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом, $C = 10$ мкФ.

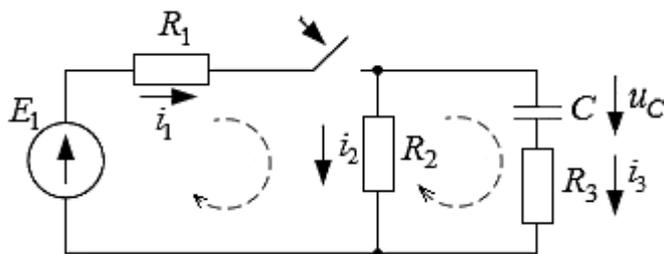


Рис. 17

Решение. Определим независимое начальное условие – напряжение на конденсаторе до коммутации. Ключ разомкнут и конденсатор разряжен, поэтому

$$u_C(0-) = 0.$$

Для составления характеристического уравнения запишем систему интегродифференциальных уравнений по законам Кирхгофа. Направления обхода контуров указаны на схеме рис. 17.

$$i_1 = i_2 + i_3;$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = E_1;$$

$$u_C + R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0,$$

где $i_3 = C \frac{du_C}{dt}$.

Решив систему уравнений относительно одной переменной, например u_C , получим

$$\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2} C \frac{du_C}{dt} + u_C = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Тогда характеристическое уравнение

$$pC \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2} + 1 = 0$$

имеет один корень $p_1 = -\frac{2}{3} \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, поэтому свободная составляющая будет

$$u_{C\text{св}} = Ae^{p_1 t}.$$

Искомое напряжение запишется в виде двух составляющих

$$u_C(t) = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}}.$$

В установившемся режиме

$$u_{C\text{у}} = \frac{E_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100}{20} \cdot 10 = 50 \text{ В}.$$

Искомая величина

$$u_C(t) = 50 + Ae^{p_1 t}.$$

При $t = 0$ $u_C(0) = 50 + A$.

По закону коммутации независимое начальное условие – напряжение на ёмкости $u_C(0) = u_C(0_-) = 0 \text{ В}$.

Следовательно, постоянная интегрирования $A = -50 \text{ В}$. Записываем искомую величину:

$$u_C(t) = 50 - 50e^{-\frac{2}{3} \cdot 10^4 t} = 50(1 - e^{-0,6(6) \cdot 10^4 t}) \text{ В}.$$

Построим её график (рис. 18).

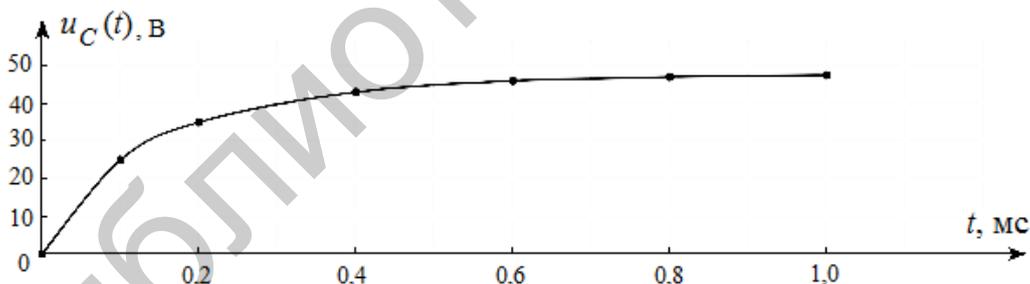


Рис. 18

1.1.3. Переходные процессы в цепях первого порядка без составления дифференциального уравнения

Пример 8. На рис. 19 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 100 \text{ В}$; $C = 200 \text{ мкФ}$; $r_1 = r_2 = 5 \text{ кОм}$. Необходимо определить переходный процесс по напряжению $U_{ab}(t)$ на участке цепи.

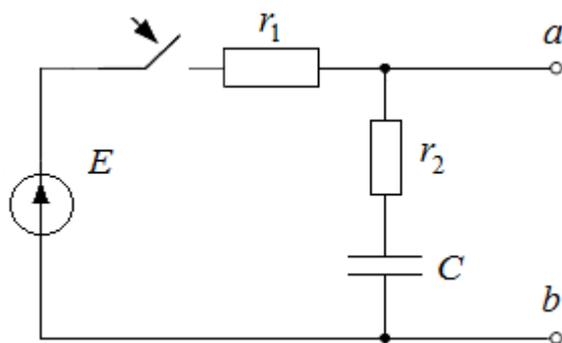


Рис. 19

Решение. Рассчитаем переходный процесс как сумму принуждённой и свободной составляющих: $U_{ab}(t) = U_{ab\text{ пр}}(t) + U_{ab\text{ св}}(t)$.

К независимым начальным условиям относится напряжение на ёмкости в момент коммутации. Если не оговорено значение $U_C(0-)$, то примем его равным 0: $U_C(0-) = U_C(0+) = 0$. По истечении достаточно большого времени после замыкания ключа ёмкость зарядится до напряжения источника ЭДС и зарядный ток станет равным 0. Следовательно, напряжение на сопротивлении r_2 будет равным 0 и принуждённое напряжение на зажимах ab $U_{ab\text{ пр}} = E = 10\text{ В}$.

Так как цепь содержит только один реактивный элемент цепи, то характеристическое уравнение цепи будет иметь один корень и свободная составляющая искомого переходных процессов будет иметь вид

$$U_{ab\text{ св}}(t) = Ae^{pt}.$$

Из характеристического уравнения цепи $r_1 + r_2 + \frac{1}{pC} = 0$ находим значение корня: $p = -\frac{1}{(r_1 + r_2)C} = -\frac{1}{10 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = -0,5$.

Тогда $U_{ab\text{ св}}(t) = Ae^{-0,5t}$. Подставим найденные принуждённую и свободную составляющие в искомое решение: $U_{ab}(t) = 10 + Ae^{-0,5t}$.

Для нахождения постоянной интегрирования A рассмотрим решение при $t = 0+$: $U_{ab}(0+) = 10 + A$. Для вычисления A необходимо знать $U_{ab}(0+)$, т. е. зависимые начальные условия, которые легко определить по эквивалентной схеме цепи, изображённой на рис. 20 для момента $t = 0+$ (см. пример 2).

$$U_{ab}(0+) = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} = 5 \text{ В.}$$

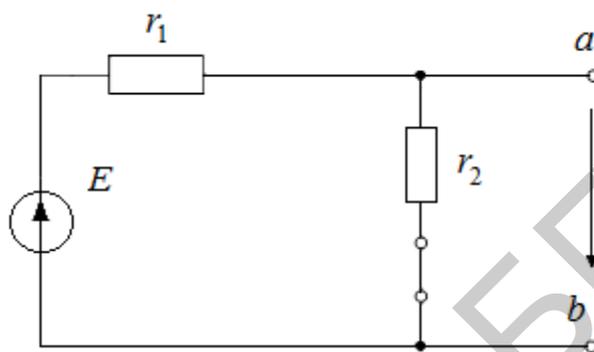


Рис. 20

Подставив найденное значение $U_{ab}(0+)$ определим постоянную интегрирования A : $5 = 10 + A$, тогда $A = -5$.

С учётом найденного значения A закон изменения напряжения на зажимах ab после коммутации запишем в виде

$$U_{ab}(t) = 10 - 5e^{-0,5t}.$$

График приведён на рис. 21.

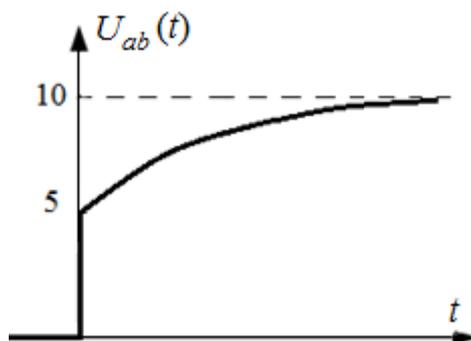


Рис. 21

Длительность переходного процесса:

$$t_{п.п} = 3\tau = 3 \cdot \frac{1}{|p|} = 3 \cdot \frac{1}{0,5} = 6 \text{ с.}$$

Пример 9. На рис. 22 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 200 \text{ В}$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$; $R_3 = 60 \text{ Ом}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$. Найти $U_C(t)$ без составления дифференциального уравнения.

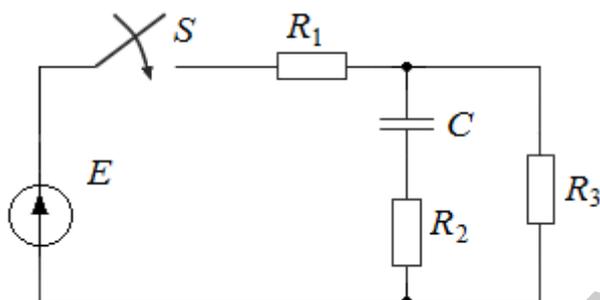


Рис. 22

Решение. После коммутации напряжение на ёмкости в установившемся режиме

$$U_{C\text{пр}} = U_{R_3} = \frac{E}{R_1 + R_3} R_3 = 150 \text{ В.}$$

Свободную составляющую $U_{C\text{св}}(t)$ найдём, используя закон коммутации и начальные условия: $U_C(0-) = U_C(0+)$, где $U_C(0-) = 0$, а

$$U_C(0+) = A_1 e^{p_1 t} + U_{C\text{пр}},$$

откуда $A_1 = -\frac{E}{R_1 + R_3} R_3$.

Тогда

$$U_C(t) = -\frac{E}{R_1 + R_3} R_3 e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} + \frac{E}{R_1 + R_3} R_3 = \frac{E}{R_1 + R_3} R_3 (1 - e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}}) = 150(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}}) \text{ В,}$$

где

$$\tau_{ц} = CR_{\text{экв}} = C(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}) = 55 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

График $U_C(t)$ приведён на рис. 23.

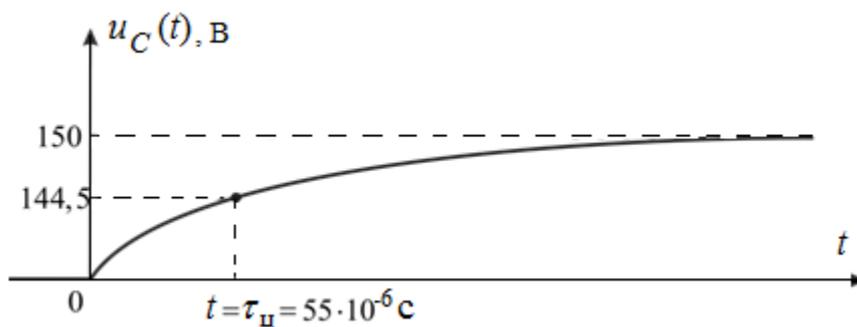


Рис. 23

1.1.4. Переходные процессы при скачкообразном изменении схемы цепи

Пример 10. На рис. 24 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 200$ В; $R_1 = 8$ Ом; $L = 0,6$ Гн; $R_2 = 12$ Ом. Найти ток $i_L(t)$ классическим методом и построить график.

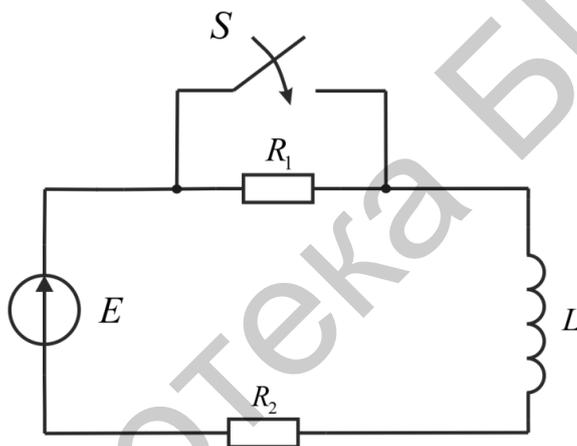


Рис. 24

Решение. После коммутации ток в цепи будет проходить через короткозамкнутую перемычку S , минуя сопротивление R_1 . По второму закону Кирхгофа в цепи, изменившейся скачком, можем записать

$$U_L + U_{R_2} = E \text{ или } L \frac{di}{dt} + R_2 i = 0.$$

Решение данного уравнения ищем в виде $i_L(t) = i_{св}(t) + i_{пр}(t) = A_1 e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} + \frac{E}{R_2}$,

где $\tau_{ц} = \frac{L}{R_2} = \frac{0,6}{12} = 0,05$ с, а $\frac{1}{\tau_{ц}} = \frac{1}{0,05} = 20$ с⁻¹.

Из закона коммутации $U_C(0-) = U_C(0+)$, $\frac{E}{R_1 + R_2} = A_1 e^0 + \frac{E}{R_2}$ или

$10 = A_1 + 16,7$, откуда $A_1 = -6,7$; тогда $i_L(t) = (-6,7 e^{-20t} + 16,7)$ А.

График тока $i_L(t)$ приведён на рис. 25.

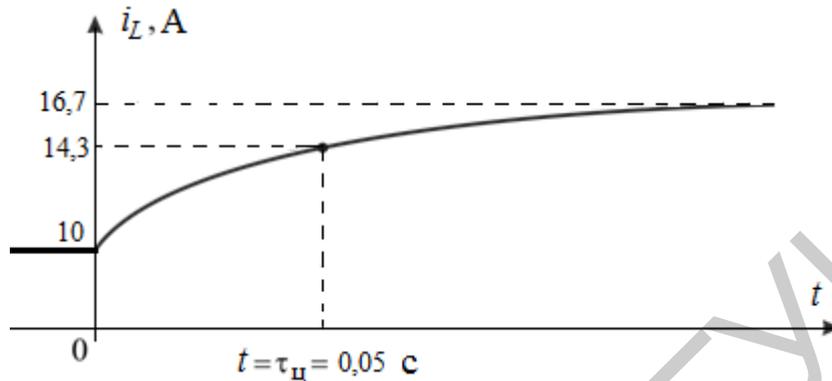


Рис. 25

Пример 11. Определить ток в ключе схемы на рис. 26, если параметры имеют значения: $R_1 = R_4 = 10$ Ом, $R_2 = R_3 = 20$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $E = 50$ В.

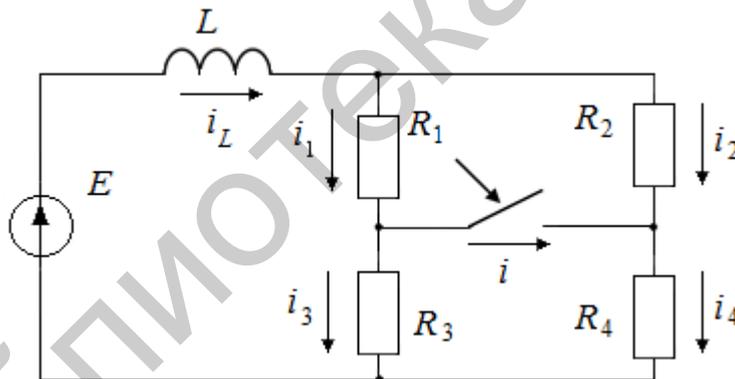


Рис. 26

Решение. Для определения тока i в ключе необходимо определить токи i_1 и i_3 или i_2 и i_4 : $i = i_1 - i_3$ или $i = i_4 - i_2$.

Определяем ток i_L как

$$i_L = i_{L\text{уст}} + i_{L\text{св}};$$

$$i_{L\text{уст}} = \frac{E}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}} = 3,75 \text{ А.}$$

Начальные условия $i_L(-0) = i_L(+0)$ определим из докоммутационной схемы:

$$i_L(-0) = \frac{E}{R_1 + R_3} + \frac{E}{R_2 + R_4} = 3,33 \text{ А.}$$

Корень характеристического уравнения

$$Lp + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 0$$

$$p = -37,5 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, $i_L = 3,75 + Ae^{-37,5t}$, тогда $3,33 = 3,75 + A$, а $A = -0,42$.

Окончательно имеем $i_L(t) = 3,75 - 0,42e^{-37,5t}$.

Ток i_1 определяем из условия

$$i_1 = i_L \frac{R_2}{R_1 + R_2} = (3,75 - 0,42e^{-37,5t}) \frac{20}{30} =$$

$$= 2,5 - 0,28e^{-37,5t};$$

$$i_3 = i_L \frac{R_4}{R_3 + R_4} = (3,75 - 0,42e^{-37,5t}) \frac{10}{30} =$$

$$= 1,25 - 0,14e^{-37,5t}.$$

Следовательно, закон изменения тока в ключе $i(t) = 1,25 - 0,14e^{-37,5t}$.

Пример 12. Определить ток $i_4(t)$ в схеме на рис. 27, если $J = 2 \text{ А}$, $R_1 = R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$.

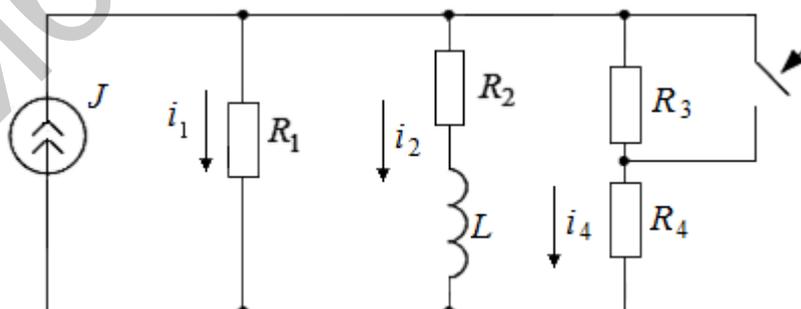


Рис. 27

Решение. Определим независимое начальное условие – ток в индуктивности до коммутации

$$i_2(0-) = J \cdot \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}} \cdot \frac{R_{34}}{R_2 + R_{34}} = 2 \cdot \frac{2}{2+2} \cdot \frac{4}{4+4} = 0,5 \text{ А};$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 2 + 2 = 4 \text{ Ом};$$

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \text{ Ом}.$$

Характеристическое уравнение определим методом входного сопротивления

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_4(R_2 + pL)}{R_2 + R_4 + pL} = 0.$$

Оно имеет один корень

$$p_1 = -\frac{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4}{R_1 L + R_4 L} = -\frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = -5 \text{ с}^{-1}.$$

Свободная составляющая будет

$$i_{4 \text{ св}} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-5t}$$

и искомая величина

$$i_4 = i_{4 \text{ у}} + i_{4 \text{ св}} = i_{4 \text{ у}} + Ae^{-5t} \text{ А}.$$

В установившемся режиме

$$i_{4 \text{ у}} = J \frac{R_{12}}{R_4 + R_{12}} = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{4}{5} \text{ А},$$

где

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Определим зависимое начальное условие – ток $i_4(0+)$ из системы уравнений Кирхгофа после коммутационной схемы для момента времени $t = 0+$:

$$\begin{cases} J(0) - i_1(0) - i_2(0) - i_4(0) = 0; \\ L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 + R_2 i_2(0) - R_1 i_1(0) = 0; \\ R_4 i_4(0) - R_1 i_1(0) = 0. \end{cases}$$

Откуда $i_4(0+) = \frac{3}{4}$. Тогда при $t = 0+ \quad i_4(0) = \frac{4}{5} + A = \frac{3}{4}$.

Получим, что $A = -\frac{1}{20}$. Записываем искомую величину в виде

$$i_4(t) = \frac{4}{5} - \frac{1}{20} e^{-5t} = 0,8 - 0,05 e^{-5t} \text{ А.}$$

Построим её график (рис. 28).

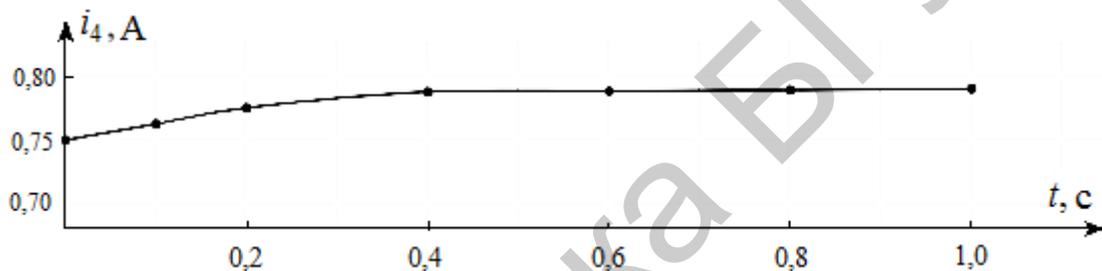


Рис. 28

Пример 13. Определить ток $i_3(t)$ в схеме на рис. 29, если $E_1 = 10 \text{ В}$, $E_2 = 20 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$.

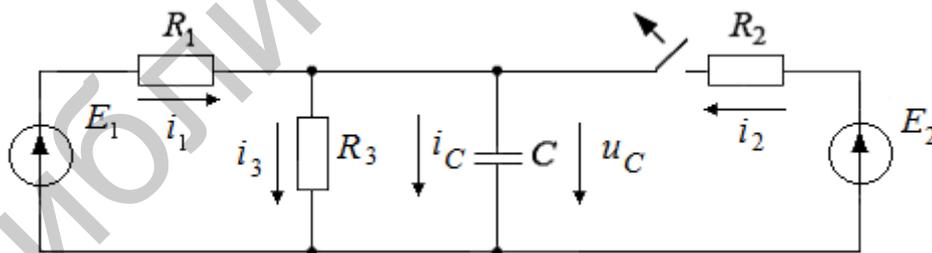


Рис. 29

Решение. Рассчитаем сначала напряжение на ёмкости u_C , после чего найдём ток i_3 из соотношения $i_3 = u_C / R_3$.

Независимое начальное условие – напряжение на ёмкости до коммутации (постоянный ток) найдём методом наложения от действия источников ЭДС E_1 и E_2 :

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{E_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_2} + \frac{E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 100} + \frac{20 \cdot 10}{3 \cdot 100} = 1 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = R_3 \cdot i_3 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ В.}$$

Из характеристического уравнения $Z(p) = 0$

$$R_1 + \frac{R_3(1/pC)}{R_3 + 1/pC} = 0$$

получим один корень

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_3}{CR_1 R_3} = -2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Свободная составляющая $u_{C \text{ св}}$ запишется в виде

$$u_{C \text{ св}} = Ae^{p_1 t}.$$

Напряжение на ёмкости будет

$$u_C = u_{C \text{ у}} + u_{C \text{ св}} = u_{C \text{ у}} + Ae^{p_1 t}.$$

Напряжение на ёмкости после коммутации

$$u_{C \text{ у}} = \frac{E_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{20} = 5 \text{ В.}$$

При $t = 0$ $u_C(0) = I_0 = 5 + A$, откуда $A = 5 \text{ В}$.

Искомые зависимости:

$$u_C = 5 + 5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ В};$$

$$i_3 = \frac{u_C}{R} = 0,5 + 0,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А.}$$

Построим график зависимости $i_3(t)$ (рис. 30):

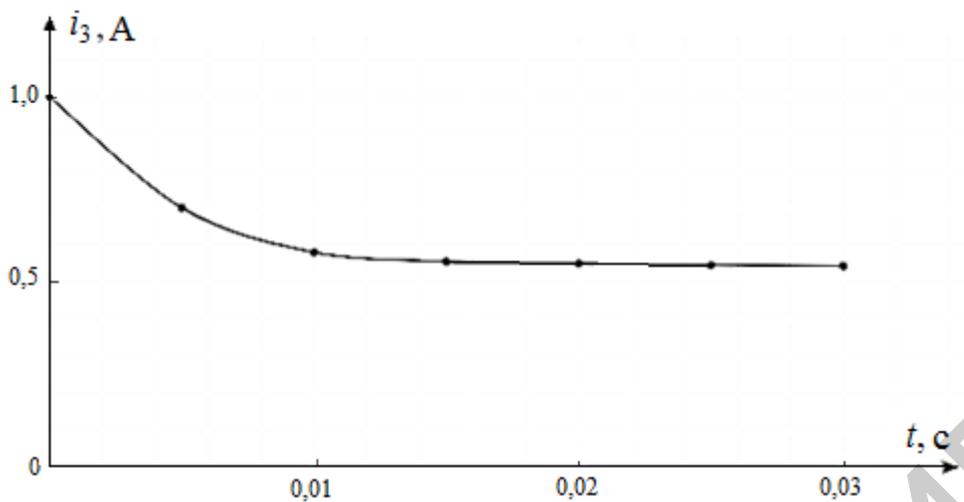


Рис. 30

Пример 14. Определить ток $i_1(t)$ в схеме на рис. 31, если $E_1 = 10$ В, $J_1 = 10^{-3}$ А, $R_1 = R_2 = 10^4$ Ом, $R_3 = 16 \cdot 10^3$ Ом, $C = 10^{-8}$ мФ.

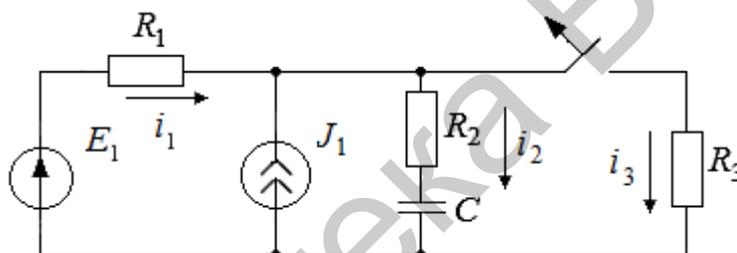


Рис. 31

Решение. Независимое начальное условие – напряжение на ёмкости до коммутации (постоянный ток) найдём методом наложения от действия источника E_1 и J_1 :

$$\text{От источника } E_1: i_3'(0-) = i_1'(0-) = E_1 / (R_1 + R_3) = 10 / 2,6 \cdot 10^4 = 0,3846 \cdot 10^{-3} \text{ А};$$

$$\text{От источника } J_1: i_3''(0-) = J_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 10^{-3} \frac{10^4}{10^4 + 1,6 \cdot 10^4} = 0,3846 \cdot 10^{-3} \text{ А};$$

$$i_3(0-) = i_3'(0-) + i_3''(0-) = 0,7692 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Тогда напряжение

$$u_C(0-) = R_3 i_3(0-) = 0,7692 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 16 = 12,3 \text{ В}.$$

Характеристическое уравнение

$$Z(p) = R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} = 0$$

имеет один корень

$$p_1 = -1 / (CR_1 + CR_2) = -0,5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Свободная составляющая тока $i_{1\text{св}}$ представлена в виде

$$i_{1\text{св}} = Be^{p_1 t}.$$

Ток i_1 будет

$$i_1 = i_{1y} + i_{1\text{св}} = i_{1y} + Be^{p_1 t}.$$

После коммутации

$$i_{1y} = -J_1 = -10^{-3} \text{ А};$$

$$u_{Cy} = E_1 = 10 \text{ В}.$$

При $t = 0+$ $i_1(0) = -10^{-3} + B$. Чтобы найти $i_1(0)$, нарисуем послекоммутационную схему замещения для момента времени $t = 0+$ с учётом независимых начальных условий (рис. 32).

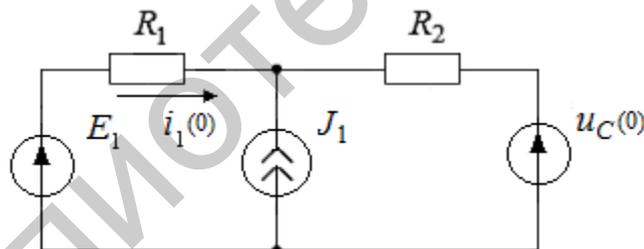


Рис. 32

Методом наложения определим ток $i_1(0)$:

1) от действия источника E_1 : $i_1'(0) = E_1 / (R_1 + R_2) = 10 / 2 \cdot 10^4 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ А};$

2) от действия источника J_1 : $i_1''(0) = J_1 / 2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ А};$

3) от действия источника $u_C(0)$:

$$i_1'''(0) = u_C(0) / (R_1 + R_2) = 12,3 / 2 \cdot 10^4 = 6,15 \cdot 10^{-4} \text{ А}.$$

Тогда ток $i_1(0) = i_1'(0) - i_1''(0) - i_1'''(0) = 0,5 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 10^{-3} - 0,615 \cdot 10^{-3} =$

$$= -0,615 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Постоянная интегрирования $B = 10^{-3} - 0,615 \cdot 10^{-3} = 0,385 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$

Искомая зависимость будет

$$i_1(t) = -10^{-3} + 0,385 \cdot 10^{-3} e^{-0,5 \cdot 10^4 t} = 10^{-3} (-1 + 0,385 e^{-0,5 \cdot 10^4 t}), \text{ А.}$$

Построим график зависимости $i_1(t)$ (рис. 33).

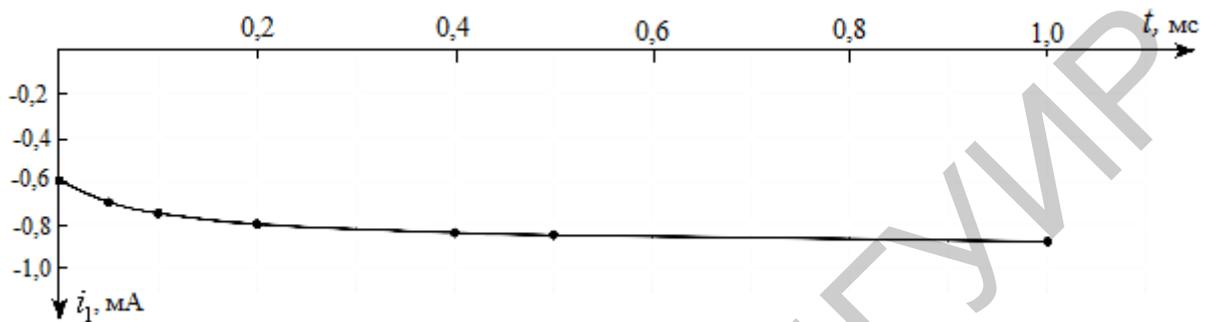


Рис. 33

Пример 15. В схеме на рис. 34 происходит переключение ключа. Параметры схемы: $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$; $r = 1000 \text{ Ом}$; $e = 141 \sin(10^4 t + 45^\circ)$; $E = 100 \text{ В}$. Рассчитать переходные процессы по току в индуктивности $i_L(t)$ и напряжению на ёмкости $U_C(t)$ в цепи.

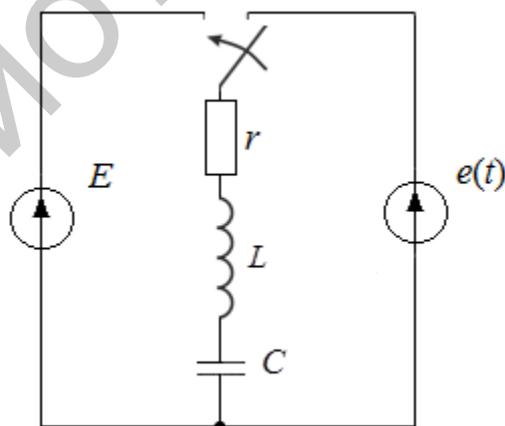


Рис. 34

Решение. Переходный процесс по току в индуктивности определим в виде

$$i_L(t) = i_{L\text{пр}}(t) + i_{L\text{св}}(t).$$

Так как после коммутации последовательная r, L, C -цепь оказывается подключённой к источнику постоянного напряжения $E = 100 \text{ В}$, то принуждённая составляющая тока $i_{L\text{пр}} = 0$, а напряжения $-U_{C\text{пр}} = E = 100 \text{ В}$.

Определим независимые начальные условия $i_L(0-)$ и $U_C(0-)$, рассчитав предварительно комплексные амплитуды тока в индуктивности и напряжении на ёмкости в цепи до коммутации:

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{E}_m}{Z} = \frac{E_m e^{j45^\circ}}{r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{141e^{j45^\circ}}{1000 + j10^4 \cdot 0,1 - j\frac{1}{10^4 \cdot 10^{-7}}} = \frac{141e^{j45^\circ}}{1000} = 0,141e^{j45^\circ};$$

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{I}_{Lm} \left(-j\frac{1}{\omega C} \right) = 0,141e^{j45^\circ} (-j1000) = 141e^{-j45^\circ}.$$

По найденным комплексным амплитудам запишем мгновенные значения тока в индуктивности и напряжения на ёмкости в цепи до коммутации:

$$i_L(t) = 0,141 \sin(10^4 t + 45^\circ),$$

$$U_C(t) = 141 \sin(10^4 t - 45^\circ).$$

Полагая в последних выражениях $t = 0-$ и учитывая законы коммутации, определим независимые начальные условия:

$$i_L(0-) = 0,141 \sin(10^4 \cdot 0 + 45^\circ) = 0,141 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,1 \text{ А},$$

$$U_C(0-) = 141 \sin(10^4 \cdot 0 - 45^\circ) = 141 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -100 \text{ В},$$

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0,1 \text{ А}, \quad U_C(0-) = U_C(0+) = -100 \text{ В}.$$

Характеристическое уравнение цепи будет иметь вид

$$pL + \frac{1}{pC} + r = 0.$$

После подстановки численных значений и приведения к виду с единичным коэффициентом при p^2 получим

$$p^2 + 10^4 p + 10^8 = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим его корни

$$p_{1,2} = -\frac{10^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10^4}{2}\right)^2 - 10^8} = -5 \cdot 10^3 \pm j5\sqrt{3} \cdot 10^3 = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}.$$

Переходный процесс по току в индуктивности определим как сумму принуждённой и свободной составляющих:

$$i_L(t) = i_{L\text{пр}}(t) + i_{L\text{св}}(t).$$

Так как корни характеристического уравнения получились комплексно-сопряженными, то свободную составляющую переходного процесса целесообразно искать в виде

$$i_{\text{св}}(t) = (A \cos(\omega_{\text{св}} t) + B \sin(\omega_{\text{св}} t)) e^{-\delta t} = A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \psi_{\text{св}}).$$

В первом случае постоянные интегрирования – A и B , во втором случае – A_1 и $\psi_{\text{св}}$. Воспользуемся первой формой и, учитывая, что $i_{L\text{пр}} = 0$, получим

$$i_L(t) = (A \cos(\omega_{\text{св}} t) + B \sin(\omega_{\text{св}} t)) e^{-\delta t}.$$

Для нахождения двух постоянных интегрирования необходимы два уравнения. Второе уравнение получим, взяв производную от $i_L(t)$:

$$i'_L(t) = (-A \omega_{\text{св}} \sin(\omega_{\text{св}} t) + B \omega_{\text{св}} \cos(\omega_{\text{св}} t)) e^{-\delta t} - \delta e^{-\delta t} (A \cos(\omega_{\text{св}} t) + B \sin(\omega_{\text{св}} t)).$$

Полагая в обоих уравнениях $t = 0+$, получим

$$\begin{cases} i_L(0+) = A; \\ i'_L(0+) = B \omega_{\text{св}} - \delta A. \end{cases}$$

Необходимые зависимые начальные условия $i'_L(0+)$ получим из уравнения цепи после коммутации, записанного для момента времени $t = 0+$:

$$r i_L(0+) + L \frac{di_L(0+)}{dt} + U_C(0+) = E,$$

и с учётом найденных ранее независимых начальных условий:

$$i'_L(0+) = \frac{di_L(0+)}{dt} = \frac{E - r i_L(0+) - U_C(0+)}{L} = \frac{100 - 100 + 100}{0,1} = 1000 \text{ А/с}.$$

Подставив начальные условия в уравнения для определения постоянной интегрирования

$$\begin{cases} 0,1 = A; \\ 1000 = B1000 \cdot 5\sqrt{3} - 5000A, \end{cases}$$

получим $A=0,1$ и $B=0,1\sqrt{3}$.

С учётом найденных постоянных интегрирования переходный процесс по току в индуктивности можно записать в виде

$$i_L(t) = (0,1\cos 5\sqrt{3} \cdot 1000t + 0,1\sqrt{3}\sin 5\sqrt{3} \cdot 1000t)e^{-5000t}.$$

По найденным A и B перейдём к одной гармонической функции с начальной фазой:

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{0,1^2 + (0,1\sqrt{3})^2} = 0,2;$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{A}{B}\right) = \arctg\left(\frac{0,1}{0,1\sqrt{3}}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ.$$

Окончательно имеем

$$i_{св}(t) = 0,2e^{-5000t} \sin(5\sqrt{3} \cdot 1000t + 30^\circ).$$

Аналогично рассчитаем переходный процесс по напряжению на ёмкости:

$$U_C(t) = U_{Cпр}(t) + U_{Cсв}(t) =$$

$$= 100 + (A\cos 5\sqrt{3} \cdot 1000t + B\sin 5\sqrt{3} \cdot 1000t)e^{-5000t}.$$

Возьмём производную

$$U'_C(t) = (-A5\sqrt{3} \cdot 1000\sin 5\sqrt{3} \cdot 1000t + B5\sqrt{3} \cdot 1000\cos 5\sqrt{3} \cdot 1000t)e^{-5000t} -$$

$$-5000e^{-5000t} (A\cos 5\sqrt{3} \cdot 1000t + B\sin 5\sqrt{3} \cdot 1000t).$$

Полагая $t = 0+$ в последних уравнениях, получим

$$\begin{cases} U_C(0+) = 100 + A; \\ U'_C(0+) = B1000 \cdot 5\sqrt{3} - 5000A. \end{cases}$$

Зависимое начальное условие $U'_C(0+)$ определим по выражению

$$U'_C(0+) = \frac{i_C(0+)}{C} = \frac{i_L(0+)}{C} = \frac{0,1}{10^{-7}} = 10^6 \text{ В/с.}$$

С учётом начальных условий получим систему

$$\begin{cases} -100 = 100 + A; \\ 10^6 = B1000 \cdot 5\sqrt{3} - 5000A. \end{cases}$$

Откуда следует, что $A = -200$ и $B = 0$.

Переходный процесс по напряжению на ёмкости с учётом A и B описывается выражением

$$\begin{aligned} U_C(t) &= 100 - 200e^{-5000t} \cos 5\sqrt{3} \cdot 1000t = \\ &= 100 - 200e^{-5000t} \sin(5\sqrt{3} \cdot 1000t + 90^\circ). \end{aligned}$$

1.2. Переходные процессы в цепях первого порядка с источником синусоидального напряжения

Пример 16. На рис. 35 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}$; $R_3 = 32 \text{ Ом}$; $C = 22,5 \text{ мкФ}$; $e(t) = 25 \sin \omega t \text{ В}$; $f = 100 \text{ Гц}$. Найти $U_C(t)$ классическим методом.

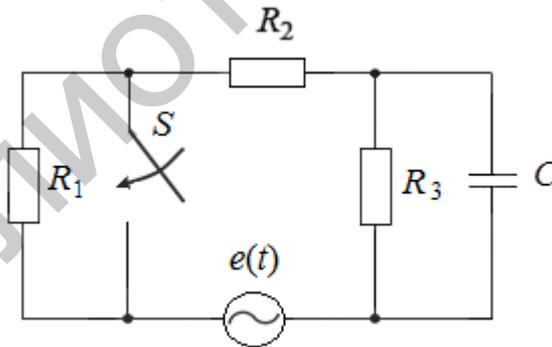


Рис. 35

Решение. Напряжение на ёмкости будем искать в виде

$$U_C(t) = U_{C\text{св}} + U_{C\text{пр}}.$$

Принуждённую составляющую находим из уравнения

$$U_{C\text{пр}} = U_{R_3} = e(t) - i_{R_2} R_2,$$

где

$$i_{R_2} = \frac{e(t)}{R_2 - j \frac{X_C R_3}{R_3 - j X_C}} = 0,37 e^{j10^\circ 15'} \text{ А.}$$

Тогда $\dot{U}_{C_{\text{пр}}} = \dot{U}_{R_3} = 10,8 e^{-j13^\circ 55'}$ В, а свободная составляющая имеет вид

$$U_{C_{\text{св}}} = A_1 e^{p_1 t}, \text{ где } p_1 = -\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3 C} = -2500 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянную интегрирования A_1 находим из начального условия и закона коммутации: $U_C(0-) = U_C(0+)$ или $-6,77 \sin 17^\circ 55' = -10,8 \sin 13^\circ 55' + A_1$, откуда $A_1 = 0,5$. Окончательно $U_C(t) = 10,8 \sin(\omega t - 13^\circ 55') + 0,5 e^{-2500 t}$ В.

Пример 17. Определить ток $i_2(t)$ на рис. 36, если $J(t) = 2 \sin(250t + 90^\circ)$ А, $R = R_1 = R_2 = 100$ Ом, $C = 100$ мкФ.

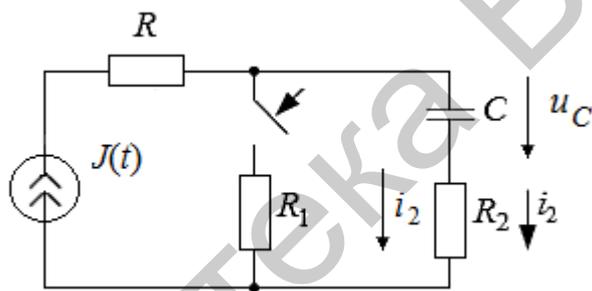


Рис. 36

Решение. Рассчитаем сначала напряжение на ёмкости u_C , после чего найдём ток i_2 из соотношения $i_2 = C du_C / dt$.

Независимое начальное условие – напряжение на ёмкости до коммутации $u_C(0-)$:

$$\dot{U}_{Cm-} = \dot{J}_m(-jX_C) = 2e^{j90^\circ} \left(-j \frac{1}{250 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right) = 2e^{j90^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ} = 80 \text{ В,}$$

т. е. $u_C(t) = 80 \sin 250t$ и, в частности, $u_C(0-) = 0$ В.

Методом входного сопротивления составим характеристическое уравнение

$$Z(p) = R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} = 0,$$

которое имеет один корень $p_1 = -1 / (CR_1 + CR_2)$. Тогда свободную составляющую $u_{C_{св}}$ можно записать в виде $u_{C_{св}} = Ae^{-p_1 t} = Ae^{-50t}$.

Напряжение на ёмкости

$$u_C(t) = u_{C_y}(t) + u_{C_{св}}(t) = u_{C_y}(t) + Ae^{-p_1 t}.$$

Установившееся значение напряжения на конденсаторе

$$\dot{U}_{C_{m y}}(t) = j_m \frac{R_1(-jX_{C_1})}{R_1 + R_2 - jX_{C_1}} = 2e^{j90^\circ} \frac{100 \cdot 40e^{-j90^\circ}}{200 - j40} = 39,2e^{j11,3^\circ} \text{ В},$$

т. е. $U_{C_{m y}} = 39,2 \sin(250t + 11,3^\circ)$ В. Для $t = 0$ $U_{C_{m y}}(0) = 7,68$ В.

При $t = 0$ $u_C(0) = 39,2 \sin 11,3^\circ + A$.

Начальное напряжение на ёмкости находим из закона коммутации:

$$u_C(0-) = u_C(0) = 0.$$

Следовательно, постоянная интегрирования $A = -7,68$ В. Записываем искомые зависимости:

$$u_C(t) = 39,2 \sin(250t + 11,3^\circ) - 7,68e^{-50t};$$

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt} = 100 \cdot 10^{-4} \left[39,2 \cdot 250 \cdot \cos(250t + 11,3^\circ) - 7,68 \cdot (-50)e^{-50t} \right] =$$

$$= 0,98 \sin(250t + 101,3^\circ) + 0,0384e^{50t} \text{ А}.$$

Построим график переходного процесса $i_2(t)$ (рис. 37).

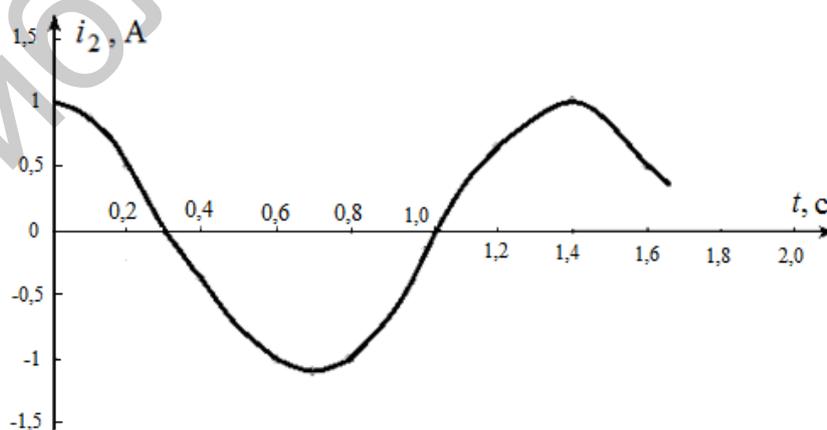


Рис. 37

Пример 18. Определить ток $i(t)$ в схеме на рис. 38, если $J=1$ А, $e(t)=100\sin(2500t-45^\circ)$ В, $R_1=R_2=100$ Ом, $R_3=50$ Ом, $L=0,01$ Гн.

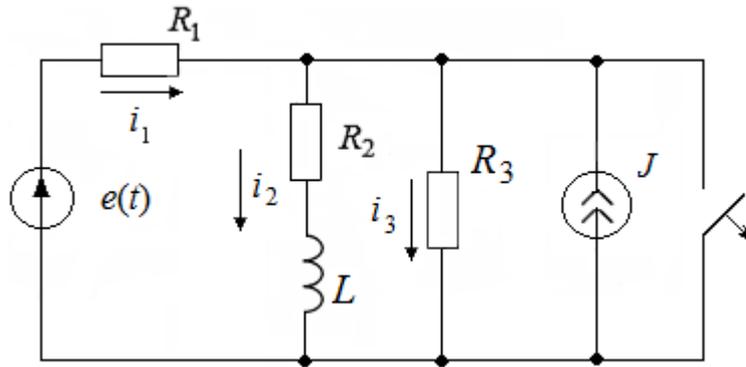


Рис. 38

Решение. Определим независимое начальное условие. Ток через индуктивность до коммутации $i_2(0_-) = 0$, так как индуктивность была замкнута.

Характеристическое уравнение

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_3(R_2 + pL)}{R_2 + R_3 + pL} = 0$$

имеет один корень

$$p_1 = -\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{L(R_1 + R_3)} = -13333,3(3) \text{ с}^{-1}.$$

Свободная составляющая тока имеет вид

$$i_{\text{св}} = Be^{p_1t}.$$

Ток i будет представлен в виде

$$i = i_y + i_{\text{св}} = i_y + Be^{p_1t}.$$

Установившийся ток i_y после коммутации найдём методом наложения от действия двух источников $e(t)$ и J .

От источника $e(t)$:

$$\begin{aligned} Z(j\omega)_+ &= R_1 + \frac{R_3(R_2 + j\omega L)}{R_2 + R_3 + j\omega L} = 100 + \frac{50(100 + j25)}{150 + j25} = \\ &= 100 + \frac{5153,882e^{j14,036^\circ}}{152,07e^{j9,45^\circ}} = 100 + 33,89e^{j4,58^\circ} = 133,782 + j2,706 = \end{aligned}$$

$$= 133,81e^{j1,16^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\dot{I}'_{m y} = \frac{\dot{E}_1}{Z(j\omega)_+} = \frac{100e^{-j45^\circ}}{133,81e^{j1,16^\circ}} = 0,747e^{-j46,16^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_{2m y} = \dot{I}'_{m y} \frac{R_3}{R_2 + R_3 + j\omega L} = 0,747e^{-j46,16^\circ} \frac{50}{150 + j25} = 0,245e^{-j55,62^\circ} \text{ А.}$$

В мгновенной форме

$$i'_y(t) = 0,747 \sin(2500t - 46,16^\circ) \text{ А.}$$

$$\text{От источника } J: I''_{y+}(t) = J \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \frac{33,3(3)}{133,3(3)} = 0,25 \text{ А,}$$

где

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 50}{150} = 33,3(3) \text{ Ом;}$$

$$I_{2+} = J \frac{R_{23}}{R_2 + R_{13}} = 0,25 \text{ А;}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{100 \cdot 50}{150} = 33,3(3) \text{ Ом.}$$

$$\text{Тогда } i_y = i'_y - i''_y = 0,747 \sin(2500t - 46,16^\circ) - 0,25 \text{ А,}$$

$$\text{а } i = i_y + i_{св} = 0,747 \sin(2500t - 46,16^\circ) - 0,25 + Be^{p_1 t} \text{ А.}$$

При $t = 0+$ получим

$$i(0) = 0,747 \sin(-46,16^\circ) - 0,25 + B.$$

Чтобы найти $i(0)$, составим послекоммутационную схему замещения (рис.39) для момента времени $t = 0+$ с учётом независимых начальных условий

$$i(0) = \frac{e(0) - JR_3}{R_1 + R_3} = \frac{100 \sin(-45^\circ) - 50}{150} = \frac{-120,7107}{150} = -0,8047 \text{ А.}$$

Тогда

$$B = -0,80474 + 0,5388 + 0,25 = -0,01594 \text{ А.}$$

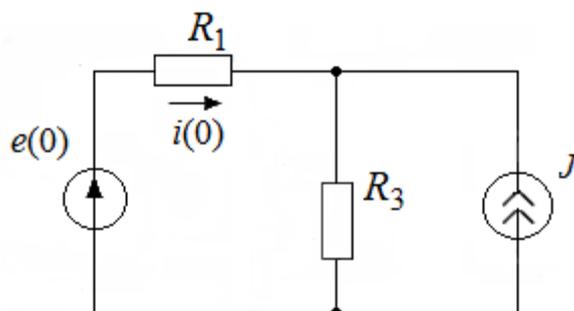


Рис. 39

Окончательно имеем

$$i(t) = 0,747 \sin(2500t - 46,16^\circ) - 0,25 - 0,01594e^{-13333,3(3)t} \text{ А.}$$

Построим график зависимости $i(t)$ (рис. 40).

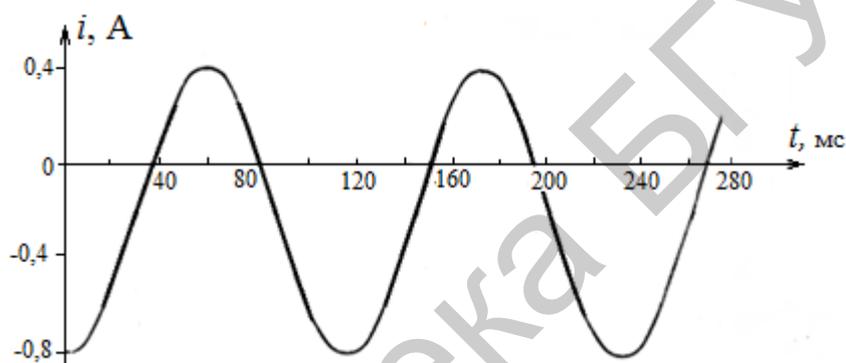


Рис. 40

1.3. Переходные процессы в цепях второго порядка с источником постоянного напряжения

При подключении rLC -цепи к источнику постоянного напряжения (рис. 41) дифференциальное уравнение переходного процесса следующее:

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 E, \quad (5)$$

где

$$2\delta = \frac{r}{L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

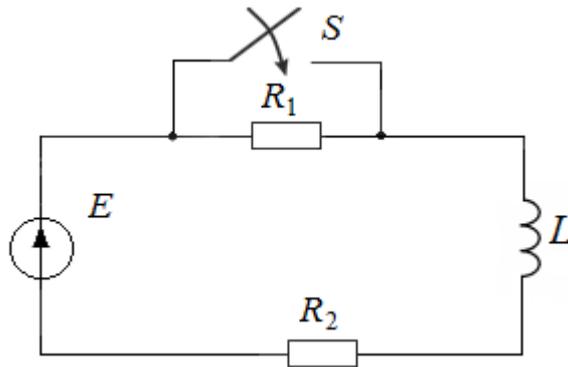


Рис. 41

Решение этого уравнения ищем в виде

$$U_C = U_{C\text{св}} + U_{C\text{пр}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + E. \quad (6)$$

Так как при $t=0$ и $U_C(0)=0$, то $A_1 + A_2 = -E$. Для определения постоянных интегрирования при $t=0$ берём производную от выражения $A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = E$: $p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -E; \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

найдем $A_1 = -\frac{p_2 E}{p_2 - p_1}$; $A_2 = \frac{p_1 E}{p_2 - p_1}$.

Корни характеристического уравнения

$$p^2 + 2\delta + \omega_0^2 = 0: \quad (8)$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Тогда окончательно

$$U_C(t) = E \left\{ 1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right\} \text{ В}; \quad (9)$$

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \text{ А};$$

(10)

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \text{ В}. \quad (11)$$

Переходный процесс зависит от вида корней p_1 и p_2 характеристического уравнения. Возможны три случая.

В первом случае корни вещественные, отрицательные и разные и при $\delta > \omega_0$ ($r > 2\rho$) переходный процесс носит аperiodический характер. Во втором случае при $\delta = \omega_0$ ($r = 2\rho$) корни вещественные, отрицательные и равные и переходный процесс – критический аperiodический. В третьем случае при $\delta < \omega_0$ ($r < 2\rho$) корни комплексно-сопряжённые и характер переходного процесса в схеме после коммутации будет затухающим колебательным:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_{\text{св}} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{св}} t \text{ A}; \quad (12)$$

$$U_C(t) = E - E \frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t - \theta) \text{ В}; \quad (13)$$

$$U_L(t) = E \frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t - \theta) \text{ В}, \quad (14)$$

где

$$\theta = \arctg\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right), \quad \omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta = \frac{r}{2L}.$$

Пример 19. На рис. 42 происходит отключение источника. Параметры схемы: $E = 80 \text{ В}$; $L = 1 \text{ мГ}$; $C = 10^3 \text{ пФ}$; $R_1 = R_2 = 400 \text{ Ом}$. Найти $U_C(t)$ классическим методом.

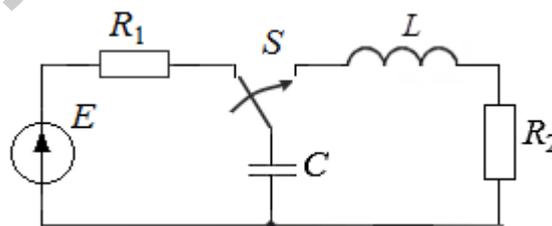


Рис. 42

Решение. Согласно второму закону Кирхгофа после коммутации в цепи происходит только свободный процесс $U_C + U_L + U_{R_2} = 0$, а дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = 0,$$

решение которого будем искать в виде $U_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

Так как $\delta = \frac{R_2}{2L} = \frac{400}{2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 10^{-9}}} = 10^6 \frac{1}{\text{с}}$, от-

куда $\delta < \omega_0$, то корни характеристического уравнения $p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$ будут комплексно-сопряжёнными: $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}$, где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 9,798 \cdot 10^5$.

Тогда напряжение

$$U_C(t) = E \frac{\omega_0}{\omega_{\text{св}}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \alpha) = 81,65 e^{-2 \cdot 10^5 t} \sin(9,8 \cdot 10^3 t + 78,5^\circ) \text{ В},$$

где $\text{tg } \alpha = \frac{\omega_{\text{св}}}{\delta}$; $\alpha = \text{arctg } \frac{\omega_{\text{св}}}{\delta} = 78,5^\circ$.

Пример 20. На рис. 43 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 30 \text{ В}$; $R = 200 \text{ Ом}$; $L = 12 \text{ мГн}$; $C = 5000 \text{ пФ}$. Найти классическим методом выражение для $U_C(t)$ и U_{Cm} .

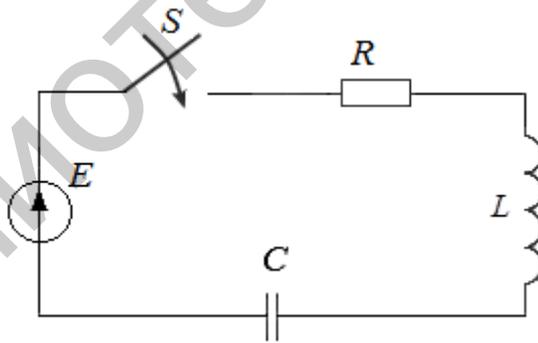


Рис. 43

Решение. Вычисляем ω_0 и δ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{12 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}} = 1,29 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}; \quad \delta = \frac{R}{2L} = \frac{200}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 8,34 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Так как δ меньше ω_0 более чем на один порядок, то можно принять $\omega_{\text{св}} \approx \omega_0$, тогда

$$U_C(t) = E(1 - e^{-\delta t} \cos \omega_0 t) = 30(1 - e^{-8,34 \cdot 10^3 t} \cos 1,29 \cdot 10^5 t).$$

Максимальное значение U_{Cm} наступает при

$$t = \frac{T_0}{2} \quad (\cos \omega_0 \frac{T_0}{2} = \cos \pi = -1),$$

тогда

$$U_{Cm} = E(1 + e^{-\delta \frac{T_0}{2}}) = 30(1 + e^{-0,203}) = 30(1 + 0,816) = 30 \cdot 1,816 \approx 54,5 \text{ В.}$$

1.4. Переходные процессы в цепях второго порядка с источником синусоидального напряжения

При подключении к цепи второго порядка (рис. 44) источника синусоидального напряжения $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ дифференциальное уравнение переходного режима будет следующим:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 E_m \sin(\omega t + \psi_e). \quad (15)$$

При подключении контура высокой добротности $\delta \ll \omega_0$ или $R \ll 2\rho$.

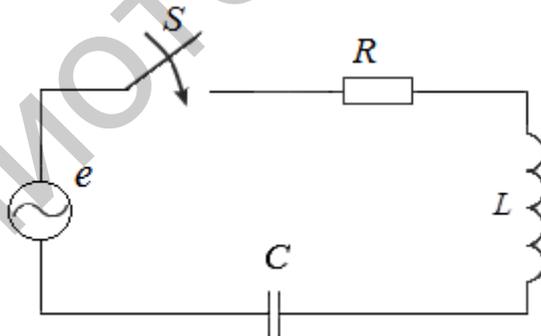


Рис. 44

Принуждённую составляющую ищем в виде $U_{Cпр}(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_C)$,

$$\text{где } U_{Cm} = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \psi_C = \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (16)$$

Свободную составляющую ищем в виде

$$U_{C_{св}}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{св}t + \theta). \quad (17)$$

При $\omega = \omega_{св} \approx \omega_0$, $\delta \ll \omega_0$, $A = -U_{Cm}$ и $\theta = \psi_C$

$$U_C(t) = U_{Cm}(1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_C), \quad (18)$$

$$i(t) = I_m(1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t + \psi_C), \quad (19)$$

где $I_m = \omega C U_{Cm}$.

График $U_C(t)$ в этом случае является изохронизмом (рис. 45).

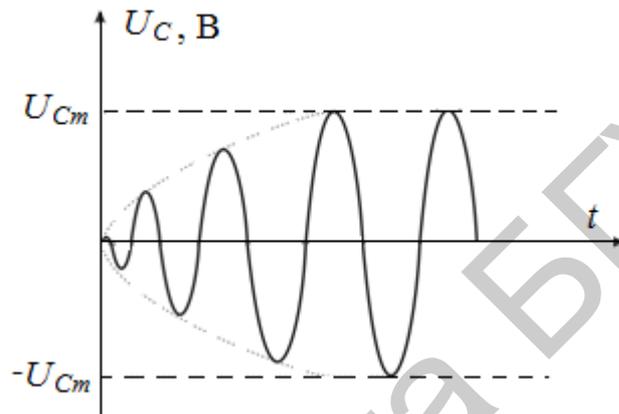


Рис. 45

Если $\omega \neq \omega_{св}$, то в цепи возникают биения (рис. 46).

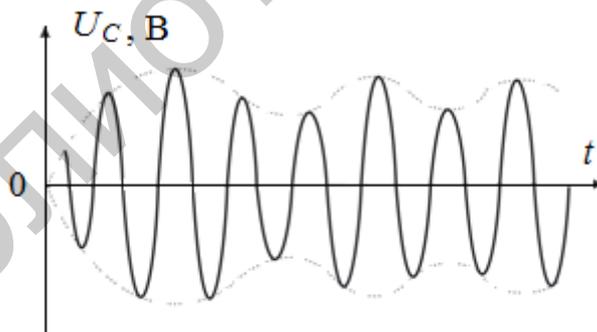


Рис. 46

Пример 21. В цепи на рис. 47 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $e(t) = 127 \sin(314t + 40^\circ)$ В; $R_1 = R_3 = 50$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $C = 150$ мкФ; $L = 2$ Гн. Найти $U_C(t)$ временным методом.

Решение. Решение ищем в виде $U_C(t) = U_{C_{св}}(t) + U_{C_{пр}}(t)$. Принуждённое напряжение

$$U_{C_{\text{пр}}}(t) = \dot{i}_{R_3} \left(-j \frac{1}{\omega C} \right); \quad \dot{i}_{R_3} = \frac{\dot{U}_{a6}}{Z_3} = \frac{\dot{U}_{a6}}{50 - j21,3}; \quad \dot{U}_{a6} = \dot{i}_{R_1} \cdot Z_{a6};$$

$$\dot{i}_{R_1} = \frac{e(t)}{Z_{\text{вх}}} = \frac{e(t)}{R_1 + Z_{a6}}; \quad Z_{a6} = \frac{(R_2 + j\omega L_2) \left(R_3 - j \frac{1}{\omega C} \right)}{R_2 + R_3 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C}} = 56,3 e^{-j18^{\circ}35'} \text{ Ом.}$$

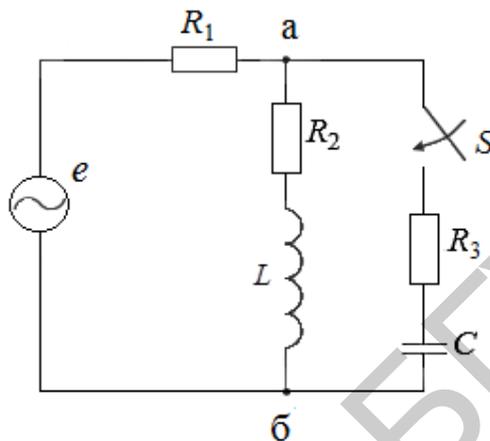


Рис. 47

Тогда $\dot{i}_{R_1} = \frac{127 e^{j40^{\circ}}}{R_1 + Z_{a6}} = 1,21 e^{j49^{\circ}50'}$ А, а $U_{C_{\text{пр}}}(t) = 26,7 \sin(\omega t - 35^{\circ}40')$ В.

Из закона коммутации свободное напряжение на конденсаторе равно $U_{C_{\text{св}}}(0+) = U_C(0-) - U_{C_{\text{пр}}}(0+) = 0 - 26,7 \sin(-35^{\circ}40') = 0 - (-15,57) = 15,57$ В.

Окончательно имеем

$$U_C(t) = U_{C_{\text{св}}}(t) + U_{C_{\text{пр}}}(t) = 15,57 + 26,7 \sin(\omega t - 35^{\circ}40') \text{ В.}$$

1.5. Временные характеристики электрических цепей

1.5.1. Переходная и импульсная характеристики

Если на входе линейной электрической цепи (рис. 48) при нулевых начальных условиях – единичная функция воздействия $f(t) = 1(t)$, то выходная величина – переходная характеристика, т. е. $x(t) = h(t)$.

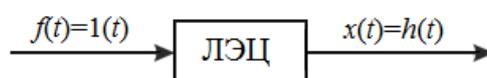


Рис. 48

Физический смысл $h(t)$.

1. Если на входе цепи напряжение $U_{\text{вх}}(t)$ и на выходе также измеряется напряжение $U_{\text{вых}}(t)$, то переходная характеристика $h(t)$ – это коэффициент передачи цепи по напряжению $K_U(t) = \frac{U_{\text{вых}}(t)}{U_{\text{вх}}(t)}$, если же на выходе цепи измеряется ток $i_{\text{вых}}(t)$, то в этом случае переходная характеристика есть проводимость $Y(t) = \frac{i_{\text{вых}}(t)}{U_{\text{вх}}(t)}$.

2. Если же на входе цепи ток $i_{\text{вх}}(t)$ и на выходе также измеряется ток $i_{\text{вых}}(t)$, то переходная характеристика $h(t)$ – это коэффициент передачи цепи по току $K_i(t) = \frac{i_{\text{вых}}(t)}{i_{\text{вх}}(t)}$, если же на выходе измеряется напряжение $U_{\text{вых}}(t)$, то в этом случае переходная характеристика $h(t)$ есть сопротивление $Z(t) = \frac{U_{\text{вых}}(t)}{i_{\text{вх}}(t)}$.

3. Если же на входе цепи (рис. 49) дельта-функция, т. е. $f(t) = \delta(t)$, то на выходе – импульсная характеристика: $x(t) = k(t)$.

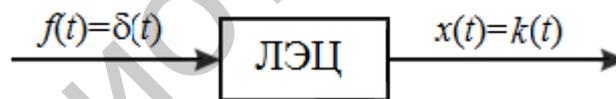


Рис. 49

Так как δ -функция является первой производной ($\delta(t) = 1'(t)$) от единичной функции, то между $h(t)$ и $k(t)$ существует следующая связь:

$$k(t) = (h(t) \cdot 1(t))' = h'(t) \cdot 1(t) + h(t) \cdot \delta(t). \quad (20)$$

При нулевых начальных условиях $k(t) = h'(t) \cdot 1(t) + h(0) \cdot \delta(t)$.

Для схемы на рис. 50

$$U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ш}}}}); \quad i(t) = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{ш}}}}. \quad (21)$$

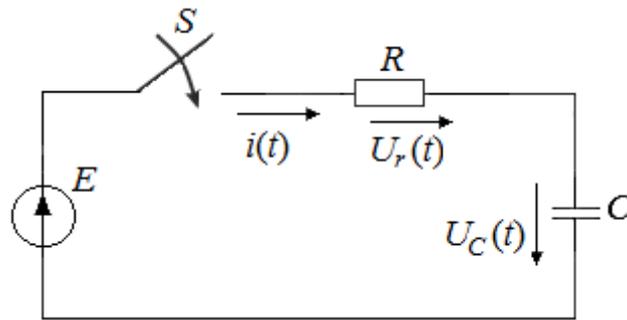


Рис. 50

Тогда переходные характеристики соответственно по напряжению на ёмкости, на сопротивлении и по току в цепи:

$$h_{U_C}(t) = \frac{U_C(t)}{E} \cdot 1(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right) \cdot 1(t); \quad (22)$$

$$h_i(t) = \frac{i(t)}{E} \cdot 1(t) = \frac{1}{r} e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \cdot 1(t); \quad (23)$$

$$h_{U_r}(t) = h_i(t) \cdot r = e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \cdot 1(t), \quad (24)$$

а импульсные характеристики равны:

$$K_{U_C}(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right)' \cdot 1(t) + \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right) \cdot \delta(t); \quad (25)$$

$$K_i(t) = \left(\frac{1}{r} e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right)' \cdot 1(t) + \frac{1}{r} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right) \cdot \delta(t); \quad (26)$$

$$K_{U_r}(t) = K_i(t) \cdot r = -\frac{1}{\tau_{\text{ц}}} e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} + \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right) \cdot \delta(t). \quad (27)$$

Пример 22. На рис. 51 $R_1 = R_2 = 10$ кОм; $R_3 = 5$ кОм; $C = 5000$ пФ; $U_{\text{вх}} = 1$ В. Найти $h(t)$ и $k(t)$ по выходному напряжению $U_{\text{вых}}(t)$ цепи временным методом.

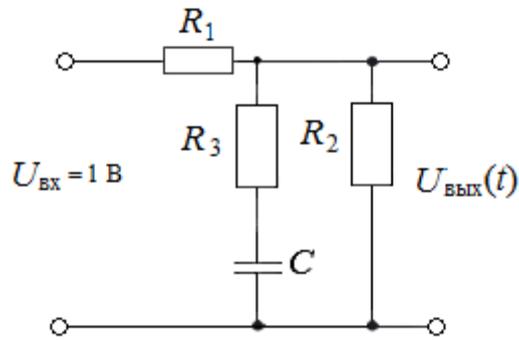


Рис. 51

Решение. При подаче на вход цепи единичной функции включения ($U_{\text{вх}} = 1 \text{ В}$) выходное напряжение $U_{\text{вых}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + U_{\text{пр}}$, где

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_{\text{ц}}}, \quad \tau_{\text{ц}} = C \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с} = 50 \text{ мкс.}$$

Принуждённая составляющая $U_{\text{пр}} = U_{\text{вх}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ В}$. Постоянная интегрирования $A_1 = U_{\text{вых}}(0) - U_{\text{пр}}$, т. к.

$$U_{\text{вых}}(0) = \frac{U_{\text{вх}}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 0,25 \text{ В},$$

то $A_1 = 0,25 - 0,5 = -0,25 \text{ В}$. Тогда $U_{\text{вых}}(t) = -0,25 e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} + 0,5 = 0,25 \left(2 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right) \text{ В}$, а

$$h(t) = \frac{U_{\text{вых}}(t)}{U_{\text{вх}}} = 0,25 \left(2 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right).$$

Импульсная характеристика

$$k(t) = h'(t) + h(0) \cdot \delta(t) = 0,25 \cdot \frac{1}{\tau_{\text{ц}}} \cdot e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} + 0,25 \delta(t) = 0,25 \left[\delta(t) + 2 \cdot 10^4 e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \right] \text{ с}^{-1}.$$

Графики $h(t)$ и $k(t)$ представлены соответственно на рис. 52 и 53.

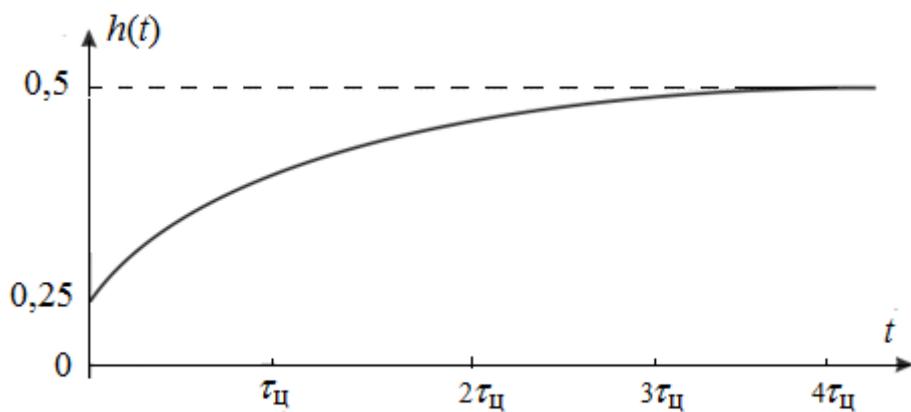


Рис. 52

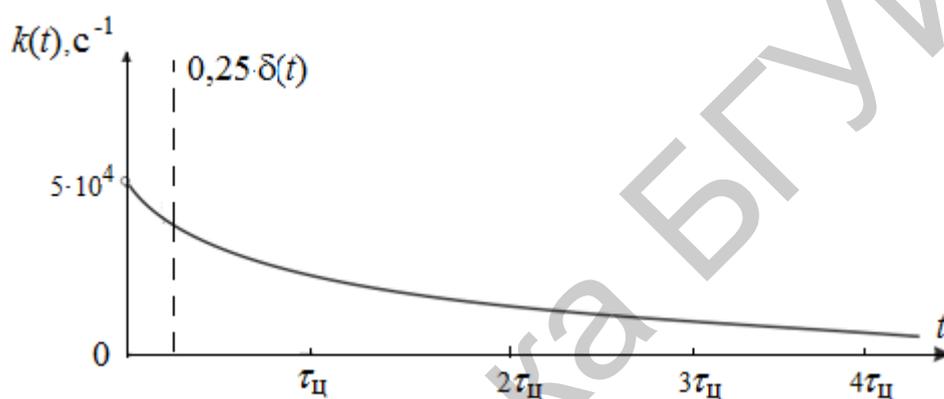


Рис. 53

Пример 23. На рис. 54 $R_1 = R_2 = R_3 = R$. На вход цепи действует единичная функция включения $U_{\text{вх}}(t)$. Найти $h(t)$ и $k(t)$ временным методом.

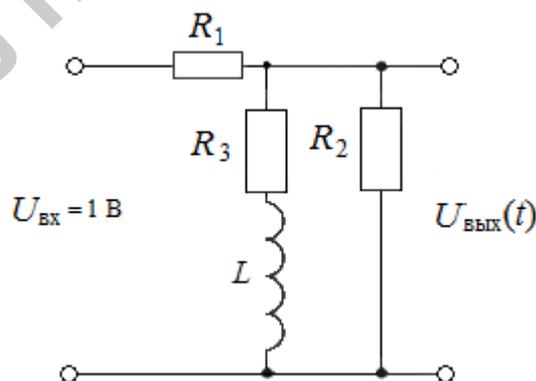


Рис. 54

Решение. Значение переходной характеристики в момент подключения $U_{\text{вх}}(t)$

$$h(0+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

т. к. $x_L(\infty) = 0$, поэтому $h(\infty) = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$.

Так как $R_1 = R_2 = R_3$, то $h(0+) = 0,5$; $h(\infty) \cong 0,33$;

$$\tau_{\text{п}} = \frac{L}{R_3} = \frac{L}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{2L}{3R}.$$

Переходная характеристика $h(t) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{п}}}} \right) \approx 0,33 \left(1 + 0,5 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{п}}}} \right)$.

Импульсная характеристика

$$k(t) = h'(t) \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot h(0) = -\frac{1}{6\tau_{\text{п}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{п}}}} + 0,5\delta(t).$$

Графики $h(t)$ и $k(t)$ приведены на рис. 55 и 56 соответственно.

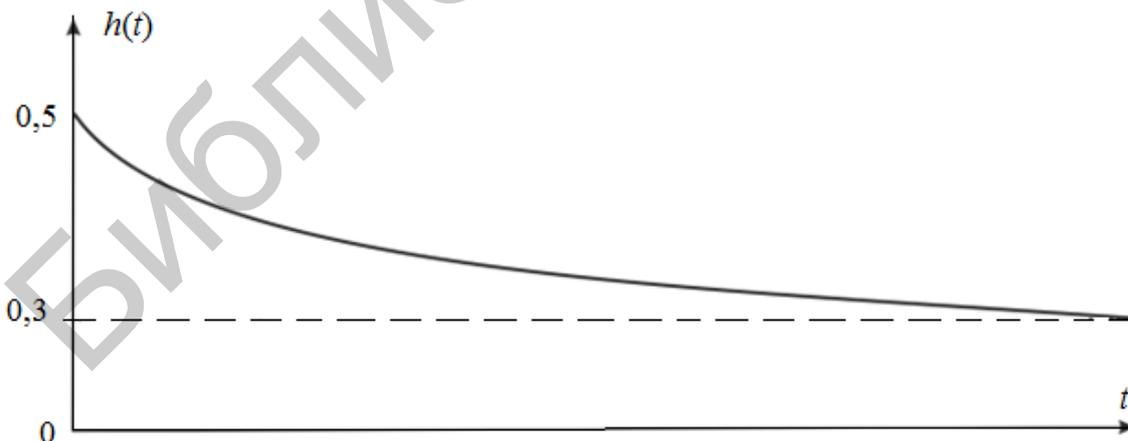


Рис. 55

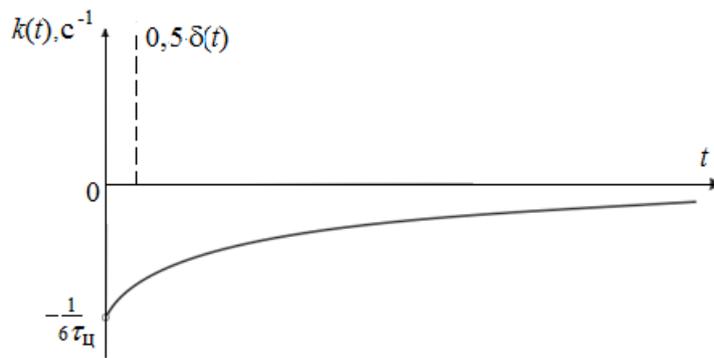


Рис. 56

1.5.2. Интеграл Дюамеля

При определении реакции цепи на воздействие произвольной формы используется принцип наложения: входное произвольное воздействие цепи представляют в виде суммы типовых воздействий (в частности, в виде единичных функций включения или дельта-функций), затем определяют отклик цепи на типовое воздействие и далее, суммируя отклики на типовые воздействия, получают отклик цепи на входное воздействие.

Например, отклик цепи на ступенчатое воздействие записывается в виде

$$x(t) \approx f(0) \cdot h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta f_k \cdot h(t - \tau_k). \quad (28)$$

Перейдя от суммы к интегралу, получим первую форму интеграла наложения или интеграла Дюамеля:

$$x(t) = f(0) \cdot h(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau. \quad (29)$$

Все шесть форм интеграла Дюамеля приведены в прил. 1.

Если входное произвольное воздействие цепи представить в виде суммы такого типового воздействия, как дельта-функция или суммы коротких импульсов, то отклик будет равен интегралу от свёртки входного сигнала $f(t)$ и импульсной характеристики $k(t)$ цепи:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)k(t-\tau)d\tau \text{ или } x(t) = \int_0^t f(t-\tau)k(\tau)d\tau. \quad (30)$$

Пример 24. На рис. 57 $R_1 = R_2 = 4 \text{ кОм}$; $C = 1 \text{ мкФ}$; входное воздействие имеет вид, как показано на рис. 58, где $E = 100 \text{ мВ}$; $t_0 = 4 \text{ мс}$. Найти $U_2(t)$ методом интегралов наложения и построить график.

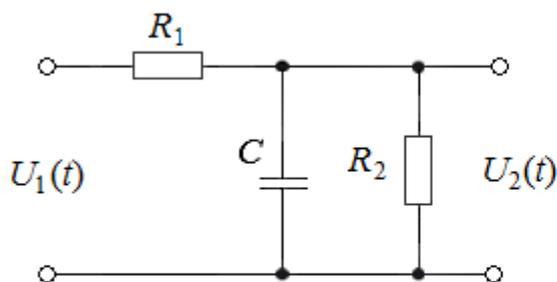


Рис. 57

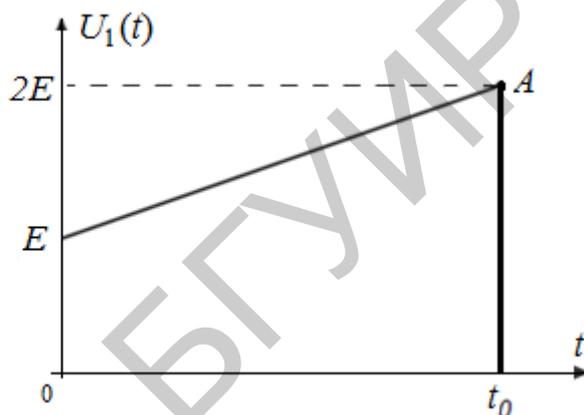


Рис. 58

Решение. Аналитическая запись входного воздействия

$$U_1(t) = \begin{cases} E \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0; \\ 0 & \text{при } t_0 \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Переходная характеристика по выходному напряжению

$$h(t) = A e^{\frac{-t}{\tau_{\text{н}}}} + h_{\text{пр}},$$

где $\tau_{\text{н}} = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$; $h_{\text{пр}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,5$; $h(0) = 0 = A + h_{\text{пр}} = A + 0,5$; отсюда $A = -0,5$.

В результате

$$h(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{н}}}} \right) = 0,5 \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{н}}}} \right).$$

Импульсная характеристика по выходному напряжению

$$k(t) = h'(t) + \delta(t)h(0) = \frac{1}{2\tau_{\text{ц}}} e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} \text{ с}^{-1}.$$

Определим выходное напряжение $U_2(t)$, используя пятую форму интег-

рала Дюамеля (см. прил. 1): $x(t) = \int_0^t f(\tau)k(t-\tau)d\tau$. Реакция цепи (т. е. выходное напряжение) на интервале $0 \leq t \leq t_0$

$$U_2'(t) = \int_0^t U_1(t)k(t-\tau)d\tau = \frac{E}{2} \left[\frac{t}{t_0} + \left(1 - \frac{\tau_{\text{ц}}}{t_0}\right) \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}}\right) \right] \text{ В.}$$

Реакция цепи на интервале $t_0 \leq t \leq \infty$

$$U_2''(t) = \int_0^t U_1(t)k(t-\tau)d\tau = \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\tau_{\text{ц}}}{t_0} - 1\right) e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} + \left(2 - \frac{\tau_{\text{ц}}}{t_0}\right) e^{\frac{-t-t_0}{\tau_{\text{ц}}}} \right] \text{ В.}$$

Проверка решения. В точке А на графике $U_1(t)$ при $t = t_0$ $U_2'(t)$ и $U_2''(t)$ дают одинаковый результат:

$$U_2(t_0) = \frac{E}{2} \left[2 + \left(1 - \frac{\tau_{\text{ц}}}{t_0}\right) \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}}\right) \right] \text{ В.}$$

Числовые значения $U_2'(t)$ и $U_2''(t)$:

$$U_2'(t) = \left[250t + 0,5 \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}}\right) \right] \text{ В;}$$

$$U_2''(t) = \frac{E}{2} \left(-0,5e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} + 1,5e^{\frac{-t-t_0}{\tau_{\text{ц}}}} \right) \text{ В.}$$

График зависимости $U_2(t) = U_2'(t) + U_2''(t)$ приведён на рис. 59.

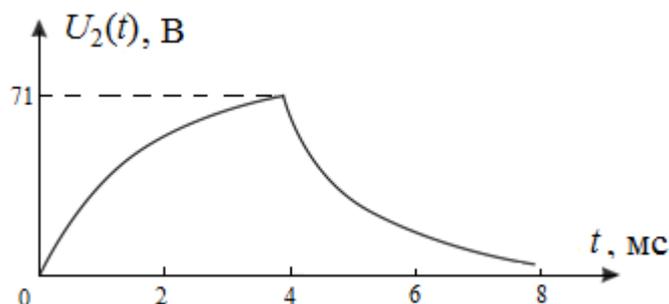


Рис. 59

Пример 25. На вход цепи (рис. 60) с параметрами $R = 1$ кОм и $L = 2$ мГн подаётся линейно нарастающее напряжение (рис. 61) с углом $\text{tg}\beta = 10^5$ В/с.

Найти выходное напряжение $U_2(t)$ с помощью интегралов Дюамеля и построить график.

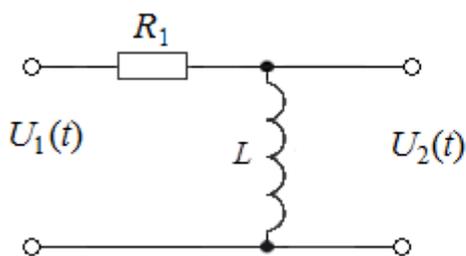


Рис. 60

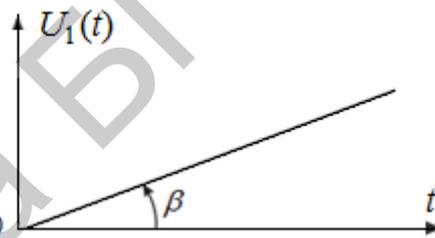


Рис. 61

Решение. Переходная характеристика RC -цепи имеет вид $h(t) = e^{\frac{-t}{\tau_{п}}}$.

$$\text{Входное напряжение } U_1(t) = \begin{cases} t \cdot \text{tg}\beta & \text{для } \forall t \in [0; +\infty); \\ 0 & \text{для } \forall t \in (-\infty; 0], \end{cases}$$

где $k = \text{tg}\beta$.

Найдём напряжение $U_2(t)$, используя первую форму интеграла Дюамеля (см. прил. 1):

$$U_2(t) = U_1(0)h(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

Поскольку $h(t - \tau) = e^0 - \frac{t - \tau}{\tau_{II}}$; $\tau_{II} = \frac{L}{R} = 2$ мкс; $U_1'(\tau) = \text{tg}\beta = 10^5$ В/с, то

$$U_2(t) = \text{tg}\beta \cdot \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_{II}}} d\tau = \text{tg}\beta \cdot \tau_{II} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{II}}}) = 0,2(1 - e^{-5 \cdot 10^5 t}) \text{ В.}$$

График напряжения $U_2(t)$ приведён на рис. 62.

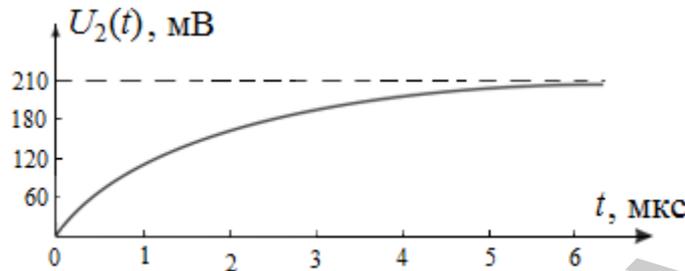


Рис. 62

Пример 26. На вход цепи (рис. 63) с параметрами $R_1 = 250$ Ом, $R_2 = 250$ Ом, $C = 2,0$ мкФ, $L = 700$ мГн подаётся напряжение $U_1(t)$ в виде прямоугольного импульса (рис. 64) с амплитудой $U_0 = 100$ В и длительностью $t_{II} = 3,0$ мс. Найти ток индуктивности $i_3(t)$ с помощью интеграла Дюамеля и построить график.

Для расчёта с помощью интеграла Дюамеля определяется переходная проводимость $y(t)$, которая равна значению переходного тока $i_3(t)$ исходной схемы при условии, что на входе подключается постоянный источник ЭДС, равный 1 В. Переходную проводимость рассчитываем классическим методом.

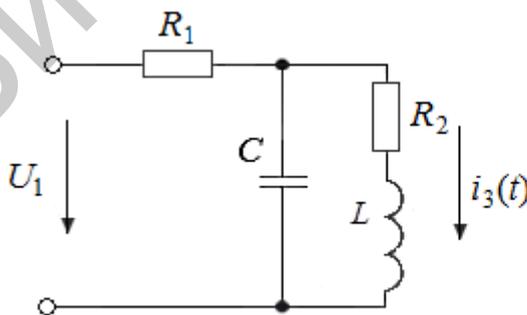


Рис. 63

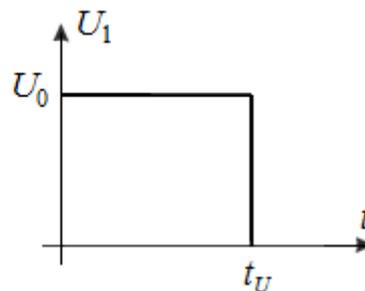


Рис. 64

Корни характеристического уравнения определяются из условия $Z(p) = 0$, т. е.

$$R_1 + \frac{\frac{1}{pC}(R_2 + pL)}{\frac{1}{pC} + R_2 + pL} = 0.$$

После подстановки исходных значений уравнение имеет вид

$$0,35 \cdot 10^{-3} p^2 + 710 \cdot 10^{-3} p + 270 = 0.$$

Корни уравнения: $p_1 = -1014 \text{ с}^{-1}$; $p_2 = -3042 \text{ с}^{-1}$.

$$i_3(t) = i_{3\text{уст}} = i_{3\text{св}};$$

$$i_{3\text{уст}} = \frac{1}{R_1 + R_2} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ А};$$

$$i_{3\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Так как до коммутации ток в индуктивности был равен нулю, то по закону коммутации $i_3(0-) = i_3(0+)$, следовательно, уравнение для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 имеет вид

$$0 = 3,7 \cdot 10^{-3} + A_1 + A_2.$$

Второе уравнение определяется путём дифференцирования и умножения на L выражения $i_3(t)$:

$$L \frac{di_3(t)}{dt} = L(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}).$$

Выражение $L \frac{di_3(t)}{dt}$ представляет собой напряжение на индуктивности.

Значение $U_L(0+)$ – это зависимое начальное условие, которое в общем случае определяется из системы уравнений, записанных по законам Кирхгофа для исходной схемы (рис. 65) для момента времени $t = 0+$.

$$\begin{cases} i_1(0+) - i_2(0+) - i_3(0+) = 0; \\ R_1 i_1(0+) + U_C(0+) = E(0+); \\ -U_C(0+) + R_2 i_3(0+) + U_L(0+) = 0. \end{cases}$$

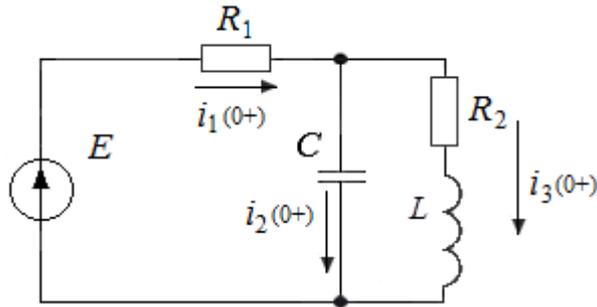


Рис. 65

Так как $U_C(0-) = U_C(0+) = 0$ и $i_3(0-) = i_3(0+)$, то из третьего уравнения следует, что $U_L(0+) = 0$.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяются из системы

$$\begin{cases} 0 = 3,7 \cdot 10^{-3} + A_1 + A_2; \\ 0 = -709,8A_1 - 2129,4A_2. \end{cases}$$

Следовательно: $A_1 = -5,55 \cdot 10^{-3}$, $A_2 = 1,85 \cdot 10^{-3}$.

Переходная проводимость

$$y(t) = 3,7 \cdot 10^{-3} - 5,55 \cdot 10^{-3} e^{-1014t} + 1,85 \cdot 10^{-3} e^{-3042t}.$$

Импульс входного напряжения $U_1(t)$ можно рассматривать как сумму двух прямоугольных напряжений с одинаковой амплитудой, сдвинутых на интервал времени t_U (рис. 66).

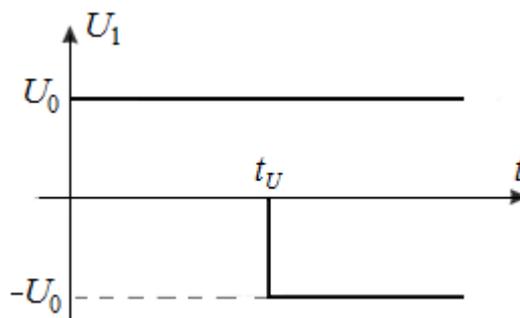


Рис. 66

Тогда на интервале времени $0 \leq t < t_U$ интеграл Дюамеля будет

$$i_3(t) = U_0 y(t) = 0,37 - 0,56e^{-1014t} + 0,19e^{-3042t},$$

а на интервале $t_U \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} i_3(t) &= U_0 y(t) - U_0 y(t - t_U) = \\ &= -0,56e^{-1014t} + 0,19e^{-3042t} + 0,56e^{-1014(t-t_U)} - 0,19e^{-3042(t-t_U)}. \end{aligned}$$

График переходного процесса приведён на рис. 67.

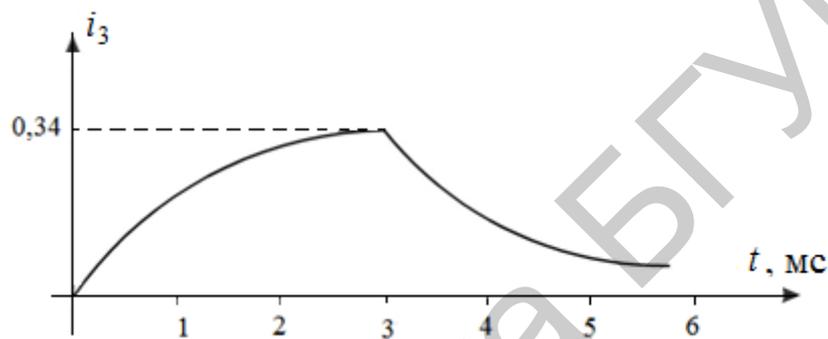


Рис. 67

Пример 27. На вход цепи (рис. 68) с параметрами $R = 50$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $C = 200$ мкФ подаётся напряжение $U_1(t)$ в виде прямоугольного импульса (рис. 69) с амплитудой $U_0 = 10$ В и длительностью $t_U = 15$ мс. Найти напряжение $U_2(t)$ с помощью интеграла Дюамеля и построить график.

Для определения напряжения $U_2(t)$ необходимо определить переходную характеристику.

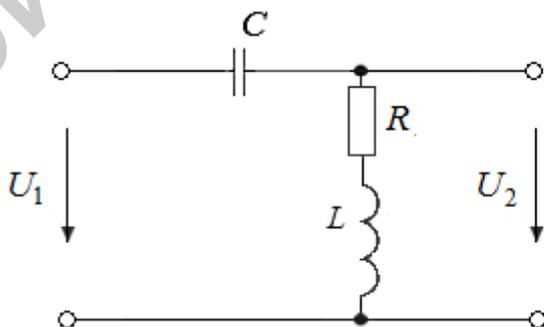


Рис. 68

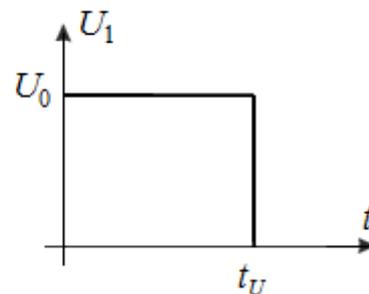


Рис. 69

Для этого рассчитывается $U_2(t)$ при условии, что на входе подключается источник ЭДС E , равный 1 В, т. е. схема примет вид, как показано на рис. 70.

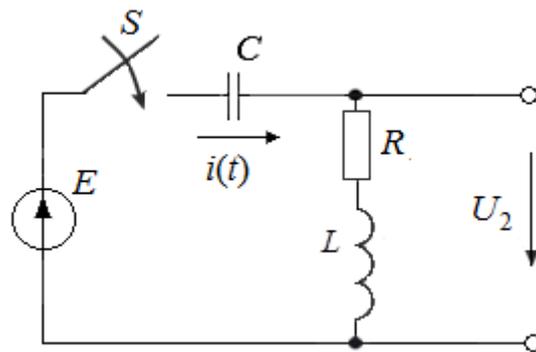


Рис. 70

Напряжение $U_2(t)$ можно определить, если известен переходный ток $i(t)$ в сопротивлении R и L , тогда $U_2(t) = U_R(t) + U_L(t)$.

Классическим методом переходный ток $i(t)$ определяется из условия, что

$$i(t) = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}}.$$

Ток $i_{\text{уст}} = 0$, т. к. в цепи имеется конденсатор C , который не пропускает постоянный ток, тогда $i(t) = i_{\text{св}}$. Вид свободной составляющей зависит от вида и количества корней характеристического уравнения.

Корни уравнения определяются из уравнения $Z(p) = 0$, т. е. входное сопротивление цепи

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + R + pL.$$

Решение квадратного уравнения имеет два действительных корня:

$$p_1 = -138 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = -362 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, $i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

Ток в индуктивности в первый момент после коммутации равен току до коммутации $i(0+) = i(0-) = 0$, т. к. $i(0+) = 0$, что следует из закона комму-

тации. Уравнение для определения постоянных интегрирования при $t = 0$ имеет вид

$$0 = A_1 + A_2.$$

Второе уравнение можно получить, дифференцируя $i(t)$ и умножая на коэффициент L :

$$L \frac{di(t)}{dt} = L(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}).$$

Выражение $L \frac{di(t)}{dt}$ представляет собой напряжение $U_L(t)$ на индуктивности. Определяя значение $U_L(t)$ для момента времени $t = 0$, получаем второе уравнение для определения постоянных интегрирования:

$$U_L(0+) = L(p_1 A_1 + p_2 A_2).$$

Напряжение $U_L(0+)$ – это зависимое начальное условие, которое определяется из уравнения, записанного по второму закону Кирхгофа для момента времени $t = 0$:

$$E(0+) = U_C(0+) + i(0+)R + U_L(0+).$$

Так как согласно закону коммутации $U_C(0+) = 0$ и $i(0+) = 0$, следовательно, $U_L(0+) = E(0+) = 1$ В. Система уравнений для определения A_1 и A_2 имеет вид

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2; \\ L(A_1 p_1 + A_2 p_2) = 1. \end{cases}$$

Откуда следует, что $A_1 = -0,045$; $A_2 = 0,045$. Так как

$$\begin{aligned} U_2(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} &= R(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) + L(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}) = \\ &= 1,62e^{-138t} - 0,62e^{-362t}, \end{aligned}$$

следовательно, $k(t) = 1,62e^{-138t} - 0,62e^{-362t}$.

Интеграл Дюамеля для интервала времени $0 \leq t < t_U$

$$U_2(t) = U_0 k(t) = 16,2e^{-138t} - 6,2e^{-362t},$$

а на интервале времени $t_U \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} U_2(t) &= U_0 k(t) - U_0 k(t - t_U) = \\ &= 16,2e^{-138t} - 6,2e^{-362t} - 16,2e^{-138(t-t_U)} + 6,2e^{-362(t-t_U)}. \end{aligned}$$

График переходного процесса изображён на рис. 71.

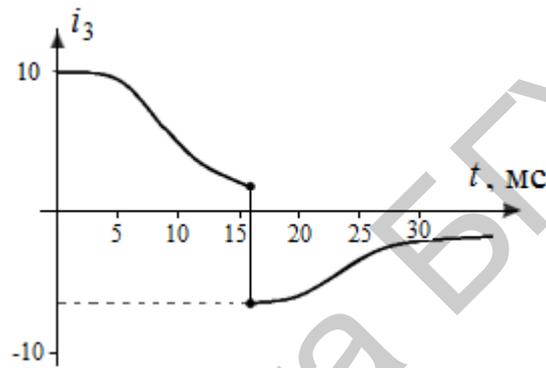


Рис. 71

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Свободные токи и напряжения в цепях первого порядка

1. Найти $U_{C_{св}}(t)$ и $i_{C_{св}}(t)$ временным методом и построить графики. В схеме на рис. 72 происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $E = 100$ В; $R_1 = 10$ кОм; $C = 2$ мкФ.

2. В схеме на рис. 73 происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $E = 400$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = 20$ Ом; $C = 0,1$ мкФ. Найти $U_{C_2_{св}}(t)$ временным методом.

3. В схеме на рис. 74 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 100$ В; $R_1 = 30$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 50$ Ом; $L_1 = 5$ мГн; $L_2 = 10$ мГн. Найти $i_{L_2_{св}}(t)$ временным методом.

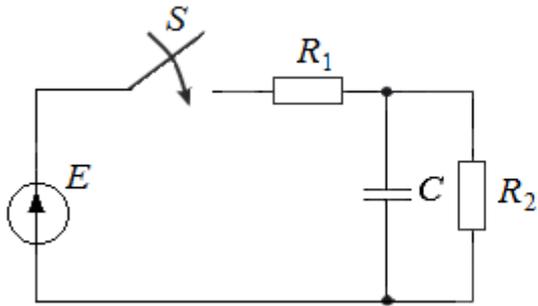


Рис. 72

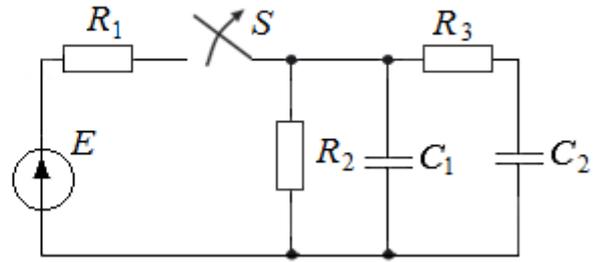


Рис. 73

4. В схеме на рис. 75 происходит отключение источника ЭДС. Параметры схемы: $E = 12$ В; $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 6$ Ом; $L = 0,1$ Гн. Найти ток $i_{L_{CB}}(t)$ и напряжение $U_{L_{CB}}(t)$ временным методом и построить графики.

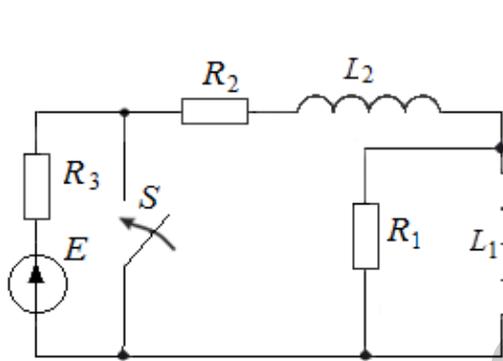


Рис. 74

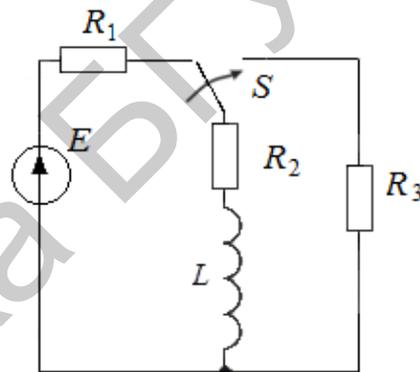


Рис. 75

5. В схеме на рис. 76 происходит отключение источника. Параметры схемы: $E = 120$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 30$ Ом; $R_4 = 40$ Ом; $C = 100$ мкФ. Найти $U_{C_{CB}}(t)$ временным методом и построить график.

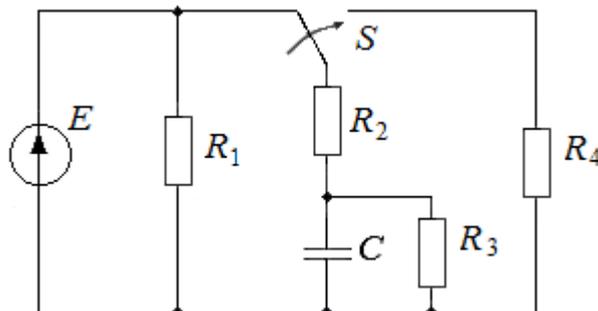


Рис. 76

Переходные процессы в цепях первого порядка

6. В схеме на рис. 77 происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $E = 120 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ кОм}$; $R_2 = 50 \text{ кОм}$; $C = 0,02 \text{ мкФ}$. Найти $U_C(t)$ и $i_C(t)$ временным методом и построить графики.

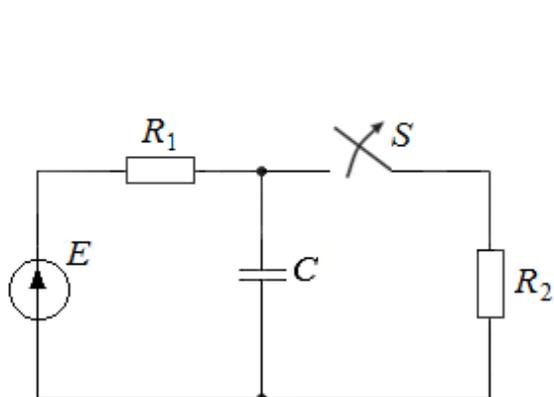


Рис. 77

7. В схеме на рис. 78 $E = 200 \text{ В}$; $R_1 = 8 \text{ Ом}$; $R_2 = 12 \text{ Ом}$; $L = 0,6 \text{ Гн}$. Найти $i_L(t)$ и $U_L(t)$ временным методом и построить графики.

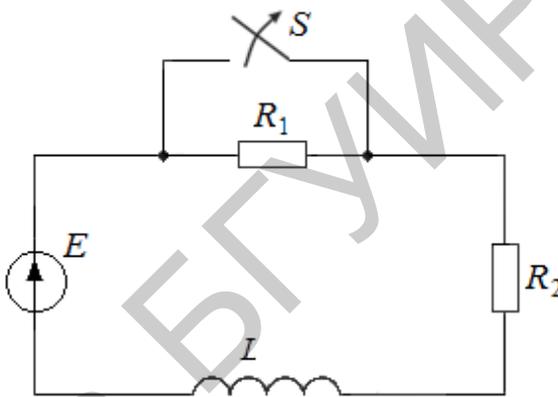


Рис. 78

8. В схеме на рис. 79 $E = 160 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ кОм}$; $R_2 = 20 \text{ кОм}$; $R_3 = 30 \text{ кОм}$; $L = 40 \text{ мГн}$. Найти $i_L(t)$ и $U_L(t)$ временным методом и построить графики.

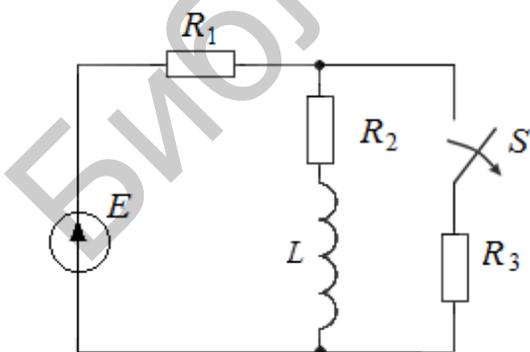


Рис. 79

9. В схеме на рис. 80 $E = 120 \text{ В}$; $R_1 = 20 \text{ кОм}$; $R_2 = 200 \text{ кОм}$; $L = 20 \text{ мГн}$. Найти $i_L(t)$ и $U_L(t)$ временным методом и построить графики.

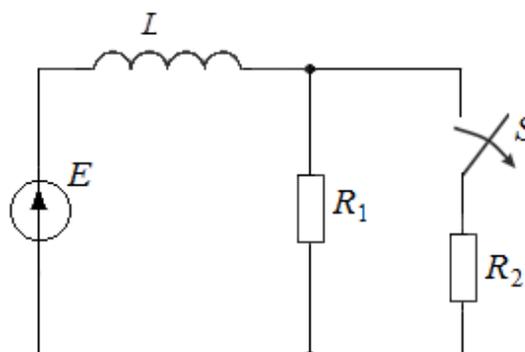


Рис. 80

10. В схеме на рис. 81 $E = 100 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ кОм}$; $R_2 = 20 \text{ кОм}$; $R_3 = 30 \text{ кОм}$; $C = 2000 \text{ пФ}$. Найти $U_C(t)$ и $i_C(t)$ временным методом и построить графики.

11. В схеме на рис. 82 $E = 60 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ кОм}$; $R_2 = 150 \text{ кОм}$; $L = 10 \text{ мГн}$.

Найти $i_L(t)$ и $U_L(t)$ временным методом и построить графики.

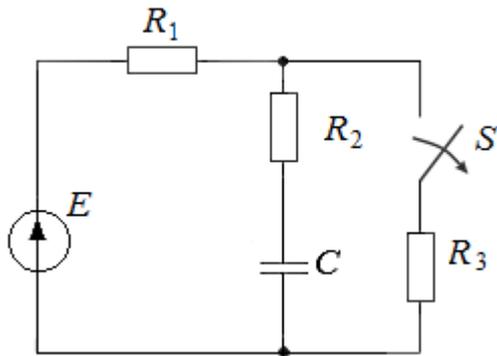


Рис. 81

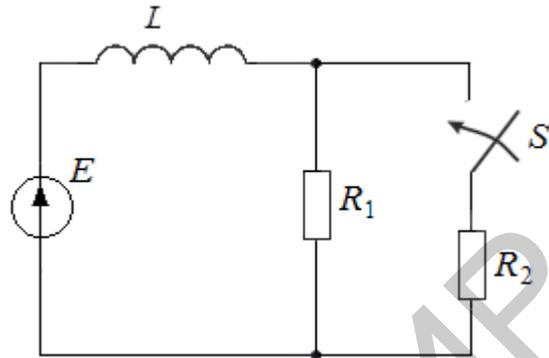


Рис. 82

Анализ переходных процессов в цепях первого порядка без составления дифференциального уравнения

12. В схеме на рис. 83 $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 30 \text{ Ом}$; $R_4 = 40 \text{ Ом}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$. Определить $\tau_{ц}$ без составления дифференциального уравнения.

13. В схеме на рис. 84 $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$; $L = 0,2 \text{ Гн}$. Определить $\tau_{ц}$ без составления дифференциального уравнения.

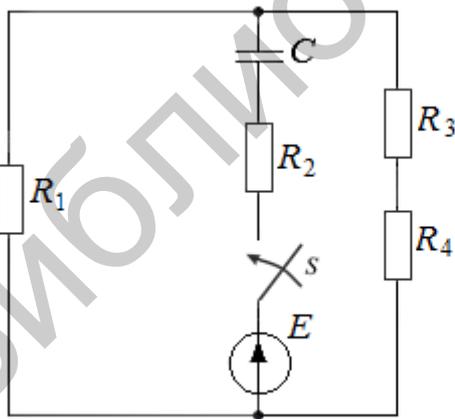


Рис. 83

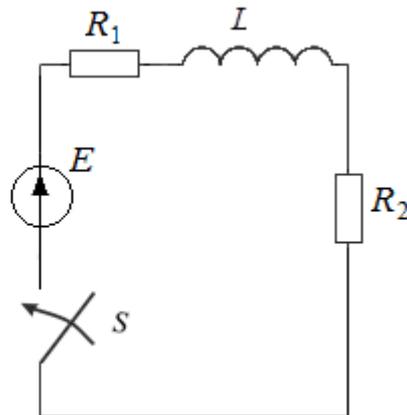


Рис. 84

14. В схеме на рис. 85 $R_1 = R_2 = R_3 = 200 \text{ Ом}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$. Определить $\tau_{ц}$ без составления дифференциального уравнения.

15. В схеме на рис. 86 $E = 60$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = 30$ Ом; $L = 150$ мГн. Определить токи I_L и I_{R_2} без составления дифференциальных уравнений.

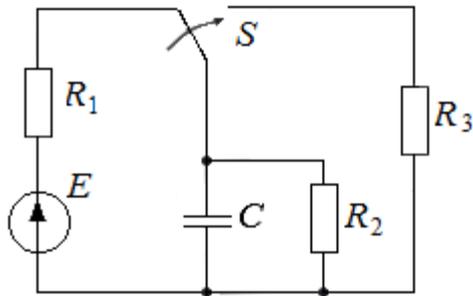


Рис. 85

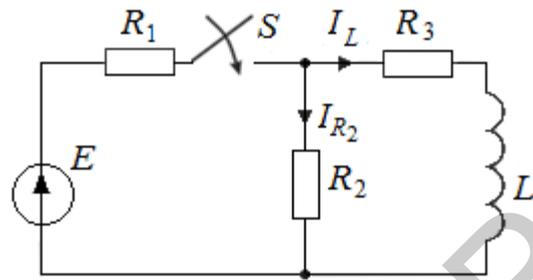


Рис. 86

16. катушка с сопротивлением $R_L = 0,5$ Ом и индуктивностью $L = 0,1$ Гн замыкается на сопротивление $R = 0,3$ Ом. Ток в катушке $i_L(0-) = 10$ А. Найти постоянную времени $\tau_{ц}$, законы изменения тока в цепи $i(t)$ и напряжения на катушке $U(t)$ без составления дифференциального уравнения.

17. В схеме на рис. 87 $E = 90$ В; $R = 20$ Ом; $C = 10$ мкФ. Найти $U_C(t)$ после замыкания ключа S без составления дифференциального уравнения.

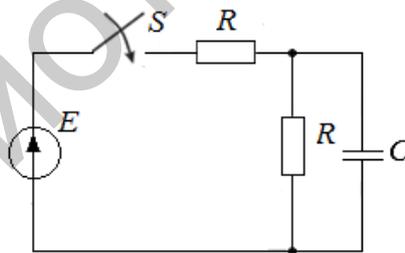


Рис. 87

Переходные процессы при скачкообразном изменении схемы цепи

18. В цепи на рис. 88 $E = 260$ В; $R_1 = 2$ кОм; $R_2 = 20$ Ом; $L = 0,7$ мГн. Найти значение тока $i_L(t)$ временным методом и построить график.

19. В цепи на рис. 89 $E = 150$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = 50$ Ом; $C = 100$ мкФ. Найти токи I_1, I_2, I_3 и напряжение $U_C(t)$ временным методом.

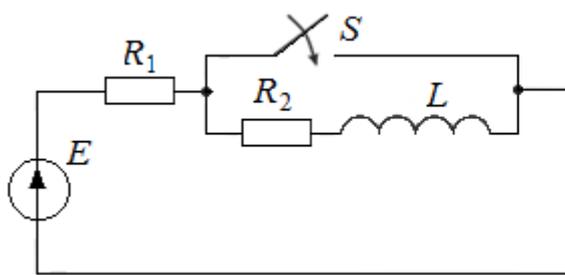


Рис. 88

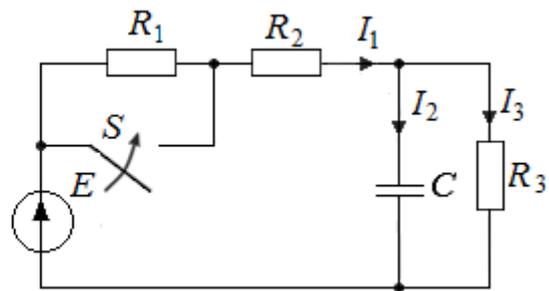


Рис. 89

20. В цепи на рис. 90 $E = 150$ В; $C = 0,66$ мкФ; сопротивления:

а) $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ кОм; б) $R_1 = R_4 = 1$ кОм; $R_2 = R_3 = 1,5$ кОм. Найти $U_C(t)$ и $i_C(t)$ после коммутации временным методом.

21. В цепи на рис. 91 $J = 1$ мА; $R = 20$ кОм; $C = 0,5$ мкФ. Найти напряжение $U_C(t)$ и токи $i_C(t)$ и $i_R(t)$ временным методом.

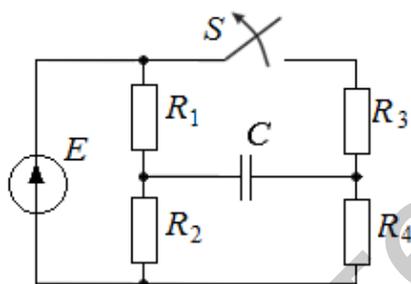


Рис. 90

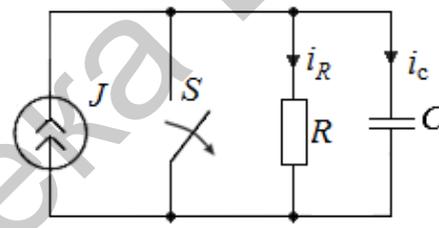


Рис. 91

22. В цепи на рис. 92 $J = 0,4$ А; $R_1 = R_4 = 200$ Ом; $R_2 = R_3 = 300$ Ом;

$R_5 = 250$ Ом; $C = 20$ мкФ. Найти $U_C(t)$ и $i_C(t)$ временным методом.

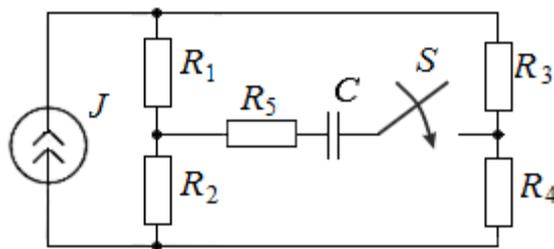


Рис. 92

**Переходные процессы в цепях первого порядка с источником
синусоидального напряжения**

23. В цепи на рис. 93 найти $i_L(t)$ временным методом. Параметры схемы:
 $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$; $\omega L = 3 \text{ Ом}$; $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$; $e(t) = 127 \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ В}$.

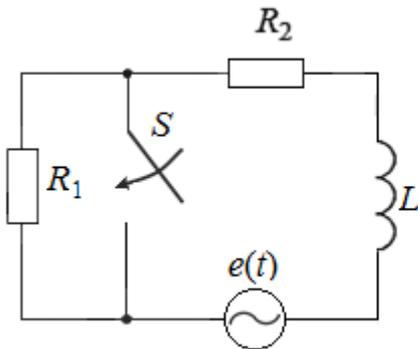


Рис. 93

24. В цепи на рис. 94 найти $U_C(t)$ временным методом. Параметры схемы:
 $e(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$, $U_m = 65 \text{ мВ}$; $\omega = 2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$; $\frac{1}{\omega C} = 1 \text{ Ом}$; $R_1 = 12 \text{ Ом}$;
 $R_2 = 3 \text{ Ом}$.

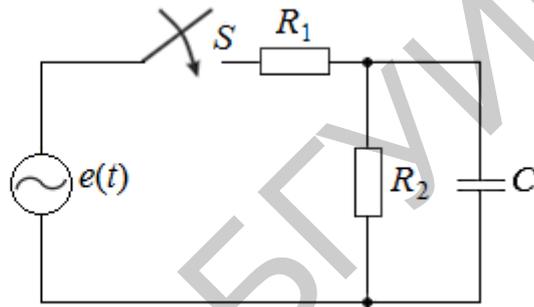


Рис. 94

25. Два синусоидально изменяющихся напряжения имеют следующие выражения: $U_1(t) = 100 \sin(628t + 30^\circ) \text{ В}$ и $U_2(t) = 200 \sin(628t + 60^\circ) \text{ В}$. Найти напряжения, соответствующие сумме и разности заданных мгновенных значений напряжений.

26. Мгновенные значения токов двух параллельных ветвей имеют следующие аналитические выражения: $i_1(t) = 10 \sin(314t + 62^\circ) \text{ А}$ и $i_2(t) = 12 \sin(314t - 35^\circ) \text{ А}$. Определить общий ток цепи как сумму токов параллельных ветвей.

27. Мгновенное значение тока в цепи $i(t) = 14,2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ А}$, а напряжения – $U(t) = 169 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ В}$. Определить показания амперметра и вольтметра, включённых в цепь.

28. В цепи на рис. 95 $E = 100 \text{ В}$; $R_1 = 1 \text{ кОм}$; $R_2 = 100 \text{ Ом}$; $R_3 = 500 \text{ Ом}$;
 $L = 0,2 \text{ Гн}$; $C = 1 \text{ мкФ}$. Найти $U_C(t)$ временным методом.

29. В цепи на рис. 96 $E = 8 \text{ В}$; $R_1 = 50 \text{ кОм}$; $R_2 = 17,5 \text{ Ом}$; $L = 0,5 \text{ мГн}$; $C = 200 \text{ пФ}$. Найти $U_C(t)$ и $U_{C_{\max}}$ временным методом.

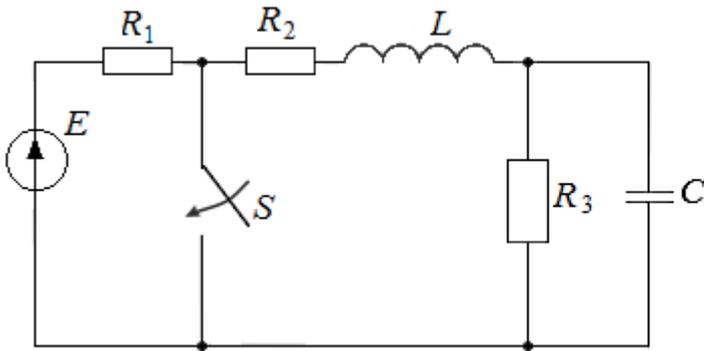


Рис. 95

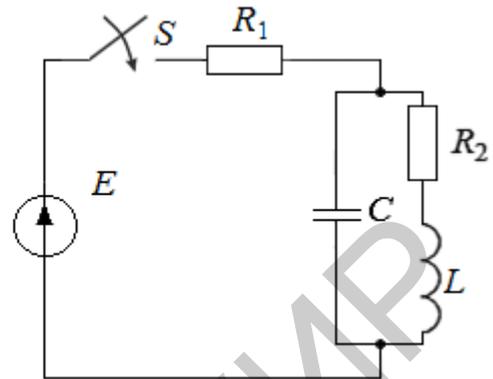


Рис. 96

30. В цепи на рис. 97 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 160 \text{ В}$; $R_1 = 0$; $R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 5 \text{ Ом}$; $L = 3,75 \text{ мГн}$; $C = 88 \text{ мкФ}$. Найти $i_{L_{\text{св}}}(t)$ и корни характеристического уравнения временным методом.

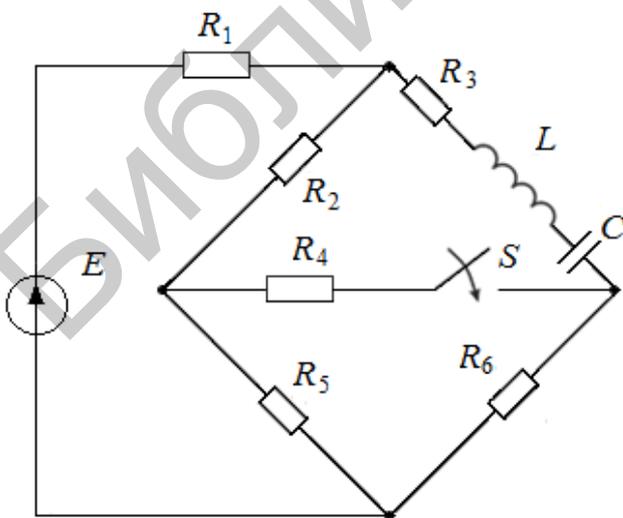


Рис. 97

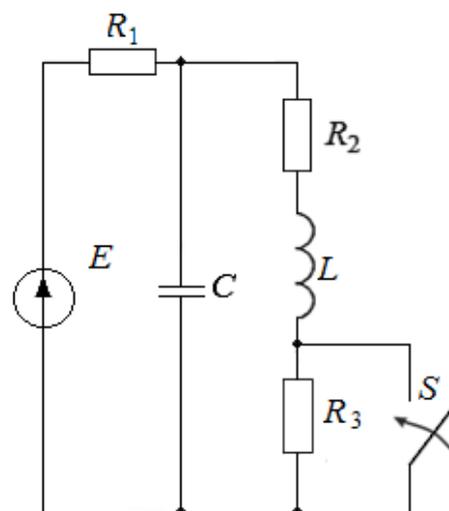


Рис. 98

31. В цепи на рис. 98 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 60 \text{ В}$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 40 \text{ Ом}$; $L = 0,2 \text{ мГн}$; $C = 1 \text{ мкФ}$. Найти $U_C(t)$ временным методом.

32. В цепи на рис. 99 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 120$ В; $R_1 = R_2 = 50$ Ом; $R_3 = 10$ Ом; $L = 2$ Гн; $C = 150$ мкФ. Найти $i_L(t)$ временным методом.

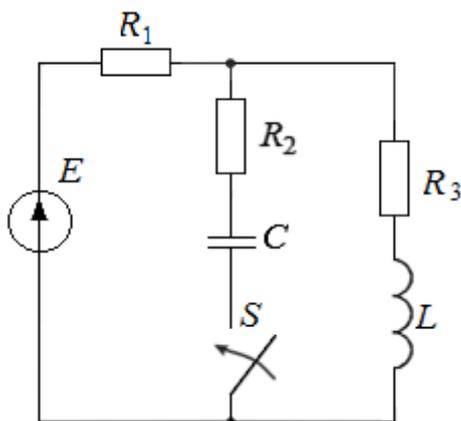


Рис. 99

33. На рис. 100 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$; $E_m = 120\sqrt{2}$ В; $\omega = 314$ с⁻¹; $\psi = \frac{\pi}{6}$; $R_1 = R_2 = 40$ Ом; $L = 0,8$ Гн; $C = \frac{L}{R_1^2} = \frac{0,8}{1600} = 0,5 \cdot 10^{-3}$ Ф. Найти ток $i_L(t)$ временным методом.

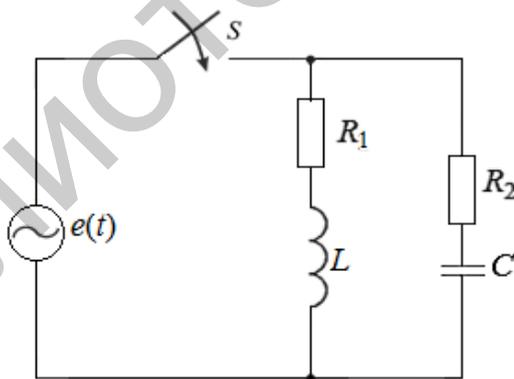


Рис. 100

34. На рис. 101 $e(t) = 180 \sin(300t + 45^\circ)$ В; $R_1 = 30$ Ом; $R_2 = R_3 = 5$ Ом; $L = 9 \cdot 10^{-2}$ Гн; $C = 9 \cdot 10^{-4}$ Ф. Найти токи $i_L(t)$, $i_C(t)$, $i_{(R_2+R_3)}(t)$ временным методом.

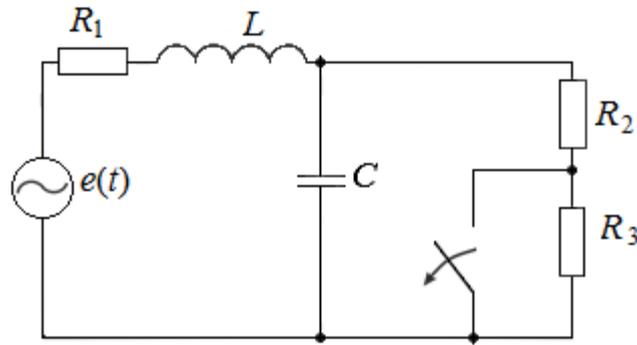


Рис. 101

35. На рис. 102 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $e(t) = 100 \sin \omega t$; $R_1 = 100$ кОм; $R_2 = 10$ Ом; $L = 1$ мГн; $C = 1000$ пФ; $\omega = 10^6$ с⁻¹. Найти $U_C(t)$ временным методом.

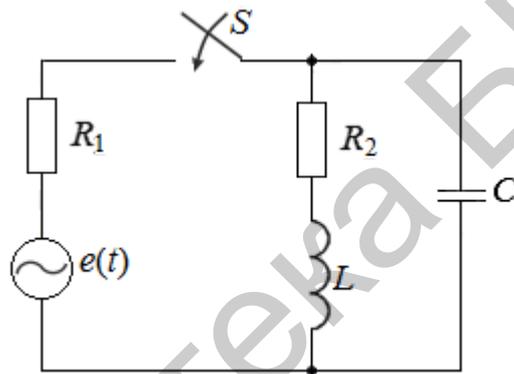


Рис. 102

36. Конденсатор ёмкостью $C = 100$ мкФ, заряженный до напряжения $U_C = 100$ В, разряжается на катушку с индуктивностью $L = 100$ мГн и сопротивлением $R_K = 20$ Ом. Определить $U_C(t)$ временным методом.

37. На рис. 103 $e(t) = 10 \sin 5000t$ В; $R = 100$ Ом; $L = 40$ мГн; $C = 1$ мкФ. В момент, когда фаза входного напряжения $e(t)$ достигла значения $\omega t = \frac{\pi}{6}$, ключ S разомкнулся. Считая момент размыкания ключа началом отсчёта времени, определить для $t > 0$ токи $i_C(t)$, $i_L(t)$, $i_R(t)$.

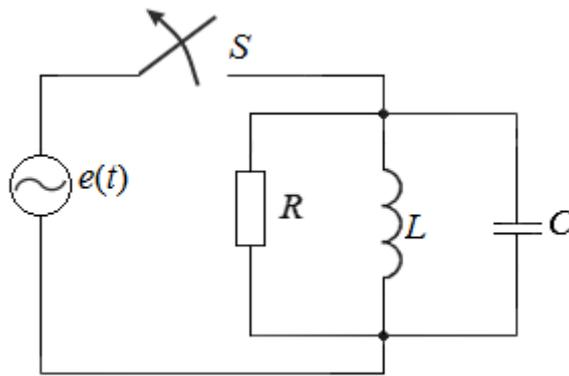


Рис. 103

38. На рис. 104 $U_{\text{вх}} = 100 \text{ В}$; $R_1 = 5 \text{ кОм}$; $R_2 = 10 \text{ кОм}$; $C = 2000 \text{ пФ}$. Найти временные характеристики $h(t)$ и $k(t)$ по напряжению на сопротивлении R_2 и построить графики.

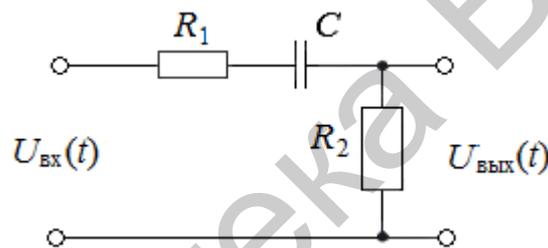


Рис. 104

39. На рис. 105 $U_{\text{вх}} = 1 \text{ В}$; $C = 1000 \text{ пФ}$; $R = 10 \text{ Ом}$; $L = 100 \text{ мГн}$. Найти временные характеристики $h(t)$ и $k(t)$ по напряжению.

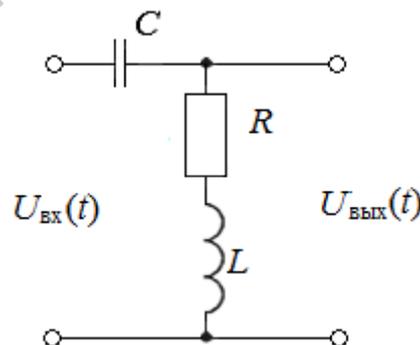


Рис. 105

40. На рис. 106 $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$; $L = 1 \text{ мГн}$; $C = 1000 \text{ пФ}$. Найти временные характеристики $h(t)$ и $k(t)$ по выходному напряжению.

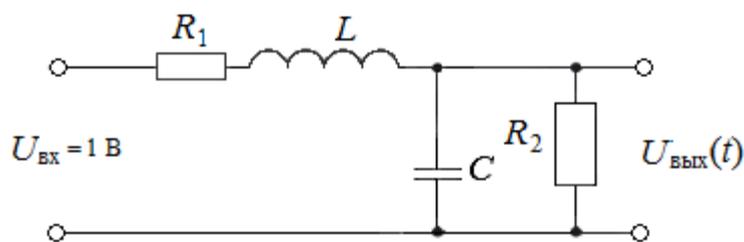


Рис. 106

41. На рис. 107 $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = 300 \text{ Ом}$; $L_1 = 2 \text{ Гн}$; $L_2 = 6 \text{ Гн}$. Найти временные характеристики цепи по выходному напряжению $h_U(t)$ и $k_U(t)$.

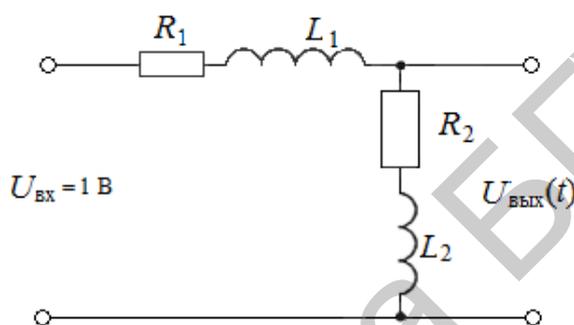


Рис. 107

42. На рис. 108 $R_1 = R_2 = 10 \text{ кОм}$; $C_1 = C_2 = 20 \text{ пФ}$. Найти временные характеристики цепи по выходному напряжению $h_U(t)$ и $k_U(t)$.

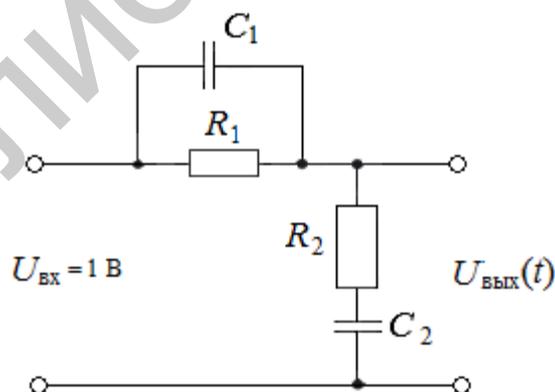


Рис. 108

43. На рис. 109 $C_2 = \frac{1}{3} C_1 = C$ и $R_1 = R_2 = R$. Методом интеграла Дюамеля найти $U_2(t)$, если входное напряжение $U_1(t) = 1 \text{ В}$, т. е. единичный скачок.

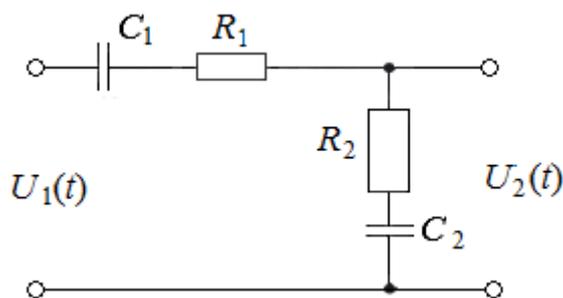


Рис. 109

44. Для дифференцирующего звена (рис. 110) рассчитать напряжение на выходе $U_2(t)$ методом интеграла Дюамеля, если $\delta = \frac{1}{RC} = 1 \text{ с}^{-1}$, и на входе – единичное ступенчатое напряжение $U_1(t) = -100 \cdot 1(t) \text{ В}$.

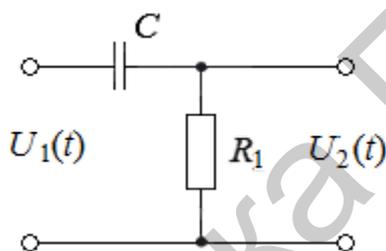


Рис. 110

45. Для интегрирующего звена (рис. 111) рассчитать напряжение на выходе $U_2(t)$ методом интеграла Дюамеля, если $\delta = \frac{R}{L} = 1 \text{ с}^{-1}$, и на входе – единичное ступенчатое напряжение $U_1(t) = 100 \cdot 1(t - t_1) \text{ В}$.

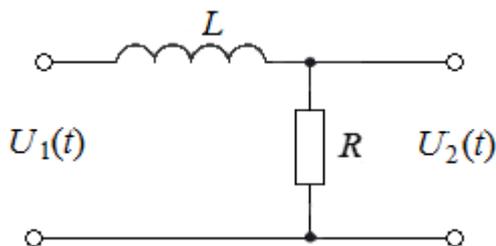


Рис. 111

46. На вход трансформатора без стального сердечника (рис. 112) подаётся напряжение $U_1(t) = 100(1 - e^{-0,25t}) \text{ В}$. Параметры схемы: $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $M = 0,5 \text{ Гн}$; $L_1 = L_2 = 1 \text{ Гн}$. Методом интеграла Дюамеля найти $U_2(t)$.

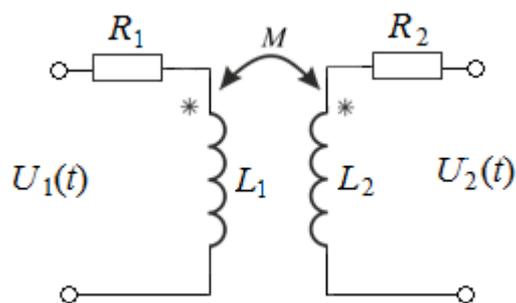


Рис. 112

2. Операторный метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

2.1. Основные свойства и теоремы преобразований Лапласа

Суть операторного метода, основанного на преобразованиях Лапласа, заключается в том, что функции действительной переменной t (т. е. временные) преобразуют в функции комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$ (т. е. переносят на комплексную плоскость). При этом снижается на единицу степень дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в цепи, что упрощает решение задачи. Облегчает решение задачи и обратный переход от переменной p к t с помощью таблиц преобразований, которые созданы Лапласом для большого числа функций.

Переход от временной функции $f(t)$, которую называют оригиналом, к функции на комплексной плоскости p , которую называют изображением $F(p)$, осуществляют с помощью прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Переход от функции комплексной переменной p к функции действительной переменной t осуществляют с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Свойства преобразований Лапласа приведены в прил. 2. Теоремы преобразований Лапласа приведены в прил. 3. Таблица преобразований Лапласа для некоторых функций приведена в прил. 4.

2.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Для схемы на рис. 113 и её эквивалентной операторной схемы (или схемы замещения) на рис. 114 можно записать соответственно интегродифференциальное уравнение:

$$ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + U_C(0) = e(t)$$

и на основании свойства линейности преобразования Лапласа и теорем дифференцирования и интегрирования (см. прил. 2 и 3) операторное уравнение для изображений:

$$rI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p} = E(p),$$

откуда закон Ома в операторной форме имеет вид $I(p) = \frac{\varepsilon(p)}{Z(p)}$, где

$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}$ — операторное сопротивление; $\varepsilon(p) = E(p) + Li(0) - \frac{U_C(0)}{p}$ —

приведённая операторная ЭДС.

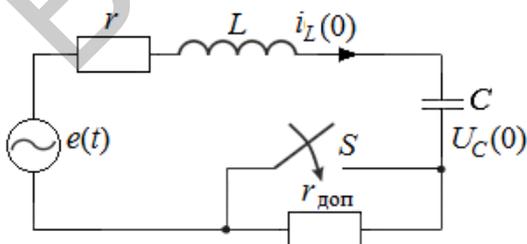


Рис. 113

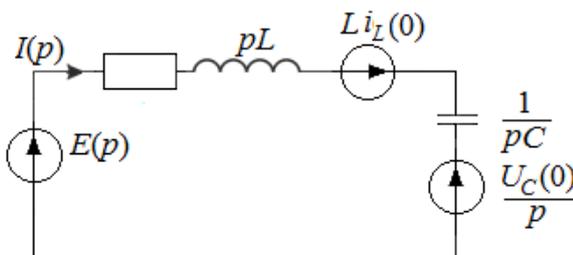


Рис. 114

Первый закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p),$$

где $U_k(p) = Z_k(p)I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{U_{C_k}(0)}{p}$ или $\sum_{k=1}^n Z_k(p)I_k(p) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(p)$, здесь

$$\varepsilon_k(p) = E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{U_{C_k}(0)}{p}.$$

Пример 28. В схеме на рис. 115 $R_1 = R_3 = 10$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $L = 100$ мГн; $E = 100$ В. Найти ток $i_L(t)$ операторным методом и построить график.

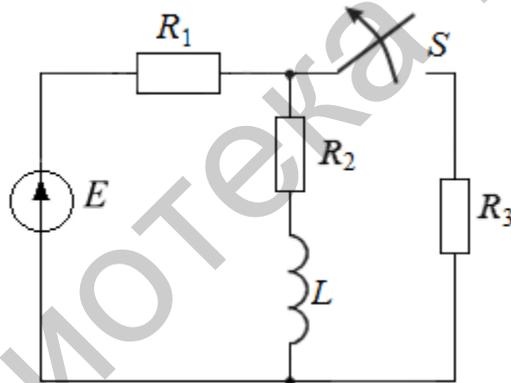


Рис. 115

Решение. Эквивалентная операторная схема приведена на рис. 116.

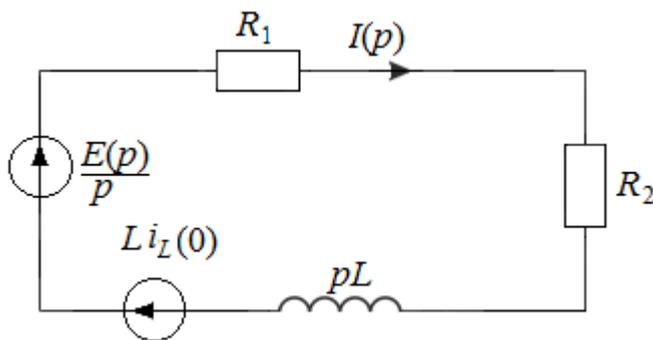


Рис. 116

Ток в индуктивности по закону Ома в операторной форме

$$I(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li(0)}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p(p + \frac{R_1 + R_2}{L})} + i(0) \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{L}}.$$

Оригинал тока $i(t)$ по таблице изображений Лапласа (см. прил. 4)

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\alpha t}) + i(0) \cdot e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \frac{1}{\tau_{ц}} = \frac{R_1 + R_2}{L} = 250 \text{ с}^{-1}$.

Ток в индуктивности до коммутации $i(0) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2,5 \text{ А}$.

Тогда $i(t) = 4 - 1,5e^{-250t} \text{ А}$.

График тока $i(t)$ приведён на рис. 117.

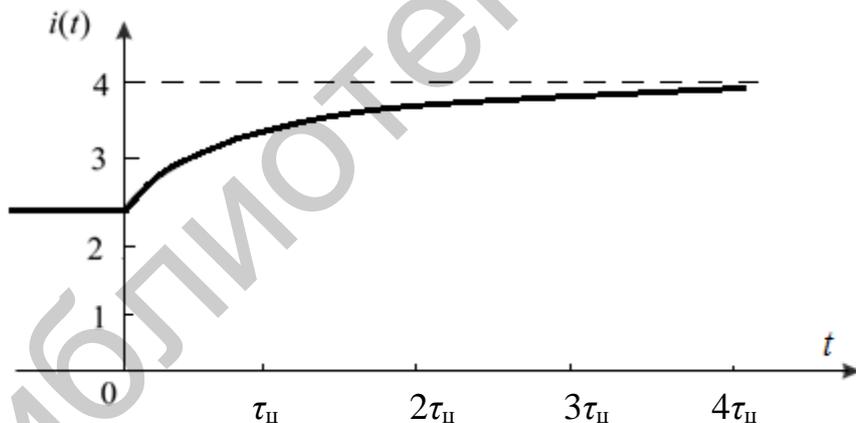


Рис. 117

Пример 29. В схеме на рис. 118 $E = 12 \text{ В}$; $R = 100 \text{ Ом}$; $C = 0,01 \text{ мкФ}$. Операторным методом найти напряжение на ёмкости $U_C(t)$ и ток в цепи $i(t)$. Построить графики.

Решение. В эквивалентной операторной схеме (рис. 119) по закону Ома

$$I(p) = \frac{E/p}{\left(R + \frac{1}{pC}\right)} = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_{ц}}},$$

где $\tau_{ц} = RC$.

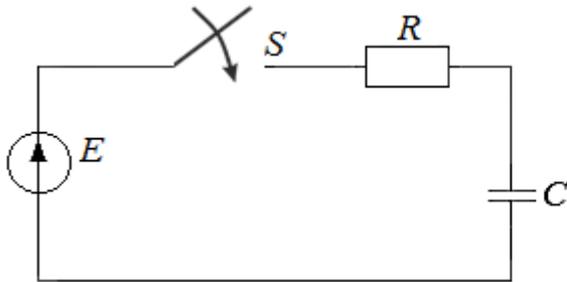


Рис. 118

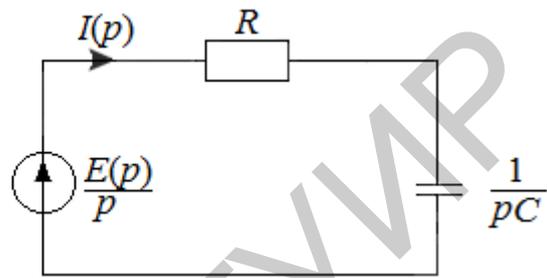


Рис. 119

Оригинал $i(t)$ по таблице преобразований Лапласа (см. прил. 4)

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} = 0,12 e^{-10^6 t} \text{ А.}$$

Напряжение на конденсаторе в операторной форме

$$U_C(p) = I(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{E}{\tau_{ц}} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau_{ц}} \right)}.$$

Оригинал согласно прил. 4

$$U_C(t) = E \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{ц}}} \right) = 12 \left(1 - e^{-10^6 t} \right) \text{ В.}$$

Графики $U_C(t)$ и $i(t)$ приведены на рис. 120 и 121 соответственно.

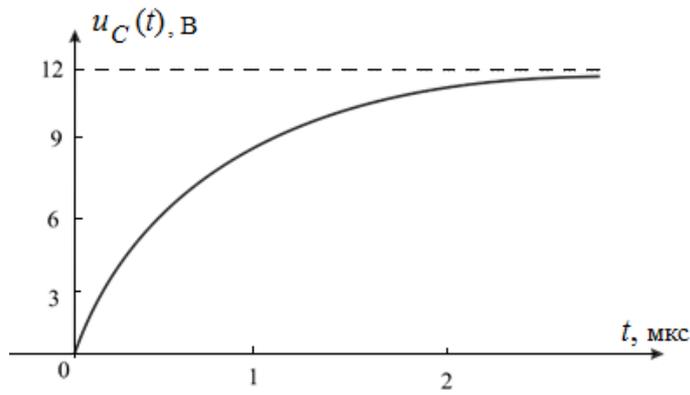


Рис. 120

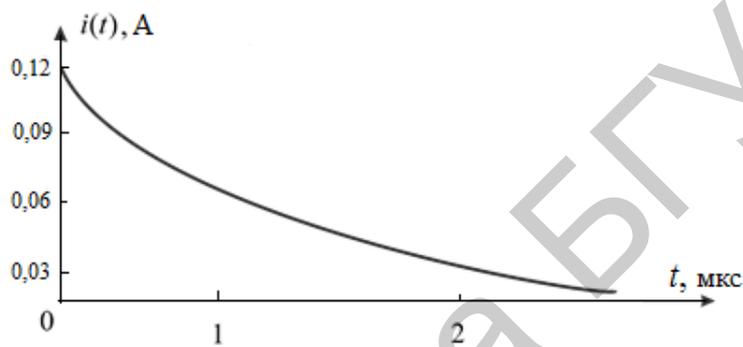


Рис. 121

Пример 30. Операторным методом определить напряжение на конденсаторе $u_C(t)$ (рис. 122), если $E_1 = 100$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом, $C = 10$ мкФ.

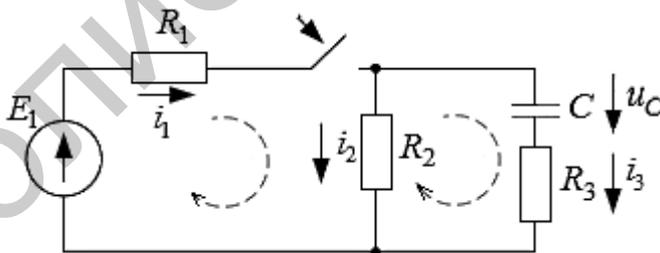


Рис. 122

Решение:

1. Независимое начальное условие (ННУ) $u_C(0^-) = u_C(0) = 0$ найдено в примере 7.
2. Определяем операторную схему замещения (рис. 123).

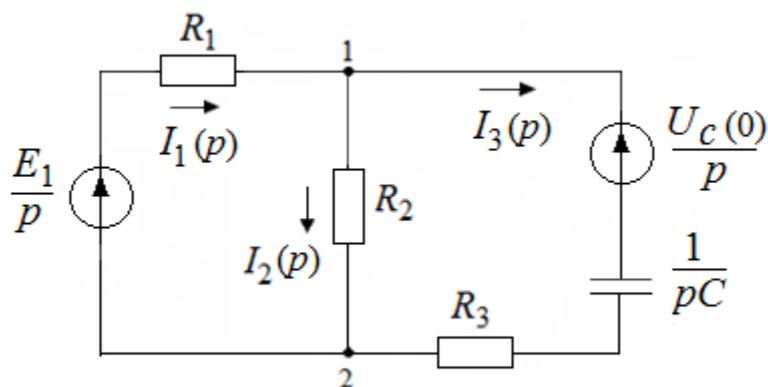


Рис. 123

3. Методом двух узлов определим напряжение:

$$U_{12}(p) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + 1/pC} \right) = \frac{E_1}{pR_1} + \frac{u_C(0)}{p(R_1 + 1/pC)}.$$

Отсюда, с учетом того, что $u_C(0) = 0$, получим

$$U_{12}(p) = \frac{\frac{E_1}{pR_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + 1/pC}} = \frac{E_1(R_2R_3 + R_2/pC)}{p \left(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 + \frac{R_2 + R_1}{pC} \right)}.$$

Тогда $I_3(p)$ получим по закону Ома:

$$I_3(p) = \frac{U_{12}(p)}{R_3 + 1/pC} = \frac{pCU_{12}(p)}{pCR_3 + 1} = \frac{pCE_1R_2R_3 + E_1R_2}{(pCR_3 + 1)p \left(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 + \frac{R_2 + R_1}{pC} \right)}.$$

Напряжение $U_C(p)$ примет вид

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_3(p) = \frac{pCE_1R_2R_3 + E_1R_2}{p(pCR_3 + 1) \left[pC(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3) + (R_2 + R_3) \right]}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$U_C(p) = \frac{1000}{p(p \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 20)} = \frac{10^3 / 3 \cdot 10^{-3}}{p \left(p + \frac{20}{3 \cdot 10^{-3}} \right)} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

4. С помощью таблицы, связывающей оригинал с его изображением, найдем оригинал:

$$\frac{F_1(p)}{pF_2(p)} \doteq u_C(t) = \frac{10^3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 20} (1 - e^{-\frac{20}{3 \cdot 10^{-3}} t}) = 50(1 - e^{-0,610^4 t}) \text{ В.}$$

Пример 31. Операторным методом определить ток $i_4(t)$ в схеме на рис. 124, если $J = 2 \text{ А}$, $R_1 = R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$.

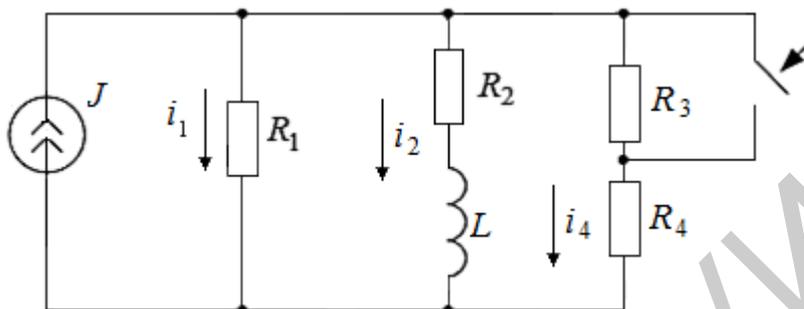


Рис. 124

Решение:

1. Независимое начальное условие, т. е. $i_L(0-) = i_L(0) = 0,5 \text{ А}$, определено в примере 12.
2. Операторная схема замещения приведена на рис. 125.

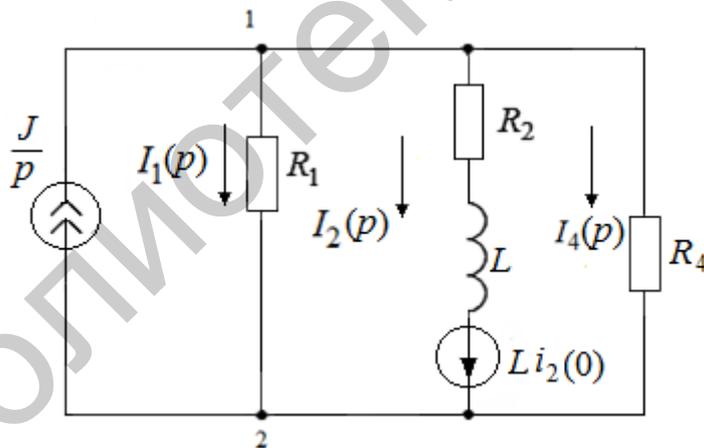


Рис. 125

3. Методом двух узлов определим напряжение:

$$U_{12}(p) = \varphi_1(p) - \varphi_2(p) = \frac{\frac{J}{p} - \frac{Li_2(0)}{R_2 + pL}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + pL}} =$$

$$= \frac{p[R_1 R_4 L J - R_1 R_4 i_2(0)L] + R_1 R_2 R_4}{p^2 L(R_1 + R_4) + p(R_1 R_4 + R_2 R_1 + R_2 R_4)}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$U_{12}(p) = \frac{p6 + 32}{p(p4 + 20)} = \frac{p3 + 16}{p(2p + 10)} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

4. Осуществим переход во временную область с помощью теоремы разложения.

В данном случае $F_1(p) = p3 + 16$, $F_2(p) = 2p + 10$.

Вычисляем корень:

$$F_2(p) = 2p + 10 = 0;$$

$$p_1 = -5 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем:

$$F_1(0) = (3p + 16)_{p=0} = 16;$$

$$F_2(0) = (2p + 10)_{p=0} = 10;$$

$$F_1(p_1) = (3p + 16)_{p_1=-5} = 1;$$

$$F_2'(p_1) = 2.$$

Подставляя найденные значения в формулу для нахождения оригинала по изображению, получим

$$U_{12}(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)} = \frac{p3 + 16}{p(2p + 10)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_2'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{8}{5} - \frac{1}{10} e^{-5t} \text{ В.}$$

Тогда ток $i_4(t)$ запишем следующим образом:

$$i_4(t) = \frac{u_{12}(t)}{R_4} = \frac{4}{5} - \frac{1}{20} e^{-5t} \text{ А.}$$

Пример 32. Операторным методом определить ток $i_2(t)$ в схеме на рис. 126, если $J(t) = 2 \sin(250t + 90^\circ)$ А, $R = R_1 = R_2 = 100$ Ом, $C = 100$ мкФ.

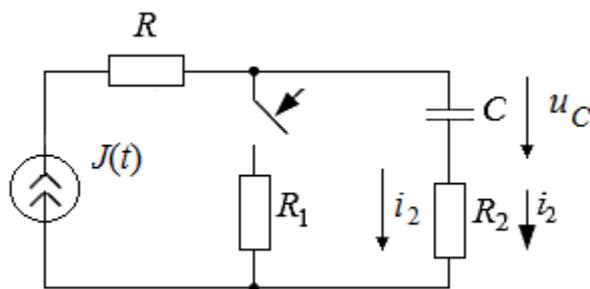


Рис. 126

Решение. Так как операторное изображение синусоидальной величины имеет достаточно сложное выражение, то в данной задаче целесообразно операторным методом рассчитать свободную составляющую $u_{C\text{св}}$.

1. Определим напряжение на ёмкости $u_{C\text{св}}(0)$ для свободной составляющей, пользуясь результатами, полученными в примере 17:

$$u_{C\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C\text{у}}(0) = 0 - 7,68 = -7,68 \text{ В}.$$

2. Операторная схема замещения для свободных составляющих приведена на рис. 127.

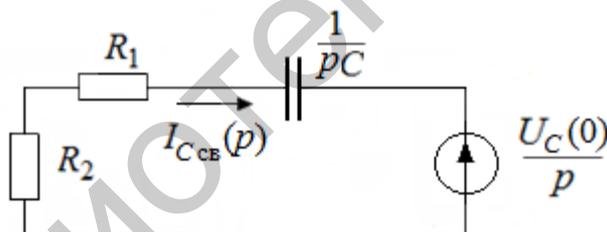


Рис. 127

3. Операторный ток $I_{2\text{св}}(p)$ для свободной составляющей будет равен

$$I_{2\text{св}}(p) = \frac{-\frac{u_{C\text{св}}(0)}{p}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{-u_{C\text{св}}(0)C}{pC(R_1 + R_2) + 1} = \frac{\frac{u_{C\text{св}}(0)}{R_1 + R_2}}{p + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$I_{2\text{св}}(p) = \frac{7,68 \cdot 10^{-4} \cdot 50}{p + 50} \text{ В} \quad \& \quad i_{2\text{св}}(t) = 7,68 \cdot 10^{-4} \cdot 50 e^{-50t} = 0,0384 e^{-50t}.$$

Пример 33. Операторным методом определить ток $i_3(t)$ в схеме на рис. 128, если $E_1=10$ В, $E_2=20$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом, $C = 1$ мкФ.

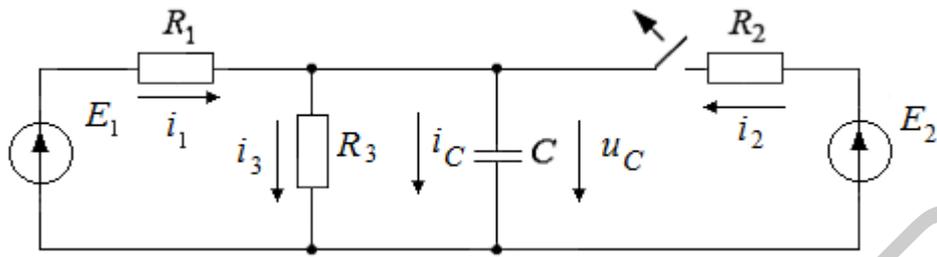


Рис. 128

Решение:

1. Независимое начальное условие $u_C(0)$ было определено в примере 13 и равно $u_C(0) = 10$ В.

2. Составим операторную схему замещения (рис. 129), где $E_1 = 10$ В, $C = 1$ мкФ, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом.

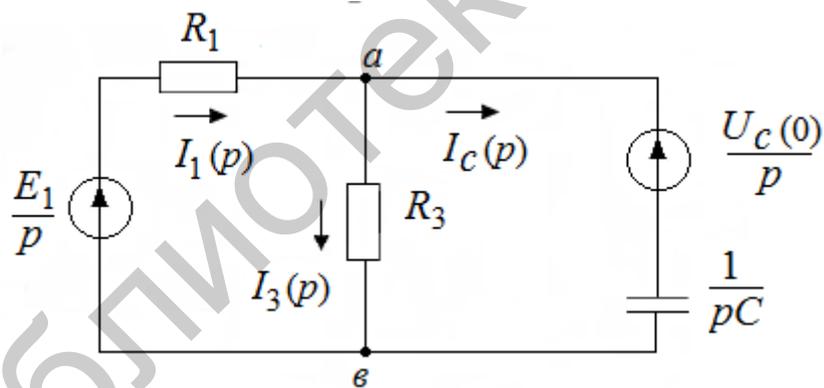


Рис. 129

3. Методом двух узлов определим напряжение:

$$U_{12}(p) = \frac{\frac{E_1}{p} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{u_C(0)}{p} pC}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + pC} = \frac{pR_1R_3C^2u_C(0) + E_1R_3C}{p[pR_1R_3C^2 + C(R_1 + R_3)]}$$

Тогда операторное выражение для тока $I_3(p)$ примет вид

$$I_3(p) = \frac{U_{12}(p)}{R_3} = \frac{pR_1C^2u_C(0) + E_1C}{p[pR_1R_3C^2 + C(R_1 + R_3)]}$$

$$I_3(p) = \frac{p10 \cdot 10^{-12} \cdot 10 + 10 \cdot 10^{-6}}{p[p10 \cdot 10 \cdot 10^{-12} + 10^{-6} \cdot 20]} = \frac{p10^{-5} + 1}{p[p10^{-5} + 2]} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}$$

4. Осуществим переход во временную область с помощью теоремы разложения.

В данном случае $F_1(p) = p10^{-5} + 1$; $F_2(p) = p \cdot 10^{-5} + 2$.

Вычисляем корень

$$F_2(p) = p \cdot 10^{-5} + 2 = 0;$$

$$p_1 = -2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем

$$F_1(0) = (p10^{-5} + 1)_{p=0} = 1;$$

$$F_2(0) = (p10^{-5} + 2)_{p=0} = 2;$$

$$F_1(p_1) = (p10^{-5} + 1)_{p_1=-2 \cdot 10^5} = -1;$$

$$F_2'(p_1) = 10^{-5}.$$

Подставляя найденные значения в формулу, получим

$$I_3(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)} = \frac{p10^{-5} + 1}{p[p10^{-5} + 2]} \doteq \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_1)}{pF_2'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{1}{2} + \frac{-1}{-2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}} e^{-2 \cdot 10^5 t} = 0,5 + 0,5e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А.}$$

Пример 34. Операторным методом определить ток $i_1(t)$ в схеме на рис. 130, если $E_1 = 10 \text{ В}$, $J_1 = 10^{-3} \text{ А}$, $R_1 = R_2 = 10^4 \text{ Ом}$, $R_3 = 16 \cdot 10^3 \text{ Ом}$, $C = 10^{-8} \text{ мФ}$.

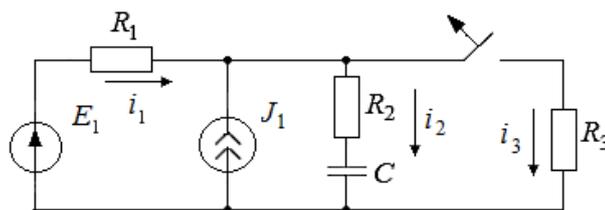


Рис. 130

Решение. 1. До коммутации напряжение на ёмкости определим методом двух узлов $E_1 = 10$ В, $J_1 = 10^{-3}$ А, $R_1 = R_2 = 10^4$ Ом, $R_3 = 16 \cdot 10^3$ Ом, $C = 10^{-8}$ мФ.

2. Операторная схема замещения будет иметь вид, как показано на рис. 131.

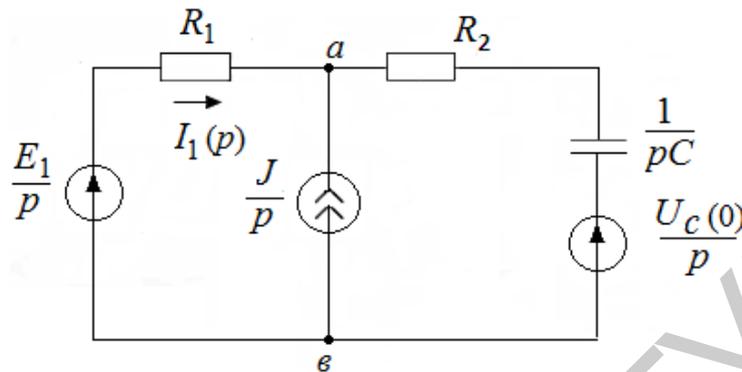


Рис. 131

3. По методу узловых напряжений

$$u_{ab}(0_-) = \frac{\frac{E_1}{p} + \frac{J_1}{p} + \frac{u_C(0)}{p(R_2 + 1/pC)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + 1/pC}} =$$

$$= \frac{E_1(pCR_2 + 1) + J_1R_1(pCR_2 + 1) + u_C(0)R_1C - J_1R_1}{p(pR_2C + 1 + pR_1C)}.$$

Операторное выражение для тока $I_1(p)$ будет

$$I_1(p) = \frac{\frac{E_1}{p} - U_{ab}(p)}{R_1} = \frac{p(E_1R_1C - J_1R_1R_2C - u_C(0)R_1C) - J_1R_1}{pR_1[p(R_1 + R_2)C + 1]} =$$

$$= \frac{-12,3 \cdot 10^{-4} p - 10}{p(2p + 10^4)} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

4. Осуществим переход во временную область с помощью теоремы разложения.

В данном случае $F_1(p) = -12,3 \cdot 10^{-4} p - 10$, $F_2(p) = 2p + 10^4$.

Вычисляем корень

$$F_2(p) = 2p + 10^4 = 0;$$

$$p_1 = -0,5 \cdot 10^4.$$

Определяем

$$F_1(0) = (-12,3 \cdot 10^{-4} p - 10)_{p=0} = -10;$$

$$F_2(0) = (2p + 10^4)_{p=0} = 10^4;$$

$$F_1(p_1) = (-12,3 \cdot 10^{-4} p - 10)_{p_1=-0,5 \cdot 10^4} = -3,85;$$

$$F_2'(p_1) = 2.$$

Подставляя полученные значения в формулу для определения оригинала, получим

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{F_1(p)}{pF_2(p)} = \frac{-12,3 \cdot 10^{-4} p - 10}{p(2p + 10^4)} \doteq \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_1)}{pF_2'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{-10}{10^4} + \frac{-3,85}{-0,5 \cdot 10^4 \cdot 2} e^{-5 \cdot 10^3 t} = \\ &= -10^{-3} + 0,985 \cdot 10^{-3} e^{-5 \cdot 10^3 t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Пример 35. Решить задачу примера 18 операторным методом. Определить ток $i_1(t)$ в схеме на рис. 132, если $e(t) = 100 \sin(2500t - 45^\circ)$ В, $J = 1$ А, $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, $L = 0,01$ Гн.

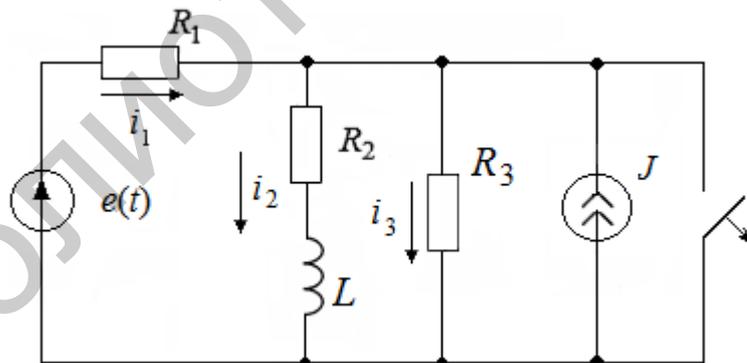


Рис. 132

Решение. Так как операторное изображение синусоидальной величины имеет достаточно сложное выражение, то целесообразно операторным методом рассчитать свободную составляющую тока $i_{cb}(t)$.

1. Определим ток через индуктивность $i_{L\text{cb}}(0) = i_{2\text{cb}}(0)$ для свободной составляющей, пользуясь результатом примера 18:

$$i_{2\text{св}}(0) = i_2(0) - i_{2\text{y}}(0) = -i_{2\text{y}}(0) = -(0,25 - 0,20027) = -0,0473 \text{ А.}$$

2. Операторная схема замещения для определения свободной составляющей имеет вид, как показано на рис. 133.

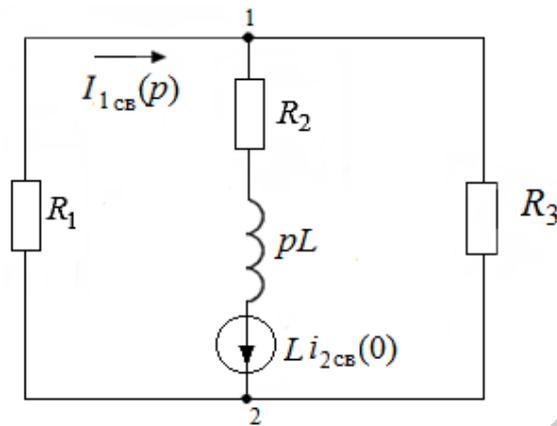


Рис. 133

3. Операторный ток $I_{1\text{св}}(p)$ для свободной составляющей найдём, используя метод двух узлов:

$$U_{21}(p) = \frac{\frac{Li_{2\text{св}}(0)}{R_2 + pL}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + pL}} = \frac{Li_{2\text{св}}(0)R_1R_3}{pL(R_1 + R_3) + (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}.$$

Тогда

$$I_{1\text{св}}(p) = \frac{U_{21}(p)}{R_1} = \frac{Li_{2\text{св}}(0)R_3}{pL(R_1 + R_3) + R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{-0,02365}{p1,5 + 2 \cdot 10^4} =$$

$$= \frac{-0,01577}{p + 13333,3(3)} \doteq i_{1\text{св}}(t) = -0,01577e^{-13333,3(3)t} \text{ А.}$$

2.3. Связь операторных передаточных функций цепи с временными характеристиками

Для четырёхполюсника рассматривают операторную передаточную функ-

цию по напряжению $K_U(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)}$, по току $K_I(p) = \frac{I_{\text{ВЫХ}}(p)}{I_{\text{ВХ}}(p)}$, операторное

передаточное сопротивление $Z_{21}(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{I_{\text{ВХ}}(p)}$ и операторную передаточную

проводимость $Y_{21}(p) = \frac{I_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)}$. Для двухполюсника это операторное входное

сопротивление $Z(p) = \frac{U_{\text{ВХ}}(p)}{I_{\text{ВХ}}(p)}$ и проводимость $Y(p) = \frac{I_{\text{ВХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{1}{Z(p)}$.

При замене у комплексной передаточной функции $K(j\omega)$ переменной $j\omega$ оператором p получают операторную передаточную функцию:

$$K(p) = K(j\omega) \Big|_{j\omega=p}.$$

Связь между операторной передаточной функцией $K(p)$ и временными характеристиками $h(t)$ и $k(t)$ следует из уравнения $K(p) = \frac{X(p)}{F(p)}$ (рис. 134).

Так как изображение единичной функции включения $1(t) \doteq \frac{1}{p}$ (рис. 135), то для переходной характеристики $h(t) \doteq H(p) = \frac{K(p)}{p}$. Если изображение дельта-функции $\delta(t) \doteq 1$ (рис. 136), то импульсная характеристика $k(t)$ имеет изображение $K(p)$, т. е. $k(t) \doteq K(p)$.

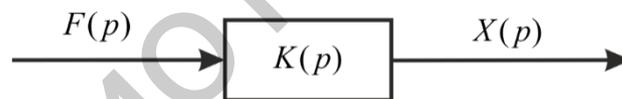


Рис. 134

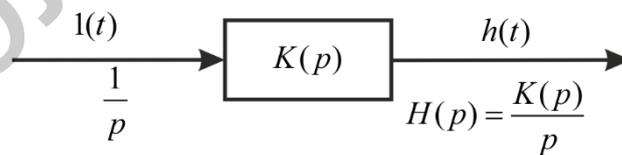


Рис. 135

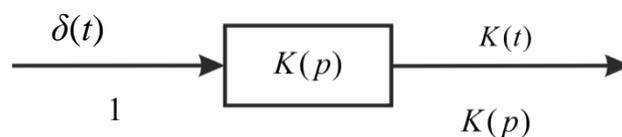


Рис. 136

Пример 36. На рис. 137 $R_1 = R_2 = 8$ кОм; $L = 2$ Гн. Найти операторную передаточную функцию по напряжению $K_U(p)$ и временные характеристики $h(t)$ и $k(t)$. Построить графики $h(t)$ и $k(t)$.

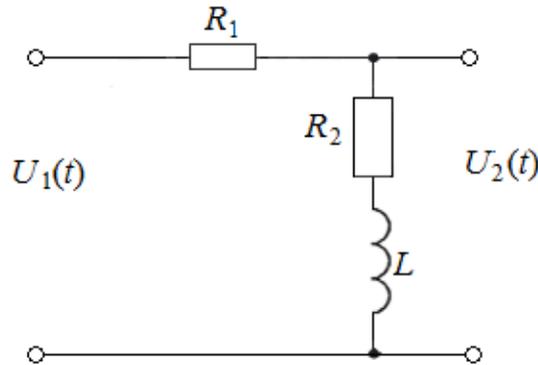


Рис. 137

Решение. Операторная передаточная функция по напряжению

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2 + pL}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{R_2}{L(p + \alpha)} + \frac{p}{p + \alpha},$$

где $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{L} = \frac{1}{\tau_{II}} = 8 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Импульсная характеристика $k(t) \doteq K(p)$.

Из преобразований Лапласа (см. прил. 4) следует, что

$$k(t) = \delta(t) - 4 \cdot 10^3 e^{-8 \cdot 10^3 t} \text{ с}^{-1}.$$

Переходная характеристика $h(t) \doteq \frac{K(p)}{p} = \frac{R_2}{pL(p + \alpha)} + \frac{1}{p + \alpha}$. Используя

прил. 4, получим $h(t) = 0,5(1 + e^{-8 \cdot 10^3 t})$.

Графики $h(t)$ и $k(t)$ представлены на рис. 138.

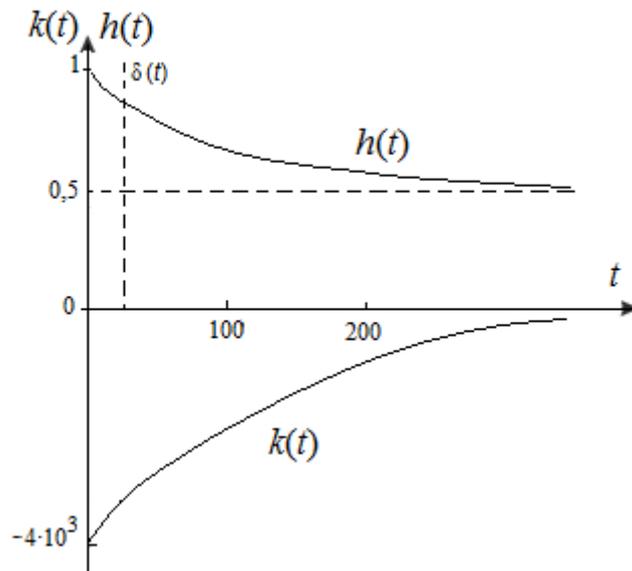


Рис. 138

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. В схеме на рис. 139 $E = 200$ В; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 400$ Ом; $C = 5$ мкФ.

Операторным методом найти $U_C(t)$.

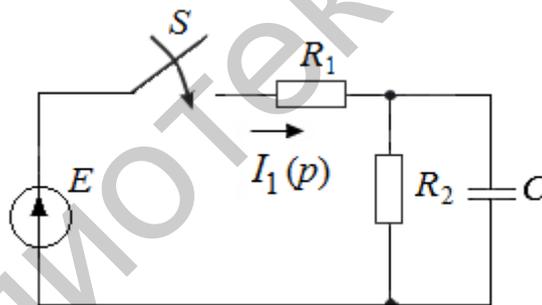


Рис. 139

2. В схеме на рис. 140 $E = 100$ В; $R = 100$ Ом; $C = 1$ мкФ; $L = 1$ мГн.

Операторным методом найти $i_L(t)$.

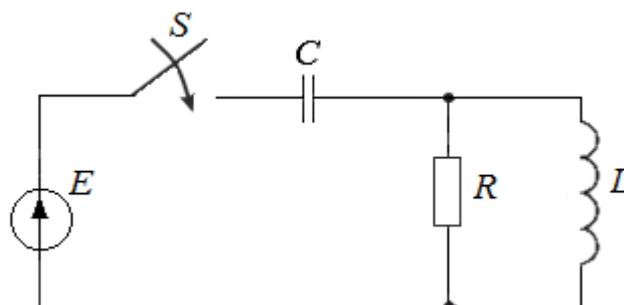


Рис. 140

3. В схеме на рис. 141 $E = 100$ В; $R_1 = 0,5$ кОм; $R_2 = 1$ кОм; $L = 1$ мГн; $C = 0,1$ мкФ. Найти $i_L(t)$ операторным методом.

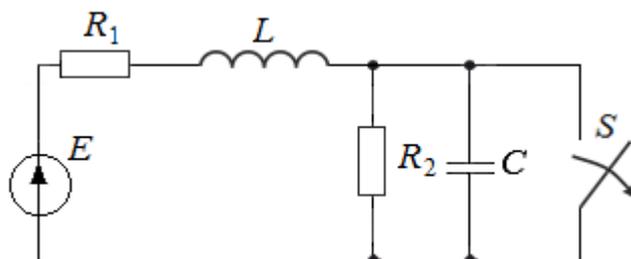


Рис. 141

4. В схеме на рис. 142 $e(t) = 150\sin(314t + 60^\circ)$ В; $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $L = 0,15$ Гн; $C = 25 \cdot 10^{-5}$ Ф. Найти $U_L(t)$ операторным методом.

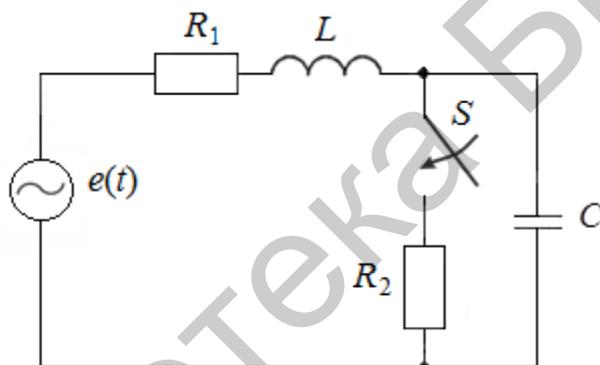


Рис. 142

5. В схеме на рис. 143 $E = 200$ В; $U_C(0) = 100$ В; $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $C = 1000$ мкФ. Найти ток в конденсаторе $i_C(t)$ операторным методом.

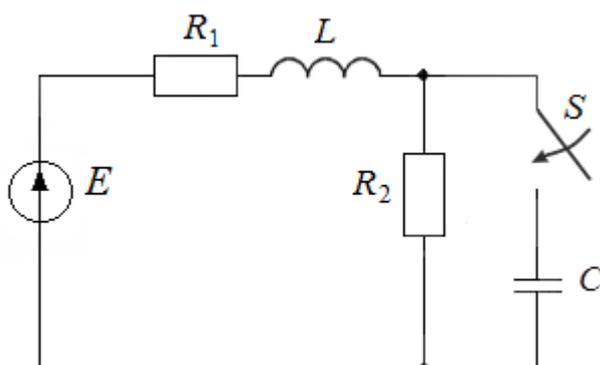


Рис. 143

6. В схеме на рис. 144 $R_1 = R_2 = 8$ кОм; $L = 2$ Гн. Найти передаточную операторную функцию $K_i(p)$ и временные характеристики $h_i(t)$ и $k_i(t)$ по току.

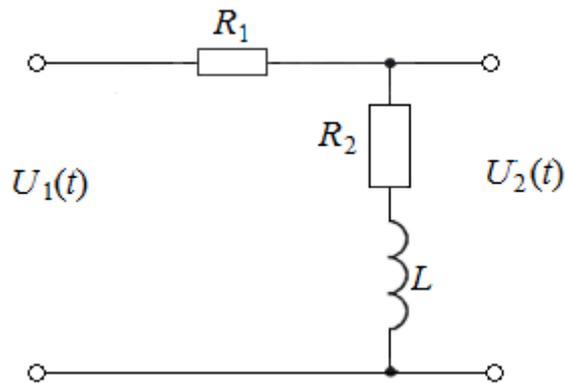


Рис. 144

7. В схеме на рис. 145 $R = 200$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $C = 100$ пФ. Найти операторную передаточную функцию $K(p)$ и временные характеристики $h(t)$ и $k(t)$ по напряжению.

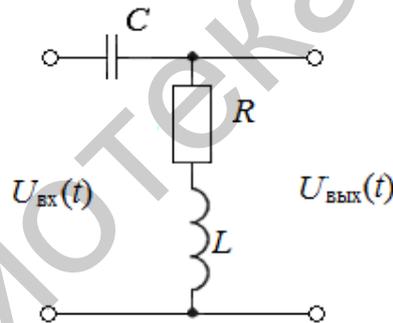


Рис. 145

8. В схеме на рис. 146 $R_1 = 3$ кОм; $R_2 = 6$ кОм; $C = 2$ мкФ. Найти операторную передаточную функцию $K(p)$ и временные характеристики $h(t)$ и $k(t)$ по напряжению.

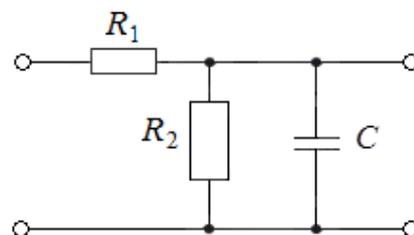


Рис. 146

9. В схеме на рис. 147 $L=0,1$ Гн; $C=1000$ пФ; $R=200$ Ом. Найти операторную передаточную функцию $K(p)$ и импульсную характеристику $k(t)$ по напряжению.

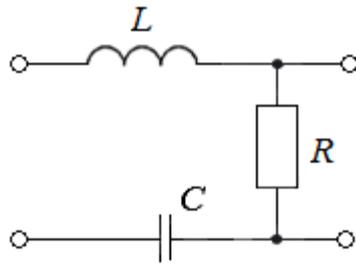


Рис. 147

10. В схеме на рис. 148 $L=1,33$ Гн; $C=100$ мкФ; $R=20$ Ом. Найти операторную передаточную проводимость $Y_{21}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}$ и по ней – импульсную характеристику цепи.

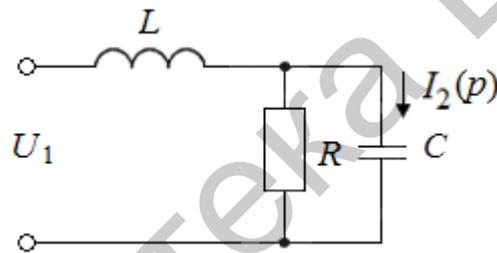


Рис. 148

11. В схеме на рис. 149 $L=1$ Гн; $C=0,1$ мкФ; $R=1$ кОм. Найти операторную проводимость $Y_{21}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}$ и по ней – переходную характеристику цепи.

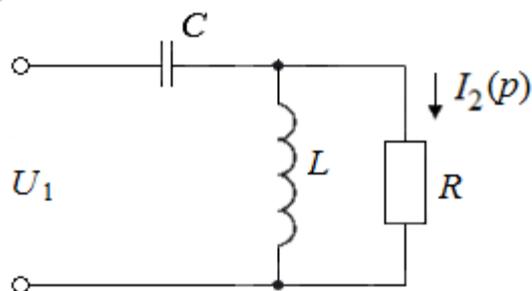


Рис. 149

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

К пункту 1.1.1

1. Графики $U_{C_{CB}}(t) = 60e^{-33,3t}$ В и $i_{C_{CB}}(t) = -0,004e^{-33,3t}$ А приведены на рис. 150.

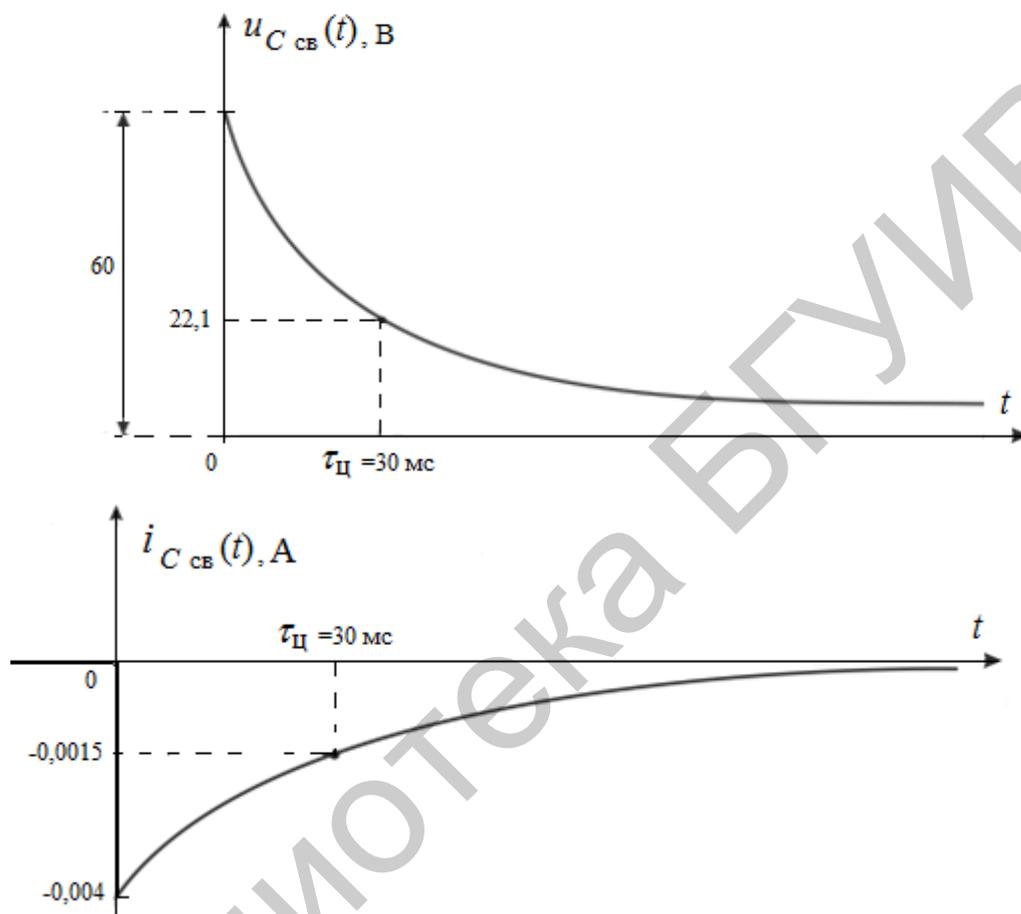


Рис. 150

2. $U_{C_2CB}(t) = 40e^{-6,5 \cdot 10^3 t} - 1,65e^{-159 \cdot 10^3 t}$ В.

3. $i_{L_2CB}(t) = 1,7e^{-1,2 \cdot 10^3 t} - 0,47e^{-9,8 \cdot 10^3 t}$ А.

4. Графики $i_{L_{CB}}(t) = 1,3e^{-110t}$ А и $U_{L_{CB}}(t) = -14,6e^{-110t}$ В приведены на рис. 151.

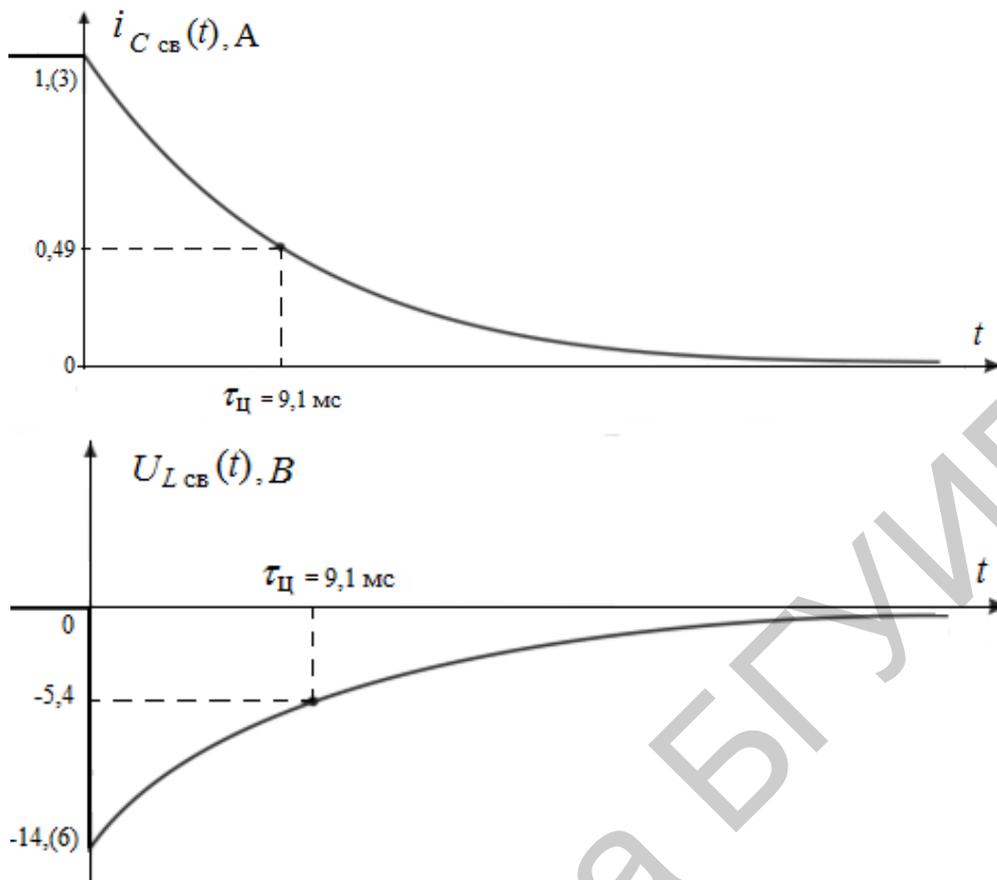


Рис. 151

5. График $U_{C_{CB}}(t) = 72e^{-0,5 \cdot 10^3 t}$ В приведён на рис. 152.

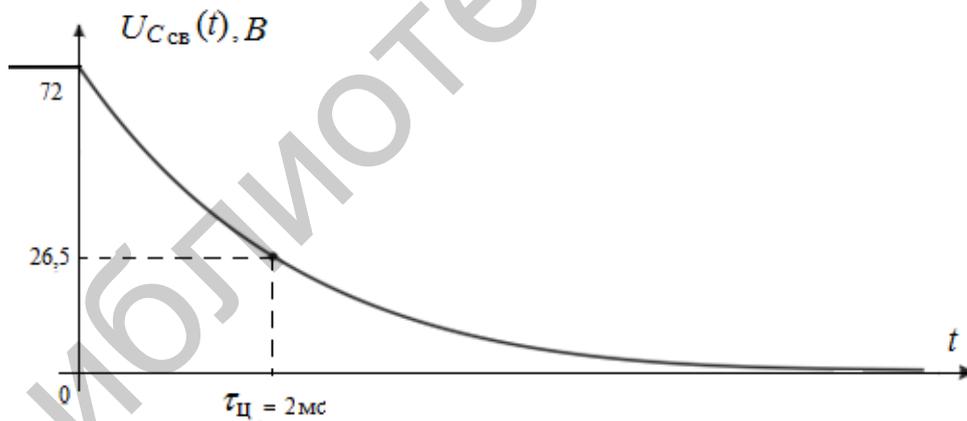


Рис. 152

К пункту 1.1.2

6. Графики $U_C(t) = (-20e^{-5000t} + 120) \text{ В}$ и $i_C(t) = 0,002e^{-5000t} \text{ А}$ приведены на рис. 153.

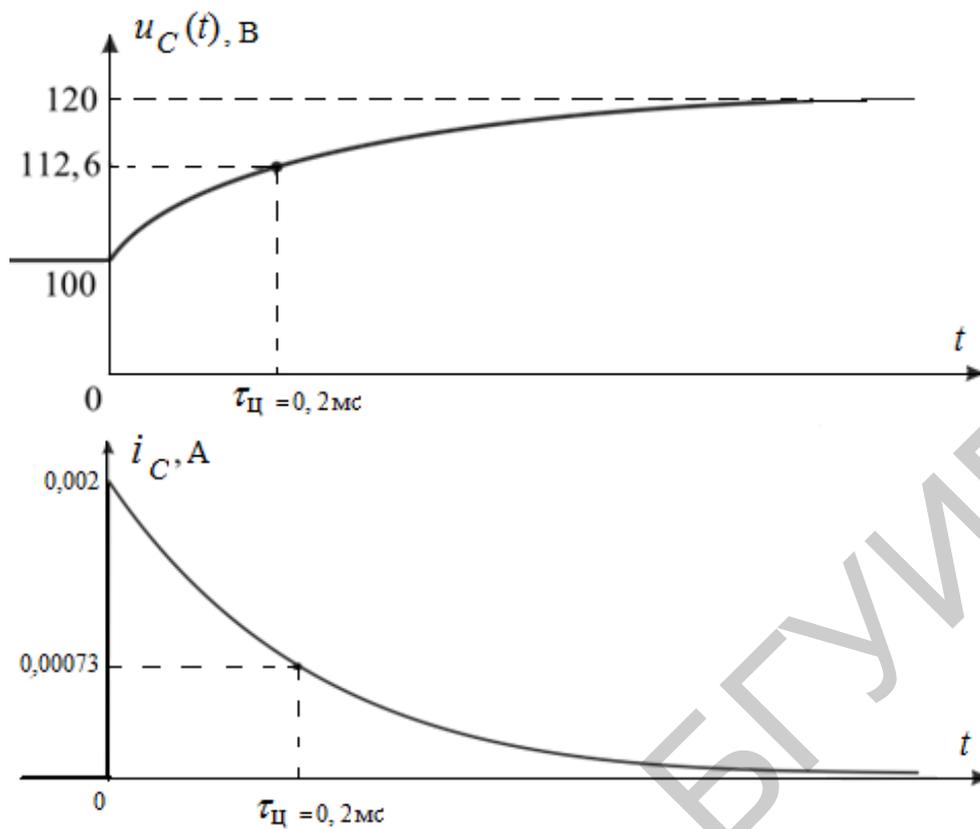


Рис. 153

7. Графики $i_L(t) = [6,7e^{-33,(3)t} + 10]$ А и $U_L(t) = [-133,(3)e^{-33,(3)t}]$ В приведены на рис. 154.

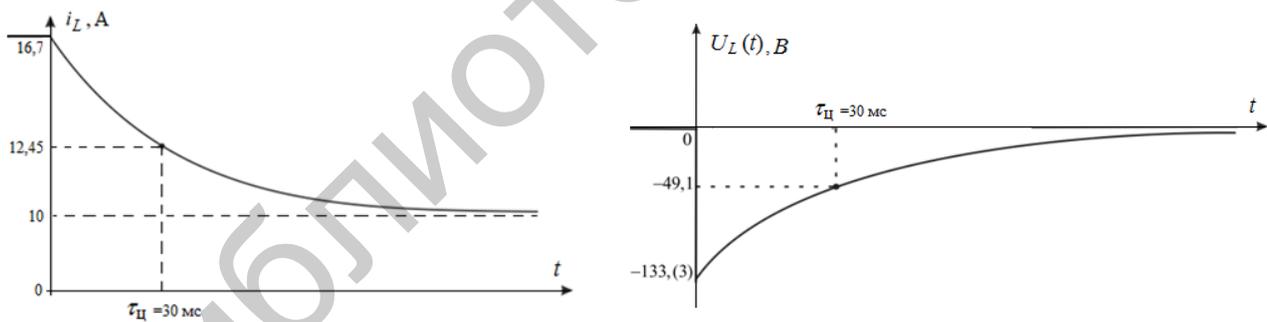


Рис. 154

8. Графики $i_L(t) = [-0,9697 \cdot 10^{-3} e^{-0,75t} + 5,(3) \cdot 10^{-3}]$ А и $U_L(t) = 30e^{-0,75t}$ В приведены на рис. 155.

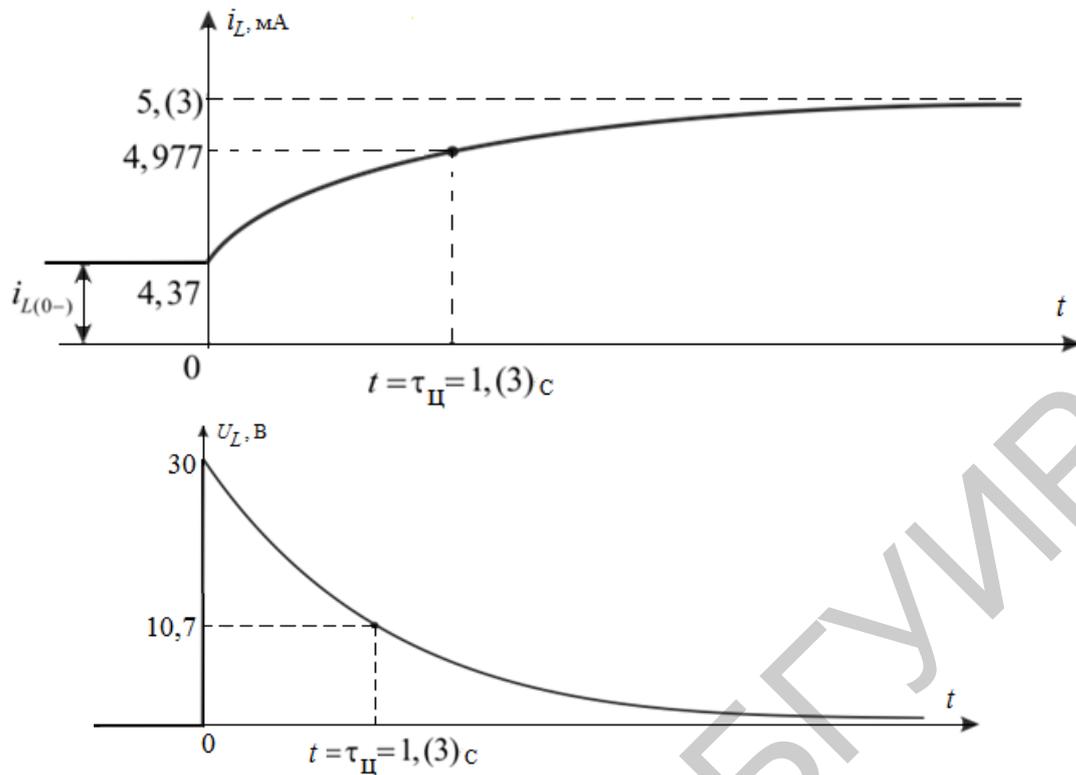


Рис. 155

9. Графики $i_L(t) = [0,6 \cdot 10^{-3} e^{-10^6 t} + 6 \cdot 10^{-3}]$ А и $U_L(t) = 12 e^{-10^6 t}$ В приведены на рис. 156.

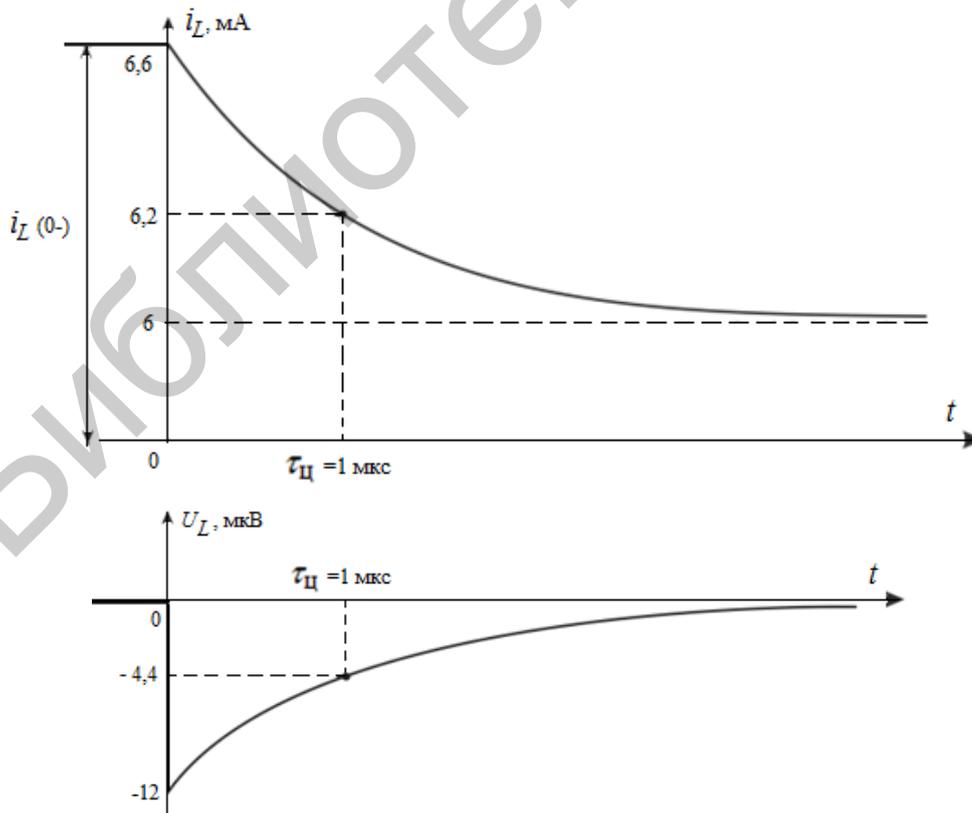


Рис. 156

10. Графики $U_C(t) = [-25e^{-16666,6t} + 100]$ В и $i_C(t) = 8,3 \cdot 10^{-4} e^{-16666,6t}$ А приведены на рис. 157.

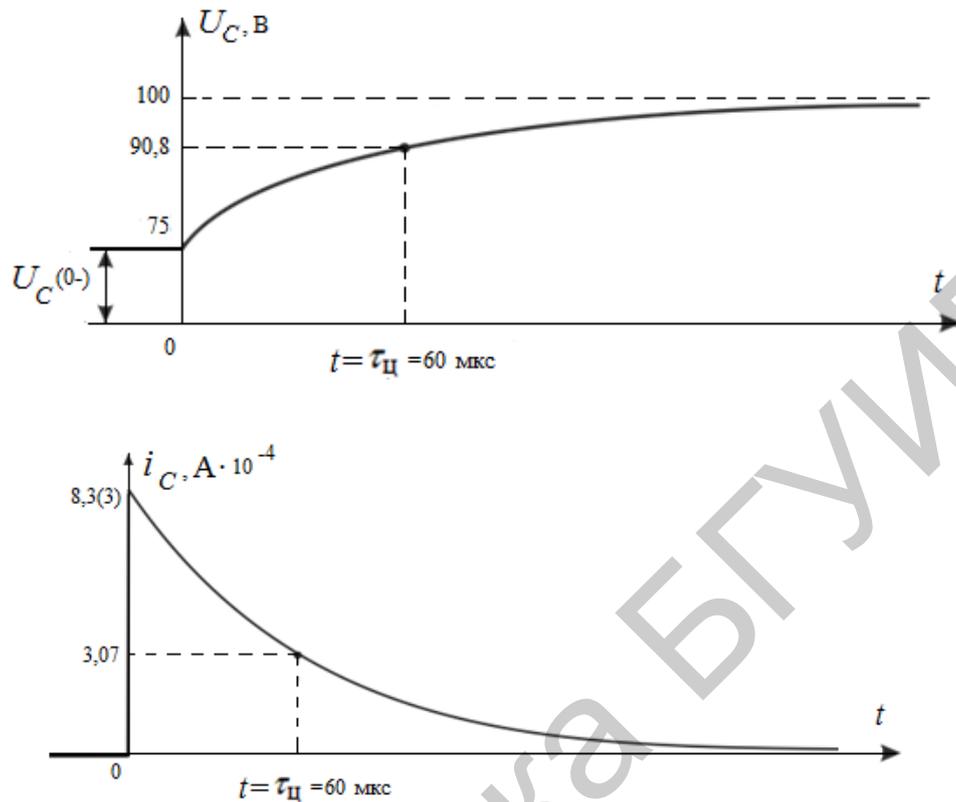


Рис. 157

11. Графики тока $i_L(t) = [-0,4e^{-93,75 \cdot 10^4 t} + 6,4] \cdot 10^{-3}$ А и напряжения $U_L(t) = 3,75e^{-93,75 \cdot 10^4 t}$ В приведены на рис. 158.

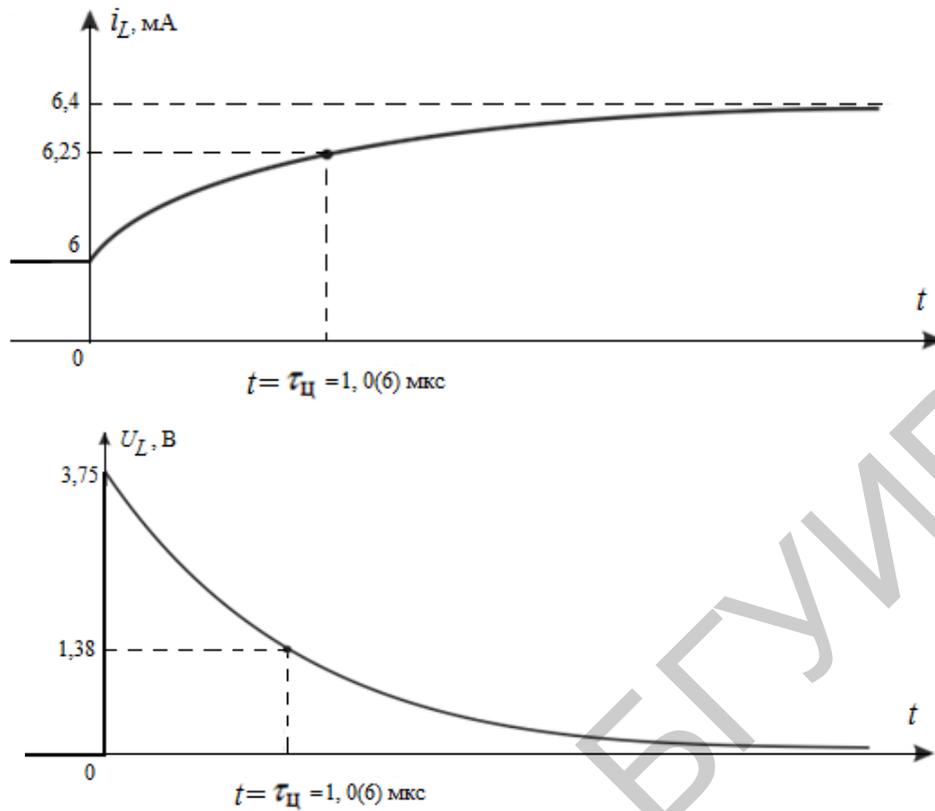


Рис. 158

К пункту 1.1.3

$$12. \tau_{\text{и}} = C \left[R_2 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} \right] = 0,1 \cdot 10^{-6} \left[20 + \frac{10(30 + 40)}{10 + 30 + 40} \right] = 2,875 \text{ мкс.}$$

$$13. \tau_{\text{и}} = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0,2}{20 + 40} = 3,3(3) \text{ мс.}$$

$$14. \tau_{\text{и}} = CR_{\text{экв}} = C \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

$$15. I_L = 1 - e^{-300t} \text{ А; } I_{R_2} = 1 + 0,5e^{-300t} \text{ А.}$$

$$16. \tau_{\text{и}} = \frac{L}{R_L + R} = 0,125 \text{ с; } i_L(0-) = i_L(0+) = 10 \text{ А;}$$

$$i(t) = i_L(0+)e^{\frac{-t}{\tau_{\text{и}}}} = 10e^{-8t} \text{ А; } U(t) = 10 \cdot 0,3e^{\frac{-t}{\tau_{\text{и}}}} = 3e^{-8t} \text{ В.}$$

$$17. U_C(t) = \frac{E}{2}(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{\text{и}}}}) = 45(1 - e^{-10^4 t}) \text{ В; } \tau_{\text{и}} = 10^{-4} \text{ с.}$$

К пункту 1.1.4

$$18. \text{График } i_L(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{\frac{-R_2 t}{L}} = 0,13e^{-28,5 \cdot 10^3 t} \text{ А приведён на рис. 159.}$$

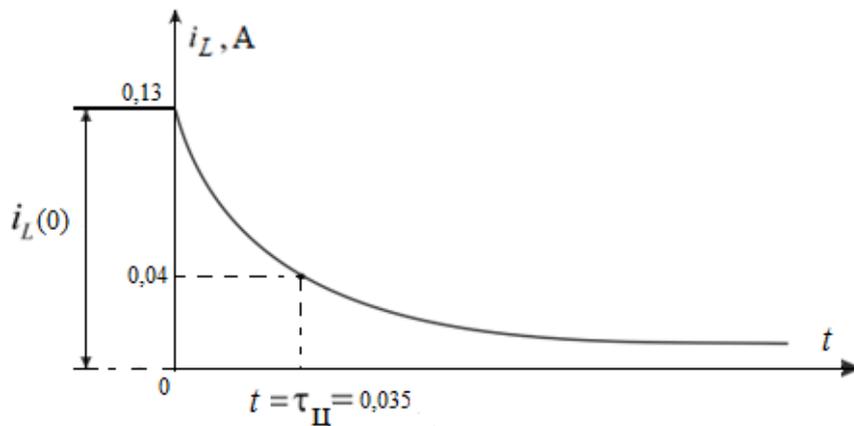


Рис. 159

19. $I_1(t) = 1,5 + 0,5e^{-400t}$ А; $I_2(t) = e^{-400t}$ А; $I_3(t) = 1,5 - 0,5e^{-400t}$ А;

$U(t) = 75 - 25e^{-400t}$ В.

20. а) $U_C(t) = 75 - 75e^{-10^3t}$ В; $i_C(t) = 0,05e^{-10^3t}$ А;

б) $U_C(t) = 90 - 60e^{-940t}$ В; $i_C(t) = 0,0375e^{-940t}$ А.

21. $U_C(t) = 20 - 20e^{-100t}$ В; $i_C = e^{-100t}$ мА; $i_R(t) = 1 - e^{-100t}$ мА.

22. $U_C(t) = 20 - 20e^{-100t}$ В; $i_C = 0,04e^{-100t}$ А.

К подразделу 1.2

23. $i_L(t) = i_{L_{CB}}(t) + i_{L_{пр}}(t) = 8,45e^{-210t} + 35,2\sin(\omega t - 106^{\circ}20')$ А.

24. $U_C(t) = 5 \left[\sin(\omega t + 22^{\circ}40') - 0,385e^{0,083 \cdot 10^{-6}t} \right]$ мВ.

25. Сумма: $U(t) = 300\sin(628t + 150^{\circ})$ В.

Разность: $U(t) = 130\sin(628t + 85^{\circ})$ В.

26. Общий ток цепи: $i(t) = 14,6e^{j6^{\circ}}$ А.

27. Показания амперметра: 10 А.

Показания вольтметра: 120 В.

К подразделу 1.3

28. $U_C(t) = 35e^{-1250t} \cos(1203 \cdot 10^2 t - 27^{\circ})$ В.

29. Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right) \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U_C = \frac{R_2}{R_1 LC} E.$$

$$U_C(t) \approx E \frac{R_2}{R_1} (1 - e^{-\delta t} \cos \omega_0 t), \text{ где } \delta = 6,75 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}; \omega_0 = 3,16 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1};$$

$$U_{C \max} = 28 \cdot 10^{-4} (1 + e^{-6,75 \cdot 10^4 \cdot 0,49 \cdot 10^{-6}}) = 28 \cdot 10^{-4} (1 + e^{-0,033}) = 55 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 5,5 \text{ мВ}.$$

30. $i_{L_{CB}}(t) = 0; p_1 = -10^3 \text{ с}^{-1}; p_2 = -3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$

31. $U_C(t) = (40 + 24e^{-10^5 t} - 16e^{-1,5 \cdot 10^5 t}) \text{ В}.$

32. $i_L(t) = i_{L_{CB}} + i_{L_{IP}} = (-0,328e^{-42,1t} \sin 15,2t + 2) \text{ А}.$

К подразделу 1.4

33. $i_L(t) = \frac{E_m}{Z_1} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi_1) - \sin(\psi - \varphi_1) e^{-\delta t} \right] \text{ А},$

где $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}; \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{R_1}; \delta = \frac{R_1}{2L}.$

34. $i_L(t) = 4,58 \sin(300t + 7^\circ 45') - (0,044 + 35,76t) e^{-222t} \text{ А};$

$$i_C(t) = 4,325 \sin(300t + 28^\circ 48') - (0,41 + 71,52t) e^{-222t} \text{ А};$$

$$i_{R_2+R_3}(t) = 1,65 \sin(300t - 63^\circ 05') + (0,366 + 35,76t) e^{-222t} \text{ А}.$$

35. $U_C(t) = \left[50(1 + e^{-10^4 t}) \sin \omega t \right] \text{ В}.$

36. $U_C(t) \approx 100 \cos(300t - 18,43^\circ) e^{-100t} \text{ В}.$

37. $i_C(t) = -(0,0065 + 92,5t) e^{-5000t} \text{ А}; i_L(t) = -(0,0435 + 92,5t) e^{-5000t} \text{ А};$

$$i_R(t) = (0,05 + 185t) e^{-5000t} \text{ А}.$$

К пункту 1.5.1

$$38. h(t) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(t)}{U_{\text{ВХ}}(t)} = \frac{CR_2}{\tau_{\text{ц}}} e^{\frac{-t}{\tau_{\text{ц}}}} = 0,67e^{-33,3 \cdot 10^3 t}; \quad \tau_{\text{ц}} = C(R_1 + R_2) = 30 \text{ мкс};$$

$k(t) = h'(t) + h(0)\delta(t) = (-22,3 \cdot 10^3 e^{-33,3 \cdot 10^3 t} + 0,67\delta(t)) \text{ с}^{-1}$. Графики приведены на рис. 160.

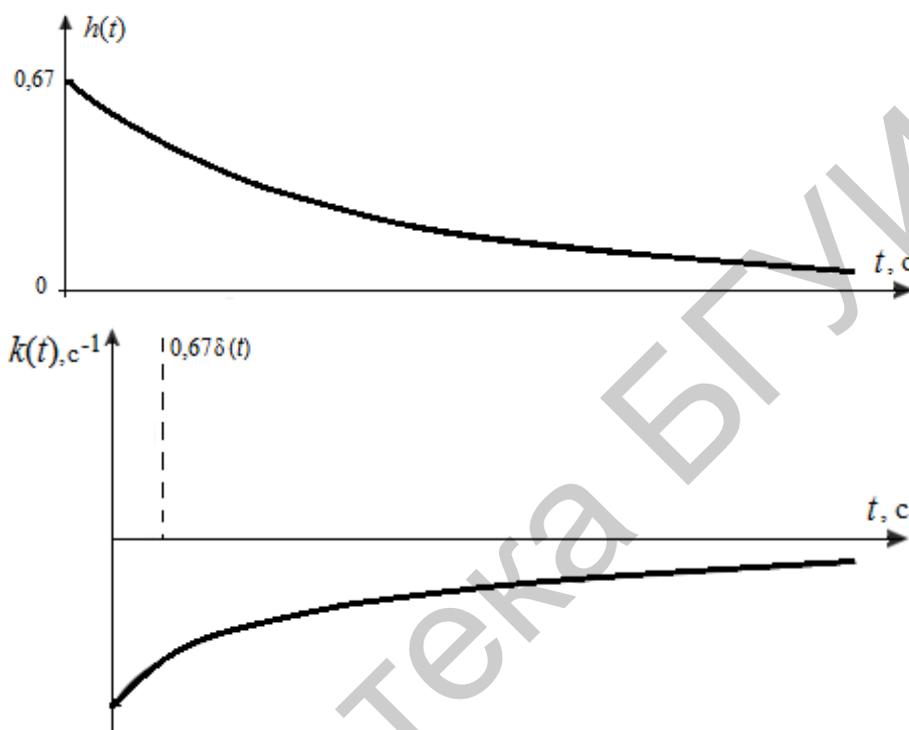


Рис. 160

$$39. h(t) = e^{-50t} \cos\left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 10^5 t\right); \quad k(t) = \left[-10^5 e^{-50t} \sin\left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 10^5 t\right) + \delta(t) \right] \text{ с}^{-1}.$$

$$40. h_U(t) = 0,5 - 0,7e^{-10^6 t} \cos(10^6 t - 45^\circ);$$

$$k_U(t) = 0,005\delta(t) + 7 \cdot 10^5 e^{-10^6 t} \cos(10^6 t - 45^\circ) + 7 \cdot 10^3 e^{-10^6 t} \sin(10^6 t - 45^\circ).$$

$$41. h_U(t) = 0,25 + 0,5e^{-50t}; \quad k_U(t) = 0,75\delta(t) - 25e^{-50t}.$$

$$42. h_U(t) = 1 - 0,45e^{-19 \cdot 10^5 t} + 0,45e^{-131 \cdot 10^5 t};$$

$$k_U(t) = \delta(t) + 8,55 \cdot 10^5 e^{-19 \cdot 10^5 t} - 5,9 \cdot 10^6 e^{-131 \cdot 10^5 t}.$$

К пункту 1.5.2

$$43. U_2(t) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3} e^{-\frac{2t}{3RC}} \right) \text{ В.}$$

44. $U_2(t) = -100e^{-t}$ В.

45. $U_2(t) = -100e^{-(t-t_1)}$ В.

46. Используя первую форму интеграла Дюамеля, получим

$$U_2(t) = 50(e^{-0,25t} - e^{-0,5t}) \text{ В.}$$

К подразделу 2.2

1. $p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -\frac{100 + 400}{100 \cdot 400 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = -2500 \text{ с}^{-1}; U_C(t) = 160(1 - e^{-2500t}) \text{ В.}$

2. $i_L(t) = 3,18e^{-5 \cdot 10^3 t} \sin 3,14 \cdot 10^4 t \text{ А.}$

3. $p_1 = -0,32 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}; p_2 = -4,78 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1};$

$i_L(t) = 66,7(1 + 2,14e^{-0,32 \cdot 10^5 t} - 0,14e^{-4,78 \cdot 10^5 t}) \text{ А.}$

4. $U_L(t) = 157 \sin(314t + 81^\circ) + 92,6e^{-267t} - 57e^{-200t} \text{ В.}$

5. $p_1 = -100 + j100; p_2 = -100 - j100; i_L(t) = 20\sqrt{2}e^{-100t} \sin(100t + 45^\circ) \text{ А.}$

К подразделу 2.3

6. Операторная передаточная функция

$$K_i(p) = \frac{1}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{p + \alpha},$$

где $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{L} = \frac{1}{\tau_{ц}} = 8 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$

Импульсная характеристика

$$K_i(t) \doteq K_i(p), K_i(t) = \frac{1}{L} e^{-\alpha t} = 0,5e^{-8 \cdot 10^3 t} \text{ См/с.}$$

Переходная характеристика

$$h_i(t) \doteq \frac{K_i(p)}{p}; h_i(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\alpha t}) = 62,5 \cdot 10^{-6} (1 - e^{-\alpha t}) \text{ См.}$$

7. Операторная передаточная функция

$$K(p) = \frac{R + pL}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} + 2\delta \frac{p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

где $2\delta = \frac{R}{L} = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

Импульсная характеристика

$$K(t) \doteq K(p), \quad K(t) = \delta(t) - e^{-10^6 t} \sin(10^7 t - 84^\circ 25').$$

Переходная характеристика

$$h(t) \doteq K(p)/p, \quad h(t) = e^{-10^6 t} \sin(10^7 t - 84^\circ 25').$$

8. Операторная передаточная функция

$$K(p) = \frac{\frac{R_2}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{R_1 C (p + \alpha)} = \frac{166, (6)}{p + 250},$$

где $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{1}{\tau_{ц}} = 250$.

Импульсная характеристика

$$K(t) \doteq K(p), \quad K(t) = \frac{1}{R_1 C} e^{-\alpha t} = 166, (6) e^{-250 t} \text{ с}^{-1}.$$

Переходная характеристика

$$h(t) \doteq \frac{K(p)}{p}, \quad h(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\alpha t}) = 0, (6) (1 - e^{-250 t}).$$

9. Операторная передаточная функция

$$K(p) = \frac{pRC}{p_2 LC + pRC + 1} = \frac{2\delta p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

где $\delta = \frac{R}{2L} = 10^3 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 \text{ с}^{-1}$.

Импульсная характеристика

$$K(t) = 2\delta e^{-\delta t} (\cos \omega_{св} t - \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_{св} t),$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0 = 10^5 \text{ с}^{-1}$.

Если $\frac{\delta}{\omega_{\text{св}}} = \text{tg} \psi = 0,01$, то $\psi \approx 0,57^\circ = 34'$. Окончательно

$$K(t) = \frac{2\delta e^{-\delta t}}{\cos \psi} \cos(\omega_{\text{св}} t + \psi) = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-10^3 t} \cos(10^5 t + 34') \text{ с}^{-1}.$$

10. $K_\psi(t) = 1,13e^{-150t} - 0,375e^{-50t} \text{ с}^{-1}$.

11. $h_\psi(t) = 10^{-3} (2,05e^{-9 \cdot 10^3 t} - 1,05e^{-4,6 \cdot 10^3 t})$.

Библиотека БГУИР

Формы интеграла Дюамеля

Первая: $x(t) = f(0)h(t) + \int_0^t f'(t)h(t-\tau)d\tau.$

Вторая: $x(t) = f(0)h(t) + \int_0^t f'(t-\tau)h(\tau)d\tau.$

Третья: $x(t) = f(t)h(0) + \int_0^t f(\tau)h'(t-\tau)d\tau.$

Четвёртая: $x(t) = f(0)h(t) + \int_0^t f(t-\tau)h'(\tau)d\tau.$

Пятая: $x(t) = \int_0^t f(\tau)k(t-\tau)d\tau.$

Шестая: $x(t) = \int_0^t f(t-\tau)k(\tau)d\tau.$

Примечание. $x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau.$

$$x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

Свойства преобразований Лапласа

Свойство единственности преобразования: если функция $f(t)$ имеет преобразование Лапласа, т. е. $f(t) \doteq F(p)$, то это преобразование *единственное*. Если задана функция $F(p)$ и найдена функция $f(t)$ с помощью прямого

преобразования Лапласа $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$, то найденная функция $f(t)$

является *единственной*, т. е. $F(p) \doteq f(t)$.

Свойство линейности: изображение суммы функций равно сумме изображений каждой из функций в отдельности, т. е. если $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$, то

$$F(p) = \sum_{k=1}^n F_k(p).$$

Основные теоремы преобразования Лапласа

П.3.1. Дифференцирование оригинала.

Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(t) \doteq pF(p) - f(0); \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0), \end{array} \right.$$

где $f^{(k-1)}(0)$ – значение производной $(k-1)$ -го порядка функции $f(t)$ при $t=0$.

При нулевых начальных условиях, когда $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$, т. е. операции дифференцирования оригинала соответствует умножение его изображения на оператор p .

Следствие. Из теоремы дифференцирования вытекают две предельные теоремы:

Теорема о конечном значении оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Теорема о начальном значении оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

П.3.2. Интегрирование оригинала.

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $\int_0^t f(t)dt \doteq \frac{F(p)}{p}$, т. е. операции интегрирования

оригинала соответствует деление его изображения на оператор p .

П.3.3. Теорема запаздывания (оригинала).

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p)$, т. е. запаздыванию оригинала на время τ соответствует умножение его на изображение на $e^{-p\tau}$.

П.3.4. Теорема сдвига (изображения).

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $F(p + \delta) \doteq e^{-\delta t} f(t)$, т. е. замене в изображении оператора p на оператор $p + \delta$ соответствует умножение оригинала на $e^{-\delta t}$.

П.3.5. Теорема свёртывания (умножения) изображений.

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau.$$

П.3.6. Теорема разложения.

Если изображение имеет вид рациональной дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0},$$

причём степень многочлена $F_1(p)$ ниже степени многочлена $F_2(p)$, коэффициенты a_k и b_k – вещественные числа, а корни p_k уравнения $F_2(p) = 0$ различны, то оригиналы определяются выражением

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Если один из корней уравнения $F_2(p) = 0$ равен нулю и $F_2(p) = pF_3(p)$, то оригинал ищется в виде

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет кратные корни, то оригинал

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left(\frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right) \Big|_{p=p_k}.$$

Таблица преобразований Лапласа

Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
A	$A\delta(t)$
$\frac{A}{p}$	A
$\frac{A}{p^2}$	At
$\frac{A}{p^n}$	$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{A}{(p+\alpha)}$	$Ae^{-\alpha t}$
$\frac{Ap}{(p+\alpha)}$	$A(\delta(t) - \alpha e^{-\alpha t})$
$\frac{A}{(p+\alpha)^2}$	$Ate^{-\alpha t}$
$\frac{A}{(p+\alpha)^n}$	$At^{n-1} \frac{e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$
$\frac{A}{(p(p+\alpha))}$	$A \frac{(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}$
$\frac{A}{(p^2 + \omega^2)}$	$A \frac{\sin \omega t}{\omega}$
$\frac{Ap}{(p^2 + \omega^2)}$	$A \cos \omega t$
$\frac{A}{((p+\alpha)(p+\beta))}$	$A \frac{(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})}{(\beta - \alpha)}$
$\frac{Ap}{((p+\alpha)(p+\beta))}$	$A \frac{(\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})}{(\beta - \alpha)}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Батура, М. П. Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв ; под общ. ред. А. П. Курулёва. – 3-е изд., перераб. – Минск, 2015.
2. Курулёв, А. П. Теория электрических цепей. Справочник. В 3 ч. Ч. 1 : Электрические цепи постоянного и переменного тока / А. П. Курулёв. – Минск, 2012.
3. Применение MATHCAD в общинженерной практике. Методические указания / В. М. Коваленко [и др.]. – Минск, 2010.
4. Теория электрических цепей. Методическое пособие к выполнению контрольных заданий / Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск, 2010.
5. Батюков, С. В. Теория электрических цепей. В 2 ч. Ч. 1 : Линейные электрические цепи / С. В. Батюков, Н. А. Иваницкая, Л. Ю. Шилин. – Минск, 2012.
6. Батюков, С. В. Теория электрических цепей. В 2 ч. Ч. 2 : учеб.-метод. пособие / С. В. Батюков, Н. А. Иваницкая, Л. Ю. Шилин. – Минск, 2014.
7. Теоретические основы электротехники / Г. И. Атабеков [и др.] ; под ред. Г. И. Атабекова. – СПб., 2010.
8. Теория электрорадиоцепей. Учебные задачи. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие / В. Е. Гурский [и др.]. – Минск, 2003.
9. Сборник задач по электротехнике и электронике / Ю. В. Бладыко [и др.] ; под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск, 2013.
10. Улахович, Д. А. Основы теории линейных электрических цепей / Д. А. Улахович. – СПб., 2012.
11. Шебес, М. Р. Задачник по теории электрических цепей / М. Р. Шебес, Н. В. Каблукова. – М., 1991.
12. Электротехника / Н. В. Бараш [и др.] ; под общ. ред. И. А. Федоровой. – Минск, 1990.