Министерство образование Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра экономической информатики

Н. М. Матвейчук, И. Б. Валевская

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЛОГИСТИКЕ. ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальности 1-40 05 01 «Информационные системы
и технологии (по направлениям)», направления специальности
1-40 05 01-08 «Информационные системы и технологии (в логистике)»*

Минск БГУИР 2019

УДК 519.8:658.78(075)
ББК 65.40я73
М33

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол №2 от 26.09.2018);

главный научный сотрудник лаборатории математической кибернетики государственного научного учреждения «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор Ю. Н. Сотсков

Матвейчук, Н. М.
М33 Исследование операций в логистике. Практикум : учеб.-метод. пособие / Н. М. Матвейчук, И. Б. Валевская. – Минск : БГУИР, 2019. – 254 с. : ил.
ISBN 978-985-543-466-6.

Содержит примеры решения задач по 16 темам, разработанным для изучения оптимизационных моделей, и индивидуальные задания для самостоятельной работы при подготовке к практическим занятиям.

УДК 519.8:658.78(075)
ББК 65.40я73

ISBN 978-985-543-466-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Перед людьми постоянно возникают проблемы, связанные с выбором решений о рациональных способах достижения целей при заданных ограничениях на количество используемых ресурсов и времени. В простых ситуациях выбор осуществляется человеком на основе личного опыта, знаний и интуиции. В более сложных ситуациях выбор рационального решения осуществляется группой лиц.

Исследование операций – это научное направление, ориентированное на решение практических задач по эффективному (или оптимальному) управлению организационно-техническими системами, которые можно корректно описать с помощью математической модели. Исследование операций находит широкое применение в науке, экономике, бизнесе, финансах, банковском деле, логистике, социологии, политике и др.

Дисциплина «Исследование операций в логистике» ориентирована на решение практических задач, встречающихся в повседневной деятельности специалиста-логистика.

В настоящем учебно-методическом пособии приведены решения типовых задач, относящихся к различным классам оптимизационных моделей: моделям нелинейного программирования, управления запасами, динамического программирования, теории игр, многокритериальной оптимизации, марковских цепей, систем массового обслуживания, графовым и сетевым моделям. По каждой теме приведен список теоретических вопросов, которые необходимо изучить при подготовке к практическим занятиям, а также список основных обозначений, используемых в разделе, подробно разобраны решения типовых задач и предложены задачи для самостоятельного решения.

Авторы выражают признательность рецензентам: доктору физико-математических наук, профессору Ю. Н. Сотскову, доктору экономических наук, доценту Г. О. Читая и сотрудникам кафедры математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» за замечания и рекомендации по улучшению данного практикума.

Тема 1. Метод множителей Лагранжа в задачах математического программирования

Литература: *основная* [29, с. 765–770, 784–788], *дополнительная* [12, с. 183–198], [14, с. 55–56], [16, с. 4–13], [18, с. 450–462], [22, с. 26–46], [24, с. 17–38], [27, с. 95–99].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Постановка и решение задачи нахождения экстремума функции при отсутствии ограничений.
2. Постановка задачи математического программирования.
3. Построение функции Лагранжа. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа.
4. Постановка задачи нелинейного программирования с ограничениями в форме равенств и в форме неравенств.
5. Определение и свойства выпуклых и вогнутых функций.
6. Постановка задачи выпуклого программирования.
7. Условия и теорема Куна – Таккера.

Обозначения, используемые в разделе

H – матрица Гессе

Δ_i – главный минор матрицы (i-го порядка)

$g(\vec{x}) \le b$ – ограничение

$g(\vec{x})$ – функция ограничения

b – правая часть ограничения

λ – множитель Лагранжа

L – функция Лагранжа

R^n – пространство n-мерных действительных векторов

Решение типовых задач

Задача 1.1. Экстремум функции без ограничений

Пусть производится два вида товаров по ценам $p_1 = 8$ ден. ед., $p_2 = 10$ ден. ед. и функция издержек $C(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где x_1, x_2 – объемы производства товаров первого и второго видов, ед. Функция прибыли имеет вид

$$\Pi(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2.$$

Найти максимальную прибыль от производства товаров.

Решение

1. Проверим целевую функцию и область допустимых значений на выпуклость/вогнутость.

а) Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(8 - 2x_1 - x_2) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(8 - 2x_1 - x_2) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(10 - x_1 - 2x_2) = -2.$$

Матрица вторых частных производных (*матрица Гессе*) в данной задаче является постоянной и имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы Гессе. Главные миноры первого и второго порядков имеют значения соответственно $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$.

Так как знаки определителей чередуются, причем первый определитель отрицательный, то по *критерию Сильвестра* матрица Гессе строго отрицательно определена.

Следовательно, по *признаку строгой выпуклости/вогнутости функции* заданная целевая функция строго вогнута для всех допустимых значений независимых переменных.

б) Область допустимых значений R^2 является выпуклым множеством, регулярным по Слейтеру.

Имеем *задачу выпуклого программирования* без ограничений.

2. Найдем точку максимума.

По *свойству строго вогнутой функции* она имеет единственный глобальный максимум в стационарной точке. Найдем стационарную точку.

Запишем систему уравнений для отыскания стационарной точки. Находим частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 - 2x_1 - x_2 = 0, \\ 10 - x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, т. е. стационарная точка (2, 4).

3. Определим экстремумы функции.

Определим значение функции в найденной стационарной точке:

$$\Pi_{max} = \Pi(2, 4) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2^2 - 2 \cdot 4 - 4^2 = 28.$$

Таким образом, данная строго вогнутая на всей области определения целевая функция $\Pi(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$ имеет **максимум** в точке (2; 4), равный $\Pi_{max} = 28$.

Следовательно, нужно выпускать первый товар в количестве 2 ед. и второй товар в количестве 4 ед., при этом прибыль будет максимальной и равной 28 ден. ед.

Задача 1.2. Экстремум функции с ограничениями-равенствами

Найти точки условного экстремума и экстремальные значения функции прибыли $u(x, y, z) = 2 - x^2 - y^2 - 2z^2 + 2x - 4z$ при условии $2x - y + z = 0$.

Решение

Способ I

1. Проверим целевую функцию и область допустимых значений на выпуклость/вогнутость.

а) Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x + 2) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(-4z - 4) = -4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

Матрица вторых частных производных (*матрица Гессе*) в данной задаче является постоянной и имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы Гессе:

$$\Delta_1 = -2 < 0; \qquad \Delta_2 = 4 > 0; \qquad \Delta_3 = -16 < 0.$$

Так как знаки определителей чередуются, причем первый определитель отрицательный, то по *критерию Сильвестра* матрица Гессе строго отрицательно определена.

Следовательно, по *признаку строгой выпуклости/вогнутости функции* заданная целевая функция строго вогнута для всех допустимых значений независимых переменных.

б) Область допустимых значений (*плоскость* $2x - y + z = 0$) является выпуклым множеством.

Имеем *задачу выпуклого программирования* с ограничениями-равенствами.

2. Найдем точки экстремума.

По *свойству строго вогнутой функции* она имеет не более одного локального максимума на выпуклом множестве допустимых значений и ни одного локального минимума.

По *необходимому условию экстремума* точка экстремума (точка максимума) является стационарной точкой функции Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа. В нашем случае целевая функция

$$u(x,y,z) = 2 - x^2 - y^2 - 2z^2 + 2x - 4z,$$

функция ограничения имеет вид $g(x,y,z) = b$, где

$$g(x,y,z) = 2x - y + z, \quad b = 0.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,y,z,\lambda) = u(x,y,z) + \lambda(b - g(x,y,z)).$$

Получаем

$$L(x,y,z,\lambda) = 2 - x^2 - y^2 - 2z^2 + 2x - 4z + \lambda(-2x + y - z).$$

Найдем стационарную точку функции Лагранжа. Продифференцируем функцию Лагранжа по всем переменным. Приравнивая полученные выражения к нулю, получим следующую систему уравнений для отыскания стационарной точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 2 - 2\lambda = 0, \\ -2y + \lambda = 0, \\ -4z - 4 - \lambda = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Решив полученную систему, получим единственную точку условного экстремума:

$$x = 7/11,\ y = 2/11,\ z = -12/11,\ \lambda = 4/11.$$

3. Определим экстремумы функции.

Поскольку целевая функция является строго вогнутой для всех значений независимых переменных, то по *достаточному условию экстремума* в точке (7/11; 2/11; −12/11) функция $u(x, y, z)$ имеет условный **максимум**. В этой точке экстремальное значение функции

$$u_{\max} = u\left(\frac{7}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{12}{11}\right) = 2 - \left(\frac{7}{11}\right)^2 - \left(\frac{2}{11}\right)^2 - 2\left(-\frac{12}{11}\right)^2 + 2\cdot\frac{7}{11} - 4\left(-\frac{12}{11}\right) = \frac{53}{11}.$$

Значение множителя Лагранжа $\lambda = 4/11$ показывает, что при изменении значения свободного члена ограничения на единицу значение целевой функции (прибыли) изменится на 4/11.

<u>Способ II</u>

Сведем задачу к задаче отыскания экстремума функции двух переменных без ограничений.

1. Выразим одну из переменных из ограничения-равенства и подставим полученное выражение в целевую функцию.

Выразим из ограничения-равенства переменную z, получим

$$z = -2x + y.$$

Преобразуем целевую функцию:

$$u(x,y) = 2 - x^2 - y^2 - 2(-2x+y)^2 + 2x - 4(-2x+y) =$$
$$= 2 + 10x - 4y + 8xy - 9x^2 - 3y^2.$$

2. Проверим полученную целевую функцию и область допустимых значений на выпуклость/вогнутость.

а) Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(10 + 8y - 18x) = -18;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(10 + 8y - 18x) = 8;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-4 + 8x - 6y) = -6.$$

Матрица вторых частных производных (*матрица Гессе*) в данной задаче является постоянной и имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -18 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы Гессе. Главные миноры первого и второго порядков имеют значения соответственно $\Delta_1 = -18 < 0$, $\Delta_2 = 44 > 0$.

Так как знаки определителей чередуются, причем первый определитель отрицательный, то по *критерию Сильвестра* матрица Гессе <u>строго отрицательно определена</u>.

Следовательно, по *признаку строгой выпуклости/вогнутости функции* заданная целевая функция <u>строго вогнута</u> для всех допустимых значений независимых переменных.

б) Область допустимых значений функции $u(x,y)$ (R^2) является <u>выпуклым</u> множеством, <u>регулярным по Слейтеру</u>.

Имеем *задачу выпуклого программирования* без ограничений.

3. Найдем точку максимума функции без ограничений.

По *свойству строго вогнутой функции* она имеет единственный <u>глобальный максимум в стационарной точке</u>. Найдем стационарную точку.

Запишем систему уравнений для отыскания стационарной точки. Находим частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 10 + 8y - 18x = 0, \\ -4 + 8x - 6y = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $x = 7/11$, $y = 2/11$, т. е. стационарная точка (7/11; 2/11).

4. Определим экстремумы функции без ограничений.

Найдем значение функции в найденной стационарной точке:

$$u_{\max} = u\left(\frac{7}{11}, \frac{2}{11}\right) = 2 + 10\frac{7}{11} - 4\frac{2}{11} + 8\frac{7}{11} \cdot \frac{2}{11} - 9\left(\frac{7}{11}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{11}\right)^2 = \frac{53}{11}.$$

5. Определим экстремумы исходной функции.

Найдем значение переменной z:

$$z = -2\frac{7}{11} + \frac{2}{11} = -\frac{12}{11}.$$

Окончательно получаем, что данная строго вогнутая на всей области определения целевая функция $u(x, y, z) = 2 - x^2 - y^2 - 2z^2 + 2x - 4z$ имеет **максимум** в точке (7/11; 2/11; −12/11), равный $u_{\max} = 53/11$.

Следовательно, при значениях переменных $x = 7/11$, $y = 2/11$, $z = -12/11$, прибыль будет максимальной и равной 53/11 ден. ед.

Задача 1.3. Экстремум функции с ограничениями в виде линейных неравенств – применение условий Куна – Таккера

Найти точки условного экстремума и экстремальные значения функции прибыли $z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$ при следующих ограничениях по ресурсам: $x_1 + 2x_2 \le 8$, $2x_1 - x_2 \le 12$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Решение

1. Проверим целевую функцию и область допустимых значений на выпуклость/вогнутость.

а) Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2 - 2x_1) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2 - 2x_1) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(4 - 4x_2) = -4.$$

Матрица вторых частных производных (*матрица Гессе*) в данной задаче является постоянной и имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы Гессе:

$$\Delta_1 = -2 < 0; \qquad \Delta_2 = 8 > 0.$$

Так как знаки определителей чередуются, причем первый определитель отрицательный, то по *критерию Сильвестра* матрица Гессе строго отрицательно определена.

Следовательно, по *признаку строгой выпуклости/вогнутости функции* заданная целевая функция строго вогнута для всех допустимых значений независимых переменных.

б) Область допустимых значений (часть первого квадранта плоскости x_1Ox_2, ограниченная прямыми $x_1 + 2x_2 = 8$ и $2x_1 - x_2 = 12$) является выпуклым множеством, регулярным по Слейтеру.

Имеем *задачу выпуклого программирования* с ограничениями-неравенствами.

По *свойству строго вогнутой функции* она имеет не более одного локального максимума на выпуклом множестве допустимых значений и ни одного локального минимума.

По теореме Куна – Таккера решение данной задачи выпуклого программирования находится среди седловых точек функции Лагранжа целевой функции. По дифференциальному варианту теоремы Куна – Таккера в седловой точке выполняются условия Куна – Таккера.

Таким образом, следует записать условия Куна – Таккера и найти точку, удовлетворяющую им, – эта точка будет являться седловой точкой функции Лагранжа (в данном случае такая точка единственная в силу строгой вогнутости целевой функции и, следовательно, будет являться точкой локального и глобального максимума).

2. Запишем функцию Лагранжа для данной задачи и сформулируем условия Куна – Таккера.

Составим функцию Лагранжа.

В нашем случае целевая функция

$$z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2.$$

Функции ограничений имеют вид $g_i(x_1, x_2) = b_i, \quad i = 1, 2$, где

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, \quad b_1 = 8,$$

$$g_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2, \quad b_2 = 12.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = z(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2)).$$

Тогда в нашем случае получаем

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+\lambda_1(8-x_1-2x_2)+\lambda_2(12-2x_1+x_2),$$
$$x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2\geq 0.$$

Запишем условия Куна − Таккера для задачи, целевая функция которой стремится к максимуму. Получим следующую систему неравенств, которым должно удовлетворять оптимальное решение:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}\leq 0,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2}\leq 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\geq 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\geq 0,$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}\cdot x_1=0,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2}\cdot x_2=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\cdot \lambda_1=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\cdot \lambda_2=0,$$

и условия неотрицательности:

$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad \lambda_1\geq 0,\quad \lambda_2\geq 0.$$

Продифференцировав и подставив, получим:

$$\begin{cases}2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2\leq 0,\\ 4-4x_2-2\lambda_1+\lambda_2\leq 0,\\ 8-x_1-2x_2\geq 0,\\ 12-2x_1+x_2\geq 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}(2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2)x_1=0,\\ (4-4x_2-2\lambda_1+\lambda_2)x_2=0,\\ (8-x_1-2x_2)\lambda_1=0,\\ (12-2x_1+x_2)\lambda_2=0.\end{cases}\tag{1.1}$$
$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad \lambda_1\geq 0,\quad \lambda_2\geq 0.$$

Заметим, что эти условия годятся лишь для того, чтобы проверить экстремальность предлагаемых точек, но не для того, чтобы построить алгоритм их поиска.

3. Отыщем точку, удовлетворяющую условиям Куна − Таккера.

<u>Способ I</u>

Вначале решим систему равенств из условий дополняющей нежесткости, а затем полученные точки подставим в систему неравенств и проверим условия неотрицательности.

Рассмотрим условия дополняющей нежесткости.

Из двух последних равенств в (1.1) следует, что нужно рассмотреть четыре случая.

Случай 1: $\lambda_1=\lambda_2=0$. Подставив в два первых уравнения, получаем:

$$(2-2x_1)\cdot x_1=0,$$
$$(4-4x_2)\cdot x_2=0.$$

Решением полученной системы являются следующие четыре точки:

(0; 0) – для этой точки не выполняются два первых неравенства из условий Куна – Таккера (1.1);

(1; 0) – для этой точки не выполняется второе неравенство из условий Куна – Таккера (1.1);

(0; 1) – для этой точки не выполняется первое неравенство из условий Куна – Таккера (1.1);

(1; 1) – для этой точки выполняются все неравенства из условий Куна – Таккера (1.1), в том числе условия неотрицательности, следовательно, она является ***седловой точкой функции Лагранжа.***

Случай 2: $\lambda_1 = 0$ и $12 - 2x_1 + x_2 = 0$. Выразив из последнего уравнения x_2 и подставив в два первых уравнения из условий дополняющей нежесткости (1.1), получим:

$$\begin{cases}(2-2x_1-2\lambda_2)\cdot x_1 = 0,\\ (4-4\cdot(2x_1-12)+\lambda_2)(2x_1-12)=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1-x_1-\lambda_2)\cdot x_1 = 0,\\ (52-8x_1+\lambda_2)(x_1-6)=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем:

- либо $x_1 = 0$, тогда из второго уравнения имеем $\lambda_2 = -52 < 0$, и не выполняются условия неотрицательности;

- либо $1 - x_1 - \lambda_2 = 0$, откуда $x_1 = 1 - \lambda_2$, и второе уравнение принимает вид

$$(44 + 9\lambda_2)(-\lambda_2 - 5) = 0,$$

откуда $\lambda_2 = -5$ или $\lambda_2 = -44/9$ – в обоих случаях не выполняются условия неотрицательности.

Случай 3: $\lambda_2 = 0$ и $8 - x_1 - 2x_2 = 0$. Выразив из последнего уравнения x_1 и подставив в два первых уравнения из условий дополняющей нежесткости (1.1), получим:

$$\begin{cases}(2-2\cdot(8-2x_2)-\lambda_1)(8-2x_2)=0,\\ (4-4x_2-2\lambda_1)\cdot x_2 = 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-14+4x_2-\lambda_1)(8-2x_2)=0,\\ (2-2x_2-\lambda_1)\cdot x_2 = 0.\end{cases}$$

Из второго уравнения получаем:

- либо $x_2 = 0$, тогда из первого уравнения имеем $\lambda_1 = -14 < 0$, и не выполняются условия неотрицательности;

- либо $2 - 2x_2 - \lambda_1 = 0$, откуда $x_2 = 1 - \lambda_1/2$, и первое уравнение принимает вид

$$(10 + 3\lambda_1)(3 + \lambda_1/2) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -10/3$ или $\lambda_1 = -6$ – в обоих случаях не выполняются условия неотрицательности.

Случай 4: $8 - x_1 - 2x_2 = 0$ и $12 - 2x_1 + x_2 = 0$.

Решением системы из этих двух уравнений является точка (32/5, 4/5). Из первых двух уравнений из условий дополняющей нежесткости (1.1) имеем:

$$2 - 2\cdot\frac{32}{5} - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,$$

$$4 - 4\cdot\frac{4}{5} - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Решая, получаем $\lambda_1 = -46/25$, $\lambda_2 = -112/25$, и не выполняются условия неотрицательности.

Таким образом, найдена седловая точка функции Лагранжа (1; 1; 0; 0).

<u>Способ II</u>

Вначале решим систему неравенств с использованием симплекс-метода, а затем проверим условия дополняющей нежесткости и условия неотрицательности.

Введя в систему неравенств в (1.1) четыре свободные переменные $v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2-2x_1-\lambda_1-2\lambda_2+v_1=0, \\ 4-4x_2-2\lambda_1+\lambda_2+v_2=0, \\ 8-x_1-2x_2-w_1=0, \\ 12-2x_1+x_2-w_2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2-v_1=2, \\ 4x_2+2\lambda_1-\lambda_2-v_2=4, \\ x_1+2x_2+w_1=8, \\ 2x_1-x_2+w_2=12. \end{cases}$$

Введем искусственные переменные y_1, y_2 в первые два ограничения, получим следующую задачу линейного программирования: минимизировать

$$f = M y_1 + M y_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2-v_1+y_1=2, \\ 4x_2+2\lambda_1-\lambda_2-v_2+y_2=4, \\ x_1+2x_2+w_1=8, \\ 2x_1-x_2+w_2=12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1, w_2, y_1, y_2 \geq 0.$$

Решим полученную задачу симплекс-методом (таблицы 1.1–1.3), причем на каждом шаге симплекс-метода при выборе нового базиса потребуем выполнения условий дополняющей нежесткости, которые принимают следующий вид (для начального базиса в таблице 1.1 они выполняются):

$$v_1 \cdot x_1 = 0; \quad v_2 \cdot x_2 = 0; \quad w_1 \cdot \lambda_1 = 0; \quad w_2 \cdot \lambda_2 = 0.$$

Таблица 1.1 – Первая симплексная таблица к задаче 1.3

Базис	**Сб**	**B**	x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	y_1	y_2
			0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
y_1	M	2	2	0	1	2	–1	0	0	0	1	0
y_2	M	4	0	**4**	2	–1	0	–1	0	0	0	1
w_1	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
w_2	0	12	2	–1	0	0	0	0	0	1	0	0
Δ		6M	2M	4M	3M	M	–M	–M	0	0	0	0

Проверка: в базис вводим x_2, в базисе не должно быть v_2 (см. таблицу 1.2).

Таблица 1.2 – Вторая симплексная таблица к задаче 1.3

Базис	$C_Б$	B	x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	y_1
			0	0	0	0	0	0	0	0	M
y_1	M	2	**2**	0	1	2	–1	0	0	0	1
x_2	0	1	0	1	1/2	–1/4	0	–1/4	0	0	0
w_1	0	6	1	0	–1	1/2	0	1/2	1	0	0
w_2	0	13	2	0	1/2	–1/4	0	–1/4	0	1	0
Δ		$2/M$	$2M$	0	M	$2M$	$–M$	0	0	0	0

Проверка: в базис вводим x_1, в базисе не должно быть v_1 (см. таблицу 1.3).

Таблица 1.3 – Третья симплексная таблица к задаче 1.3

Базис	$C_Б$	B	x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2
			0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	1	**1**	0	1/2	1	–1/2	0	0	0
x_2	0	1	0	1	1/2	–1/4	0	–1/4	0	0
w_1	0	5	0	0	–3/2	–1/2	1/2	1/2	1	0
w_2	0	11	0	0	–1/2	–9/4	1	–1/4	0	1
Δ		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Получили следующее решение:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ v_1 = 0,\ v_2 = 0,\ w_1 = 5,\ w_2 = 11.$$

Таким образом, найдена седловая точка функции Лагранжа (1; 1; 0; 0).

Способ III

Воспользуемся общим методом отбора глобального экстремума среди значений локальных экстремумов внутри заданной области и на ее границе.

Область допустимых значений – четырехугольник $OABC$ (рисунок 1.1) – является компактом. Координаты точек O(0; 0), A(0; 4), B(32/5; 4/5), C(0; 6).

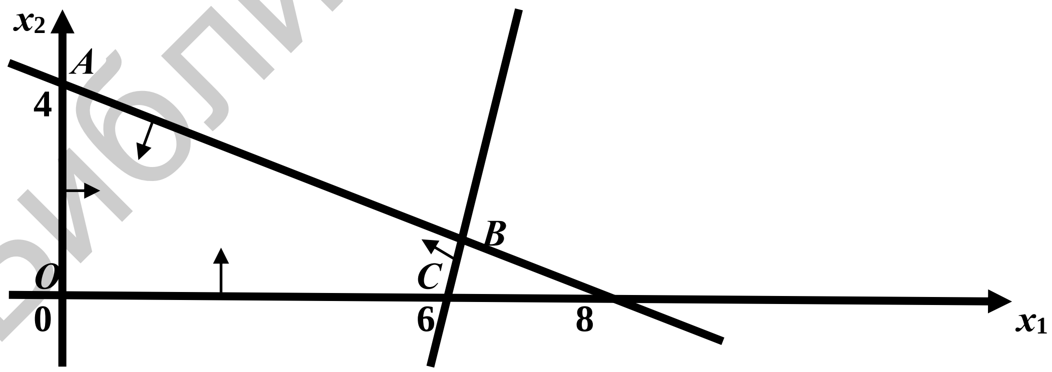


Рисунок 1.1 – Область допустимых значений

По критерию Вейерштрасса непрерывная функция на компакте имеет минимум и максимум – внутри области допустимых значений (в стационарной точке) или на ее границе.

Найдем стационарные точки данной функции, приравняв к нулю частные производные:

$$z'_{x_1} = 2 - 2x_1, \qquad z'_{x_2} = 4 - 4x_2;$$

$$\begin{cases} z'_{x_1} = 0, \\ z'_{x_2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - 2x_1 = 0, \\ 4 - 4x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Получена единственная стационарная точка (1; 1), принадлежащая области допустимых значений. Значение функции в этой точке

$$z(1,1) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 3.$$

Найдем экстремальные значения функции на границе многоугольника допустимых значений. Граница представляет собой четыре отрезка. Запишем уравнения каждого из них:

OA: $x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le 4,$

AB: $x_1 = 8 - 2x_2,\ 4/5 \le x_2 \le 4,$

BC: $x_2 = 2x_1 - 12,\ 6 \le x_1 \le 32/5,$

OC: $x_2 = 0,\ 0 \le x_1 \le 6.$

Подставим полученные выражения в данную функцию и найдем наибольшее и наименьшее значение функции на каждом из отрезков:

1) Отрезок OA: $z_1(x_2) = z(0, x_2) = 4x_2 - 2x_2^2,\ z_1' = 4 - 4x_2,\ z_1' = 0,\ x_2 = 1.$

Полученное значение принадлежит рассматриваемому отрезку, найдем значения функции в этой точке и на концах отрезка:

$$z_1(1) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 2,\ z_1(0) = 0,\ z_1(4) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -16.$$

2) Отрезок AB:

$$z_2(x_2) = z(8 - 2x_2, x_2) = 2(8 - 2x_2) + 4x_2 - (8 - 2x_2)^2 - 2x_2^2 = -48 + 32x_2 - 6x_2^2,$$

$$z_2' = 32 - 12x_2,\ z_2' = 0,\ x_2 = 8/3.$$

Полученное значение принадлежит рассматриваемому отрезку, найдем значения функции в этой точке и на концах отрезка:

$$z_2\left(\frac{8}{3}\right) = -48 + 32 \cdot \frac{8}{3} - 6\left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{272}{3},\ z_1(0) = 0,\ z_1(4) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -16;$$

$$z_2(4) = -48 + 32 \cdot 4 - 6 \cdot 4^2 = -16,\ z_2\left(\frac{4}{5}\right) = -48 + 32 \cdot \frac{4}{5} - 6\left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{656}{25}.$$

3) Отрезок BC:

$$z_3(x_1) = z(x_1, 2x_1 - 12) = 2x_1 + 4(2x_1 - 12) - x_1^2 - 2(2x_1 - 12)^2 = -336 + 106x_1 - 9x_1^2;$$

$$z_3' = 106 - 18x_1,\ z_3' = 0,\ x_1 = \frac{53}{9}.$$

Полученное значение не принадлежит рассматриваемому отрезку, найдем значения функции на концах отрезка:

$$z_3(6) = -336 + 106 \cdot 6 - 9 \cdot 6^2 = -24,$$

$$z_3\left(\frac{32}{5}\right) = -336 + 106 \cdot \frac{32}{5} - 9\left(\frac{32}{5}\right)^2 = -\frac{656}{25}.$$

4) Отрезок OC: $z_4(x_1) = z(x_1, 0) = 2x_1 - x_1^2$, $z_4' = 2 - 2x_1$, $z_4' = 0$, $x_1 = 1$.

Полученное значение принадлежит рассматриваемому отрезку, найдем значения функции в этой точке и на концах отрезка:

$$z_4(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1, \; z_4(0) = 0, \; z_4(6) = 2 \cdot 6 - 6^2 = -24.$$

Определим наибольшее значение функции. Из полученных значений функции в стационарных точках и на концах отрезков выберем наибольшее – это значение $z(1,1) = 3$, при этом $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

4. Определим экстремумы функции.

Таким образом, полученная точка $(x_1; x_2; \lambda_1; \lambda_2) = (1; 1; 0; 0)$ является седловой точкой функции Лагранжа, а следовательно, точка $(x_1; x_2) = (1; 1)$ является решением данной задачи выпуклого программирования (точкой условного максимума).

Наибольшее значение функции при заданных ограничениях:

$$z_{\max} = z(1, 1) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 3.$$

Значения множителей Лагранжа показывают величину изменения прибыли в расчете на единицу изменения свободного члена ограничения, которому соответствует множитель Лагранжа, в малой окрестности оптимума. Множитель Лагранжа в точке оптимума равен оптимальной цене соответствующего ресурса (если найдется рынок, где ресурс дешевле, то его покупка увеличит прибыль, если найдется рынок, где ресурс дороже, то для увеличения прибыли его следует продать). В данном случае значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ показывают, что оба ресурса являются избыточными, и при изменении значений правых частей ограничений на единицу значение прибыли не изменится.

Следовательно, нужно выпускать первый товар в количестве 1 ед. и второй товар в количестве 1 ед., при этом прибыль будет максимальной и равной 3 ден. ед.

Задача 1.4. Экстремум функции с ограничениями в виде неравенств – преобразование целевой функции

Найти точки условного экстремума и экстремальные значения функции прибыли $z(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$ при условиях $2x_1 - x_2 \le 6$, $x_1 + 2x_2 \le 10$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Решение

1. Преобразуем целевую функцию.

Имеем задачу на отыскание условного экстремума функции с ограничениями в виде линейных неравенств. Заметим, что функцию цели можно преобразовать следующим образом:

$$z(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2 \to \max.$$

Очевидно, что функция принимает максимальное значение, равное

$$z_{max} = 0 \text{ при } x_1 = x_2.$$

2. Преобразуем ограничения.

После подстановки ограничения принимают вид:

$$x_1 \le 6;$$
$$x_1 \le 10/3,$$
$$x_1 \ge 0.$$

3. Определим экстремумы функции.

Окончательно имеем: максимальное значение $z_{max} = 0$ достигается в любой точке $(x_1, x_2) = \{(x_1, x_1) \mid 0 \le x_1 \le 10/3\}$.

Следовательно, максимальная прибыль равна $z_{max} = 0$ при равном производстве обоих товаров: $x_1 = x_2$, $0 \le x_1 \le 10/3$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. Экстремум функции с ограничениями

Исследовать на условный экстремум функцию прибыли f (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – Исходные данные к задаче 1.5

Вариант	**Функция**	**Ограничения**
1	**2**	**3**
B1	$f(x,y) = x^2 + 8xy + 2y^2$	$x + y = 5$
B2	$f(x,y) = x^2 + 8xy + 3y^2$	$9x + 10y = 29$
B3	$f(x,y) = x^2 + 10xy + 2y^2$	$17x + 16y = 82$
B4	$f(x,y) = 2x^2 + 19xy + 3y^2$	$9x + 13y = 31$
B5	$f(x,y) = 3x^2 - 8xy + y^2$	$10y - x = 17$
B6	$f(x,y) = y + 16x^3 y$	$8x^3 y^2 + y = 2,$ в точке M_0 (1/2; –2)
B7	$f(x,y) = x + y$	$xy = 1$
B8	$f(x,y) = x + y$	$x^2 + y^2 = 2$
B9	$f(x,y) = x + y$	$2x^2 + y^2 = 6$
B10	$f(x,y) = x + y$	$3x^2 + y^2 = 12$
B11	$f(x,y) = x + 2y$	$x + 2y + xy = 30$
B12	$f(x,y) = x + 2y$	$x^2 + y^2 = 5$
B13	$f(x,y) = x + 9y$	$xy = 1$
B14	$f(x,y) = 2x + 16y$	$xy + y^2 = 7$
B15	$f(x,y) = 3x - 6y$	$y^2 - xy = 1$
B16	$f(x,y) = 4x - y$	$x^2 - y^2 = 15$
B17	$f(x,y) = 4x - 2y$	$x^2 + xy = -3$
B18	$f(x,y) = -12x + 7y$	$x^2 - xy = 35$
B19	$f(x,y) = 2y - 4x - 5xy$	$x^2 y + x = 2$
B20	$f(x,y) = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 - xy = 1$

1	2	3
В21	$f(x,y,z)=xy+yz+xz$	$x+y+2z+2=0$
В22	$f(x,y,z)=2xy+yz+2xz$	$2x+y+z=3$
В23	$f(x,y,z)=xyz$	$x+y+z=5,\ \ xy+yz+xz=8$
В24	$f(x,y,z)=x^3+y^2-z^3$	$2x+2y-2z=-1,$ в точке $M_0(-1;\ 3/2;\ -1)$
В25	$f(x,y,z)=27x^3+y^3-z^3$	$xyz=9$
В26	$f(x,y,z)=x^3+27y^3-z^3$	$xyz=-9$
В27	$f(x,y,z)=x^3+y^3-z^3$	$xyz=27$
В28	$f(x,y,z)=x-2y+2z$	$x^2+y^2+z^2=1$
В29	$f(x,y,z)=x+2y+3z$	$x^2+y^2+z^2=1$
В30	$f(x,y,z)=2x+y-z+1$	$x^2+y^2+2z^2=22$

а) при ограничениях в виде равенств (приведены в таблице 1.4);
б) при ограничениях в виде линейных неравенств (k – номер варианта):

$$\begin{cases}\left(\left[\dfrac{k}{15}\right]+1\right)x_1+2x_2\le 8\left(\left[\dfrac{k}{15}\right]+1\right),\\ kx_1-x_2\le 2k,\end{cases}$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

Тема 2. Решение задач целочисленного линейного программирования

Литература: *основная* [25, с. 16–22], *дополнительная* [8, с. 71–76], [9, с. 106–112], [11, с. 29–35], [12, с. 163–183], [13, с. 42–59], [16, с. 22–27], [18, с. 441–450], [19, с. 242–310], [20, с. 52–76], [24, с. 122–128, 164–172], [27, с. 46–56], [28, с. 112–122], [29, с. 397–437].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Постановка задачи целочисленного линейного программирования.
2. Метод отсечений (Гомори).
3. Метод ветвей и границ: общая схема.
4. Постановка задачи о рюкзаке.
5. Постановка задачи коммивояжера.
6. Алгоритм Литтла.

Обозначения, используемые в разделе

Ω – множество допустимых решений

A – множество подмножеств множества Ω

φ – оценка текущей ветви

Решение типовых задач

Задача 2.1. Задача целочисленного линейного программирования

Для приобретения нового оборудования предприятие выделяет 19 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 16 м^2. Предприятие может заказать оборудование двух видов: машины типа А стоимостью 2 ден. ед., требующие производственную площадь 4 м^2 и обеспечивающие производительность за смену 8 т продукции, и машины типа В стоимостью 5 ден. ед., занимающие площадь 1 м^2 и обеспечивающие производительность за смену 6 т продукции.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность.

Решение

Обозначим через x_1, x_2 количество машин соответственно типа А и В, через F – их общую производительность. Тогда математическая модель задачи

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$

при ограничениях:

$$2x_1 + 5x_2 \le 19,$$
$$4x_1 + x_2 \le 16,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$x_1,\ x_2 \text{ – целые числа.}$$

Для того чтобы перейти от неравенств к равенствам, добавим к левым частям неравенств дополнительные переменные:

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 19,$$
$$4x_1 + x_2 + x_4 = 16,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$$
$$x_1,\ x_2 \text{ – целые числа.}$$

Решим задачу симплексным методом без учета целочисленности. За базисные переменные примем дополнительные переменные x_3, x_4, тогда свободными переменными являются x_1, x_2. Далее начнем заполнять симплексные таблицы (таблицы 2.1–2.3).

Таблица 2.1 – Первая симплексная таблица к задаче 2.1

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4
			8	6	0	0
x_3	0	19	2	5	1	0
x_4	0	16	4	1	0	1
Δ		0	–8	–6	0	0

Таблица 2.2 – Вторая симплексная таблица к задаче 2.1

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4
			8	6	0	0
x_3	0	11	0	9/2	1	–1/2
x_1	8	4	1	1/4	0	1/4
Δ		32	0	–4	0	2

Таблица 2.3 – Третья симплексная таблица к задаче 2.1

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4
			8	6	0	0
x_2	6	22/9	0	1	2/9	–1/9
x_1	8	61/18	1	0	–1/18	5/18
Δ		376/9	0	0	8/9	14/9

Получен оптимальный нецелочисленный план:

$$X_{опт} = (61/18,\ 22/9,\ 0,\ 0),\ \ F_{\max} = 376/9.$$

В полученном оптимальном плане и x_1, и x_2 – дробные. Для нахождения оптимального целочисленного плана воспользуемся **методом Гомори**. Составим дополнительное ограничение для переменной, имеющей наибольшую дробную часть. Так как максимальная дробная часть соответствует переменной x_2, max(4/9;7/18) = 4/9, то дополнительное ограничение записываем по первой строке:

$$\frac{22}{9} - \left[\frac{22}{9}\right] = 0 \cdot x_1 + (1 - [1]) \cdot x_2 + \left(\frac{2}{9} - \left[\frac{2}{9}\right]\right) \cdot x_3 + \left(-\frac{1}{9} - \left[-\frac{1}{9}\right]\right) \cdot x_4 - S_1,\ \ S_1 \geq 0;$$

$$\frac{22}{9} - 2 = \left(\frac{2}{9} - 0\right) \cdot x_3 + \left(-\frac{1}{9} - (-1)\right) \cdot x_4 - S_1,\ \ S_1 \geq 0;$$

$\frac{4}{9} = \frac{2}{9} \cdot x_3 + \frac{8}{9} \cdot x_4 - S_1, \ S_1 \ge 0$ **– первое ограничение Гомори.**

Составленное ограничение дописываем к имеющимся в симплексной таблице: допишем коэффициенты этого уравнения снизу к таблице 2.3, добавим дополнительный столбец, соответствующий переменной S_1, получим таблицу 2.4.

Таблица 2.4 – Симплексная таблица с первым ограничением Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1
			8	6	0	0	–
x_2	6	22/9	0	1	2/9	–1/9	0
x_1	8	61/18	1	0	–1/18	5/18	0
Δ		376/9	0	0	8/9	14/9	0
		4/9	0	0	2/9	8/9	–1

После построения дополнительного ограничения имеем новую задачу линейного программирования, в которой три ограничения. Для получения опорного плана этой задачи необходимо найти третий базисный вектор. Для этого определяем:

$\min\limits_j \frac{\Delta_j}{a_{kj}} = \min\left\{\frac{8/9}{2/9}; \frac{14/9}{8/9}\right\} = \frac{7}{4}$, – следовательно, в базис вводим вектор x_4.

Рассчитываем величину $\Theta = \min\limits_{a_{ij}>0} \frac{x_j}{a_{ij}} = \min\left\{-;\ \frac{61/18}{5/18};\ \frac{4/9}{8/9}\right\} = \frac{1}{2}$.

Минимальное значение Θ получено по дополнительной строке, значит, не прибегая к искусственной переменной, получаем опорный план расширенной задачи (таблица 2.5).

Таблица 2.5 – Преобразованная симплексная таблица после первого ограничения Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1
			8	6	0	0	–
x_2	6	5/2	0	1	1/4	0	–1/8
x_1	8	13/4	1	0	–1/8	0	5/16
x_4	0	1/2	0	0	1/4	1	–9/8
Δ		41	0	0	1/2	0	7/4

Полученный план X_1= (13/4, 5/2, 0, 1/2), F_1 = 41 по-прежнему нецелочисленный. Строим новое ограничение Гомори.

Так как максимальная дробная часть среди компонент плана равна 1/2, записываем дополнительное ограничение по первой строке (можно и по третьей):

$$\frac{5}{2} - \left[\frac{5}{2}\right] = 0 \cdot x_1 + (1-[1]) \cdot x_2 + \left(\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{4}\right]\right) \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \left(-\frac{1}{8} - \left[-\frac{1}{8}\right]\right) S_1 - S_2,\ S_2 \ge 0;$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot x_3 + \frac{7}{8} \cdot S_1 - S_2,\ S_2 \geq 0$$ **– второе ограничение Гомори.**

Ограничение добавляем в последнюю симплексную таблицу (таблица 2.6).

Таблица 2.6 – Симплексная таблица со вторым ограничением Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	5/2	0	1	1/4	0	–1/8	0
x_1	8	13/4	1	0	–1/8	0	5/16	0
x_4	0	1/2	0	0	1/4	1	–9/8	0
Δ		41	0	0	1/2	0	7/4	0
		1/2	0	0	1/4	0	7/8	–1

Получили задачу, в которой 4 ограничения, следовательно, в базисе должно быть 4 единичных вектора.

Определяем вектор, вводимый в базис: $\min\limits_{j} \frac{\Delta_j}{a_{kj}} = \min\left\{\frac{1/2}{1/4};\ \frac{7/4}{7/8}\right\} = 2$.

Можно ввести либо x_3, либо S_1. Введем вектор S_1.

$\Theta = \min\limits_{a_{ij}>0} \frac{x_j}{a_{ij}} = \min\left\{-;\ \frac{13/4}{5/16};\ -;\ \frac{1/2}{7/8}\right\} = \frac{4}{7}$ – соответствует дополнительному ограничению.

Произведем пересчет симплексной таблицы (таблица 2.7).

Таблица 2.7 – Преобразованная симплексная таблица после второго ограничения Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	18/7	0	1	2/7	0	0	–1/7
x_1	8	43/14	1	0	–3/14	0	0	5/14
x_4	0	8/7	0	0	4/7	1	0	–9/7
S_1	–	4/7	0	0	2/7	0	1	–8/7
Δ		40	0	0	0	0	0	2

Получаем новый оптимальный нецелочисленный план. Поскольку дополнительная переменная S_1 вошла в базис, можно вычеркнуть соответствующие ей строку и столбец, тем самым сокращая размерность задачи (таблица 2.8).

Таблица 2.8 – Сокращенная симплексная таблица

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2
			8	6	0	0	–
x_2	6	18/7	0	1	2/7	0	–1/7
x_1	8	43/14	1	0	–3/14	0	5/14
x_4	0	8/7	0	0	4/7	1	–9/7
Δ		40	0	0	0	0	2

В полученном плане максимальную дробную часть (4/7) имеет компонента x_2, поэтому записываем дополнительное ограничение по первой строке (таблица 2.9):

$$\frac{18}{7}-\left[\frac{18}{7}\right]=0\cdot x_1+(1-[1])\cdot x_2+\left(\frac{2}{7}-\left[\frac{2}{7}\right]\right)\cdot x_3+0\cdot x_4+\left(-\frac{1}{7}-\left[-\frac{1}{7}\right]\right)S_2-S_3,\ S_3\geq 0;$$

$\frac{4}{7}=\frac{2}{7}\cdot x_3+\frac{6}{7}\cdot S_2-S_3,\ S_3\geq 0$ – **третье ограничение Гомори.**

Таблица 2.9 – Симплексная таблица с третьим ограничением Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_3
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	18/7	0	1	2/7	0	–1/7	0
x_1	8	43/14	1	0	–3/14	0	5/14	0
x_4	0	8/7	0	0	4/7	1	–9/7	0
Δ		40	0	0	0	0	2	0
		4/7	0	0	2/7	0	6/7	–1

Определяем вектор, вводимый в базис: $\min\limits_j \frac{\Delta_j}{a_{kj}}=\min\left\{\frac{0}{2/7};\ \frac{2}{6/7}\right\}=0$. Это вектор x_3. Минимальное значение Θ = 2, что соответствует дополнительной строке. После проведения симплексных преобразований получим таблицу 2.10.

Таблица 2.10 – Преобразованная симплексная таблица после третьего ограничения Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_3
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	2	0	1	0	0	–1	1
x_1	8	7/2	1	0	0	0	1	–3/4
x_4	0	0	0	0	0	1	–3	2
x_3	0	2	0	0	1	0	3	–7/2
Δ		40	0	0	0	0	2	1/2

Полученный план снова является оптимальным нецелочисленным. Дополнительное ограничение запишем по второй строке (таблица 2.11):

Таблица 2.11 – Симплексная таблица с четвертым ограничением Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_3	S_4
			8	6	0	0	–	–	–
x_2	6	2	0	1	0	0	–1	1	0
x_1	8	7/2	1	0	0	0	1	–3/4	0
x_4	0	0	0	0	0	1	–3	2	0
x_3	0	2	0	0	1	0	3	–7/2	0
Δ		40	0	0	0	0	2	1/2	0
		1/2	0	0	0	0	0	1/4	–1

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot S_3 - S_4, \; S_4 \ge 0$ **– четвертое ограничение Гомори.**

Так как базисной компонентой может быть только S_3, определяем величину:

$\Theta = \min\limits_{a_{ij}>0} \frac{x_j}{a_{ij}} = \min\left\{\frac{2}{1};\; –;\; \frac{0}{2};\; –;\; \frac{1/2}{1/4}\right\} = 0$ – минимальное значение получилось в третьей строке, а не в строке Гомори, следовательно, переходим к М-задаче: введем дополнительную переменную x_5 в ограничение Гомори (таблицы 2.12, 2.13).

Таблица 2.12 – Таблица М-задачи

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_3	S_4	x_5
			8	6	0	0	–	–	–	–M
x_2	6	2	0	1	0	0	–1	1	0	0
x_1	8	7/2	1	0	0	0	1	–3/4	0	0
x_4	0	0	0	0	0	1	–3	2	0	0
x_3	0	2	0	0	1	0	3	–7/2	0	0
x_5	–M	1/2	0	0	0	0	0	1/4	–1	1
Δ		40	0	0	0	0	2	0	0	0
		–M/2	0	0	0	0	0	–M/4	M	0

Таблица 2.13 – Преобразованная симплексная таблица М-задачи

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_3	S_4	x_5
			8	6	0	0	–	–	–	–M
x_2	6	2	0	1	0	–1/2	1/2	0	0	0
x_1	8	7/2	1	0	0	3/8	–1/8	0	0	0
S_3	0	0	0	0	0	1/2	–3/2	1	0	0
x_3	0	2	0	0	1	7/4	–9/4	0	0	0
x_5	–M	1/2	0	0	0	–1/8	3/8	0	–1	1
Δ		40	0	0	0	0	2	0	0	0
		–M/2	0	0	0	M/8	–3M/8	0	M	0

Удалим строку и столбец, соответствующий переменной S_3, т. к. она вошла в базис, и продолжим вычисления в таблице 2.14.

Таблица 2.14 – Сокращенная симплексная таблица М-задачи

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_2	S_4
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	4/3	0	1	0	–1/3	0	4/3
x_1	8	11/3	1	0	0	1/3	0	–1/3
x_3	0	5	0	0	1	1	0	–6
S_2	0	4/3	0	0	0	–1/3	1	–8/3
Δ		112/3	0	0	0	2/3	0	16/3

Так как искусственная переменная x_5 выведена из базиса, удалим соответствующий ей столбец. Полученный оптимальный план все еще является нецелочисленным. Максимальная дробная часть max(1/3; 2/3) = 2/3 соответствует переменной x_1, следовательно, дополнительное ограничение записываем по второй строке, получаем таблицу 2.15 (строку и столбец, соответствующие вошедшей в базис переменной S_2, удаляем):

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot x_4 + \dfrac{2}{3} \cdot S_4 - S_5, \;\; S_5 \geq 0$ **– пятое ограничение Гомори.**

Вектор, вводимый в базис, вычисляем из следующего отношения:

$\min\limits_{j} \dfrac{\Delta_j}{a_{kj}} = \min\left\{\dfrac{2/3}{1/3};\ \dfrac{16/3}{2/3}\right\} = 2$, вводим x_4.

Таблица 2.15 – Сокращенная симплексная таблица с пятым ограничением Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_4	S_5
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	4/3	0	1	0	–1/3	4/3	0
x_1	8	11/3	1	0	0	1/3	–1/3	0
x_3	0	5	0	0	1	1	–6	0
Δ		112/3	0	0	0	2/3	16/3	0
		2/3	0	0	0	1/3	2/3	–1

$\Theta = \min\limits_{a_{ij}>0} \dfrac{x_j}{a_{ij}} = \min\left\{-;\ \dfrac{11/3}{1/3};\ \dfrac{5}{1};\ \dfrac{2/3}{1/3}\right\} = 2$ – соответствует строке Гомори.

Получаем новую симплексную таблицу 2.16.

Таблица 2.16 – Оптимальная симплексная таблица после пятого ограничения Гомори

$x_Б$	$c_Б$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	S_4	S_5
			8	6	0	0	–	–
x_2	6	2	0	0	0	0	2	–1
x_1	8	3	1	1	0	0	–1	1
x_3	0	3	0	0	1	0	–8	3
x_4	0	2	0	0	0	1	2	–3
Δ		36	0	0	0	0	4	2

План $X^* = (3, 2, 3, 2)$ – оптимальный целочисленный, $F^* = 36$.

<u>Геометрическая интерпретация метода Гомори:</u> строим множество допустимых планов (рисунок 2.1):

$$2x_1 + 5x_2 \leq 19,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0.$$

В точке 1 пересечения прямых $2x_1 + 5x_2 = 19$ и $4x_1 + x_2 = 16$ – оптимальный нецелочисленный план.

Выразим дополнительные переменные x_3 и x_4:

$$x_3 = 19 - 2x_1 - 5x_2;$$

$$x_4 = 16 - 4x_1 - x_2.$$

Из первого ограничения Гомори $\frac{4}{9} = \frac{2}{9} \cdot x_3 + \frac{8}{9} \cdot x_4 - S_1,\ S_1 \geq 0$ получаем

$$S_1 = \frac{2}{9} \cdot (19 - 2x_1 - 5x_2) + \frac{8}{9} \cdot (16 - 4x_1 - x_2) - \frac{4}{9} = 18 - 4x_1 - 2x_2.$$

Отсюда имеем $4x_1 + 2x_2 \leq 18$ – прямая (1).

Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 1. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 2.

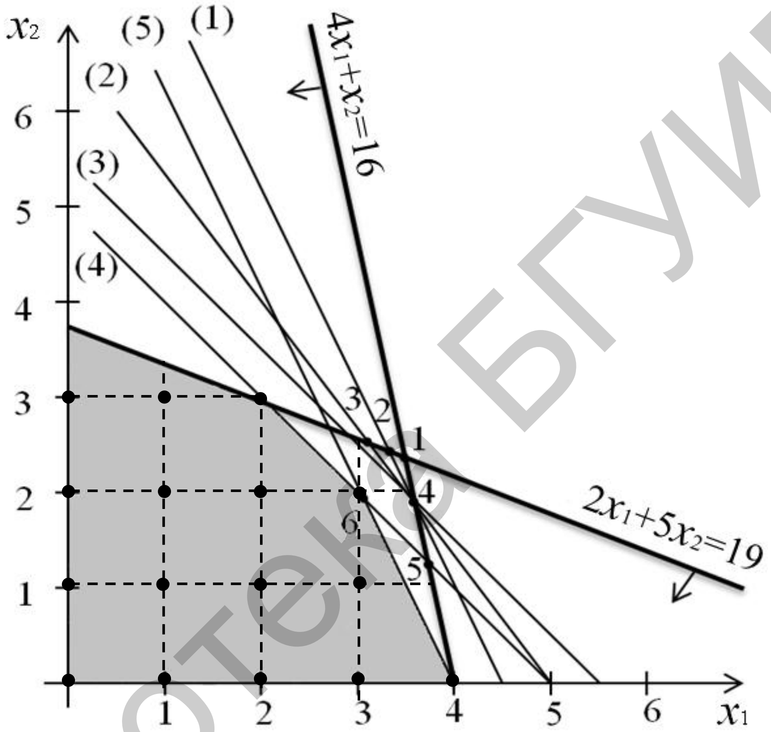


Рисунок 2.1 – Построение отсечений множества допустимых планов методом Гомори

Из второго ограничения Гомори $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot x_3 + \frac{7}{8} \cdot S_1 - S_2,\ S_2 \geq 0$ получаем

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot (19 - 2x_1 - 5x_2) + \frac{7}{8} \cdot (18 - 4x_1 - 2x_2) - \frac{1}{2} = 20 - 4x_1 - 3x_2,$$

или $4x_1 + 3x_2 \leq 20$ – прямая (2).

Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 2. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 3.

Из третьего ограничения Гомори $\frac{4}{7} = \frac{2}{7} \cdot x_3 + \frac{6}{7} \cdot S_2 - S_3,\ S_3 \geq 0$ получаем

$$S_3 = \frac{2}{7} \cdot (19 - 2x_1 - 5x_2) + \frac{6}{7} \cdot (20 - 4x_1 - 3x_2) - \frac{4}{7} = 22 - 4x_1 - 4x_2,$$

откуда $4x_1 + 4x_2 \leq 22$ – прямая (3).

Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 3. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 4.

Из четвертого ограничения Гомори $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot S_3 - S_4,\ \ S_4 \geq 0$ получаем

$$S_4 = \frac{1}{4}\cdot(22-4x_1-4x_2)-\frac{1}{2}=5-x_1-x_2.$$

Отсюда имеем $x_1 + x_2 \leq 5$ – прямая (4).

Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 4. Новый оптимальный нецелочисленный план – точка 5.

Из пятого ограничения Гомори $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot x_4+\frac{2}{3}\cdot S_4 - S_5,\ \ S_5 \geq 0$ имеем

$$S_5 = \frac{1}{3}\cdot x_4+\frac{2}{3}\cdot(5-x_1-x_2)-\frac{2}{3}(16-4x_1-x_2)=8-2x_1-x_2.$$

Отсюда $2x_1 + x_2 \leq 8$ – прямая (5).

Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 5. Оптимальный целочисленный план – точка 6 с координатами (3; 2), соответствующее значение целевой функции $F^* = 36$.

Особенностью метода Гомори является целочисленность всех переменных, входящих в задачу. В рассматриваемой задаче переменные x_3 и x_4, обозначающие неиспользованные остатки денежных средств и площади, соответственно, могут принимать как целые, так и дробные значения. Таким образом, рассматриваемая задача является частично целочисленной.

Для решения этой задачи воспользуемся **методом ветвей и границ**. Ход решения показан на рисунке 2.2. Номера задач соответствуют порядку их включения в список решаемых задач (не порядок решения). Рамкой выделены целочисленные решения.

Вначале рассмотрим исходную задачу без ограничения на целочисленность (задача 1):

Задача 1

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 19,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

После решения задачи 1 симплекс-методом с использованием надстройки Excel Поиск решения получено оптимальное нецелочисленное решение $X_{опт}$= =(61/18, 22/9), $F_{\max}$ = 376/9.

По условию задачи обе переменные должны принимать целочисленные значения. Для продолжения поиска оптимального решения выбирается любая из этих переменных, например x_1.

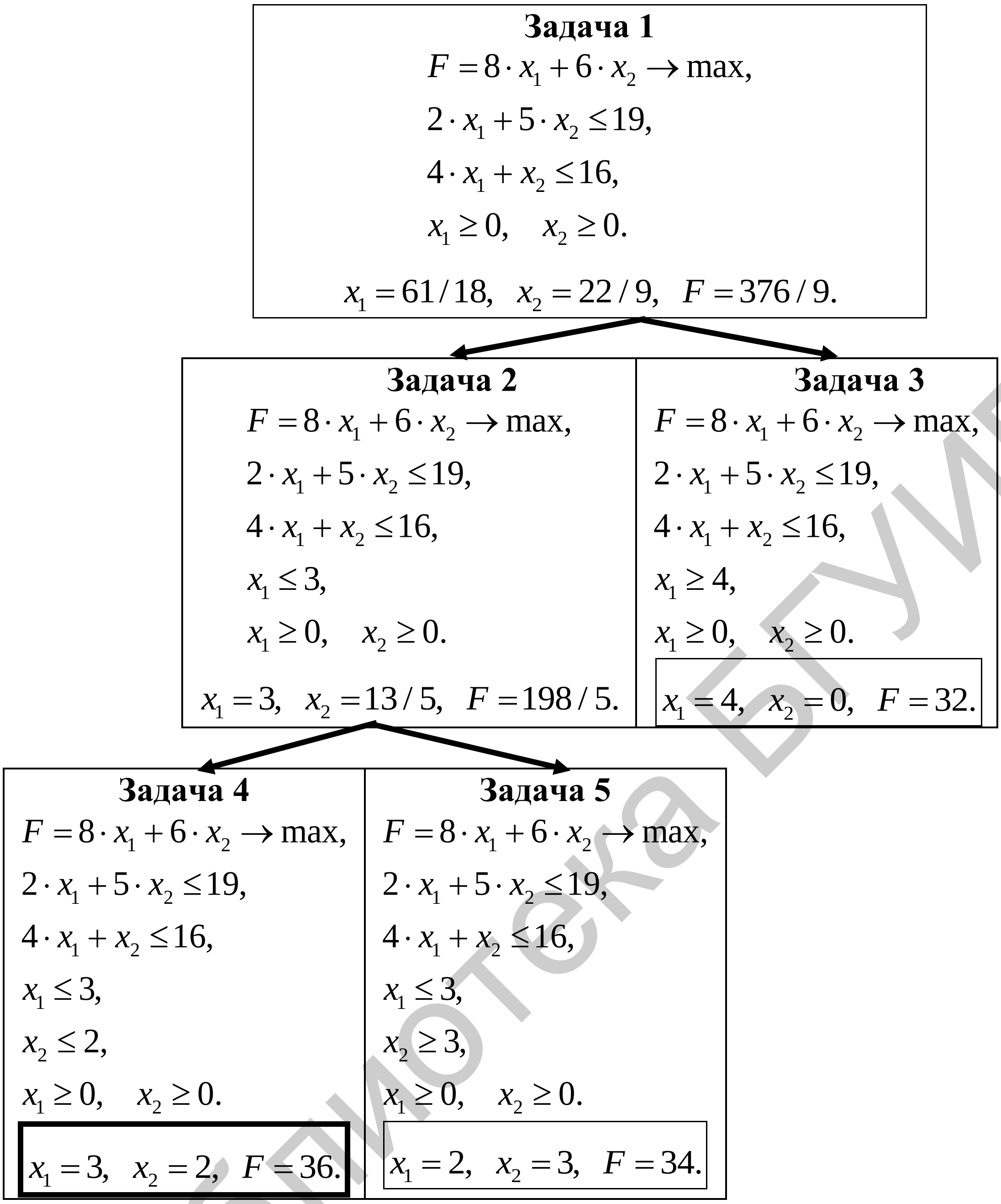


Рисунок 2.2 – Схема ветвления при решении задачи целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ

В список решаемых задач включаются задачи 2 и 3. В задачу 2 входит ограничение $x_1 \le 3$, а в задачу 3 – ограничение $x_1 \ge 4$. Смысл этих ограничений следующий:

- эти ограничения исключают из области допустимых значений (ОДЗ) оптимальное, но нецелочисленное решение $x_1 = 61/18$, $x_2 \le 22/9$, т. к. значение $x_1 = 61/18 \approx 3{,}389$ не соответствует ни ограничению $x_1 \le 3$, ни ограничению $x_1 \ge 4$. Таким образом, в ходе дальнейшего решения задачи исключается возврат к оптимальному, но нецелочисленному решению;

- эти ограничения не исключают из ОДЗ ни одного допустимого целочисленного решения, т. к. любое целочисленное значение x_1 соответствует либо ограничению $x_1 \leq 3$, либо ограничению $x_1 \geq 4$.

Задача 2

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 19,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \leq 3,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Задача 3

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 19,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \geq 4,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Оценкой задач 2 и 3 является величина $F = 376/9$. Эта величина соответствует оптимальному (но нецелочисленному) решению задачи 1 ($x_1 = 61/18$, $x_2 = 22/9$). Решения задач 2 и 3 из-за включения дополнительных ограничений ($x_1 \leq 3$ и $x_1 \geq 4$ соответственно) будут отличаться от оптимального, и следовательно, значения целевых функций в задачах 2 и 3 не могут быть больше оптимального значения 376/9.

Так как задачи 2 и 3 имеют одинаковые оценки, для решения можно выбрать любую из них. Пусть выбрана задача 2. Решим ее симплекс-методом (с использованием надстройки Excel Поиск решения).

Получаем также нецелочисленное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 13/5$, $F = 198/5$.

Для продолжения поиска оптимального решения следует добавить ограничения на целочисленность переменной x_2. В список решаемых задач включаются задачи 4 и 5.

Задача 4

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 19,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \leq 3,$$
$$x_2 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Задача 5

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 19,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16,$$
$$x_1 \leq 3,$$
$$x_2 \geq 3,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

В задачу 4 введено ограничение $x_2 \leq 2$, а в задачу 5 – ограничение $x_2 \geq 3$. Эти ограничения имеют тот же смысл, что и ограничения, используемые при составлении задач 2 и 3 (см. выше).

Оценкой задач 4 и 5 является величина $F = 198/5$, соответствующая оптимальному решению задачи 2.

Таким образом, в списке решаемых задач находятся три задачи: задача 3 (с оценкой 376/9), задачи 4 и 5 (с оценкой 198/5). Для решения выбирается задача с максимальной оценкой. В данном случае это задача 3. При ее решении максимальное значение целевой функции может составить не более 376/9, а для задач 4 и 5 – не более 198/5.

Решение задачи 3 (полученное с использованием надстройки Excel Поиск решения) оказывается целочисленным: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $F = 32$. Это решение становится текущим наилучшим решением. Оценки задач 4 и 5, находящихся в списке решаемых задач, сравниваются со значением целевой функции, полученным для целочисленного решения ($F^* = 32$). Оценки задач 4 и 5 (198/5) оказались лучше, чем величина F^*. Это значит, что при решении этих задач могут быть получены лучшие решения, поэтому ни одна из задач не исключается.

Поскольку оценки задач 4 и 5 равны, для решения можно выбрать любую из них. Пусть выбрана задача 4. Ее решение оказалось целочисленным: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $F = 36$.

Значение целевой функции задачи 4 ($F = 36$) лучше, чем у текущего наилучшего решения ($F^* = 32$), найденного ранее при решении задачи 3. Следовательно, полученное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ становится текущим наилучшим решением, а величина F^* принимает значение 36.

Это значение необходимо сравнить с оценками всех задач, имеющихся в списке решаемых задач. В списке решаемых задач осталась одна задача – задача 5. Оценка задачи 5 (198/5) лучше, чем $F^* = 36$, поэтому исключить эту задачу нельзя.

Решим задачу 5 симплекс-методом с использованием надстройки Excel Поиск решения. Ее решение целочисленно: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, значение целевой функции $F = 34$. Полученное значение целевой функции хуже, чем $F^* = 36$. Поэтому включать в список решаемых задач новые задачи не требуется.

В списке решаемых задач не осталось ни одной задачи. Таким образом, получено оптимальное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $F^* = 36$.

Схема ветвления приведена на рисунке 2.2.

Решение, полученное методом ветвей и границ, совпадает с решением, полученным ранее методом Гомори.

Согласно полученному решению предприятию необходимо закупить три машины типа А и две машины типа В. При этом будет достигнута максимальная производительность работы оборудования, равная 36 т продукции за смену. Неиспользованными останутся денежные средства в размере 3 ден. ед. и площадь в размере 2 м^2.

Задача 2.2. Задача о рюкзаке

Пусть имеется $n = 4$ предмета, заданы a_k – вес k-го предмета – и c_k – полезность k-го предмета, $k = 1, 2, \ldots, n$ (таблица 2.17). Максимально возможная вместимость рюкзака $V = 10$. Требуется собрать рюкзак максимальной полезности, не превышая при этом размер рюкзака.

Таблица 2.17 – Исходные данные к задаче о рюкзаке

Предмет	**1**	**2**	**3**	**4**
Вес	5	4	3	2
Полезность	20	16	11	7

Решение

Для каждого из предметов необходимо решить, класть его в рюкзак или не класть.

Для описания решения введем булевы переменные x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. переменные, принимающие два значения: 0 и 1).

При этом $x_k = 1$, если предмет размещают в рюкзаке, и $x_k = 0$, если нет, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда математическая модель задачи может быть записана следующим образом:

$$F = 20 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 \to \max,$$
$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \le 10,$$
$$x_k \ge 0, \quad k = 1, \ \ldots, \ 4.$$

Для решения задачи о рюкзаке применим метод ветвей и границ.

Множество допустимых решений Ω – множество всех 4-мерных бинарных векторов.

Для каждого предмета будем осуществлять ветвление по принципу размещать или не размещать данный предмет в рюкзаке. Таким образом, на *k*-м шаге подмножество *A* векторов множества Ω будет разбито на два подмножества: подмножество *A*' векторов множества *A*, у которых *k*-м элементом является 1, и подмножество *A*'' векторов множества *A*, у которых *k*-м элементом является 0, $A = A' \cup A''$. На первом шаге множество рассматриваемых векторов *A* совпадает с множеством Ω.

При этом для каждой ветви будут вычисляться две оценки – верхняя граница полезности текущей ветви и значение текущего веса рюкзака – по следующим формулам:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^* + \sum_{j=k+1}^{n} c_j, \qquad \Delta_k = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j^*, \qquad k = 1, \ \ldots, \ 4,$$

где значения $x_1^*, \ \ldots, \ x_k^*$ уже определены.

Заметим, что предметы следует рассматривать по неубыванию величины a_j / c_j. Найдем значения этой величины для предметов в данной задаче (таблица 2.18).

Таблица 2.18 – Вычисление отношений a_j/c_j

Предмет	**1**	**2**	**3**	**4**
a_j/c_j	1/4	1/4	3/11	2/7

Получили, что можно рассматривать предметы по порядку.

Шаг 0. Начальное решение $A_0 = \{\Omega\} = \{(x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4)\}$ – множество всех бинарных 4-мерных векторов.

Шаг 1. Производим ветвление. Разбиваем множество *A* на два подмножества: $A_1' = \{(1, \ x_2, \ x_3, \ x_4)\}$ и $A_1'' = \{(0, \ x_2, \ x_3, \ x_4)\}$. В первом случае предмет 1 размещаем в рюкзаке, во втором – нет. Для каждой ветви вычислим соответствующие оценки:

$$\varphi_1' = c_1 \cdot 1 + \sum_{j=2}^{4} c_j = 20 \cdot 1 + 16 + 11 + 7 = 54; \qquad \Delta_1' = a_1 \cdot 1 = 5 \cdot 1 = 5 \le 10;$$

$$\varphi_1'' = c_1 \cdot 0 + \sum_{j=2}^{4} c_j = 20 \cdot 0 + 16 + 11 + 7 = 34; \qquad \Delta_1'' = a_1 \cdot 0 = 5 \cdot 0 = 0 \le 10.$$

Так как текущая оценка первой ветви больше оценки второй ветви, и при этом выполняются ограничения на вес рюкзака, продолжим ветвление.

Шаг 2. Разбиваем множество A_1' на два подмножества: $A_2' = \{(1,\ 1,\ x_3,\ x_4)\}$ и $A_2'' = \{(1,\ 0,\ x_3,\ x_4)\}$. В первом случае в рюкзаке размещаем предметы 1 и 2, во втором случае предмет 1 размещаем в рюкзаке, а предмет 2 – нет. Для каждой ветви вычислим соответствующие оценки:

$$\varphi_2' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot 1 + c_3 + c_4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 11 + 7 = 54;$$

$$\Delta_2' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9 \le 10;$$

$$\varphi_2'' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot 0 + c_3 + c_4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 11 + 7 = 38;$$

$$\Delta_2'' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot 0 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 5 \le 10.$$

Для обеих ветвей выполняется ограничение на вес рюкзака.

Таким образом, рассматриваем три ветви с оценками 54, 38 и 34. Дальнейшему ветвлению будем подвергать ветвь A_2' с наибольшей оценкой (54).

Шаг 3. Разбиваем множество A_2' на два подмножества: $A_3' = \{(1,\ 1,\ 1,\ x_4)\}$ и $A_3'' = \{(1,\ 1,\ 0,\ x_4)\}$. В первом случае в рюкзаке размещаем предметы 1, 2 и 3, во втором случае предметы 1 и 2 размещаем в рюкзаке, а предмет 3 – нет. Для каждой ветви вычислим соответствующие оценки:

$$\varphi_3' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot 1 + c_4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 7 = 54;$$

$$\Delta_3' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 12 > 10;$$

$$\varphi_3'' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot 0 + c_4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 7 = 43;$$

$$\Delta_3'' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot 0 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 9 \le 10.$$

Для ветви с оценкой 54 не выполняется ограничение по весу рюкзака, следовательно, обрываем эту ветвь.

Таким образом, в рассмотрении остаются три ветви: с оценками 34, 38 и 43. Так как для ветви с наибольшей оценкой выполняется ограничение на вес рюкзака, дальнейшему ветвлению будем подвергать ветвь A_3''.

Шаг 4. Разбиваем множество A_3'' на два подмножества: $A_4' = \{(1,\ 1,\ 0,\ 1)\}$ и $A_4'' = \{(1,\ 1,\ 0,\ 0)\}$. В первом случае в рюкзаке размещаем предметы 1, 2 и 4, во втором – только предметы 1 и 2, а предметы 3 и 4 не размещаем. Для каждой ветви вычислим соответствующие оценки:

$$\varphi_4' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot x_3^* + c_4 \cdot 1 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 43;$$

$\Delta_4' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot x_3^* + a_4 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 11 > 10$;

$\varphi_4'' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot x_3^* + c_4 \cdot 0 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 36$;

$\Delta_4'' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot x_3^* + a_4 \cdot 0 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 9 \le 10$.

Для ветви с оценкой 43 не выполняется ограничение по весу рюкзака, следовательно, обрываем эту ветвь.

При этом подмножество A_4'' содержит всего один вектор, следовательно, дальнейшее ветвление невозможно. Таким образом, найдено текущее рекордное значение целевой функции: $rec(A_4'') = \varphi_4'' = 36$.

В рассмотрении остаются две ветви, допускающие дальнейшее ветвление: с оценками 34 и 38. Так как оценка 34 меньше текущего рекордного значения целевой функции (36), обрываем эту ветвь. В рассмотрении остается единственная ветвь, ее и будем подвергать дальнейшему ветвлению.

Шаг 5. Разбиваем множество A_2'' на два подмножества: $A_5' = \{(1,\ 0,\ 1,\ x_4)\}$ и $A_5'' = \{(1,\ 0,\ 0,\ x_4)\}$. Для каждой ветви вычислим соответствующие оценки:

$\varphi_5' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot 1 + c_4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 7 = 38$;

$\Delta_5' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 8 \le 10$;

$\varphi_5'' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot 0 + c_4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 7 = 27$;

$\Delta_5'' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot 0 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 5 \le 10$.

Для обеих ветвей выполняется ограничение на вес рюкзака.

Так как оценка 27 меньше текущего рекордного значения целевой функции (36), обрываем эту ветвь.

Дальнейшему ветвлению будем подвергать ветвь A_5' с оценкой 38.

Шаг 6. Произведем дальнейшее ветвление. Разбиваем множество A_5' на два подмножества: $A_6' = \{(1,\ 0,\ 1,\ 1)\}$ и $A_6'' = \{(1,\ 0,\ 1,\ 0)\}$. Для каждой ветви вычислим соответствующие оценки:

$\varphi_6' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot x_3^* + c_4 \cdot 1 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 38$;

$\Delta_6' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot x_3^* + a_4 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10 \le 10$;

$\varphi_6'' = c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* + c_3 \cdot x_3^* + c_4 \cdot 0 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 31$;

$\Delta_6'' = a_1 \cdot x_1^* + a_2 \cdot x_2^* + a_3 \cdot x_3^* + a_4 \cdot 0 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 7 \le 10$.

Для обеих ветвей выполняется ограничение на вес рюкзака.

Так как оценка 31 меньше текущего рекордного значения целевой функции (36), обрываем эту ветвь.

Дальнейшее ветвление невозможно, т. к. подмножество A_6' содержит всего один вектор. Оценка ветви A_6' выше текущего рекордного значения целевой функции. Таким образом, найдено новое текущее рекордное значение целевой функции: $rec(A_6') = \varphi_6' = 38$.

Шаг 7. Список ветвей для рассмотрения пуст. Следовательно, текущее рекордное решение является оптимальным решением, а текущее рекордное значение целевой функции – оптимальным значением целевой функции:

$$F^* = 38,\ x_1^* = 1,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 1.$$

Геометрическая интерпретация решения задачи о рюкзаке

Решение задачи о рюкзаке имеет простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим систему координат. По оси абсцисс отложим количество имеющихся в нашем распоряжении предметов, по оси ординат отметим границу допустимого веса рюкзака. Принимаемые решения относительно размещения очередного предмета в рюкзаке будем отмечать на соответствующем участке плоскости отрезками: горизонтальными в случае отказа от размещения и наклонными (на высоту, равную весу предмета) в случае принятия решения о размещении предмета в рюкзаке. В скобках будем указывать значения оценок суммарной ценности на данном шаге ветвления.

Шаги 0–4 проведенного решения показаны на рисунке 2.3.

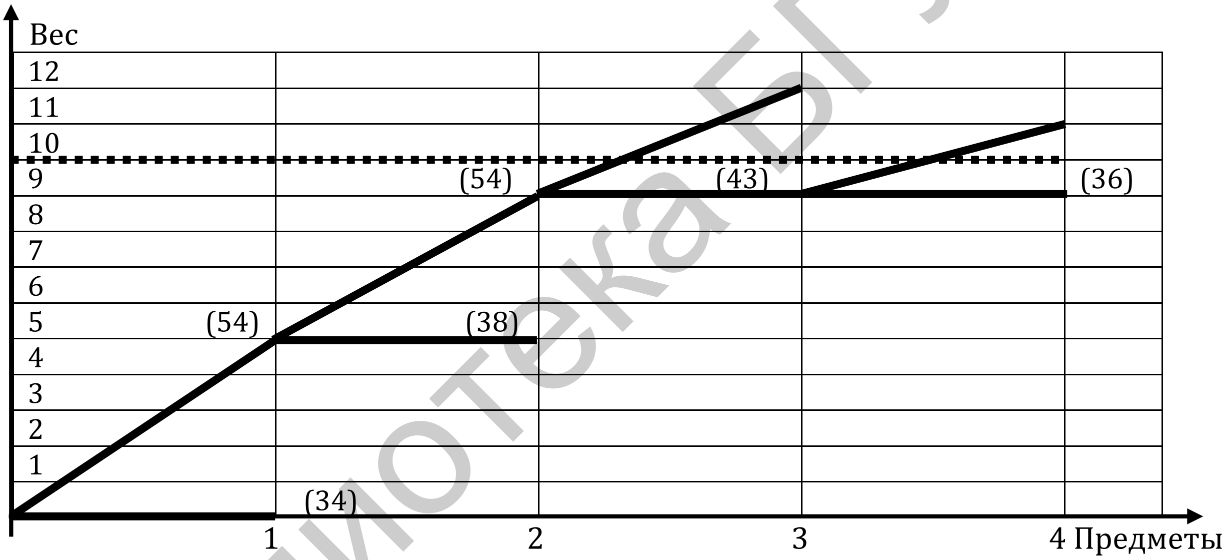


Рисунок 2.3 – Сеть, иллюстрирующая наполнение рюкзака

Продолжение ветвления с получением оптимального решения (соответствует шагам 5–7 проведенного решения) показано на рисунке 2.4.

Таким образом, получено оптимальное решение: включить в состав рюкзака предметы 1, 3, 4, при этом вес рюкзака составит 10, суммарная ценность будет максимальной и равной 38.

Задача 2.3. Задача коммивояжера

Коммивояжеру – сотруднику торговой организации, требуется посетить ряд городов с целью рекламы и продажи товаров. Все города следует посетить точно по одному разу и вернуться в исходный, пройдя при этом путь наименьшей длины.

Перечень городов и расстояния между ними (стоимости переезда) заданы таблицей 2.19.

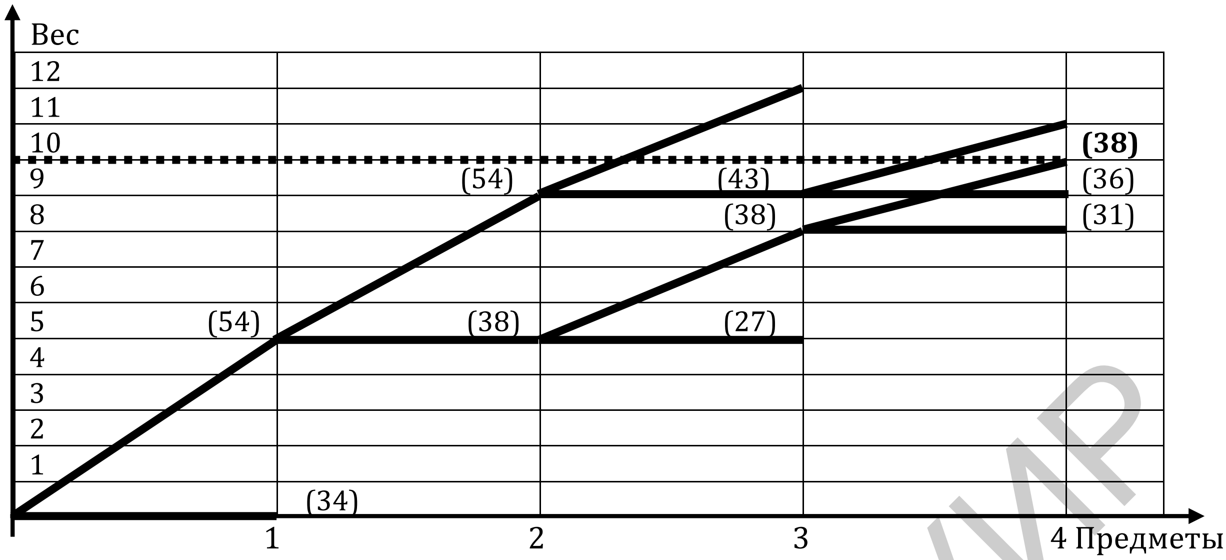


Рисунок 2.4 – Геометрическое решение задачи о рюкзаке

Таблица 2.19 – Исходные данные к задаче коммивояжера

Города	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	12	40	1	14
2	10	∞	15	16	7
3	6	12	∞	8	12
4	15	16	11	∞	9
5	14	13	14	7	∞

Решение

Для нахождения нижней границы множества всех путей $\varphi_{(\Omega)}$ выполним приведение матрицы расстояний $L = (l_{ij})$, $i = 1, \ldots, 5$, $j = 1, \ldots, 5$. Для этого в дополнительный столбец запишем константы приведения $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le 5} l_{ij}$, $i = 1, \ldots, 5$ по строкам. Вычтем их из элементов соответствующих строк. Выполнив приведение по столбцам и записав константы приведения $\beta_j = \min\limits_{1 \le i \le 5} l_{ij}$, $j = 1, \ldots, 5$ в дополнительную строку, получим полностью приведенную матрицу (таблица 2.20).

Таблица 2.20 – Приведение матрицы расстояний

Города	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	***α***
1	∞	5	37	0 (7)	13	**1**
2	3	∞	6	9	0 (3)	**7**
3	0 (3)	0 (0)	∞	2	6	**6**
4	6	1	0 (5)	∞	0 (0)	**9**
5	7	0 (5)	5	9	∞	**7**
β	**0**	**6**	**2**	**0**	**0**	

Нижняя граница длин множества всех путей Ω

$$\varphi_{(\Omega)} = \nu = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i + \sum_{j=1}^{5} \beta_j = 30 + 8 = 38.$$

Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу. Для этого определим сумму констант приведения для всех клеток матрицы с нулевыми элементами, условно (мысленно) заменяя нули на ∞. Заменим, например, элемент a_{14} = 0 на ∞. Тогда константа приведения по первой строке равна 5 (минимальному элементу этой строки), и по четвертому столбцу – 2 (минимальному элементу этого столбца). Сумма констант приведения 7 записана в скобках в клетке (1,4).

Наибольшая из сумм констант приведения, равная 7, соответствует дуге (1,4). Разобьем все множество путей относительно этой дуги на два подмножества – пути, включающие дугу (1,4), и исключающие ее.

а) Исключение дуги (1,4) из искомого пути осуществляется реальной заменой в матрице элемента a_{14} = 0 на ∞. Такая замена позволяет произвести дополнительное приведение матрицы путем вычитания из элементов первой строки 5 и из элементов четвертого столбца – 2. В результате приведения матрица расстояний для подмножества $\{(\overline{1,4})\}$ примет вид таблицы 2.21.

Таблица 2.21 – Приведенная матрица расстояний после исключения дуги (1,4)

Города	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	***α***
1	∞	0 (8)	32	∞	8	5
2	3	∞	6	7	0 (3)	0
3	0 (3)	0 (0)	∞	0 (7)	6	0
4	6	1	0 (5)	∞	0 (0)	0
5	7	0 (5)	5	7	∞	0
β	0	0	0	2	0	

Нижняя граница длин путей этого подмножества:

$$\varphi_{\overline{(1,4)}} = \varphi_{(\Omega)} + \nu_{\overline{(1,4)}} = 38 + 7 = 45.$$

б) Включение дуги (1,4) в искомый путь ведет к исключению элементов первой строки и четвертого столбца (таблица 2.22). Кроме того, элемент a_{41}=0 нужно заменить на ∞, чтобы не допустить образования цикла (4 → 1 → 4). Сокращенная матрица не допускает дополнительного приведения. Нижняя граница длин путей подмножества {(1,4)}:

$$\varphi_{(\Omega)} + \nu_{(1,4)} = 38 + 0 = 38.$$

Таблица 2.22 – Сокращенная матрица расстояний после включения дуги (1,4)

Города	**1**	**2**	**3**	**5**	***α***
2	3	∞	6	0 (3)	0
3	0 (3)	0 (0)	∞	6	0
4	∞	1	0 (5)	0 (0)	0
5	7	0 (5)	5	∞	0
β	0	0	0	0	

Так как после сокращения получена матрица 4×4, переходим к сравнению оценок $\varphi_{\overline{(1,4)}}$ и $\varphi_{(1,4)}$. Для дальнейшего разбиения (ветвления) выберем подмножество путей {(1,4)}, т. к. его нижняя граница меньше: 38 < 45.

в) Найдем дугу, исключение которой максимально увеличило бы нижнюю границу длин путей. Для этого определим сумму констант приведения для каждой клетки с нулем (см. таблицу 2.22). Максимальная сумма констант приведения $\nu_{\overline{(4,3)}} = \alpha_4 + \beta_3$ = 0 + 5 = 5 соответствует дуге (4,3) (такая же сумма у клетки (5,2), можно выбрать и ее). Следовательно, подмножество путей {(1,4)}, в свою очередь, разбиваем на два подмножества: {(1,4), (4,3)} и {(1,4), ($\overline{(4,3)}$)}.

г) После замены элемента a_{43} = 0 на ∞ и приведения матрица принимает вид таблицы 2.23. Нижняя граница длин путей подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3})\right\}$:

$$\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3})\right]} = \varphi_{(1,4)} + \nu_{\overline{(4,3)}} = 38 + 5 = 43.$$

Таблица 2.23 – Приведенная матрица расстояний после исключения дуги (4,3)

Города	**1**	**2**	**3**	**5**	$\boldsymbol{\alpha}$
2	3	∞	1	0 (1)	0
3	0 (3)	0 (0)	∞	6	0
4	∞	1	∞	0 (0)	0
5	7	0 (0)	0 (1)	∞	0
$\boldsymbol{\beta}$	0	0	5	0	

д) Включение дуги (4,3) в искомый путь приводит к исключению из него элементов четвертой строки матрицы таблицы 2.23, а также элементов третьего столбца. Кроме того, исключаем из рассмотрения дугу (3,4), чтобы не допустить образования цикла (3 → 4 → 3). Сокращенная матрица имеет вид таблицы 2.24 и допускает дальнейшее приведение.

Таблица 2.24 – Сокращенная матрица расстояний после включения дуги (4,3)

Города	**1**	**2**	**5**	$\boldsymbol{\alpha}$
2	3	∞	0 (9)	0
3	0 (3)	0 (0)	6	0
5	7	0 (7)	∞	0
$\boldsymbol{\beta}$	0	0	0	

Сумма констант приведения $\nu_{(4,3)} = \alpha_4 + \beta_3$ =0 + 0 = 0, а нижняя граница длин путей подмножества {(1,4), (4,3)} есть $\varphi_{[(1,4),(4,3)]} = \varphi_{(1,4)} + \nu_{(4,3)} =$ 38 + 0 = 38.

е) Так как $\varphi_{[(1,4),(4,3)]} = 38 < \varphi_{[(1,4)],\overline{(4,3)}]}$ = 43, для дальнейшего ветвления следует выбрать подмножество {(1,4),(4,3)}. Выбираем дугу с константой приведения 9 (2,5), и разбиваем подмножество {(1,4), (4,3)} на два новых подмножества

$\{(1,4), (4,3), (\overline{2,5})\}$ и $\{(1,4), (4,3), (2,5)\}$. После исключения дуги (2,5) и приведения матрицы расстояний получим новую матрицу (таблица 2.25), для которой $\nu_{\overline{(2,5)}} = 9$.

Таблица 2.25 – Приведенная матрица расстояний после исключения дуги (2,5)

Города	**1**	**2**	**5**	***α***
2	0 (∞)	∞	∞	3
3	0 (0)	0 (0)	0 (∞)	0
5	7	0 (7)	∞	0
β	0	0	6	

Нижняя граница длин путей подмножества $\{(1,4), (4,3), (\overline{2,5})\}$:

$$\varphi_{\left[(1,4),(4,3),\overline{(2,5)}\right]} = \varphi_{[(1,4),(4,3)]} + \nu_{\overline{(2,5)}} = 38 + 9 = 47.$$

ж) Включение дуги (2,5) в путь приводит к исключению второй строки и пятого столбца, а также дуги (5,2). Сокращенная матрица имеет вид таблицы 2.26 и допускает дальнейшее приведение. Нижняя граница длин путей подмножества $\{(1,4),(4,3), (2,5)\}$:

$$\varphi_{[(1,4),(4,3),(2,5)]} = \varphi_{[(1,4),(4,3)]} + \nu_{(2,5)} = 38 + 7 = 45.$$

Таблица 2.26 – Сокращенная матрица расстояний после включения дуги (2,5)

Города	**1**	**2**	***α***
3	0	0	0
5	0	∞	7
β	0	0	

з) Однако нижняя граница полученной ветви больше нижней границы 43 оборванной ветви. Поэтому дальнейшему ветвлению подлежит подмножество путей $\left\{(1,4),(\overline{4,3})\right\}$. Выбираем дугу (3, 1) с константой приведения 3 и разбиваем подмножество путей $\left\{(1,4),(\overline{4,3})\right\}$ на два новых подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right\}$ и $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(\overline{3,1})\right\}$. После исключения дуги (3,1) и приведения матрицы расстояний получим новую матрицу (таблица 2.27), для которой $\nu_{\overline{(3,1)}} = 3$.

Таблица 2.27 – Приведенная матрица расстояний после исключения дуги (3,1)

Города	**1**	**2**	**3**	**5**	***α***
2	0 (4)	∞	1	0 (1)	0
3	∞	0 (0)	∞	6	0
4	∞	1	∞	0 (0)	0
5	4	0 (0)	0 (1)	∞	0
β	3	0	0	0	

Нижняя граница длин путей подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(\overline{3,1})\right\}$:

$$\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(\overline{3,1})\right]} = \varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3})\right]} + \nu_{\overline{(3,1)}} = 43 + 3 = 46.$$

и) Включение дуги (3,1) в искомый путь приводит к исключению третьей строки и первого столбца, а также дуги (1,3). Сокращенная матрица имеет вид таблицы 2.28 и допускает дальнейшее приведение. Нижняя граница длин путей подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right\}$:

$$\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right]} = \varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3})\right]} + \nu_{(3,1)} = 43 + 0 = 43.$$

Таблица 2.28 – Сокращенная матрица расстояний после включения дуги (3,1)

Города	**2**	**3**	**5**	***α***
2	∞	1	0(1)	0
4	1	∞	0(1)	0
5	0(1)	0(1)	∞	0
β	0	0	0	

к) Так как $\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right]} = 43 < \varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(\overline{3,1})\right]}$ = 46, дальнейшему ветвлению подлежит подмножество путей $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right\}$. Выбираем дугу (5,2) с константой приведения 3 и разбиваем подмножество $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right\}$ на два новых подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(5,2)\right\}$ и $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(\overline{5,2})\right\}$. После исключения дуги (5,2) и приведения матрицы расстояний получим новую матрицу (таблица 2.29), для которой $\nu_{\overline{(5,2)}} = 1$.

Таблица 2.29 – Приведенная матрица расстояний после исключения дуги (5,2)

Города	**2**	**3**	**5**	***α***
2	∞	1	0 (1)	0
4	0 (∞)	∞	0 (0)	0
5	∞	0 (∞)	∞	0
β	1	0	0	

Нижняя граница длин путей подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(\overline{5,2})\right\}$:

$$\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(\overline{5,2})\right]} = \varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right]} + \nu_{\overline{(5,2)}} = 43 + 1 = 44.$$

л) Включение дуги (5,2) в искомый путь приводит к исключению пятой строки и второго столбца, а также дуги (2,5). Сокращенная матрица имеет вид таблицы 2.30 и допускает дальнейшее приведение. Нижняя граница длин путей подмножества $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(5,2)\right\}$

$$\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(5,2)\right]} = \varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1)\right]} + \nu_{(5,2)} = 43 + 1 = 44.$$

Таблица 2.30 – Сокращенная матрица расстояний после включения дуги (5,2)

Города	**3**	**5**	***α***
2	0	∞	1
4	∞	0	0
β	0	0	

м) Так как $\varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(5,2)\right]} = 44 = \varphi_{\left[(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(\overline{5,2})\right]}$ = 44, дальнейшему ветвлению подлежит любое из подмножеств. Выберем подмножество $\left\{(1,4),(\overline{4,3}),(3,1),(5,2)\right\}$. Так как в результате сокращения получена матрица 2×2 (см. таблицу 2.30), то в искомый путь включаем дуги (2,3) и (4,5), соответствующие нулевым элементам этой матрицы. Сумма констант приведения равна нулю. Следовательно, длина полученного пути равна 44.

Ход решения можно проиллюстрировать с помощью дерева ветвлений с указанием нижних границ длин путей соответствующей ветви (как это показано на рисунке 2.5).

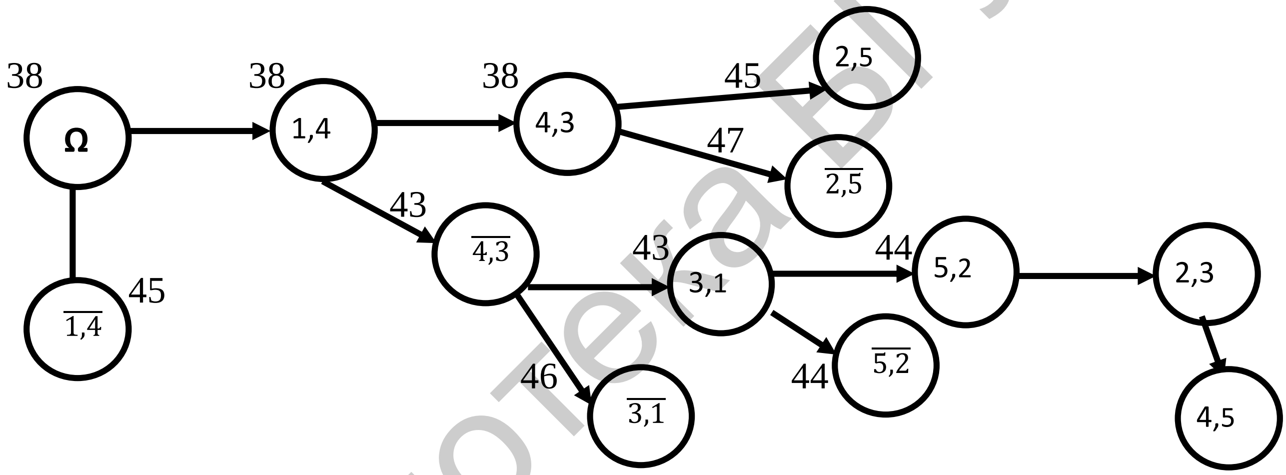


Рисунок 2.5 – Дерево ветвлений для задачи коммивояжера

В соответствии с деревом ветвлений (см. рисунок 2.5) искомый путь образуют дуги (1, 4), (3, 1), (5, 2), (2, 3), (4, 5).

Получаем маршрут 1 → 4 → 5 → 2 → 3 → 1 длиной 44.

Таким образом, коммивояжеру следует выехать из города 1, посетить последовательно города 4, 5, 2, 3 и вернуться в город 1. Длина найденного маршрута (44) не превышает нижних границ оборванных ветвей (45), следовательно, маршрут является оптимальным.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.4. Задача целочисленного линейного программирования

Найти целочисленное решение задачи линейного программирования методом Гомори и методом ветвей и границ. Значение k соответствует номеру варианта.

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le k, \\ 2x_1 \le 2k + 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in Z_+.$$

Задача 2.5. Задача о рюкзаке

В судоходной отрасли при перевозке грузов грузовыми суднами стоимость отправки груза обычно не зависит от его веса, т. к. перевозчики получают деньги в соответствии с контрактом. Поэтому они стараются максимизировать свою прибыль путем эффективной загрузки и доставки максимального веса в фиксированном объеме. В таблице 2.31 для каждого груза заданы его вес, прибыль, получаемая от его перевозки, а также максимально возможная вместимость грузового судна.

Таблица 2.31 – Исходные данные к задаче 2.5

Вариант	**Вес**						**Прибыль**						**Грузоподъемность судна**
1	**2**						**3**						**4**
В1	10	20	30	30	–	–	60	100	120	50	–	–	50
В2	7	2	5	1	–	–	2	4	1	2	–	–	6
В3	1	1	2	1	–	–	8	7	4	5	–	–	2
В4	2	3	2	1	–	–	9	5	7	4	–	–	4
В5	5	4	2	3	–	–	4	5	1	2	–	–	7
В6	2	1	6	5	–	–	10	7	25	24	–	–	7
В7	35	24	69	65	–	–	2	1	3	4	–	–	100
В8	2	3	4	5	–	–	15	19	24	27	–	–	7
В9	3	5	2	4	6	–	12	5	17	9	7	–	10
В10	12	9	15	11	6	–	1	2	3	2	3	–	29
В11	9	12	14	8	–	–	16	9	20	7	–	–	22
В12	6	3	7	9	–	–	16	6	14	19	–	–	13
В13	1	2	3	4	5	6	2	2	4	4	2	2	3
В14	5	3	5	3	–	–	3	2	6	4	–	–	7
В15	6	3	5	3	–	–	5	2	5	4	–	–	7

1	2						3						4
В16	5	1	3	5	–	–	7	4	6	1	–	–	8
В17	4	5	7	7	–	–	3	7	8	4	–	–	11
В18	2	4	5	4	–	–	3	3	5	6	–	–	9
В19	3	2	4	5	–	–	5	4	7	3	–	–	8
В20	2	4	3	6	–	–	3	6	5	9	–	–	7
В21	2	5	4	5	–	–	4	10	7	9	–	–	9
В22	3	2	4	5	–	–	5	4	3	3	–	–	7
В23	2	2	6	5	–	–	3	4	7	3	–	–	8
В24	2	4	1	2	–	–	7	2	5	1	–	–	4
В25	12	9	15	11	6	–	1	2	3	2	3	–	24
В26	9	12	14	8	–	–	16	9	20	7	–	–	30
В27	7	2	5	1	–	–	2	4	1	2	–	–	7
В28	6	3	7	9	–	–	16	6	14	19	–	–	15
В29	8	7	4	5	–	–	1	1	2	1	–	–	9
В30	9	5	7	4	–	–	2	3	2	1	–	–	9

Требуется отобрать грузы для перевозки, максимизирующие прибыль перевозчика, не превысив при этом грузоподъемность судна.

Составить математическую модель задачи и решить ее с помощью метода ветвей и границ.

Задача 2.6. Задача коммивояжера

Решить задачу коммивояжера для пяти городов. Матрица расстояний (стоимостей проезда) указана в таблице 2.32.

Таблица 2.32 – Исходные данные к задаче 2.6

В1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**В2**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	1	2	5	2	**1**	∞	10	3	6	9
2	1	∞	5	6	4	**2**	5	∞	5	4	2
3	6	3	∞	4	2	**3**	4	9	∞	7	8
4	5	1	1	∞	5	**4**	7	1	3	∞	4
5	4	3	4	2	∞	**5**	3	2	6	5	∞

В3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**В4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	5	2	1	**1**	∞	1	2	5	2
2	4	∞	6	5	1	**2**	1	∞	5	6	4
3	2	4	∞	3	6	**3**	6	3	∞	4	2
4	1	1	5	∞	4	**4**	5	1	1	∞	5
5	4	3	4	5	∞	**5**	4	3	4	2	∞

B5	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	4	7	∞

B6	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	4	10	4
2	1	∞	15	6	4
3	6	3	∞	14	2
4	5	21	10	∞	5
5	14	3	4	7	∞

B7	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	12	40	1	14
2	10	∞	15	16	7
3	6	12	∞	8	12
4	15	16	11	∞	9
5	14	13	14	7	∞

B8	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	30	1	4
2	1	∞	5	6	2
3	6	12	∞	8	12
4	5	6	10	∞	7
5	14	13	14	7	∞

B9	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	30	1	4
2	1	∞	5	6	2
3	6	12	∞	8	12
4	5	6	10	∞	7
5	14	13	14	7	∞

B10	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	5	7	9	2
2	4	∞	5	7	6
3	7	4	∞	5	8
4	6	6	7	∞	4
5	3	7	8	5	∞

B11	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	35	45	20	11
2	9	∞	17	6	8
3	21	31	∞	2	11
4	30	15	40	∞	10
5	10	9	8	7	∞

B12	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	6	4	9	7
2	3	∞	7	5	8
3	9	7	∞	5	4
4	7	5	9	∞	9
5	3	7	5	7	∞

B13	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	5	2	1
2	4	∞	6	5	1
3	2	4	∞	3	6
4	1	1	5	∞	4
5	4	3	4	5	∞

B14	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	6	5	2	7
2	3	∞	7	6	8
3	9	7	∞	5	4
4	7	5	9	∞	4
5	3	7	5	7	∞

B15	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	12	40	1	14
2	10	∞	15	16	7
3	6	12	∞	8	12
4	15	16	11	∞	9
5	14	13	14	7	∞

B16	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	3	4	9	7
2	3	∞	7	6	8
3	2	7	∞	4	4
4	7	5	9	∞	5
5	3	7	5	7	∞

B17	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	12	40	1	14
2	10	∞	15	16	7
3	6	12	∞	8	12
4	15	16	11	∞	9
5	14	13	14	7	∞

B18	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	3	4	9	7
2	3	∞	7	6	8
3	9	7	∞	5	4
4	7	5	3	∞	9
5	3	7	5	4	∞

B19	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	10	14	18	4
2	8	∞	10	14	12
3	14	8	∞	10	16
4	12	12	14	∞	8
5	6	14	16	10	∞

B20	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	6	3	9	7
2	3	∞	7	6	4
3	9	7	∞	5	4
4	7	2	7	∞	9
5	3	7	5	7	∞

B21	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	3	4	9	7
2	4	∞	7	6	8
3	9	7	∞	3	4
4	7	5	9	∞	9
5	3	7	5	7	∞

B22	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	1	6	5	4
2	1	∞	3	1	3
3	2	5	∞	1	4
4	5	6	4	∞	2
5	2	4	2	5	∞

B23	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	6	4	9	7
2	3	∞	4	6	8
3	9	7	∞	5	4
4	7	5	3	∞	9
5	3	7	5	7	∞

B24	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	5	4	7	3
2	10	∞	9	1	2
3	3	5	∞	3	6
4	6	4	7	∞	5
5	9	2	8	4	∞

B25	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	6	4	6	7
2	3	∞	7	6	8
3	9	7	∞	5	4
4	7	5	5	∞	9
5	3	4	5	7	∞

B26	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	9	21	30	10
2	35	∞	31	15	9
3	45	17	∞	40	8
4	20	6	2	∞	7
5	11	8	11	10	∞

B27	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	2	5	2	1
2	4	∞	7	5	1
3	2	4	∞	3	6
4	1	3	5	∞	4
5	4	3	4	5	∞

B28	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	3	9	7	3
2	6	∞	7	5	7
3	4	7	∞	9	5
4	9	5	5	∞	7
5	7	8	4	9	∞

B29	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	4	4	9	7
2	3	∞	7	3	8
3	6	7	∞	5	4
4	7	5	4	∞	9
5	3	7	5	7	∞

B30	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	4	9	7	3
2	3	∞	7	5	7
3	4	7	∞	9	5
4	9	6	3	∞	7
5	7	8	4	9	∞

Тема 3. Решение задач управления запасами

Литература: *основная* [12, с. 293–306], [29, с. 471–482], *дополнительная* [2, с. 3–8], [4, с. 34–38, 82–89, 116–119], [9, с. 285–300], [21, с. 28–36], [28, с. 154–184], [31, с. 431–448], [32, с. 123–127].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Постановка задачи управления запасами. Основные понятия и определения.
2. Базовая модель Уилсона. Формула Уилсона.
3. Модель управления запасами с учетом дефицита.
4. Модель управления запасами с точкой поставки.
5. Модель управления запасами с конечной интенсивностью поступления заказа.
6. Модель управления запасами с учетом оптовых скидок.

Обозначения, используемые в разделе

v – величина спроса (количество единиц товара в единицу времени)

K – стоимость оформления заказа (ден. ед.)

h – издержки хранения (ден. ед. за единицу товара в единицу времени)

p – издержки дефицита (ден. ед. за единицу товара в единицу времени)

c – цена за единицу продукции (ден. ед.)

T – время поставки товара

Q – размер заказа

Q_0 – точка восстановления запаса

λ – интенсивность поставки (единиц товара в единицу времени)

t – длина цикла

n – число заказов

L – функция издержек, $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ состоит из суммы издержек покупки товара, оформления заказа, хранения и дефицита

y – максимальный размер дефицита

q – максимальный размер запаса на складе

Решение типовых задач

Задача 3.1. Модель Уилсона

Автомобильный салон занимается продажей последней модели автомобиля. Годовой спрос на эту модель оценивается в 4000 ед. Цена каждого автомобиля равна 90 тыс. руб., а годовые издержки хранения составляют 10 % от цены самого автомобиля. Анализ показал, что средние издержки заказа составляют 25 тыс. руб. на заказ. Ежедневный спрос на автомобили равен 20 ед.

Определить вид модели управления запасами и вычислить ее параметры.

Решение

Формализуем исходные данные:

- величина спроса $v = 4000$ ед. в год;
- издержки заказа $K = 25$ тыс. руб.;
- издержки хранения $h = 90 \cdot 0{,}1 = 9$ тыс. руб. в год за единицу;
- цена за единицу $c = 90$ тыс. руб.

Получаем модель Уилсона. Найдем ее параметры.

Оптимальный размер заказа:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,000 \cdot 4000}{9000}} \approx 149 \text{ ед.}$$

Длина цикла:

$$t^* = \sqrt{\frac{2K}{hv}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,000}{9000 \cdot 4000}} = 0{,}037 \text{ года.}$$

Число заказов за год:

$$n^* = \sqrt{\frac{hv}{2K}} = \sqrt{\frac{9000 \cdot 4000}{2 \cdot 25\,000}} = 26{,}83.$$

Чтобы выразить длину цикла в днях (найти число дней между заказами), нужно, зная ежедневный спрос (20 ед.), определить число рабочих дней в году:

$$D = \frac{4000}{20} = 200 \text{ дней.}$$

Тогда

$$t^* = 0{,}037 \text{ года} = 0{,}37 \cdot 200 \text{ дней} = 7{,}45 \text{ дней.}$$

Минимальные годовые издержки:

$$L^* = \sqrt{2Kvh} = \sqrt{2 \cdot 25\,000 \cdot 4000 \cdot 9000} \approx 1342 \text{ тыс. руб.}$$

Дополнительно можно определить стоимость продаж:

$$L_1 = cv = 90\,000 \cdot 4000 = 360 \text{ млн руб.}$$

Тогда совокупные годовые издержки равны

$$L = 361\,342 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, каждые 7,45 дней (или 26,83 раз в год) следует заказывать партию из 149 автомобилей, при этом торговые издержки будут минимальными и составят 1342 тыс. руб. в год, а стоимость продаж будет равна 360 млн руб.

Задача 3.2. Модель управления запасами с учетом времени поставки

Магазин закупает духи на одной из парфюмерных фабрик. Годовой спрос на этот продукт составляет 600 шт. Издержки заказа равны 850 руб., издержки хранения – 510 руб. за одну упаковку (20 шт.) в год.

Магазин заключил договор на поставку с фиксированным интервалом времени. Время поставки товара – 6 дней. Количество рабочих дней в году – 300. Стоимость одного флакона – 135 руб.

Определить вид модели управления запасами и вычислить ее параметры.

Решение

Формализуем исходные данные:

- величина спроса $v = 600$ ед. в год;
- издержки заказа $K = 850$ руб.;
- издержки хранения $h = 510 / 20 = 25{,}5$ руб. в год за единицу;
- время поставки товара $T = 6$ дней;
- количество рабочих дней в году $D = 300$;
- цена за единицу $c = 135$ руб.

Получаем модель с фиксированным интервалом времени поставки. Найдем ее параметры.

Оптимальный размер заказа:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 850}{25{,}5}} = 200 \text{ ед.}$$

Длина цикла:

$$t^* = \frac{Q^*}{v} = \frac{200}{600} = 0{,}33 \text{ года} = 0{,}33 \cdot 300 \text{ дней} = 100 \text{ дней.}$$

Число заказов в течение года:

$$n^* = \frac{v}{Q^*} = \frac{600}{200} = 3.$$

Для того чтобы определить точку восстановления запаса, необходимо привести все величины, используемые в формуле, к одним единицам измерения. Время поставки товара задано в днях, длину цикла мы также вычислили в днях, найдем ежедневный спрос:

$$v' = \frac{600}{300} = 2 \text{ ед.}$$

Тогда точка восстановления запаса равна

$$Q_0 = Tv' - \left[\frac{T}{t^*}\right] \cdot Q^* = 6 \cdot 2 - \left[\frac{6}{100}\right] \cdot 200 = 12 \text{ ед.}$$

В данной задаче (т. к. время поставки заказа меньше найденной длины цикла) точку восстановления запаса можно также найти из следующих соображений: поскольку среднесуточный спрос равен 2 ед., а время поставки заказа – 6 дней, точка восстановления запаса составит

$$Q_0 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ ед.}$$

Минимальные годовые издержки заказа и хранения вычислим, подставив найденный оптимальный размер заказа в исходную функцию издержек:

$$L = \frac{Kv}{Q} + h\frac{Q}{2} = \frac{850 \cdot 600}{200} + 25{,}5 \cdot \frac{200}{2} = 5100 \text{ руб.}$$

Дополнительно можно определить стоимость продаж:

$$L_1 = cv = 135 \cdot 600 = 81 \text{ тыс. руб.}$$

Тогда совокупные годовые издержки $L = 86\,100$ руб.

Таким образом, каждые 100 дней (или 3 раза в год) следует заказывать партию духов из 200 шт., точка восстановления запаса равна 12 шт. При этом годовые издержки заказа и хранения будут минимальными и составят 5100 руб. в год, а стоимость продаж будет равна 81 тыс. руб.

Задача 3.3. Модель управления запасами с учетом дефицита

В условиях задачи 3.2 введем дополнительно следующее предположение: по оценке менеджера, упущенная прибыль, связанная с отсутствием товара и утратой доверия клиентов, составляет 20 руб. в год за один флакон духов «Ландыш».

Определить вид модели управления запасами и вычислить ее параметры.

Нужно ли менеджеру вводить систему с плановым дефицитом?

Решение

Формализация исходных данных выполнена при решении задачи 3.2, дополнительно имеем одну величину: издержки дефицита p = 20 руб. в год за единицу.

Получаем модель с дефицитом. Найдем ее параметры.

Оптимальный размер заказа:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h}}\sqrt{1+\frac{h}{p}} = \sqrt{\frac{2\cdot 850\cdot 600}{25,5}}\sqrt{1+\frac{25,5}{20}} \approx 302 \text{ ед.}$$

Максимальный размер запаса на складе:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h}}\frac{1}{\sqrt{1+h/p}} = 200\cdot 0,66 = 132 \text{ ед.}$$

Максимальный размер дефицита:

$$y^* = \frac{h}{p}\sqrt{\frac{2Kv}{h}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+h/p}} = \frac{25,5}{20}\cdot 200\cdot\frac{1}{1,5} = 170 \text{ ед.}$$

Число заказов в течение года:

$$n^* = \frac{v}{Q^*} = \frac{600}{302} \approx 2.$$

Длина цикла:

$$t^* = \frac{Q^*}{v} = \frac{302}{600} \approx 0,51 \text{ года} = 0,51 \cdot 300 \text{ дней} = 151 \text{ день.}$$

Время расходования запаса:

$$t_1^* = \frac{Y^*}{v} = \frac{132}{600} \approx 0,22 \text{ года} = 0,22 \cdot 300 \text{ дней} = 66 \text{ дней.}$$

Время накопления дефицита:

$$t_2^* = \frac{y^*}{v} = \frac{170}{600} \approx 0,283 \text{ года} = 0,283 \cdot 300 \text{ дней} = 85 \text{ дней.}$$

Минимальные годовые издержки (из исходной функции издержек):

$$L=\frac{Kv}{Q}+h\frac{(Q-y)^2}{2Q}+p\frac{y^2}{2Q}=\frac{850\cdot 600}{302}+25,5\frac{132^2}{2\cdot 302}+20\frac{170^2}{2\cdot 302}=3381,3 \text{ руб.}$$

Получили, что минимальные издержки при плановом дефиците меньше издержек без дефицита на 1718,7 руб. Следовательно, целесообразно ввести систему с плановым дефицитом.

Таким образом, через каждый 151 день (или 2 раза в год) следует заказывать партию духов из 302 ед. Плановый дефицит составляет 170 ед., на склад отправляются 132 ед., которые расходуются в течение 66 дней, после чего в течение 85 дней происходит накопление дефицита. При этом торговые издержки будут минимальными и составят 3381,3 руб. в год.

Задача 3.4. Модель управления запасами с конечной интенсивностью поступления заказа

Интенсивность равномерного спроса выпускаемых фирмой смартфонов составляет 2000 шт. в год. Организационные издержки равны 20 тыс. руб. Цена смартфона составляет 1 тыс. руб., издержки хранения равны 1 тыс. руб. в расчете на один смартфон в год. Запасы на складе пополняются со скоростью 4000 смартфонов в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено заданное количество смартфонов.

Определить вид модели управления запасами и вычислить ее параметры.

Решение

Формализуем исходные данные:

- величина спроса v = 2000 ед. в год;
- издержки заказа K = 20 тыс. руб.;
- издержки хранения h = 1000 руб. в год за единицу;
- интенсивность поставки λ = 4000 ед. в год;
- цена за единицу c = 1000 руб.

Получаем модель с конечной интенсивностью поступления заказа. Найдем ее параметры.

Оптимальный размер заказа:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2Kv}{h}}\frac{1}{\sqrt{1-v/\lambda}}=\sqrt{\frac{2\cdot 20000\cdot 2000}{1000}}\frac{1}{\sqrt{1-2000/4000}}=400 \text{ ед.}$$

Длина цикла:

$$t^*=\frac{Q^*}{v}=\frac{400}{2000}=0,2 \text{ года.}$$

Продолжительность поставки:

$$t_1^*=\frac{Q^*}{\lambda}=\frac{400}{4000}=0,1 \text{ года.}$$

Время расходования запаса:

$$t_2^*=t^*-t_1^*=0,2-0,1\approx 0,1 \text{ года.}$$

Число партий в течение года:

$$n^* = \frac{\nu}{Q^*} = \frac{2000}{400} = 5.$$

Максимальный уровень запаса на складе:

$$q^* = (\lambda - \nu) \cdot t_1^* = (4000 - 2000) \cdot 0{,}1 = 200 \text{ ед.}$$

Средний уровень запасов равен $q^*/2 = 200 / 2 = 100$ ед.

Минимальные годовые издержки заказа и хранения:

$$L^* = \sqrt{2K\nu h} \cdot \sqrt{1 - \nu / \lambda} = \sqrt{2 \cdot 20\ 000 \cdot 2000 \cdot 1000} \cdot \sqrt{1 - 2000 / 4000} \approx 200\ 000 \text{ руб.}$$

Минимальные годовые торговые издержки:

$$L = c\nu + L^* = 1000 \cdot 2000 + 200\ 000 = 220\ 000 \text{ руб.}$$

Таким образом, каждые 0,2 года (или 5 раз в год) следует заказывать партию смартфонов из 400 ед. В течение 0,1 года происходит одновременно продажа смартфонов и накопление товара на складе до величины 200 ед., после чего в течение 0,1 года происходит продажа смартфонов со склада. При этом торговые издержки будут минимальными и составят 220 тыс. руб. в год.

Задача 3.5. Модель управления запасами с учетом скидок

Магазин игрушек продает игрушечные гоночные машинки. В зависимости от размера заказа фирма предлагает скидки (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Исходные данные к задаче 3.5

Вариант скидки	**1**	**2**	**3**
Размер заказа, шт.	0 –1000	1000–2000	Более 2000
Размер скидки, %	0	4	5
Цена со скидкой, руб.	5,00	4,80	4,75

Издержки заказа составляют 49 руб. Годовой спрос на машинки равен 5000 ед. Годовые издержки хранения в процентном отношении к цене составляют 20 %.

Определить вид модели управления запасами и вычислить ее параметры. Найти размер заказа, минимизирующий общие издержки.

Решение

Формализуем исходные данные:

- величина спроса $\nu = 5000$ ед. в год;
- издержки заказа $K = 49$ руб.;
- цена за единицу: $c_1 = 5$ руб.; $c_2 = 4{,}80$ руб.; $c_3 = 4{,}75$ руб.;
- издержки хранения: $h_1 = 5 \cdot 0{,}2 = 1$ руб. в год за единицу; $h_2 = 4{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}96$ руб. в год за единицу; $h_3 = 4{,}75 \cdot 0{,}2 = 0{,}95$ руб. в год за единицу.

Получаем модель с учетом скидок. Найдем ее параметры.

Оптимальный размер заказа: рассчитаем Q^* для каждого вида скидок по формуле Уилсона:

$$Q_{w1}^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 49 \cdot 5000}{1}} = 700 \text{ ед.};$$

$$Q_{w2}^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 49 \cdot 5000}{0{,}96}} \approx 714 \text{ ед.};$$

$$Q_{w3}^* = \sqrt{\frac{2Kv}{h_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 49 \cdot 5000}{0{,}95}} \approx 718 \text{ ед.}$$

Для первого варианта (без учета скидки) оставляем в качестве оптимального размера заказа найденную величину, для второго и третьего вариантов (с учетом скидок) полученные величины оказались меньше точки разрыва цен, следовательно, в качестве оптимальных размеров партий выбираем точки разрыва цен.

Получим

$$Q_1^* = 700 \text{ ед.}, \; Q_2^* = 1000 \text{ ед.}, \; Q_3^* = 2000 \text{ ед.}$$

Далее необходимо рассчитать общие годовые издержки для каждого размера заказа (вида скидок) как сумму стоимости товара $L_{1i} = c_i\, v$, $i = 1, \ldots, 3$, и издержек заказа и хранения, вычисляемых по формуле

$$L_i^* = \sqrt{2Kvh_i}\,\lambda, \; i = 1, \ldots, 3,$$

а затем выбрать наименьшее значение.

Расчеты приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Вычисления для различных вариантов размера заказа

Вариант скидки	**1**	**2**	**3**
Цена со скидкой, руб.	5,00	4,80	4,75
Размер заказа, шт.	700	1000	2000
Стоимость товара за год, руб.	25 000	24 000	23 750
Годовые издержки заказа и хранения, руб.	700	725	1072,5
Общие годовые издержки, руб.	25 700	24 750	24 822,5

Выберем тот размер заказа, который минимизирует общие годовые издержки. Из таблицы видно, что заказ в размере $Q^* = 1000$ игрушечных машинок будет минимизировать совокупные издержки.

Для найденного оптимального размера заказа найдем оставшиеся параметры модели.

Число заказов в течение года:

$$n^* = \frac{v}{Q^*} = \frac{5000}{1000} = 5.$$

Длина цикла:

$$t^* = \frac{Q^*}{v} = \frac{1000}{5000} = 0{,}2 \text{ года.}$$

Таким образом, каждые 0,2 года (или 5 раз в год) следует заказывать партию машинок из 1000 ед. При этом торговые издержки будут минимальными и составят 725 руб. в год, а стоимость продаж (с учетом скидки) будет равна 24 тыс. руб.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.6. Модели управления запасами

Спрос на некоторый товар составляет v единиц в единицу времени. Стоимость оформления заказа равна K руб. за заказ. Издержки хранения – h руб. за единицу товара в единицу времени, время доставки – T дней. Количество рабочих дней в году – 250. Числовые данные по вариантам приведены в таблице 3.3. Необходимо:

а) определить вид модели и вычислить ее параметры;

б) определить вид модели и вычислить ее параметры при дополнительных предположениях о том, что интенсивность поставки составляет λ единиц в единицу времени;

в) определить вид модели и вычислить ее параметры при дополнительных предположениях о том, что упущенная прибыль, связанная с отсутствием товара и утратой доверия клиентов составляет p руб. за единицу товара в единицу времени.

Таблица 3.3 – Исходные данные к задаче 3.6

Вариант	***v, ед.***	***K, руб.***	***h, руб. за ед.***	***T***	***p, руб. за ед.***	***λ, ед.***
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
В1	3600 в год	800	0,5 в год	1 месяц	3 в месяц	12 000 в год
В2	100 в день	100	0,2 в сутки	10 дней	1,5 в сутки	400 в сутки
В3	100 в день	100	0,02 в сутки	10 дней	2 в сутки	600 в сутки
В4	400 в год	40	250 в год	6 дней	1 в месяц	1200 в год
В5	350 в год	45	260 в год	6 дней	0,3 в месяц	500 в год
В6	1400 в год	40	250 в год	6 дней	0,1 в месяц	9000 в год
В7	1350 в год	160	50 в год	6 дней	20 в месяц	7000 в год
В8	12 000 в год	500	0,3 в месяц	1 месяц	1 в месяц	12 000 в год
В9	12 000 в год	500	0,3 в месяц	10 дней	1 в месяц	15 000 в год
В10	1000 в сутки	10	1 в час	5 дней	2 в час	2500 в сутки
В11	1000 в месяц	500	3 в месяц	1 месяц	0,1 в день	3000 в месяц
В12	500 в год	2	0,3 в месяц	1 месяц	0,5 в месяц	1200 в год
В13	500 в год	2	0,3 в месяц	1 месяц	0,34 в месяц	1000 в год
В14	1000 в год	120	50 в год	5 дней	1 в месяц	2000 в год
В15	150 в день	80	0,02 в день	10 дней	0,1 в день	600 в сутки
В16	120 в день	600	0,02 в день	7 дней	2 в день	500 в сутки
В17	800 в год	40	250 в год	6 дней	10 в месяц	1500 в год
В18	950 в год	45	260 в год	6 дней	150 в год	2000 в год

1	2	3	4	5	6	7
В19	1000 в год	40	200 в год	6 дней	200 в год	1200 в год
В20	1250 в год	150	50 в год	6 дней	100 в год	4000 в год
В21	10 000 в год	550	0,3 в месяц	1 месяц	0,5 в месяц	12 000 в год
В22	10 000 в год	400	0,3 в месяц	10 дней	1 в месяц	13 000 в год
В23	1500 в сутки	10	0,8 в час	10 дней	2 в месяц	4000 в сутки
В24	1500 в месяц	300	3 в месяц	1 месяц	5 в месяц	6000 в месяц
В25	1000 в год	2	0,28 в месяц	1 месяц	0,3 в месяц	5000 в год
В26	500 в год	3	0,3 в месяц	1 месяц	2 в месяц	1300 в год
В27	5000 в год	100	50 в год	8 дней	10 в месяц	10 000 в год
В28	20 000 в год	200	0,3 в месяц	10 дней	1,5 в месяц	30 000 в год
В29	2500 в сутки	8	0,8 в час	5 дней	2 в час	5000 в сутки
В30	1000 в месяц	300	1 в месяц	1 месяц	2 в месяц	5000 в месяц

Тема 4. Многономенклатурные модели управления запасами

Литература: *основная* [29, с. 482–486], *дополнительная* [31, с. 448–456], [32, с. 127–135].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Постановка многономенклатурной задачи управления запасами.
2. Постановка задачи при наличии дополнительных ограничений на размер склада и размер оборотного капитала.
3. Понятие раздельной оптимизации без ограничений и с ограничениями.
4. Понятие полного совмещения заказов без ограничений и с ограничениями.
5. Понятие частичного совмещения заказов. Система кратных периодов.

Обозначения, используемые в разделе

Все обозначения предыдущего раздела.

N – количество номенклатур

v_i – величина спроса i-й номенклатуры, $i = 1, \ldots, N$

K_i – стоимость оформления заказа i-й номенклатуры, $i = 1, \ldots, N$

h_i – издержки хранения i-й номенклатуры, $i = 1, \ldots, N$

f_i – расход складской площади на единицу i-й номенклатуры, $i = 1, \ldots, N$

F – размер складской площади

K_0 – фиксированные издержки, не зависящие от числа номенклатур

γ – доля издержек заказывания, связанная с размещением заказа по каждой номенклатуре

k_i – коэффициент кратности поставки i-й номенклатуры, $i = 1, \ldots, N$

Решение типовых задач

Задача 4.1. Многономенклатурные модели управления запасами

Склад оптовой торговли отпускает $N = 5$ видов товаров. Известны потребности v_i, издержки заказа K_i, издержки хранения h_i, расход складской площади на единицу товара f_i ($i = 1, \ldots, N$), а также величина складской площади F (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Исходные данные

Размер склада *F*	**Параметр**	**Номенклатура товара *i***				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
1200	v_i	900	700	300	1000	200
	K_i	10	5	20	30	6
	h_i	5	15	10	2	3
	f_i	16	4	15	22	10

1. Определить оптимальные партии поставок при условии, что все пять видов продукции поступают на склад от разных поставщиков (раздельная оптимизация): *а*) без ограничений на максимальный уровень запаса; *б*) при ограничении на максимальный уровень запаса (для $g = 1$ и $g = 0{,}75$, где g – нормировочный множитель для учета того фактора, что запасы отдельных номенклатур могут поступать независимо друг от друга).

2. Определить оптимальные партии поставок при условии, что продукция поступает из одного источника (полное совмещение заказов): *а*) без ограничений на максимальный уровень запаса; *б*) при ограничении на максимальный уровень запаса. Суммарные издержки размещения N заказов считают равными $K_0(1 + \gamma N)$, где K_0 – фиксированные издержки, не зависящие от числа номенклатур (принять равными средним издержкам индивидуальных издержек), а $\gamma = 0{,}25$ $(0 \le \gamma \le 1)$ – доля издержек заказывания, связанная с размещением заказа по каждой номенклатуре.

3. Определить оптимальные партии поставок при условии, что продукция поступает из одного источника (частичное совмещение заказов по системе кратных периодов) с ограничением и без ограничений на площадь склада.

4. Дать экономическую интерпретацию каждого решения. Сравнить полученные решения между собой.

5. Определить множитель Лагранжа при решении задачи раздельной оптимизации с ограничениями на площадь склада. Объяснить его экономический смысл.

Решение

1. *а*) *Раздельная оптимизация*

При отсутствии взаимодействия между запасами различных видов продукции для системы, включающей $\boldsymbol{N}$ видов хранимой продукции, оптимальный размер партии и длина периода поставки для каждой номенклатуры вычисляются по формулам:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{h_i}}, \qquad t_i^* = \sqrt{\frac{2K_i}{v_i h_i}}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Минимальные издержки в единицу времени составят $L^* = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i v_i h_i}$. Суммарные расходы при этом плане поставок: $L = 1401{,}7$. Сведем вычисления по всем номенклатурам в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Вычисления при раздельной оптимизации

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	60,0	21,6	34,6	173,2	28,3
Количество заказов *n, ед.**	15,0	32,4	8,7	5,8	7,1
Время поставки *t, лет**	0,067	0,031	0,115	0,173	0,141
Совокупные издержки *L, ден. ед.**	300,0	324,0	346,4	346,4	84,9

1. ***б) Раздельная оптимизация с ограничениями на площадь склада***

По условию общая складская площадь ограничена величиной F = 1200. Учет того, что запасы отдельных номенклатур могут поступать независимо друг от друга, производится с помощью нормировочного множителя g.

Ограничение на складские площади имеет вид

$$g\sum_{i=1}^{N} f_i Q_i \le F,$$

где f_i – площадь, необходимая для хранения единицы i-го вида продукции;

Q_i – величина партии i-го вида продукции, i = 1, …, N.

Получаем следующую задачу математического программирования:

$$L=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{K_i v_i}{Q_i}+\frac{h_i Q_i}{2}\right)\to \min,$$

$$g\sum_{i=1}^{N} f_i Q_i \le F,$$

$$Q_i \ge 0,\quad i=1,\ \dots,\ 5.$$

Для определения экстремума функции издержек при наличии ограничения применим метод множителей Лагранжа, получим систему из N + 1 уравнения с N + 1 неизвестной $Q_1,\ Q_2,\ \dots,\ Q_N,\ \lambda$.

$$\begin{cases} Q_i^* = \sqrt{\dfrac{2K_i v_i}{h_i - 2g\lambda f_i}}, \quad i=1,\ \dots,\ N, \\ g\sum\limits_{i=1}^{N} f_i Q_i^* = F. \end{cases} \qquad Q_i \ge 0,\quad i=1,\ \dots,\ 5. \qquad \lambda \le 0.$$

Экономический смысл множителя Лагранжа: он показывает, насколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив складские площади на единицу.

Таким образом, для определения оптимальных размеров партий нужно найти значение множителя Лагранжа (воспользовавшись одним из известных численных методов решения). Решим полученную задачу математического программирования с помощью надстройки Excel Поиск решения (указав параметры «Неотрицательные значения» и «Автоматическое масштабирование»), получим следующие результаты (таблицы 4.3 и 4.4).

Таблица 4.3 – Результаты решения для значения параметра g = 1

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	16,7	15,3	13,5	26,8	7,7
Количество заказов *n, ед.**	53,7	45,7	22,2	37,3	25,8
Время поставки *t, лет**	0,019	0,022	0,045	0,027	0,039
Совокупные издержки *L, ден. ед.**	579,3	343,3	510,9	1145,1	166,5
Площадь склада q^*f_i	268,0	61,3	203,1	590,2	77,5

Суммарные расходы при этом плане поставок: L = 2745,1, множитель Лагранжа (приведен в отчете по устойчивости) равен λ = –1,8.

Следовательно, увеличив размеры склада на единицу, можно сократить суммарные расходы на 1,8 ден. ед.

Таблица 4.4 – Результаты решения для значения параметра g = 0,75

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	22,3	17,5	17,5	36,6	10,3
Количество заказов *n, ед.**	40,3	39,9	17,1	27,3	19,3
Время поставки *t, лет**	0,025	0,025	0,058	0,037	0,052
Совокупные издержки *L, ден. ед.**	458,6	331,1	430,1	855,4	131,5
Площадь склада q^*f_i	357,5	70,1	262,8	806,1	103,5

Суммарные расходы при этом плане поставок: L = 2206,7, множитель Лагранжа (приведен в отчете по устойчивости) равен λ = –1,3.

Следовательно, увеличив размеры склада на единицу, можно сократить суммарные расходы на 1,3 ден. ед.

2. *а*) *Полное совмещение заказов*

В этом случае период размещения заказа t^* по всем номенклатурам будет общим.

Суммарные издержки одновременного размещения пяти заказов будут равны

$$K = \frac{10+5+20+30+6}{5}(1+0,25\cdot 5) = 31,95.$$

Оптимальные значения параметров рассчитаем по формулам:

$$t^* = \sqrt{\frac{2K}{\sum_{i=1}^{N} v_i h_i}};\quad Q_i^* = v_i t^*;\quad i = 1,\ \ldots,\ N;\ L^* = \sqrt{2K\sum_{i=1}^{N} v_i h_i} = t^*\sum_{i=1}^{N} v_i h_i.$$

Сведем вычисления по всем номенклатурам в таблицу 4.5.

Таблица 4.5 – Вычисления при полном совмещении заказов

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	50,1	39,0	16,7	55,7	11,1
Количество заказов *n, ед.**	18,0				
Время поставки *t, лет**	0,056				
Совокупные издержки *L, ден. ед.**	250,6	584,8	167,1	111,4	33,4

Суммарные расходы при этом плане поставок: L = 1147,3.

2. б) *Полное совмещение заказов с ограничениями на площадь склада*

С учетом того что $Q_i = tv_i$, ограничение по складским площадям имеет вид

$$t^* \cdot g\sum_{i=1}^{N} v_i f_i \le F.$$

Произведем вычисления для значения параметра $g = 1$ (заметим, что в этом случае значение параметра может быть только $g = 1$).

Подставим найденное в предыдущем пункте значение $t^* = 0{,}056$ в ограничение. Это значение не удовлетворяет ограничению, следовательно, оптимальный период возобновления поставок находим из условия: t^* должно превратить ограничение в строгое равенство. Получаем

$$t^* = F \,/\, (g\sum_{i=1}^{N} v_i f_i).$$

Оптимальный поставочный комплект:

$$Q_i^* = v_i t^*, \quad i = 1, \ \ldots, \ N.$$

Сведем вычисления по всем номенклатурам в таблицу 4.6.

Таблица 4.6 – Вычисления при полном совмещении заказов с ограничением по площади

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	23,6	18,4	7,9	26,3	5,3
Количество заказов *n, ед.**	38,1				
Время поставки *t, лет**	0,026				

Суммарные расходы при этом плане поставок вычисляются по формуле

$$L = \frac{K_0(1+\gamma N)}{t} + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{N} v_i h_i$$

и равны $L = 1486{,}2$.

3. *а*) *Частичное совмещение заказов по системе кратных периодов*

Стратегия организации поставок, состоящая в объединении преимуществ, свойственных независимым поставкам с оптимальными периодичностями t_i^* и многономенклатурными поставками с периодичностью t^*.

Вводится система кратных периодов, когда по крайней мере одна номенклатура заказывается в каждом базисном периоде t^*, а остальные позиции номенклатуры поставляются с периодичностями $k_i \cdot t^*$ ($k_i = 1, 2, 3, \ldots$).

Позиции номенклатуры ранжируются по возрастанию величины $K_0\gamma/h_i v_i$, $i = 1, \ldots, 5$. Ранжирование номенклатур (таблица 4.7) имеет вид 2, 1, 3, 4, 5.

Таблица 4.7 – Значения $K_0\gamma/h_i v_i$.

Номенклатура товара	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$K_0\gamma/h_i v_i$	0,0007889	0,000338	0,00118	0,001775	0,00591

Определим коэффициенты кратности k_i относительно начального приближения $t_2 = 0{,}031$ лет.

Накапливаем первую группу. Получаем: номенклатура 2 относится к первой группе.

Условие прекращения накопления группы записывается в виде

$$\frac{\gamma_{j+1}}{h_{j+1} \cdot v_{j+1}} > \frac{2(1+\sum_{i=1}^{j} \gamma_i)}{\sum_{i=1}^{j} h_i v_i}.$$

Рассмотрим номенклатуру 1. Запишем условие прекращения накопления группы:

$$\frac{0,25}{4500} > \frac{2(1+0,25)}{10\ 500} \text{ – не выполняется,}$$

номенклатура 1 относится к первой группе.

Рассмотрим следующую номенклатуру 3. Условие прекращения накопления группы:

$$\frac{0,25}{3000} > \frac{2(1+0,25+0,25)}{10\ 500+4500} \text{ – не выполняется,}$$

номенклатура 3 относится к первой группе.

Рассмотрим номенклатуру 4. Условие прекращения накопления группы:

$$\frac{0,25}{2000} > \frac{2(1+0,25+0,25+0,25)}{10\ 500+4500+3000} \text{ – не выполняется,}$$

номенклатура 4 относится к первой группе.

Рассмотрим следующую номенклатуру 5. Условие прекращения накопления группы:

$$\frac{0,25}{600} > \frac{2(1+0,25+0,25+0,25+0,25)}{10\ 500+4500+3000+2000} \text{ – выполняется,}$$

номенклатуру 5 не включаем в первую группу.

Таким образом, выбран базовый вариант кратности поставок:

- первая группа – номенклатуры 1–4: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 =1$;
- вторая группа – номенклатура 5: $k_5 = 2$.

Для базового варианта кратных периодов оптимальный период группирования определяется по формуле

$$t_{\Gamma}^* = \sqrt{\frac{2K_0\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{k_i}\right)}{\sum_{i=1}^{N} v_i h_i k_i}},$$

данному периоду соответствуют минимальные затраты:

$$L_{\Gamma}^* = \sqrt{2K_0\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{k_i}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N} v_i h_i k_i}.$$

Получаем: $t_{\Gamma}^* = 0,053$, $L_{\Gamma}^* = 1131,1$.

Рассчитаем интервалы постоянства группировок T_i^l и T_i^r, i = 1, …, N, по формулам:

$$T_i^r = \sqrt{\frac{2K_0\gamma_i}{v_i h_i k_i (k_i - 1)}}, \qquad T_i^l = \sqrt{\frac{2K_0\gamma_i}{v_i h_i k_i (k_i + 1)}}.$$

Получаем:

$T_1^r = T_2^r = T_3^r = T_4^r = \infty,\ T_5^r = \sqrt{\dfrac{2\cdot 14{,}2\cdot 0{,}25}{200\cdot 3\cdot 2\cdot (2-1)}} = 0{,}077,$

$T_1^l = 0{,}028$, $T_2^l = 0{,}018$, $T_3^l = 0{,}034$, $T_4^l = 0{,}042$, $T_5^l = 0{,}044.$

Таким образом, для всех пяти номенклатур выполняется

$$T_i^l \le t_{\Gamma}^* \le T_i^r,\ i = 1,..., N.$$

Следовательно, получена оптимальная кратность поставок.

Сведем вычисления по всем номенклатурам в таблицу 4.8.

Таблица 4.8 – Вычисления по системе кратных периодов

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	48,02	37,35	16,01	53,35	21,34
Количество заказов *n, ед.**	18,9				
Время поставки *t, лет**	0,053				

Учитывая, что при одновременной поставке всех пяти номенклатур (при t =0,056) суммарные затраты составили L = 1147,3, следует выбрать стратегию кратных периодов, позволяющих снизить суммарные затраты до $L_{\Gamma}^* = 1131{,}1$.

3. *б*) *Частичное совмещение заказов с ограничениями на площадь склада*

Ограничение по складским площадям в случае частичного совмещения заказов имеет вид

$$t^* \cdot g\sum_{i=1}^{N} v_i f_i k_i \le F.$$

Заметим, что и в этом случае значение параметра может быть только g =1.

Подставим найденное в предыдущем пункте значение t^* = 0,053 в ограничение. Это значение не удовлетворяет ограничению, следовательно, оптимальный период возобновления поставок находим из условия: t^* должно превратить ограничение в строгое равенство. Получаем

$$t^* = F / (g\sum_{i=1}^{N} v_i f_i k_i).$$

Оптимальный поставочный комплект

$$Q_i^* = v_i t^*, \quad i = 1,\ ...,\ N.$$

Сведем вычисления по всем номенклатурам в таблицу 4.9.

Таблица 4.9 – Вычисления при частичном совмещении заказов с ограничениями

Номенклатура товара *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальные партии поставок *q, ед.**	22,64	17,61	7,55	25,16	10,06
Количество заказов *n, ед.**	40				
Время поставки *t, лет**	0,025				

Суммарные расходы при этом плане поставок вычисляются по формуле

$$L_{\Gamma} = \frac{K_0\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{k_i}\right)}{t} + \frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{N} v_i h_i k_i$$

и равны $L_{\Gamma}^* = 1472$.

Составим итоговую таблицу (таблица 4.10) суммарных издержек для различных систем поставок.

Таблица 4.10 – Суммарные издержки для различных систем поставок

	Раздельная оптимизация	**Совмещение заказов**	
		Полное	**Частичное**
Без ограничений на площадь склада	1401,7	1147,3	1131,1
С ограничением на площадь склада, *g* = 1	2745,1	1487,2	1472
С ограничением на площадь склада, *g* = 0,75	2206,7	–	–

Сравнивая рассмотренные системы поставок, видим, что более эффективной является система поставок с частичным совмещением заказов.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.2. Многономенклатурные модели управления запасами

Склад оптовой торговли отпускает $N = 5$ видов товаров. Известны потребности v_i, издержки заказа K_i, издержки хранения h_i, расход складской площади на единицу товара f_i ($i = 1, \ldots, N$), а также величина складской площади торгового зала F (таблица 4.11).

1. Определить оптимальные партии поставок при условии, что все пять видов продукции поступают на склад от разных поставщиков (раздельная оптимизация): а) без ограничений на максимальный уровень запаса; б) при ограничении на максимальный уровень запаса (для $g = 1$ и $g = 0{,}75$, где g – нормировочный множитель).

2. Определить оптимальные партии поставок при полном совмещении заказов): *а*) без ограничений на максимальный уровень запаса; *б*) при ограничении на максимальный уровень запаса. Суммарные издержки размещения N заказов считают равными $K_0(1 + \gamma N)$, где K_0 – фиксированные издержки, не зависящие от числа номенклатур (принять равными средним издержкам индивидуальных издержек), а $\gamma = 0{,}25$ ($0 \le \gamma \le 1$) – доля издержек заказывания, связанная с размещением заказа по каждой номенклатуре.

3. Определить оптимальные партии поставок при условии, что продукция поступает из одного источника (частичное совмещение заказов по системе кратных периодов) с ограничением и без ограничений на площадь склада.

4. Дать экономическую интерпретацию каждого решения. Сравнить полученные решения между собой.

5. Чему оказался равен множитель Лагранжа при решении задачи раздельной оптимизации с ограничениями на площадь склада? Каков его экономический смысл?

Таблица 4.11 – Исходные данные к задаче 4.2

Вариант	**Размер склада *F***	**Параметр**	**Номенклатура товара *i***				
			1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
В1	1000	v_i	8000	160	1800	150	200
		K_i	40	5	6	6	30
		s_i	16	4	6	2	30
		h_i	20	3	4	3	15
В2	1200	v_i	900	700	300	1000	200
		K_i	10	5	20	30	6
		h_i	5	15	10	2	3
		f_i	16	4	15	22	10
В3	500	v_i	400	600	800	700	200
		K_i	10	12	11	9	8
		h_i	16	8	8	7	4
		f_i	4	3	5	4	4
В4	500	v_i	700	200	500	150	800
		K_i	5	5	20	3	4
		h_i	15	4	10	2	20
		f_i	20	5	2	8	4
В5	1500	v_i	3000	5000	6400	1500	80
		K_i	4	6	7	6	4
		h_i	40	6	14	6	16
		f_i	4	3	5	40	20
В6	900	v_i	900	400	800	200	150
		K_i	5	10	11	7	2
		h_i	4	7	6	4	2
		f_i	4	3	5	40	20
В7	800	v_i	4000	2000	8000	600	1500
		K_i	10	7	15	110	6
		h_i	8	70	6	8	20
		f_i	3	2	2	5	30
В8	1350	v_i	5000	7000	2000	200	800
		K_i	6	110	7	5	4
		h_i	15	8	20	4	8
		f_i	10	5	2	3	4

1	2	3	4	5	6	7	8
В9	1000	v_i	48000	22400	6400	8600	2460
		K_i	120	160	130	140	110
		h_i	200	280	260	200	250
		f_i	1,8	1,6	1,2	1,5	1,4
В10	1250	v_i	3200	2100	5400	7900	2420
		K_i	110	150	120	130	100
		h_i	150	260	240	200	230
		f_i	14	5	3	4	6
В11	5000	v_i	1350	1210	1150	1300	890
		K_i	70	65	80	77	93
		h_i	11	9	3	7	6
		f_i	8	9	4	6	7
В12	1500	v_i	800	250	180	1500	400
		K_i	20	5	9	15	20
		h_i	20	4	10	2	10
		f_i	15	5	12	4	10
В13	2000	v_i	160	500	180	1200	200
		K_i	40	10	6	60	30
		h_i	2	4	60	10	30
		f_i	10	13	40	30	15
В14	1300	v_i	8000	160	1800	150	200
		K_i	10	5	20	30	6
		h_i	16	8	8	7	4
		f_i	20	5	2	8	4
В15	1400	v_i	3000	5000	6400	1500	80
		K_i	5	10	11	7	2
		h_i	8	70	6	8	20
		f_i	10	5	2	3	4
В16	2000	v_i	48000	22400	6400	8600	2460
		K_i	110	150	120	130	100
		h_i	11	9	3	7	6
		f_i	15	5	12	4	10
В17	4000	v_i	160	500	180	1200	200
		K_i	40	5	6	6	30
		h_i	5	15	10	2	3
		f_i	4	3	5	4	4
В18	800	v_i	700	200	500	150	800
		K_i	4	6	7	6	4
		h_i	4	7	6	4	2
		f_i	3	2	2	5	30
В19	1200	v_i	5000	7000	2000	200	800
		K_i	120	160	130	140	110
		h_i	150	260	240	200	230
		f_i	8	9	4	6	7

1	2	3	4	5	6	7	8
В20	3000	v_i	700	200	500	150	800
		K_i	5	10	11	7	2
		h_i	16	4	6	2	30
		f_i	4	3	5	4	4
В21	5000	v_i	1350	1210	1150	1300	890
		K_i	70	65	80	77	93
		h_i	11	9	3	7	6
		f_i	8	9	4	6	7
В22	1500	v_i	800	250	180	1500	400
		K_i	20	5	9	15	20
		h_i	20	4	10	2	10
		f_i	15	5	12	4	10
В23	2000	v_i	160	500	180	1200	200
		K_i	40	10	6	60	30
		h_i	2	4	60	10	30
		f_i	10	13	40	30	15
В24	1300	v_i	8000	160	1800	150	200
		K_i	10	5	20	30	6
		h_i	16	8	8	7	4
		f_i	20	5	2	8	4
В25	1400	v_i	3000	5000	6400	1500	80
		K_i	5	10	11	7	2
		h_i	8	70	6	8	20
		f_i	10	5	2	3	4
В26	2000	v_i	48000	22400	6400	8600	2460
		K_i	110	150	120	130	100
		h_i	11	9	3	7	6
		f_i	15	5	12	4	10
В27	4000	v_i	160	500	180	1200	200
		K_i	40	5	6	6	30
		h_i	5	15	10	2	3
		f_i	4	3	5	4	4
В28	800	v_i	700	200	500	150	800
		K_i	4	6	7	6	4
		h_i	4	7	6	4	2
		f_i	3	2	2	5	30
В29	1200	v_i	5000	7000	2000	200	800
		K_i	120	160	130	140	110
		h_i	150	260	240	200	230
		f_i	8	9	4	6	7
В30	3000	v_i	700	200	500	150	800
		K_i	5	10	11	7	2
		h_i	16	4	6	2	30
		f_i	4	3	5	4	4

Тема 5. Вероятностные модели управления запасами

Литература: *основная* [29, с. 607–624], *дополнительная* [2, с. 8–19], [4, с. 156–161, 246–256], [9, с. 285–300], [10, с. 153–158], [12, с. 306–315].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Риски неопределенности в поставках и спросе.
2. Понятие страхового запаса.
3. Рандомизированная модель Уилсона.
4. Стохастическая модель экономичного размера партии.
5. Одноэтапные модели при отсутствии затрат на оформление заказа.
6. Одноэтапные модели при наличии затрат на оформление заказа.
7. (s-S)-стратегия.

Обозначения, используемые в разделе

Все обозначения предыдущего раздела.

x_T – величина спроса на протяжении срока выполнения заказа

B – размер резервного (страхового) запаса

p – надежность

R – уровень имеющегося запаса перед размещением заказа

Решение типовых задач

Задача 5.1. Страховой запас

На бумажной фабрике для упаковки готовой продукции перед отправкой потребителю используется картон. Временное отсутствие этого материала ведет к задержке поставок, поэтому его дефицит недопустим. Сведения об ежедневной потребности в упаковочном картоне представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Потребность в упаковочном картоне

Интервал интенсивности потребления	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
Частота m_i	9	15	25	38	46	41	38	22	12	5

Определить величину страхового запаса, гарантирующего бесперебойное снабжение с надежностью $p = 0{,}95$.

Решение

Если спрос за единицу времени является нормально распределенной случайной величиной со средним ν и стандартным отклонением σ, то случайная величина x_T, представляющая величину спроса на протяжении срока выполнения заказа T (время от момента размещения заказа до его поставки), является нормально распределенной случайной величиной со средним ν_T и стандартным отклонением σ_T т. е. имеет распределение $N(\nu_T,\sigma_T)$, где $\nu_T = \nu T$ и $\sigma_T = \sqrt{\sigma^2 T}$.

Пусть B – искомый размер резервного (страхового) запаса; p – вероятность того, что спрос на протяжении срока выполнения заказа T не превысит значение страхового запаса (надежность, в нашем случае p = 0,95).

Вероятностное условие, которое определяет размер резервного запаса B, имеет вид

$$P(x_T \geq B + v_T) \leq p.$$

Случайная величина

$$z = \frac{x_T - v_T}{\sigma_T}$$

является нормированной нормально распределенной случайной величиной, т. е. имеет распределение $N(0, 1)$. Следовательно,

$$P\left(z \geq \frac{B}{\sigma_T}\right) \leq p.$$

Тогда минимальный размер страхового запаса можно найти по формуле

$$B = K_\alpha \sigma_T,$$

где величина K_α определяется из таблицы стандартного нормального распределения, так что $P(z \leq K_\alpha) = p$.

По виду гистограммы (рисунок 5.1) можно сделать предположение о нормальном законе распределения ежедневного расхода картона.

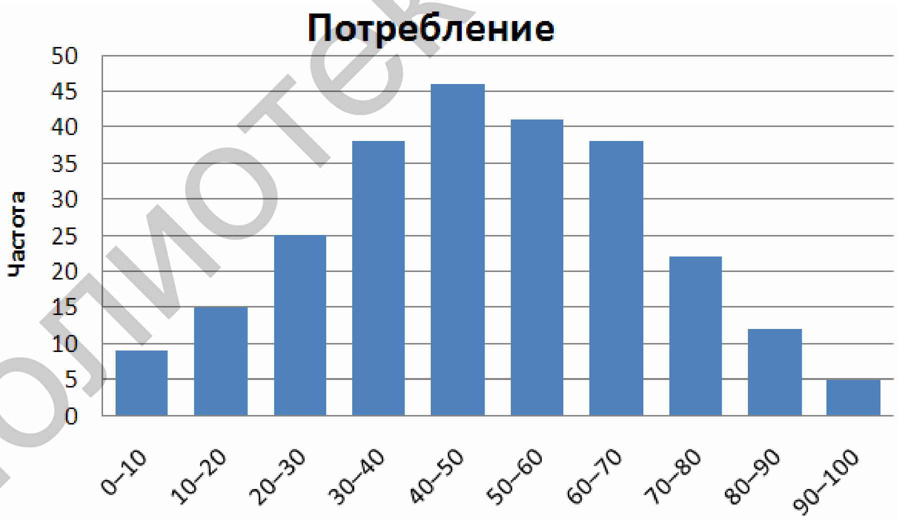


Рисунок 5.1 – Гистограмма расхода упаковочного картона

Обозначим v_i, $i = 1, \ldots, 10$, середины соответствующих интервалов. Найдем математическое ожидание $\bar{v} = \frac{1}{m}\sum_i v_i \cdot m_i = 48{,}47$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_i (v_i - \bar{v})^2 \cdot m_i} = 20{,}89$ (m = 251 – сумма частот).

По таблице приложения А для значения p = 0,95 получаем K_α = 1,65. Поскольку потребность в упаковочном картоне учитывается ежедневно, примем срок выполнения заказа T равным одному дню, тогда

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma^2 T} = \sqrt{20{,}89^2 \cdot 1} = 20{,}89.$$

Окончательно получаем, что величина страхового запаса равна

$$B = K_\alpha \sigma_T = 1{,}65 \cdot 20{,}89 = 34{,}47.$$

Таким образом, необходимо располагать страховым запасом упаковочного картона в размере 35 ед.

Задача 5.2. Стохастическая одноэтапная модель при дискретном и непрерывном спросе

Предприятие закупает агрегат с запасными блоками к нему. Стоимость одного блока равна 5 ден. ед. В случае выхода агрегата из строя из-за поломки блока, отсутствующего в запасе, простой агрегата и срочный заказ нового блока к нему обойдется в 100 ден. ед.

Необходимо определить оптимальное число запасных блоков, которое следует приобрести вместе с агрегатом:

а) опытное распределение агрегатов по числу блоков, потребовавших замену, представлено в таблице 5.2;

б) случайный спрос A числа блоков, потребовавших замену, распределен по показательному закону с функцией распределения

$$F(A) = 1 - e^{-\lambda A} \text{ при } \lambda = 0{,}98.$$

Таблица 5.2 – Вероятность замены блоков

Число замененных блоков *A*	0	1	2	3	4	5	6
Доля агрегатов *p*(*A*), которым потребовалась замена *A* блоков	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00

Решение

а) По условию стоимость покупки является стоимостью хранения, получаем стоимость хранения h = 5 ден. ед., цена за дефицит p = 100 ден. ед.

Оптимальное число запасных блоков найдем из формулы для определения критического отношения для дискретного спроса:

$$P(A < Q^* - 1) \le \frac{p-c}{p+h} \le P(A < Q^*).$$

По определению функции распределения $F(Q^*) = P(A < Q^*)$ получаем

$$F(Q^* - 1) \le \frac{p-c}{p+h} \le F(Q^*).$$

Найдем критическое отношение по формуле

$$\rho = \frac{p-c}{p+h}.$$

Получаем

$$\rho = \frac{100}{100+5} = 0{,}952.$$

Найдем значения функции распределения спроса (таблица 5.3).

Таблица 5.3 – Вычисление функции распределения спроса

Q*	0	1	2	3	4	5	6	>6
A	0	1	2	3	4	5	6	>6
***F*(*A*)**	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00	1,00

Из таблицы получаем, что критическое отношение удовлетворяет неравенству

$$F(2) < 0{,}952 < F(3),$$

следовательно, оптимальный запас равен $Q^* = 3$.

б) Оптимальное число запасных блоков найдем из формулы для определения критического отношения для непрерывного спроса:

$$P(A < Q^*) = \frac{p-c}{p+h}.$$

Критическое отношение определено при выполнении пункта *а*:

$$\rho = 0{,}952.$$

Поскольку по условию функция распределения случайного спроса имеет вид $F(A) = 1 – e^{-\lambda A}$ при $\lambda = 0{,}98$, а по определению функции распределения $F(Q^*) = P(A < Q^*)$, получаем:

$$F(Q^*) = \rho,$$

$$1 – e^{-\lambda Q^*} = \rho,$$

откуда

$$Q^* = –1/\lambda \cdot \ln(1–\rho).$$

При $\lambda = 0{,}98$:

$$Q^* = –1/0{,}98 \cdot \ln 0{,}048 = 3{,}1 \text{ (блока)}.$$

Окончательно получаем, что оптимальное число запасных блоков составляет 4 блока.

Задача 5.3. Отложенный спрос

Ежедневно заказываемый скоропортящийся товар поступает в магазин спустя 7 дней после заказа. В момент очередного заказа запас товара составил в стоимостном выражении 10 ден. ед. В течение последующих 6 дней было заказано товара на 10, 20, 10, 10, 20 и 10 ден. ед. соответственно. Товар, проданный в день поступления, приносит прибыль 0,95 ден. ед., а не проданный в этот день товар может быть затем реализован с убытком 0,10 ден. ед. На основании опытных данных получено распределение спроса на данный товар (таблица 5.4). Необходимо определить оптимальный объем заказанного товара на седьмой день после заказа.

Таблица 5.4 – Опытное распределение спроса на товар

A	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
***p*(*A*)**	0,00	0,00	0,01	0,02	0,05	0,08	0,11	0,12	0,14	0,13	0,10
A	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	>200
***p*(*A*)**	0,08	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00

Решение

По условию стоимость хранения равна h = 0,10 ден. ед., цена за дефицит p = 0,95 ден. ед. Найдем критическое отношение по формуле

$$\rho = \frac{p-c}{p+h}.$$

Получаем, что критическое отношение равно

$$\rho = 0{,}95/(0{,}95+0{,}10) = 0{,}905.$$

Оптимальный объем заказанного товара найдем из формулы для определения критического отношения для дискретного спроса:

$$P(A < Q^* - 1) \le \frac{p-c}{p+h} \le P(A < Q^*).$$

По определению функции распределения $F(Q^*) = P(A < Q^*)$ получаем

$$F(Q^* - 1) \le \frac{p-c}{p+h} \le F(Q^*).$$

Найдем значения функции распределения спроса (таблица 5.5).

Таблица 5.5 – Вычисление функции распределения спроса

Q*	***A***	***P*(*A*<*Q**)**	***Q****	***A***	***P*(*A*<*Q**)**	***Q****	***A***	***P*(*A*<*Q**)**	***Q****	***A***	***P*(*A*<*Q**)**
0	0	0,00	50	50	0,08	100	100	0,76	150	150	0,94
10	10	0,00	60	60	0,16	110	110	0,84	160	160	0,96
20	20	0,00	70	70	0,27	120	120	0,86	170	170	0,97
30	30	0,01	80	80	0,39	130	130	0,89	180	180	0,98
40	40	0,03	90	90	0,53	140	140	0,92	190	190	0,99
									≥200	≥200	1,00

Из таблицы получаем, что критическое отношение удовлетворяет неравенству

$$F(130) < 0{,}905 < F(140),$$

следовательно, оптимальный запас товара за 7 дней должен быть равен 140 ден. ед., откуда оптимальный объем заказанного товара на седьмой день равен

$$140 - (10 + (10 + 20 + 10 + 10 + 20 + 10)) = 50 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, на седьмой день следует заказать товар на 50 ден. ед.

Задача 5.4. (*s*-*S*)-стратегия

Пусть при пополнении запасов автомобилей на складе служба маркетинга магазина «Автомобили» придерживается (s-S)-стратегии при s = 50, S = 300. Требуется определить, на какое количество автомобилей надо оформить заказ, если в момент принятия решения о заказе на складе: *а*) 40, *б*) 70, *в*) 150, *г*) 10, *д*) 290 автомобилей (временем доставки заказанных автомобилей пренебречь).

Решение

(s-S)-стратегия управления запасами определяется следующим образом:

- если $R < s$, делать заказ объемом S-R;
- если $R \geq s$, заказывать не следует.

Получаем:

а) в случае $R = 40$ выполняется соотношение $R = 40 < s = 50$, следовательно, величина пополнения будет равна: $S - R = 300 - 40 = 260$ автомобилей;

б) в случае $R = 70$ выполняется соотношение $R = 70 > s = 50$, следовательно, заказ делать не следует, и величина пополнения будет равна 0;

в) в случае $R = 150$ выполняется соотношение $R = 150 > s = 50$, следовательно, заказ делать не следует, и величина пополнения будет равна 0;

г) в случае $R = 10$ выполняется соотношение $R = 10 < s = 50$, следовательно, величина пополнения будет равна: $S - R = 300 - 10 = 290$ автомобилей;

д) в случае $R = 290$ выполняется соотношение $R = 290 > s = 50$, следовательно, заказ делать не следует, и величина пополнения будет равна 0.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.5. Страховой запас

Продавцу продовольственного магазина нужно определить величину страхового запаса некоторого продукта с надежностью $p = 1 - k/100$, если ежедневный спрос на этот продукт распределен по нормальному закону со средним значением 200 и дисперсией 300 и дефицит недопустим, k – номер варианта.

Задача 5.6. Стохастическая одноэтапная модель

Небольшой салон специализируется на продаже видеомагнитофонов стоимостью $2000 + 10 \cdot k$ руб. Затраты на хранение единицы продукции составляют $500 - 5 \cdot k$ руб., где k – номер варианта. Найти оптимальный размер запаса:

а) изучение спроса, проведенное в течение месяца, дало распределение числа покупаемых видеомагнитофонов, указанное в таблице 5.6.

б) случайный спрос числа видеомагнитофонов распределен по показательному закону с параметром $\lambda = 1 - k/100$.

Таблица 5.6 – Исходные данные к задаче 5.6

Спрос, шт.	3	4	5	6	7
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Задача 5.7. (s-S)-стратегия

Определить размер заказа с помощью (s-S)-стратегии с параметрами $s = 50$, $S = 300$, если в момент принятия решения о заказе на складе $10k$ единиц продукции (временем доставки пренебречь), k – номер варианта.

Тема 6. Решение задач методом динамического программирования

Литература: *основная* [25, с. 26–42], [27, с. 120–134], *дополнительная* [5, с. 332–343], [6, с. 120–181], [8, с. 76–101], [9, с. 118–129], [12, с. 228–256], [14, с. 56–58], [16, с. 37–44], [18, с. 462–483], [20, с. 56–72], [21, с. 45–67], [22, с. 4–14], [28, с. 209–236], [29, с. 441–465].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Особенности задач, решаемых методом динамического программирования.
2. Порядок решения задачи методом динамического программирования.
3. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана.
4. Рекуррентная функция Беллмана и ее составление.

Обозначения, используемые в разделе

m – число шагов

s_i – состояние системы на начало i-го шага, $i = 1, \dots, m$

u_i – управление на i-м шаге, $i = 1, \dots, m$

$f_i(s_i, u_i)$ – функция выигрыша на i-м шаге, $i = 1, \dots, m$

$\varphi_i(s_i, u_i)$ – функция перехода на i-м шаге, $i = 1, \dots, m$

$W_i(s_i)$ – условный максимальный выигрыш за последние $m - i$ шагов, $i = 1, \dots, m$

$W(u_1, u_2, \dots, u_m) = f_1(u_1) + f_2(u_2) + \dots + f_m(u_m)$ – целевая функция

Решение типовых задач

Задача 6.1. Задача о распределении инвестиций

Имеется капитал в $B = 60$ ден. ед. и $m = 4$ предприятия.

Требуется распределить капитал между предприятиями так, чтобы получить максимальную (суммарную) прибыль, если прибыль от выделения i-му предприятию u_i единиц капитала равна $f_i(u_i)$ и задана таблицей 6.1 (возможные размеры вложения в каждое предприятие кратны величине 10 ден. ед.).

Таблица 6.1 – Исходные данные к задаче распределения инвестиций

u_i	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
0	0	0	0	0
10	17	10	9	14
20	20	18	17	20
30	27	32	26	25
40	35	40	32	32
50	40	42	43	46
60	52	48	50	54

Решение

Такую задачу можно сформулировать в терминах математического программирования. Получаем следующую математическую модель:

$$W(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m) = f_1(u_1) + f_2(u_2) + ... + f_m(u_m) \to \max,$$

$$u_1 + u_2 + ... + u_m = B,$$

$$u_i \ge 0, \quad i = 1,\ ...,\ m.$$

Требуется найти вектор $U^* = (u_1^*,\ u_2^*,\ ...,\ u_m^*)$, удовлетворяющий заданным ограничениям и доставляющий экстремум целевой функции.

Подставив числовые значения, получаем, что требуется найти вектор $U^* = (u_1^*,\ u_2^*,\ u_3^*,\ u_4^*)$, удовлетворяющий условию $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 60$ и доставляющий максимум функции цели: $W_{\max} = W(U^*)$. При этом целевая функция является невыпуклой, т. е. имеем задачу невыпуклого программирования.

Применим для ее решения метод динамического программирования (очевидно, что выполняются все необходимые предпосылки – последействие отсутствует, а целевая функция равна суммарной прибыли каждого предприятия).

Разобьем решение исходной задачи на подзадачи меньшей размерности. Для этого следует выполнить следующие действия:

Действие 1. **Деление на шаги:** сведем многомерную задачу на определение условного экстремума к многошаговой, состоящей из m шагов, где номер шага совпадает с номером предприятия. С учетом того, что процесс рассматривается «от конца к началу», на первом шаге ($i = m$) вкладываем средства в m-е (четвертое) предприятие, на втором шаге ($i = m–1$) – в третье предприятие и т. д., на m-м шаге ($i = 1$) – в первое предприятие. Таким образом, задача сведена к четырем одномерным задачам, и на каждом шаге будет решаться одномерная задача нахождения оптимального u_i^*.

Действие 2. **Определение состояний.** Состояние системы на каждом шаге s_i (количество средств на начало шага, оставшееся после предыдущих распределений) – может принимать дискретный ряд значений $0 \le s_i \le B$, $i = 1, \ldots, 4$ (дискретизация должна быть понятна из условия задачи, в нашем случае вложения кратны 10 ден. ед.).

Действие 3. **Определение управлений.** Управление u_i (количество средств, выделяемых предприятию, соответствующему номеру шага) – может принимать дискретный ряд значений $0 \le u_i \le s_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

Действие 4. **Определение уравнения состояния**:

$$s_{i+1} = \varphi(s_i,\ u_i), \quad i = 1,\ ...,\ m-1.$$

В данной задаче состояние на начало следующего шага (остаток средств на начало шага) получаем путем вычитания из остатка средств на начало текущего шага количества средств, выделенных на текущем шаге, т. е. из состояния текущего шага нужно вычесть управление текущего шага:

$$s_i = s_{i–1} – u_{i–1}, \quad i = 2, \ldots, 4.$$

Действие 5. **Прибыль за шаг** задана таблично $f_i(s_i, u_i) = f_i(u_i)$ и зависит от управления, принятого на этом шаге.

Действие 6. **Определение функции Беллмана**: $W_i(s_i)$ (условная максимальная прибыль за последние $m - i$ шагов) – в данной задаче это максимальная прибыль от вложения s_i единиц капитала в последние i предприятий.

Функция Беллмана должна подчиняться ***принципу оптимальности Беллмана***: «Каково бы ни было начальное состояние системы перед очередным шагом, управление на этом шаге выбирается так, чтобы максимизировать сумму: *а*) прибыли на данном шаге и *б*) максимальной прибыли на всех последующих шагах» [12]. Так, если система в начале i-го шага находится в состоянии s_i и мы выбираем произвольное управление u_i, то она придет в новое состояние s_{i+1}, и последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния s_{i+1}. При этом на последнем шаге нужно максимизировать только прибыль на этом шаге.

Таким образом, получаем, что функция Беллмана имеет вид

$$W_i(s_i) = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ f_i(s_i, u_i) + W_{i+1}(s_{i+1}) \right\} = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ f_i(s_i, u_i) + W_{i+1}(\varphi(s_i, u_i)) \right\},$$

$$i = 1,\ \ldots,\ m-1, \quad 0 \le s_i \le B,$$

$$W_m(s_m) = \max_{0 \le u_m \le s_m} \left\{ f_m(s_m, u_m) \right\}, \ \ 0 \le s_m \le B.$$

Последнее соотношение играет роль начального условия.

Действие 7. **Составление уравнения Беллмана.**

Подставив числовые данные в функцию Беллмана, получим

$$W_i(s_i) = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ f_i(u_i) + W_{i+1}(s_i - u_i) \right\}, \quad i = 1,\ \ldots,\ 3, \quad 0 \le s_i \le 60,$$

$$W_4(s_4) = \max_{0 \le u_4 \le s_4} \left\{ f_4(u_4) \right\}, \ \ 0 \le s_4 \le 60.$$

Нахождение оптимального управления $U^* = (u_1^*,\ u_2^*,\ \ldots,\ u_m^*)$ и оптимального значения целевой функции $W^* = W_1(B)$ по уравнениям Беллмана проводится в два этапа.

Этап I. Условная оптимизация.

Производится решение подзадач. На первом шаге все имеющиеся средства (от 0 до B) распределяются одному (последнему) предприятию, на втором шаге – двум предприятиям (последнему и предпоследнему) и т. д. Процесс распределения средств можно представить в виде следующей схемы (рисунок 6.1).

Таблица 6.2 показывает результаты решения подзадач.

В каждой ячейке следует указать значение функции Беллмана и соответствующее оптимальное управление.

В результате проведения условной оптимизации будет найдено оптимальное значение целевой функции при заданном значении B (находится в нижней строке в последней ячейке). Это следует из того, что после окончания процесса распределения все средства должны быть распределены.

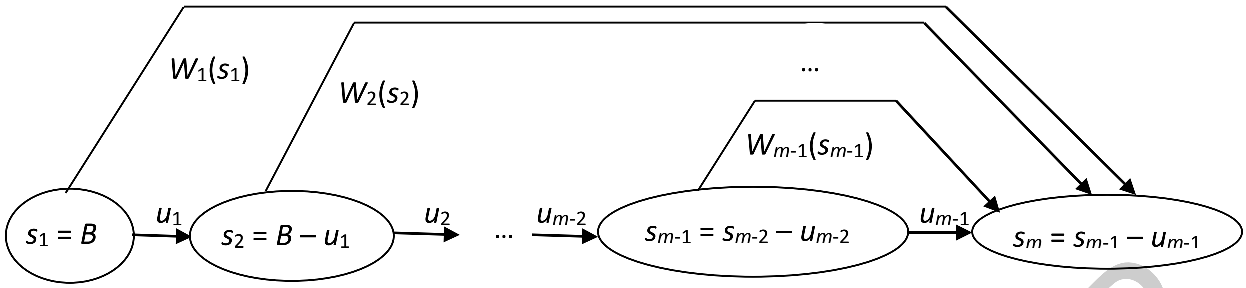


Рисунок 6.1 – Схема распределения средств между предприятиями

Таблица 6.2 – Общий вид таблицы результатов решения подзадач

S	**0**	**…**	**…**	***B***
$W_m(s)$				
$W_{m-1}(s)$				
…				
$W_1(s)$				

Шаг 4, *i* = 4. Рассмотрим распределение средств одному (четвертому) предприятию (таблица 6.3).

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_4(s_4) = \max_{0 \le u_4 \le s_4} \{f_4(u_4)\}, \;\; 0 \le s_4 \le 60 .$$

В первом столбце записываются возможные значения s_4 – величины капитала, оставшегося к моменту определения величины вложения в четвертое предприятие, т. е. после распределения средств первым трем предприятиям. В общем случае она может принять любое из заданных значений – от 0 (соответствует ситуации, когда первым трем предприятиям отдан весь капитал) до 60 (первые три предприятия ничего не получили) с шагом 10. Для каждого значения s_4 во втором столбце записываются все возможные значения u_4 вложений в четвертое предприятие, $0 \le u_4 \le s_4$. Столбец 3 заполняется на основе исходных данных о функциях прибыли (в данном случае заполняем его значениями $f_4(u_4)$), в столбце 4 записывается значение условной максимальной прибыли для фиксированного начального состояния (выбирается максимальное значение предыдущего столбца для каждого значения s_4). В пятом столбце записывается соответствующее управление (выбирается из второго столбца).

Шаг 3, *i* = 3. Пусть теперь все имеющиеся средства распределяются между двумя предприятиями (третьим и четвертым). Определим оптимальную стратегию инвестирования (таблица 6.4).

Таблица 6.3 – Таблица шага 4

s_4	u_4	$f_4(u_4)$	$W_4(s_4)$	$u_4(s_4)$
0	0	0	0	0
10	0	0		
	10	14	14	10
20	0	0		
	10	14		
	20	20	20	20
30	0	0		
	10	14		
	20	20		
	30	25	25	30
40	0	0		
	10	14		
	20	20		
	30	25		
	40	32	32	40
50	0	0		
	10	14		
	20	20		
	30	25		
	40	32		
	50	46	46	50
60	0	0		
	10	14		
	20	20		
	30	25		
	40	32		
	50	46		
	60	54	54	60

Таблица 6.4 – Таблица шага 3

s_3	u_3	$s_4 = s_3 - u_3$	$f_3(u_3)$	$W_4(s_4)$	$W_3(u_3, s_3)$	$W_3(s_3)$	$u_3(s_3)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	14	14	14	0
	10	0	9	0	9		
20	0	20	0	20	20		
	10	10	9	14	23	23	10
	20	0	17	0	17		
30	0	30	0	25	25		
	10	20	9	20	29		
	20	10	17	14	31	31	20
	30	0	26	0	26		

1	2	3	4	5	6	7	8
40	0	40	0	32	32		
	10	30	9	25	34		
	20	20	17	20	37		
	30	10	26	14	40	40	30
	40	0	32	0	32		
50	0	50	0	46	46	46	0
	10	40	9	32	41		
	20	30	17	25	42		
	30	20	26	20	46	46	30
	40	10	32	14	46	46	40
	50	0	43	0	43		
60	0	60	0	54	54		
	10	50	9	46	55		
	20	40	17	32	49		
	30	30	26	25	51		
	40	20	32	20	52		
	50	10	43	14	57	57	50
	60	0	50	0	50		

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_3(s_3) = \max_{0 \le u_3 \le s_3} \left\{ f_3(u_3) + W_4(s_3 - u_3) \right\}, \quad 0 \le s_3 \le 60.$$

Таблица вычислений для этого шага (и последующих шагов) содержит дополнительные столбцы.

Столбцы 1 и 2 заполняются на основе исходных данных о распределении средств. Делаем все предположения относительно остатка средств s_3, т. е. после выбора u_1 и u_2, и выбираем $0 \le u_3 \le s_3$. Столбец 3 показывает состояние на начало следующего шага и заполняется на основании уравнения состояния ($s_4 = s_3 - u_3$). Столбец 4 заполняется на основе исходных данных о функциях дохода – $f_3(u_3)$. Для вычисления условной оптимальной прибыли на этом шаге используются вспомогательные столбцы 5 и 6. Значения в столбце 5 берутся из предпоследнего столбца предыдущей таблицы (на данном шаге это значения $W_4(s_4)$), столбец 6 заполняется суммой значений столбцов 4 и 5 – таким образом вычисляется величина $f_3(u_3) + W_4(s_3 – u_3)$. В столбце 7 записывается максимальное значение предыдущего столбца для фиксированного начального состояния – условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении s_3 между третьим и четвертым предприятиями, и в 8 столбце записывается управление из столбца 2, на котором достигается максимум в 7.

Шаг 2, *i* = 2.

Рассматриваем три предприятия (второе, третье и четвертое) и пытаемся распределить между ними имеющиеся средства (оставшиеся после выделения средств первому предприятию) (таблица 6.5).

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_2(s_2) = \max_{0 \le u_2 \le s_2} \left\{ f_2(u_2) + W_3(s_2 - u_2) \right\}, \quad 0 \le s_2 \le 60.$$

Таблица 6.5 – Таблица шага 2

s_2	u_2	$s_3 = s_2 - u_2$	$f_2(u_2)$	$W_3(s_3)$	$W_2(u_2, s_2)$	$W_2(s_2)$	$u_2(s_2)$
0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	14	14	14	0
	10	0	10	0	10		
20	0	20	0	23	23	24	10
	10	10	10	14	24		
	20	0	18	0	18		
30	0	30	0	31	31	33	10
	10	20	10	23	33		
	20	10	18	14	32		
	30	0	32	0	32		
40	0	40	0	40	40	46	30
	10	30	10	31	41		
	20	20	18	23	41		
	30	10	32	14	46		
	40	0	40	0	40		
50	0	50	0	46	46	55	30
	10	40	10	40	50		
	20	30	18	31	49		
	30	20	32	23	55		
	40	10	40	14	54		
	50	0	42	0	42		
60	0	60	0	57	57	63 63	30 40
	10	50	10	46	56		
	20	40	18	40	58		
	30	30	32	31	63		
	40	20	40	23	63		
	50	10	42	14	56		
	60	0	48	0	48		

Шаг 1, *i* = 1.

Определяем оптимальную стратегию инвестирования в первое и остальные предприятия (таблица 6.6). Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_1(s_1) = \max_{0 \le u_1 \le s_1} \left\{ f_1(u_1) + W_2(s_1 - u_1) \right\}, \quad 0 \le s_1 \le 60.$$

Таким образом, завершен прямой прогон, при этом найдено оптимальное значение целевой функции прибыли.

Этап II. Безусловная оптимизация.

Просматривая проведенные шаги условной оптимизации в обратном порядке, находим значения u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*, на которых достигнуты соответствующие максимумы.

Таблица 6.6 – Таблица шага 1

s_1	u_1	$s_2 = s_1 - u_1$	$f_1(u_1)$	$W_2(s_2)$	$W_1(u_1, s_1)$	$W_1(s_1)$	$u_1(s_1)$
0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	14	14	17	10
	10	0	17	0	17		
20	0	20	0	24	24	31	10
	10	10	17	14	31		
	20	0	20	0	20		
30	0	30	0	33	33	41	10
	10	20	17	24	41		
	20	10	20	14	34		
	30	0	27	0	27		
40	0	40	0	46	46	50	10
	10	30	17	33	50		
	20	20	20	24	44		
	30	10	27	14	41		
	40	0	35	0	35		
50	0	50	0	55	55	63	10
	10	40	17	46	63		
	20	30	20	33	53		
	30	20	27	24	51		
	40	10	35	14	49		
	50	0	40	0	40		
60	0	60	0	63	63	72	10
	10	50	17	55	72		
	20	40	20	46	66		
	30	30	27	33	60		
	40	20	35	24	59		
	50	10	40	14	54		
	60	0	52	0	52		

Из таблицы шага 1 имеем $W^*_1\,(s_1 = 60) = 72$, т. е. максимальная прибыль всей системы при количестве средств $s_1 = 60$ ден. ед. равна 72 ден. ед.

Из этой же таблицы получаем, что первому предприятию следует выделить

$$u^*_1\,(s_1 = 60) = 10 \text{ ден. ед.}$$

При этом остаток средств (который будет распределен между вторым, третьим и четвертым предприятиями) составит $s_2 = s_1 - u_1 = 60 - 10 = 50$ ден. ед.

Из таблицы шага 2 получаем, что второму предприятию следует выделить

$$u^*_2\,(s_2 = 50) = 30 \text{ ден. ед.}$$

При этом остаток средств для распределения между третьим и четвертым предприятиями составит $s_3 = s_2 - u_2 = 50 - 30 = 20$ ден. ед.

Из таблицы шага 3 получаем, что третьему предприятию выделяется

$$u^*_3\,(s_3 = 20) = 10 \text{ ден. ед.}$$

При этом остаток средств составит $s_4 = s_3 - u_3 = 20 - 10 = 10$ ден. ед.

Последнему предприятию достается 10 ден. ед.

Итак, инвестиции в размере 60 ден. ед. необходимо распределить следующим образом:

- первому предприятию – 10 ден. ед.;
- второму предприятию – 30 ден. ед.;
- третьему предприятию – 10 ден. ед.;
- четвертому предприятию – 10 ден. ед.

что обеспечит максимальную прибыль, равную 72 ден. ед.:

$W(10, 30, 10, 10) = f_1(10) + f_2(30) + f_3(10) + f_4(10) = 17 + 32 + 9 + 14 = 72.$

Заметим, что табличные вычисления можно проводить более компактно еще двумя способами.

Способ 1

Таблицы 6.3–6.6 могут выглядеть следующим образом (таблицы 6.7–6.10).

Таблица 6.7 – Шаг 4, i = 4

s_4	u_4							$W_4(s_4)$	$u_4(s_4)$
	0	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**		
0	0	–	–	–	–	–	–	0	0
10	–	14	–	–	–	–	–	14	10
20	–	–	20	–	–	–	–	20	20
30	–	–	–	25	–	–	–	25	30
40	–	–	–	–	32	–	–	32	40
50	–	–	–	–	–	46	–	46	50
60	–	–	–	–	–	–	54	54	60

Таблица 6.8 – Шаг 3, i = 3

s_3	u_3							$W_3(s_3)$	$u_3(s_3)$
	0	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**		
0	0	–	–	–	–	–	–	0	0
10	0+14	9+0	–	–	–	–	–	14	0
20	0+20	9+14	17+0	–	–	–	–	23	10
30	0+25	9+20	17+14	26+0	–	–	–	31	20
40	0+32	9+25	17+20	26+14	32+0	–	–	40	30
50	0+46	9+32	17+25	26+20	32+14	43+0	–	46	0, 30, 40
60	0+54	9+46	17+32	26+25	32+20	43+14	50+0	57	50

Таблица 6.9 – Шаг 2, i = 2

s_2	u_2							$W_2(s_2)$	$u_2(s_2)$
	0	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**		
0	0	–	–	–	–	–	–	0	0
10	0+14	10+0	–	–	–	–	–	14	0
20	0+23	10+14	18+0	–	–	–	–	24	10
30	0+31	10+23	18+14	32+0	–	–	–	33	10
40	0+40	10+31	18+23	32+14	40+0	–	–	46	30
50	0+46	10+40	18+31	32+23	40+14	42+0	–	55	30
60	0+57	10+46	18+40	32+31	40+23	42+14	48+0	63	30, 40

Таблица 6.10 – Шаг 1, i = 1

s_1	u_1							$W_1(s_1)$	$u_1(s_1)$
	0	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**		
0	0	–	–	–	–	–	–	0	0
10	0+14	17+0	–	–	–	–	–	17	10
20	0+24	17+14	20+0	–	–	–	–	31	10
30	0+33	17+24	20+14	27+0	–	–	–	41	10
40	0+46	17+33	20+24	27+14	35+0	–	–	50	10
50	0+55	17+46	20+33	27+24	35+14	40+0	–	63	10
60	0+63	17+55	20+46	27+33	35+24	40+14	52+0	72	10

Способ 2

Можно также все вычисления записать в одной таблице (таблица 6.11).

Таблица 6.11 – Общая таблица вычислений задачи распределения инвестиций

s_{i-1}	u_i	s_i	$i = 3$			$i = 2$			$i = 1$		
			$f_3(u_3)+W_4(s_4)$	$W_3(s_3)$	$u_3(s_3)$	$f_2(u_2)+W_3(s_3)$	$W_2(s_2)$	$u_2(s_2)$	$f_1(u_1)+W_2(s_2)$	$W_1(s_1)$	$u_1(s_1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0+14	14	0	0+14	14	0	0+14		
	10	0	9+0			10+0			17+0	17	10
	0	20	0+20			0+23			0+24		
20	10	10	9+14	23	10	10+14	24	10	17+14	31	10
	20	0	17+0			18+0			20+0		
	0	30	0+25			0+31			0+33		
30	10	20	9+20			10+23	33	10	17+24	41	10
	20	10	17+14	31	20	18+14			20+14		
	30	0	26+0			32+0			27+0		
	0	40	0+32			0+40			0+46		
	10	30	9+25			10+31			17+33	50	10
40	20	20	17+20	40	30	18+23			20+24		
	30	10	26+14			32+14	46	30	27+14		
	40	0	32+0			40+0			35+0		
	0	50	0+46	46	0	0+46			0+55		
	10	40	9+32			10+40			17+46	63	10
50	20	30	17+25			18+31			20+33		
	30	20	26+20	46	30	32+23	55	30	27+24		
	40	10	32+14	46	40	40+14			35+14		
	50	0	43+0			42+0			40+0		
	0	60	0+54			0+57			0+63		
	10	50	9+46			10+46			17+55	72	10
	20	40	17+32			18+40			20+46		
60	30	30	26+25			32+31	63	30	27+33		
	40	20	32+20			40+23	63	40	35+24		
	50	10	43+14	57	50	42+14			40+14		
	60	0	50+0			48+0			52+0		

Очевидно, что этап безусловной оптимизации будет проведен одинаково вне зависимости от того, какой способ оформления таблиц применялся на этапе условной оптимизации, поскольку во всех случаях получаем одну и ту же таблицу результатов решения подзадач (таблица 6.12).

Таблица 6.12 – Результаты решения подзадач в задаче распределения инвестиций

s	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**
$W_4(s_4)$	0 (0)	14 (10)	20 (20)	25 (30)	32 (40)	46 (50)	54 (60)
$W_3(s_3)$	0 (0)	14 (0)	23 (10)	31 (20)	40 (30)	46 (0, 30, 40)	57 (50)
$W_2(s_2)$	0 (0)	14 (0)	24 (10)	33 (10)	46 (30)	55 (30)	63 (30, 40)
$W_1(s_1)$	0 (0)	17 (10)	31 (10)	41 (10)	50 (10)	63 (10)	72 (10)

Замечания

Достоинством метода является возможность анализа решения на чувствительность к изменению величины капитала B и/или числа предприятий m. Действительно, поскольку в таблице результатов решения подзадач указаны оптимальные решения для всех подзадач, ее можно использовать для отыскания оптимального решения задачи с измененными условиями (меньше предприятий или меньше капитал).

Например, рассмотрим задачу с теми же условиями, за исключением того, что $B = 50$ ден. ед. По таблице (в последней строке при $s = 50$) получаем в этом случае $W_{max} = W_1(s_1 = 50) = 63$ ден. ед. при следующем распределении:

- первому предприятию следует выделить $u^*_1(s_1 = 50) = 10$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_2 = s_1 - u_1 = 50 - 10 = 40 \text{ ден. ед.;}$$

- второму предприятию следует выделить $u^*_2(s_2 = 40) = 30$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_3 = s_2 - u_2 = 40 - 30 = 10 \text{ ден. ед.;}$$

- третьему предприятию следует выделить $u^*_3(s_3 = 10) = 0$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_4 = s_3 - u_3 = 10 - 0 = 10 \text{ ден. ед.}$$

Последнему (четвертому) предприятию выделяется 10 ден. ед.

Итак, инвестиции в размере 50 ден. ед. необходимо распределить следующим образом:

- первому предприятию – 10 ден. ед.;
- второму предприятию – 30 ден. ед.;
- третьему предприятию – 0 ден. ед.;
- четвертому предприятию – 10 ден. ед.

Это обеспечит максимальную прибыль, равную 63 ден. ед.:

$W(10, 30, 10, 0) = f_1(10) + f_2(30) + f_3(0) + f_4(10) = 17 + 32 + 0 + 14 = 63.$

С другой стороны, рассмотрим задачу, состоящую в распределении $B = 60$ ден. ед. между тремя предприятиями (вторым, третьим и четвертым). Ответ следует искать в таблице результатов решения подзадач в строке $W_2(s_2)$ и столбце $s = 60$. Получаем

$$W_2(s_2) = 63 \text{ ден. ед.},$$

при этом второму предприятию следует выделить

$$u^*_2(s_2 = 60) = 30 \text{ ден. ед. или } u^*_2(s_2 = 60) = 40 \text{ ден. ед.}$$

Остаток средств в этом случае составит

$$s_2 = s_1 - u_1 = 60 - 30 = 30 \text{ ден. ед. или } s_2 = s_1 - u_1 = 60 - 40 = 20 \text{ ден. ед.}$$

Соответственно, третьему предприятию следует выделить

$$u^*_3(s_3 = 30) = 20 \text{ ден. ед. или } u^*_3(s_3 = 20) = 10 \text{ ден. ед.}$$

Остаток средств составит:

$$s_4 = s_3 - u_3 = 30 - 20 = 10 \text{ ден. ед. или } s_4 = s_3 - u_3 = 20 - 10 = 10 \text{ ден. ед.}$$

Последнему (четвертому) предприятию выделяется в обоих случаях 10 ден. ед.

В результате найдены два оптимальных решения: (30, 20, 10) и (40, 10, 10), обеспечивающих максимальный доход, равный 63 ден. ед.

В случае увеличения начального капитала (и, соответственно, задания дополнительных значений функций прибыли $f_i(u_i)$) следует соответствующим образом дополнить таблицы вычислений.

Наконец, если увеличилось количество предприятий (число шагов), то схему можно дополнить, присоединяя шаги с номерами $i = 0, -1, \ldots$ и т. д. Например, пусть средства в размере $B = 60$ ден. ед. распределяются между пятью предприятиями. Функция прибыли для пятого предприятия задана формулой $f_5(u) = u/2+10$, если $u \neq 0$ и $f(0) = 0$. Присвоим пятому предприятию номер $i = 0$, тогда $x_0 = 0$ – средства, выделенные этому предприятию. Обозначим через $W_0(s)$ оптимальную прибыль, полученную от пяти предприятий. Уравнение Беллмана для этого шага

$$W_0(s_0) = \max_{0 \le u_0 \le s_0} \{ f_0(u_0) + W_1(s_0 - u_0) \}, \quad 0 \le s_0 \le B.$$

Подставим данные, получим

$$W_0(60) = \max_{0 \le u_0 \le 60} \{ u_0 / 2 + 10 + W_1(60 - u_0) \}, \quad 0 \le s_0 \le 60.$$

Условная оптимизация нулевого шага дана в таблице 6.13.

Таблица 6.13 – Шаг 0, $i = 0$

s_0	u_0							$W_0(s_0)$	$u_0(s_0)$
	0	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**		
0	0	–	–	–	–	–	–	0	0
10	0+17	15	–	–	–	–	–	17	0
20	0+31	15+17	20	–	–	–	–	32	10
30	0+41	15+31	20+17	25	–	–	–	46	10
40	0+50	15+41	20+31	25+17	30	–	–	56	10
50	0+63	15+50	20+41	25+31	30+17	35	–	65	10
60	0+72	15+63	20+50	25+41	30+31	35+17	40	78	10

Следовательно, максимальная прибыль всей системы из пяти предприятий при количестве средств $s_0 = 60$ ден. ед. равна

$$W_0(s_0) = 78 \text{ ден. ед.}$$

При этом пятому предприятию следует выделить $u^*_0\,(s_0 = 60) = 10$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_1 = s_0 - u_0 = 60 - 10 = 50 \text{ ден. ед.}$$

По таблице результатов решения подзадач находим:

- первому предприятию следует выделить $u^*_1\,(s_1 = 50) = 10$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_2 = s_1 - u_1 = 50 - 10 = 40 \text{ ден. ед.;}$$

- второму предприятию следует выделить $u^*_2\,(s_2 = 40) = 30$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_3 = s_2 - u_2 = 40 - 30 = 10 \text{ ден. ед.;}$$

- третьему предприятию следует выделить $u^*_3\,(s_3 = 10) = 0$ ден. ед., остаток средств составит

$$s_4 = s_3 - u_3 = 10 - 0 = 10 \text{ ден. ед.}$$

Последнему (четвертому) предприятию выделяется 10 ден. ед.

Итак, инвестиции в размере 60 ден. ед. необходимо распределить следующим образом:

- первому предприятию – 10 ден. ед.;
- второму предприятию – 30 ден. ед.;
- третьему предприятию – 0 ден. ед.;
- четвертому предприятию – 10 ден. ед.;
- пятому предприятию – 10 ден. ед.;

Это обеспечит максимальную прибыль, равную 78 ден. ед.

Заметим также, что из приведенного примера следует, что метод динамического программирования безразличен к виду и способу задания функций прибыли: и при табличном, и при аналитическом задании вычисления проводились аналогично.

Задача 6.2. Задача о распределении средств между отраслями

Планируется деятельность двух отраслей производства на $m = 4$ года. Начальные ресурсы $B = 900$ усл. ед. Средства x, вложенные в отрасль I в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x) = 3x$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x) = 0{,}5x$ (заметим, что должно выполняться условие $\varphi_1(x)<x$); аналогично для отрасли II функция прибыли равна $f_2(x) = 4x$, а возврата – $\varphi_2(x)= 0{,}2x$ ($\varphi_2(x) < x$). В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями I и II, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается.

Требуется распределить имеющиеся средства B между двумя отраслями производства на m лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за m лет оказалась максимальной.

Решение

Введем следующие переменные: u_i и v_i – количество средств, выделяемых отраслям I и II соответственно, в i-м году.

В процессе управления величины U и V меняются в зависимости от двух причин:

- перераспределение средств между отраслями в начале каждого года;
- уменьшение средств к концу каждого года.

Такую задачу можно сформулировать в терминах математического программирования. Получаем следующую математическую модель:

$$W = W(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m,\ v_1,\ v_2,\ ...,\ v_m) = \sum_{i=1}^{m} f_1(u_i) + f_2(v_i) \to \max,$$

$$u_i + v_i = \varphi_1(u_{i-1}) + \varphi_2(v_{i-1}),\ \ i = 2,\ ...,\ m,$$

$$u_1 + v_1 = B,$$

$$u_i, v_i \ge 0, \quad i = 1,\ ...,\ m.$$

Требуется найти векторы $U^* = (u_1^*,\ u_2^*,\ ...,\ u_m^*)$ и $V^* = (v_1^*,\ v_2^*,\ ...,\ v_m^*)$, удовлетворяющие ограничениям и доставляющие экстремум целевой функции.

При этом целевая функция является невыпуклой, т. е. получили задачу невыпуклого программирования.

Применим для ее решения метод динамического программирования (очевидно, что выполняются все необходимые предпосылки – последействие отсутствует, а целевая функция равна суммарной прибыли за все годы).

Разобьем решение исходной задачи на подзадачи меньшей размерности. Для этого следует выполнить следующие действия:

Действие 1. **Деление на шаги:** сведем многомерную задачу на определение условного экстремума к многошаговой, состоящей из m шагов, где номер шага совпадает с номером года. С учетом того, что процесс рассматривается «от конца к началу», на первом шаге ($i = m$) распределяем средства на m-й (четвертый) год, на втором шаге ($i = m - 1$) – на третий год и т. д., на m-м шаге ($i = 1$) – на первый год. Таким образом, задача сведена к четырем одномерным задачам, и на каждом шаге будет решаться одномерная задача нахождения оптимальных u_i^* и v_i^*.

Действие 2. **Определение состояний.** Состояние системы на каждом шаге s_i – количество средств на начало i-го шага, подлежащих распределению.

Действие 3. **Определение управлений.** Управление u_i – количество средств, выделяемое отрасли I на i-м шаге, может принимать любое значение из диапазона $0 \le u_i \le s_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Аналогично управление v_i – количество средств, выделяемое отрасли II на i-м шаге, может принимать любое значение из диапазона $0 \le v_i \le s_i$, $i = 1, \ldots, 4$. При этом должно выполняться соотношение

$$u_i + v_i = s_i, \quad \text{или} \quad v_i = s_i - u_i,$$

и вместо двух векторов U и V достаточно рассматривать только вектор управлений U.

Действие 4. **Определение уравнения состояния**:

$$s_{i+1} = \varphi(s_i, u_i), \ \ i = 1, \ ..., \ m-1.$$

В данной задаче состояние на начало следующего шага – количество средств на начало шага, получаемое путем суммирования средств, возвращенных по итогам предыдущего года от каждой из отраслей. Получаем следующую формулу:

$$s_i = \varphi_1(u_{i-1}) + \varphi_2(v_{i-1}), \ \ i = 2, \ ..., \ m,$$

$$s_1 = B.$$

С учетом соотношений между средствами, выделенными отраслям I и II, окончательно получаем

$$s_i = \varphi_1(u_{i-1}) + \varphi_2(s_{i-1} - u_{i-1}), \ \ i = 2, \ ..., \ m,$$

$$s_1 = B.$$

Подставим числовые данные, получим

$$s_i = 0,5u_{i-1} + 0,2(s_{i-1} - u_{i-1}) = 0,3u_{i-1} + 0,2s_{i-1}, \ \ i = 2, \ ..., \ 4,$$

$$s_1 = 900.$$

Действие 5. **Прибыль за шаг $f_i(s_i,u_i)$** зависит от состояния на начало шага и управления, принятого на этом шаге, и представляет собой сумму доходов первой и второй отраслей:

$$f_i(s_i, u_i) = f_1(u_i) + f_2(v_i) = f_1(u_i) + f_2(s_i - v_i), \quad i = 1, \ ..., \ m.$$

Подставим числовые данные, получим

$$f_i(s_i, u_i) = 3u_i + 4(s_i - u_i) = 4s_i - u_i, \quad i = 1, \ ..., \ 4.$$

Действие 6. **Определение функции Беллмана**: $W_i(s_i)$ (условная максимальная прибыль за последние $m - i$ шагов) – в данной задаче это максимальная прибыль от вложения s_i единиц капитала за последние i лет.

Функция Беллмана должна подчиняться ***принципу оптимальности Беллмана***: «Каково бы ни было начальное состояние системы перед очередным шагом, управление на этом шаге выбирается так, чтобы максимизировать сумму: *а*) прибыли на данном шаге и *б*) максимальной прибыли на всех последующих шагах» [12]. Так, если система в начале i-го шага находится в состоянии s_i и мы выбираем произвольное управление x_i, то она придет в новое состояние s_{i+1}, и последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния s_{i+1}. При этом на последнем шаге нужно максимизировать только прибыль на этом шаге.

Таким образом, получаем, что функция Беллмана имеет вид

$$W_i(s_i) = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ f_i(s_i, u_i) + W_{i+1}(s_{i+1}) \right\} = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ f_i(s_i, u_i) + W_{i+1}(\varphi(s_i, u_i)) \right\},$$

$$i = 1, \ ..., \ m-1, \quad 0 \le s_i \le B,$$

$$W_m(s_m) = \max_{0 \le u_m \le s_m} \left\{ f_m(s_m, u_m) \right\}, \ \ 0 \le s_m \le B.$$

Последнее соотношение играет роль начального условия.

С учетом полученных соотношений для функций управления и состояний получаем

$$W_i(s_i) = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ f_1(u_i) + f_2(s_i - u_i) + W_{i+1}(\varphi_1(u_{i-1}) + \varphi_2(s_{i-1} - u_{i-1})) \right\},$$

$$i = 1, \ ..., \ 3, \quad 0 \le s_i \le 900,$$

$$W_4(s_4) = \max_{0 \le u_4 \le s_4} \left\{ f_1(u_i) + f_2(s_i - u_i) \right\}, \ \ 0 \le s_4 \le 900.$$

Действие 7. **Составление уравнения Беллмана.** Подставив числовые данные в функцию Беллмана, получим

$$W_i(s_i) = \max_{0 \le u_i \le s_i} \left\{ 4s_i - u_i + W_{i+1}(0,3u_i + 0,2s_i) \right\}, \quad i = 1, \ ..., \ 3, \quad 0 \le s_i \le 900,$$

$$W_4(s_4) = \max_{0 \le u_4 \le s_4} \left\{ 4s_4 - u_4 \right\}, \ \ 0 \le s_4 \le 900.$$

Найдем оптимальное управление $U^* = (u_1^*, \ u_2^*, \ ..., \ u_m^*)$ и оптимальное значение целевой функции $W^* = W_1(B)$ по уравнениям Беллмана в два этапа.

Этап I. Условная оптимизация.

Производится решение подзадач. На первом шаге все имеющиеся средства (от 0 до B) распределяются на один (последний) год, на втором шаге – на два года (последний и предпоследний) и т. д.

Шаг 4, *i* = 4. Рассмотрим распределение средств на один (четвертый) год.

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_4(s_4) = \max_{0 \le u_4 \le s_4} \left\{ 4s_4 - u_4 \right\}, \ \ 0 \le s_4 \le 900.$$

Максимум выражения $4s_4 - u_4$ для $0 \le s_4 \le 900$ будет при $u_4 = 0$, т. к. данная функция является линейной убывающей от u_4 при любом значении s_4. Имеем

$$W_4(s_4) = 4s_4, \ \ u_4 = 0, \ \ v_4 = s_4 - u_4 = s_4.$$

Таким образом, на последнем году все имеющиеся на начало года средства следует распределить второй отрасли.

Шаг 3, *i* = 3. Пусть теперь все имеющиеся средства распределяются на два последних года (третий и четвертый).

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_3(s_3) = \max_{0 \le u_3 \le s_3} \left\{ 4s_3 - u_3 + W_4(0,3u_3 + 0,2s_3) \right\}, \quad 0 \le s_3 \le 900.$$

С учетом результатов четвертого шага запишем

$$W_3(s_3) = \max_{0 \le u_4 \le s_4} \left\{ 4s_3 - u_3 + 4 \cdot (0,3u_3 + 0,2s_3) \right\}, \quad 0 \le s_3 \le 900.$$

Откуда, произведя преобразования, получим

$$W_3(s_3) = \max_{0 \le u_3 \le s_3} \left\{ 4,8s_3 + 0,2u_3 \right\}, \quad 0 \le s_3 \le 900.$$

Максимум выражения $4{,}8s_3 + 0{,}2u_3$ для $0 \le s_3 \le 900$ будет при $u_3 = s_3$, т. к. данная функция является линейной возрастающей от u_3 при любом значении s_3. Имеем

$$W_3(s_3) = 4{,}8s_3 + 0{,}2u_3 = 4{,}8s_3 + 0{,}2s_3 = 5s_3,\;\; u_3 = s_3,\;\; v_3 = s_3 - u_3 = s_3 - s_3 = 0.$$

Таким образом, на предпоследнем году все имеющиеся на начало года средства следует распределить первой отрасли.

Шаг 2, *i* = 2. Рассматриваем три последних года (второй, третий и четвертый) и пытаемся распределить между ними имеющиеся средства (оставшиеся после окончания первого года).

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_2(s_2) = \max_{0 \le u_2 \le s_2} \left\{4s_2 - u_2 + W_3(0{,}3u_2 + 0{,}2s_2)\right\}, \quad 0 \le s_2 \le 900.$$

С учетом результатов третьего шага запишем

$$W_2(s_2) = \max_{0 \le u_2 \le s_2} \left\{4s_2 - u_2 + 5 \cdot (0{,}3u_2 + 0{,}2s_2)\right\}, \quad 0 \le s_2 \le 900.$$

Откуда, произведя преобразования, получим

$$W_2(s_2) = \max_{0 \le u_2 \le s_2} \left\{5s_2 + 0{,}5u_2\right\}, \quad 0 \le s_2 \le 900.$$

Максимум выражения $5s_2 + 0{,}5u_2$ для $0 \le s_2 \le 900$ будет при $u_2 = s_2$, т. к. данная функция является линейной возрастающей от u_2 при любом значении s_2. Имеем

$$W_2(s_2) = 5s_2 + 0{,}5u_2 = 5s_2 + 0{,}5s_2 = 5{,}5s_2,\;\; u_2 = s_2,\;\; v_2 = s_2 - u_2 = s_2 - s_2 = 0.$$

Таким образом, на второй год все имеющиеся на начало года средства следует распределить первой отрасли.

Шаг 1, *i* = 1. Определяем оптимальную стратегию распределения ресурсов, начиная с первого года.

Уравнение Беллмана для этого шага имеет вид

$$W_1(s_1) = \max_{0 \le u_1 \le s_1} \left\{4s_1 - u_1 + W_2(0{,}3u_1 + 0{,}2s_1)\right\}, \quad 0 \le s_1 \le 900.$$

С учетом результатов второго шага запишем

$$W_1(s_1) = \max_{0 \le u_1 \le s_1} \left\{4s_1 - u_1 + 5{,}5 \cdot (0{,}3u_1 + 0{,}2s_1)\right\}, \quad 0 \le s_1 \le 900.$$

Откуда, произведя преобразования, получим

$$W_1(s_1) = \max_{0 \le u_1 \le s_1} \left\{5.1s_1 + 0.65u_1\right\}, \quad 0 \le s_1 \le 900.$$

Максимум выражения $5{,}1s_1 + 0{,}65u_1$ для $0 \le s_1 \le 900$ будет при $u_1 = s_1$, т. к. данная функция является линейной возрастающей от u_1 при любом значении s_2. Имеем

$$W_1(s_1) = 5{,}1s_1 + 0{,}65u_1 = 5{,}1s_1 + 0{,}65s_1 = 5{,}75s_1,\;\; u_1 = s_1,\;\; v_1 = s_1 - u_1 = s_1 - s_1 = 0.$$

Таким образом, в первом году все имеющиеся на начало года средства следует распределить первой отрасли.

На этом условная оптимизация заканчивается.

Этап II. Безусловная оптимизация.

Просматривая проведенные шаги условной оптимизации в обратном порядке, находим значения управлений, на которых достигнуты соответствующие максимумы.

Оптимальное значение целевой функции находим, используя результат шага 1 и исходные данные. На первом этапе общее количество распределяемых средств известно: B = 900 ед. Тогда максимальная прибыль от двух отраслей за четыре года составит

$$W^* = W_1(B) = W_1(900) = 5,75 \cdot 900 = 5175 \text{ ден. ед.}$$

Выясним, каким должно быть оптимальное управление процессом выделения средств между отраслями I и II для получения максимальной прибыли в количестве 5175 ден. ед.

<u>Первый год.</u> Так как $u_1 = s_1$ и $v_1 = 0$, то все средства в количестве 900 ден. ед. отдаются первой отрасли.

<u>Второй год.</u> Выделяются средства $s_2 = 0{,}3u_1 + 0{,}2s_1 = 0{,}5$, s_1 =450 ден. ед., $u_2 = s_2 = 450$, $v_2 = 0$. Все средства передаются первой отрасли.

<u>Третий год</u>. Выделяются средства $s_3 = 0{,}3u_2 + 0{,}2s_2 = 0{,}5$, s_2 = 225 ден. ед., $u_3 = s_3 = 225$, $v_3 = 0$. Все средства передаются первой отрасли.

<u>Четвертый год</u>. Выделяются средства $s_4 = 0{,}3u_3 + 0{,}2s_3 = 0{,}5$ s_3 = 112,5 ден. ед., $u_4 = 0$, $v_4 = s_4 = 112{,}5$. Все средства передаются второй отрасли.

Результаты решения можно представить в виде таблицы 6.14.

Таблица 6.14 – Результаты решения задачи распределения средств между отраслями

Период	Средства	Отрасль I	Отрасль II	Остаток	Прибыль
1	900	900	0	450	2700
2	450	450	0	225	1350
3	225	225	0	112,5	675
4	112,5	0	112,5	22,5	450
Итого	–	–	–	–	5175

Оптимальная прибыль за 4 года, полученная от двух отраслей производства при начальных средствах 900 усл. ед., равна 5175 усл. ед. при условии, что первая отрасль получает по годам (900, 450, 225, 0), а вторая отрасль – соответственно (0, 0, 0, 112,5).

Задача 6.3. Задача о замене оборудования

В результате физического и морального износа оборудования растут производственные затраты по выпуску продукции, увеличиваются затраты на ремонт и обслуживание техники, а также снижается производительность. Наступает момент, когда старое оборудование более выгодно продать, заменив новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат.

Задача о замене оборудования заключается в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности являются, как правило, либо прибыль от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

Рассматривается плановый период из $m = 7$ лет, в начале которого имеется оборудование фиксированного возраста ($t = 0$). В процессе работы оборудование производит продукцию (приносит доход), требует эксплуатационных затрат и имеет остаточную стоимость.

Известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой с использованием этого оборудования за один год на момент возраста t (соответствует производительности оборудования), годовые эксплуатационные расходы $u(t)$ на оборудование возраста t, и остаточная стоимость $s(t)$ (таблица 6.15). Стоимость нового оборудования, равная $p = 19$ ден. ед., не меняется в плановом периоде.

Таблица 6.15 – Исходные данные к задаче о замене оборудования

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
***r*(*t*)**	40	39	38	37	37	36	36	35
***u*(*t*)**	8	9	9	10	11	12	13	14
***s*(*t*)**	7	6	5	4	4	3	2	–

В любой год оборудование можно либо сохранить, либо продать по остаточной стоимости и купить новое.

Требуется найти оптимальную по суммарной прибыли за плановый период политику замены и сохранения оборудования.

Решение

Применим для решения этой задачи метод динамического программирования (очевидно, что выполняются все необходимые предпосылки – последействие отсутствует, а целевая функция равна суммарной прибыли за все годы).

Разобьем решение исходной задачи на подзадачи меньшей размерности. Для этого следует выполнить следующие действия:

Действие 1. **Деление на шаги:** сведем многомерную задачу на определение условного экстремума к многошаговой, состоящей из m шагов, где номер шага совпадает с номером года. При этом будем рассматривать процесс планирования, начиная с последнего года.

Действие 2. **Определение состояний.** Состояние системы на каждом шаге s_i характеризуется одним параметром t – возрастом оборудования, $t = 0$, 1, …, 7.

Действие 3. **Определение управлений.** Так как в начале каждого шага принимается решение о сохранении оборудования либо его замене, то управление u_i на i-м шаге ($i = 1, 2, ..., m$) содержит лишь две альтернативные переменные. Обозначим через (*сохранение*) решение, состоящее в сохранении старого оборудования, а через (*замена*) – решение, состоящее в замене старого оборудования новым.

Действие 4. **Определение уравнения состояния**:

$$s_{i+1} = \varphi(s_i, u_i), \quad i = 1, \ ..., \ m-1.$$

Если на начало i-го шага имеем оборудование возраста t, то через год, т. е. к началу (i+1)-го шага будем иметь:

а) при *сохранении* будем иметь оборудование возраста $t+1$;

б) при *замене* (покупается новое оборудование) будем иметь оборудование возраста $t = 1$.

Получаем:

- если u_i – сохранение, то $s_{i+1} = s_i + 1 = t + 1, \quad i = 1, \ ..., \ m-1;$
- если u_i – замена, то $s_{i+1} = 1, \quad i = 1, \ ..., \ m-1.$

Действие 5. **Прибыль за шаг** зависит от управления, принятого на этом шаге. В начале каждого года имеется две возможности – сохранить оборудование и получить прибыль $r(t) - u(t)$ или заменить его и получить прибыль $s(t) - p + r(0) - u(0)$.

Действие 6. **Определение функции Беллмана**: $W_i\,(s_i)$ (условная максимальная прибыль за последние $m - i$ лет).

Функция Беллмана должна подчиняться ***принципу оптимальности Беллмана***: «Каково бы ни было начальное состояние системы перед очередным шагом, управление на этом шаге выбирается так, чтобы максимизировать сумму: *а*) прибыли на данном шаге и *б*) максимальной прибыли на всех последующих шагах» [12]. Так, если система в начале i-го шага находится в состоянии s_i и мы выбираем произвольное управление u_i, то она придет в новое состояние s_{i+1}, и последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния s_{i+1}. При этом на последнем шаге нужно максимизировать только прибыль на этом шаге.

Рассмотрим случай, когда до конца планового периода остается 1 год. В зависимости от наших (пока не определенных) решений в предыдущие годы планового периода мы можем прийти к началу последнего года с оборудованием произвольного возраста (от возраста $t = 1$, если новое оборудование куплено в предыдущем году, до очень старого, купленного в начале планового периода).

Очевидно, что решение о замене оборудования следует принять, если

$$s(t) - p + r(0) - u(0) > r(t) - u(t),$$

и о сохранении оборудования, если

$$s(t) - p + r(0) - u(0) < r(t) - u(t).$$

В случае если оба управления («сохранение» и «замена») приводят к одной и той же прибыли, то целесообразно выбрать управление «замена».

Таким образом, прибыль от использования оборудования в последнем m-м году планового периода запишется в следующем виде

$$W_n(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) & - \textit{сохранение}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) & - \textit{замена}. \end{cases}$$

Поскольку решение, принятое в начале произвольного *i*-го шага, влияет на последующее состояние системы, получаем:

а) сохранив оборудование возраста *t*, мы получим доход *r*(*t*) – *u*(*t*), в результате чего в конце этого года мы будем иметь оборудование возраста *t* +1 (система придет в состояние *t* +1);

б) замена оборудования приведет к затратам на покупку нового оборудования *s*(*t*) – *p*, доходу от появившегося нового оборудования за «первый год» *r*(0) – *u*(0), причем к концу года новое оборудование «постареет» и будет иметь возраст 1, т. е. система перейдет в состояние 1.

Тогда прибыль от использования оборудования в период с *i*-го по *m*-й год

$$W_i(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + W_{i+1}(t+1) & -\textit{сохранение}, \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + W_{i+1}(1) & -\textit{замена}, \end{cases}$$

где $F_{i+1}(t+1)$ – прибыль от использования оборудования в период с $(i+1)$-го по *m*-й год.

Действие 7. **Составление уравнения Беллмана:**

Подставив числовые данные в функцию Беллмана, получим:

$$W_i(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + W_{i+1}(t+1) \\ s(t) - 19 + 40 - 8 + W_{i+1}(1) \end{cases} = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + W_{i+1}(t+1) & -\textit{сохранение}, \\ s(t) + 13 + W_{i+1}(1) & -\textit{замена}, \end{cases}$$

$$i = 1,\ \ldots,\ 6,$$

$$W_7(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) \\ s(t) - 19 + 40 - 8 \end{cases} = \max \begin{cases} r(t) - u(t) - \textit{сохранение}, \\ s(t) + 13 \quad - \textit{замена}. \end{cases}$$

Следовательно, условная оптимизация на каждом шаге состоит в вычислении двух величин и выборе из них наибольшей.

Это значительно упрощает расчеты на стадии условной оптимизации и позволяет решать вручную задачи о замене с большим числом шагов.

Нахождение оптимального управления $U^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ и оптимального значения целевой функции $W^* = W_1(0)$ по уравнениям Беллмана проводится в два этапа.

Этап I. ***Условная оптимизация.***

Седьмой шаг. $i = m = 7$. Начнем процедуру условной оптимизации с последнего, седьмого года планового периода. Для этого шага состояние системы *t* = 0, 1, 2, …, 6, 7. Функциональное уравнение для этого шага имеет вид

$$W_7(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) & -\textit{сохранение}, \\ s(t) + 13 & -\textit{замена}. \end{cases}$$

Тогда

$$W_7(0) = \max \begin{cases} 40 - 8 \\ 7 + 13 \end{cases} = \max \begin{cases} 32 \\ 20 \end{cases} = 32 - \textit{сохранение};$$

$$W_7(1)=\max\begin{cases}39-9\\6+13\end{cases}=\max\begin{cases}30\\19\end{cases}=30-\textit{сохранение};$$

$$W_7(2)=\max\begin{cases}38-9\\5+13\end{cases}=\max\begin{cases}29\\18\end{cases}=29-\textit{сохранение};$$

$$W_7(3)=\max\begin{cases}37-10\\4+13\end{cases}=\max\begin{cases}27\\17\end{cases}=27-\textit{сохранение};$$

$$W_7(4)=\max\begin{cases}37-11\\4+13\end{cases}=\max\begin{cases}26\\17\end{cases}=26-\textit{сохранение};$$

$$W_7(5)=\max\begin{cases}36-12\\3+13\end{cases}=\max\begin{cases}24\\16\end{cases}=24-\textit{сохранение};$$

$$W_7(6)=\max\begin{cases}36-13\\2+13\end{cases}=\max\begin{cases}23\\15\end{cases}=23-\textit{сохранение};$$

$$W_7(7)=\max\begin{cases}35-14\\0+13\end{cases}=\max\begin{cases}21\\13\end{cases}=21-\textit{сохранение}.$$

Заметим, что с ростом t выражения $r(t)$ – $u(t)$ убывают, поскольку чем «старше» оборудование, тем ниже у него производительность и соответственно уменьшается доход в год.

Полученные результаты занесем в таблицу 6.16 (первая строка).

Шестой шаг. $i=6$. Проанализируем шестой год планового периода. Для второго шага возможны состояния системы t = 0, 1, 2, …, 6, 7. Функциональное уравнение имеет вид

$$W_6(t)=\max\begin{cases}r(t)-u(t)+W_7(t+1)-\textit{сохранение},\\ s(t)+13+W_7(1)\qquad -\textit{замена}.\end{cases}$$

Тогда

$$W_6(0)=\max\begin{cases}r(0)-u(0)+W_7(1)\\s(0)+13+W_7(1)\end{cases}=\max\begin{cases}40-8+30\\7+13+30\end{cases}=\max\begin{cases}62\\50\end{cases}=62-\textit{сохранение};$$

$$W_6(1)=\max\begin{cases}r(1)-u(1)+W_7(2)\\s(1)+13+W_7(1)\end{cases}=\max\begin{cases}39-9+29\\6+13+30\end{cases}=\max\begin{cases}59\\49\end{cases}=59-\textit{сохранение};$$

$$W_6(2)=\max\begin{cases}r(2)-u(2)+W_7(3)\\s(2)+13+W_7(1)\end{cases}=\max\begin{cases}38-9+27\\5+13+30\end{cases}=\max\begin{cases}56\\48\end{cases}=56-\textit{сохранение};$$

$$W_6(3)=\max\begin{cases}r(3)-u(3)+W_7(4)\\s(3)+13+W_7(1)\end{cases}=\max\begin{cases}37-10+26\\4+13+30\end{cases}=\max\begin{cases}53\\47\end{cases}=53-\textit{сохранение}$$

$$W_6(4)=\max\begin{cases}r(4)-u(4)+W_7(5)\\s(4)+13+W_7(1)\end{cases}=\max\begin{cases}37-11+24\\4+13+30\end{cases}=\max\begin{cases}50\\47\end{cases}=50-\textit{сохранение}$$

$$W_6(5)=\max\begin{cases} r(5)-u(5)+W_7(6) \\ s(5)+13+W_7(1) \end{cases}=\max\begin{cases} 36-12+23 \\ 3+13+30 \end{cases}=\max\begin{cases} 48 \\ 46 \end{cases}=48-\textit{сохранение}$$

$$W_6(6)=\max\begin{cases} r(6)-u(6)+W_7(7) \\ s(6)+13+W_7(1) \end{cases}=\max\begin{cases} 36-13+21 \\ 2+13+30 \end{cases}=\max\begin{cases} 44 \\ 45 \end{cases}=45-\textit{замена};$$

$$W_6(7)=\max\begin{cases} r(7)-u(7)+W_7(7) \\ s(7)+13+W_7(1) \end{cases}=\max\begin{cases} 35-14+21 \\ 0+13+30 \end{cases}=\max\begin{cases} 42 \\ 43 \end{cases}=43-\textit{замена}.$$

Полученные результаты занесем в таблицу 6.16 (вторая строка).

Продолжая вычисления описанным способом, постепенно заполняем всю таблицу.

Таблица 6.16 – Результаты вычислений

$W_i(t)$	t							
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$W_7(t)$	32	30	29	27	26	24	23	21
$W_6(t)$	62	59	56	53	50	48	45	43
$W_5(t)$	91	86	82	77	76	75	74	72
$W_4(t)$	118	112	106	103	103	102	101	99
$W_3(t)$	144	136	132	130	129	128	127	125
$W_2(t)$	168	162	159	156	155	152	151	149
$W_1(t)$	194	189	185	182	179	178	177	175

Этап II. *Безусловная оптимизация.*

Найдем оптимальную стратегию замены оборудования возраста $t = 0$ лет в плановом периоде продолжительностью $m = 7$ лет.

В начале исследуемого семилетнего периода возраст оборудования составляет 0 лет. Находим в таблице на пересечении строки $W_1(t)$ и столбца $t = 0$ значение максимальной прибыли $W_1(0) = 194$. Найдем теперь оптимальную политику, обеспечивающую эту прибыль. Значение 194 записано слева от полужирной черты в области «политик сохранения». Это означает, что в начале первого года принимается решение о сохранении оборудования. К началу второго года возраст оборудования 0 + 1 = 1 год. Расположенная на пересечении строки $W_2(t)$ и столбца $t = 1$ клетка находится слева от полужирной черты, следовательно, и второй год нужно работать на имеющемся оборудовании. К началу третьего года возраст оборудования 1 + 1 = 2 года. Расположенная на пересечении строки $W_3(t)$ и столбца $t = 2$ клетка находится слева от полужирной черты, следовательно, и третий год нужно работать на имеющемся оборудовании. К началу четвертого года возраст оборудования 2 + 1 = 3 года. Расположенная на пересечении строки $W_4(t)$ и столбца $t = 3$ клетка находится справа от черты, в области «политик замены», следовательно, в начале четвертого года следует заменить оборудование. К началу пятого года возраст оборудования составит один год. Расположенная на пересечении строки $W_5(t)$ и столбца $t = 1$ клетка находится слева от черты, следовательно, пятый год следует работать на имеющемся оборудовании. Продолжая рассуждать таким образом, последовательно находим $W_6(2) = 56$, $W_7(3) = 27$.

Цепь решений безусловной оптимизации можно изобразить символически следующим образом (рисунок 6.7).

Итак, на оборудовании возраста 0 лет следует работать 3 года, затем произвести замену оборудования, на новом оборудовании работать четвертый, пятый, шестой и седьмой годы планового периода. При этом прибыль будет максимальной и составит $W_1(0) = 194$ ден. ед.

$$W_1(0) \xrightarrow[\text{сохранение}]{} W_1(0) \xrightarrow{\text{1-й год}} W_2(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{} W_2(1) \xrightarrow{\text{2-й год}}$$

$$W_3(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{} W_3(2) \xrightarrow{\text{3-й год}} W_4(3) \xrightarrow[\text{замена}]{} W_4(0) \xrightarrow{\text{4-й год}}$$

$$W_5(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{} W_5(1) \xrightarrow{\text{5-й год}} W_6(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{} W_6(2) \xrightarrow{\text{6-й год}}$$

$$W_7(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{} W_7(3) \xrightarrow{\text{7-й год}}$$

Рисунок 6.7 – Оптимальная политика замены оборудования

Замечания

Как мы уже отмечали, достоинством метода является возможность анализа решения на чувствительность к изменению исходных данных, которыми в этой задаче являются начальный возраст оборудования и количество лет в плановом периоде. Действительно, поскольку в таблице результатов решения подзадач указаны оптимальные решения для всех подзадач, ее можно использовать для отыскания оптимального решения задачи с измененными условиями (меньше лет в плановом периоде и любой начальный возраст оборудования в интервале $0, \ldots, m$).

Так, элемент таблицы $W_3(3) = 130$ ден. ед. означает, что с оборудованием возрастом 3 года за 5 лет можно получить прибыль 130 ден. ед. при следующей политике замены: в первый год сохранить оборудование, в начале второго года заменить, оставшиеся годы работать на имеющемся оборудовании.

В случае увеличения планового периода (и, соответственно, задания дополнительных значений исходных данных о производительности, эксплуатационных расходах и остаточной стоимости) следует соответствующим образом дополнить таблицу вычислений, присоединяя шаги с номерами $i = 0, -1, \ldots$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.4. Задача о распределении инвестиций

Имеются четыре предприятия, между которыми необходимо распределить 100 тыс. ден. ед. средств так, чтобы получить максимальную (суммарную) прибыль, если прибыль от выделения i-му предприятию u_i единиц капитала равна $f_i(u_i)$ и задана таблицей. Используя решение основной задачи, найти:

а) оптимальное распределение 80 тыс. ден. ед. между тремя предприятиями;

б) оптимальное распределение 100 тыс. ден. ед. между двумя предприятиями.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 6.17.

Таблица 6.17 – Исходные данные к задаче 6.4

Вариант 1

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	16	14	15	15
40	30	32	36	25
60	49	50	45	22
80	51	48	57	36
100	72	60	70	51

Вариант 2

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	19	14	20	25
40	36	32	36	53
60	51	52	47	66
80	72	61	72	70
100	81	79	80	84

Вариант 3

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	10	14	14	19
40	16	14	15	15
60	30	32	36	25
80	45	43	47	36
100	60	50	55	53

Вариант 4

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	14	17	22	20
40	26	20	21	33
60	35	32	37	46
80	52	61	67	30
100	61	72	58	42

Вариант 5

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	42	40	25	24
40	34	52	36	45
60	47	50	46	32
80	51	48	57	36
100	62	60	67	54

Вариант 6

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	19	48	42	45
40	36	32	56	53
60	54	62	67	66
80	72	81	82	70
100	88	95	98	84

Вариант 7

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	22	17	18	35
40	43	339	33	42
60	49	51	45	55
80	61	75	57	68
100	82	79	67	81

Вариант 8

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	15	11	10
40	23	27	21	19
60	30	29	34	36
80	42	46	45	47
100	58	61	58	54

Вариант 9

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	42	40	25	24
40	34	52	36	45
60	47	50	46	32
80	51	48	57	36
100	62	60	67	54

Вариант 10

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	19	33	29	35
40	26	43	36	45
60	35	52	49	56
80	47	60	62	72
100	68	79	82	94

Вариант 11

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	24	10	20
40	21	17	16	25
60	20	21	25	22
80	30	38	22	23
100	42	35	18	41

Вариант 12

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	22	24	28	25
40	38	32	46	33
60	45	44	57	46
80	52	56	67	58
100	51	69	70	68

Вариант 13

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	24	25	18
40	23	32	36	22
60	33	40	44	32
80	45	48	47	36
100	52	60	57	35

Вариант 14

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	29	24	22	25
40	36	33	36	35
60	48	22	44	46
80	52	46	53	49
100	58	39	68	38

Вариант 15

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	6	4	5	8
40	10	12	16	15
60	24	25	24	22
80	21	24	27	31
100	32	30	37	45

Вариант 16

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	9	14	10	15
40	26	22	23	18
60	35	28	27	16
80	32	38	32	20
100	41	46	48	34

Вариант 17

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	2	6	8	5
40	8	3	6	9
60	12	5	10	14
80	11	8	7	13
100	20	10	17	15

Вариант 18

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	26	31	32
40	49	30	46	45
60	45	59	64	56
80	82	56	82	87
100	86	89	90	84

Вариант 19

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	10	16	19
40	30	32	36	25
60	44	54	34	22
80	51	48	47	36
100	62	56	57	48

Вариант 20

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	11	24	12	35
40	26	22	28	33
60	31	32	37	36
80	42	41	47	40
100	58	59	53	54

Вариант 21

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	16	12	15	24
40	30	36	36	22
60	49	34	45	32
80	51	47	57	41
100	72	57	70	59

Вариант 22

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	10	16	19
40	26	22	28	33
60	51	52	48	56
80	42	41	47	40
100	68	71	58	54

Вариант 23

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	14	15	13
40	36	32	36	33
60	34	50	45	35
80	47	48	57	37
100	57	60	70	47

Вариант 24

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	14	20	29
40	36	32	36	33
60	34	42	27	46
80	49	56	32	50
100	55	59	38	44

Вариант 25

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	11	14	12	15
40	24	32	39	25
60	34	50	40	22
80	27	48	38	36
100	37	60	47	57

Вариант 26

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	29	24	28	25
40	36	23	39	23
60	45	32	47	36
80	47	46	37	40
100	41	57	50	34

Вариант 27

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	12	14	15	19
40	37	32	36	45
60	27	50	45	38
80	40	48	57	48
100	56	60	70	77

Вариант 28

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	19	14	33	25
40	45	32	45	53
60	38	52	33	66
80	48	61	67	70
100	77	79	61	84

Вариант 29

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	10	12	14	19
40	14	37	48	45
60	34	27	37	38
80	42	40	48	48
100	66	56	64	77

Вариант 30

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$	$f_4(u)$
20	14	19	33	41
40	48	45	59	81
60	37	38	33	52
80	48	58	77	73
100	64	67	61	92

Задача 6.5. Задача о распределении средств между отраслями

Планируется деятельность двух отраслей производства на m лет. Средства u, вложенные в отрасль I в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(u)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(u)$; аналогично для отрасли II функция прибыли при вложении v средств равна $f_2(v)$, а возврата – $\varphi_2(v)$ (таблица 6.18). В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями I и II, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается.

Требуется распределить имеющиеся средства B между двумя отраслями производства на m лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за m лет оказалась максимальной.

Таблица 6.18 – Исходные данные к задаче 6.5

Вариант	m	B	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
В1	3	1000	$3x$	$4x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В2	4	100	$2x$	$4x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В3	5	10	$5x$	$4x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В4	3	2	$3x$	$5x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В5	4	1200	$3x$	$2x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В6	5	500	$3x$	$8x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В7	3	700	$0{,}3x$	$0{,}4x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В8	4	5	$0{,}4x$	$0{,}4x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В9	5	20	$0{,}5x$	$0{,}8x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В10	3	50	$0{,}6x$	$0{,}8x$	$0{,}75x$	$0{,}5x$
В11	4	100	$0{,}7x$	$0{,}5x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$

1	2	3	4	5	6	7
В12	5	1000	$0{,}8x$	$0{,}4x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В13	3	2000	$0{,}9x$	$0{,}3x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В14	4	10000	$3x$	$0{,}2x^2$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В15	5	60	$0{,}2x^2$	$3x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В16	3	600	x	$2x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В17	4	40	$3x^2$	$4x^2$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В18	5	4	$0{,}3x^2$	$0{,}4x^2$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В19	3	3	$3x$	$4x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В20	4	6	x	$0{,}5x$	$0{,}75x$	$0{,}2x$
В21	5	10	$0{,}2x^2$	$3x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В22	3	500	$4x$	$4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В23	4	700	$5x$	$4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В24	5	1000	$2x$	$4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В25	3	10000	$8x$	$4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В26	4	900	$0{,}4x$	$0{,}2x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В27	5	800	$13x$	$4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В28	3	400	$13x$	$14x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В29	4	2	$0{,}3x$	$0{,}4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$
В30	5	4	$3x$	$4x$	$0{,}3x$	$0{,}5x$

Задача 6.6. Задача о замене оборудования

Найти оптимальный план замены оборудования на 6-летний период, если известны производительность оборудования $r(t)$ и остаточная стоимость оборудования $s(t)$ в зависимости от возраста, а также стоимость нового оборудования p (таблица 6.19). Возраст оборудования к началу эксплуатации равен 1 год.

Используя выполненное решение основной задачи, найти оптимальный план замены оборудования на 3-летний период, если возраст оборудования к началу эксплуатации равен 4 годам.

Таблица 6.19 – Исходные данные к задаче 6.6

Вариант 1

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	11	10	9	9	8	8	7	11
s	11	8	5	4	3	2	1	–

Вариант 2

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	10	9	8	7	6	4	2	12
s	11	10	9	7	6	5	4	–

Вариант 3

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	12	11	9	7	6	6	11
s	11	10	9	7	6	5	3	–

Вариант 4

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	8	8	7	7	7	6	6	10
s	7	6	5	4	3	2	1	–

Вариант 5

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	9	8	7	6	6	5	4	9
s	9	9	8	7	6	4	3	–

Вариант 6

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	15	14	14	13	12	10	8	26
s	16	14	12	10	8	6	5	–

Вариант 7

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	15	14	13	13	12	12	10	16
s	16	14	13	11	10	8	6	–

Вариант 8

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	10	9	9	7	7	6	6	11
s	11	9	7	5	4	3	2	–

Вариант 9

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	12	11	10	8	6	3	11
s	13	12	11	10	8	5	2	–

Вариант 10

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	10	9	8	8	6	5	4	11
s	9	8	7	5	3	3	2	–

Вариант 11

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	8	8	8	8	7	7	7	8
s	6	5	5	5	5	4	4	–

Вариант 12

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	10	9	6	5	5	4	3	13
s	12	10	9	9	7	6	5	–

Вариант 13

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	10	9	7	7	6	4	3	13
s	12	10	9	9	7	6	5	–

Вариант 14

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	12	11	11	10	10	8	14
s	13	12	11	10	8	6	3	–

Вариант 15

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	11	9	8	7	6	6	4	12
s	10	7	6	5	5	4	2	–

Вариант 16

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	12	12	11	11	10	8	11
s	10	10	9	9	8	8	6	–

Вариант 17

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	9	8	8	7	7	6	6	7
s	7	6	5	4	4	3	2	–

Вариант 18

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	12	12	11	11	10	8	8
s	7	6	5	4	4	3	2	–

Вариант 19

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	10	10	10	8	6	6	11
s	11	10	8	8	7	6	4	–

Вариант 20

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	9	8	8	6	6	4	10
s	9	9	8	6	6	5	4	–

Вариант 21

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	9	8	8	7	7	6	5	7
s	7	6	5	4	4	3	2	–

Вариант 22

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	10	8	8	6	5	3	10
s	10	9	8	7	7	5	5	–

Вариант 23

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	8	8	7	7	6	5	5	13
s	12	10	8	8	6	5	4	–

Вариант 24

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	11	10	9	9	7	6	5	10
s	9	8	8	6	5	5	3	–

Вариант 25

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	10	9	8	6	4	2	11
s	10	9	8	8	6	6	4	–

Вариант 26

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	11	11	10	10	9	7	5	12
s	10	9	8	7	6	5	4	–

Вариант 27

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	11	11	10	9	9	8	9
s	9	9	8	7	5	4	4	–

Вариант 28

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	11	8	7	5	4	3	12
s	11	9	7	6	5	4	4	–

Вариант 29

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	11	10	9	7	5	3	2	15
s	10	8	6	6	4	2	2	–

Вариант 30

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***p***
r	12	12	10	9	7	6	5	14
s	11	9	9	6	5	4	3	–

Тема 7. Оптимизационные задачи на графах

Литература: *основная* [25, с. 42–54], *дополнительная* [3, с. 110–116], [11, с. 25–29], [13, с. 9–41], [16, с. 52–56], [19, с. 175–217], [24, с. 152–164], [28, с. 236–241], [29, с. 244–269].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Основные понятия теории графов. Деревья, остовные деревья.
2. Постановка задачи нахождения минимального остовного дерева.
3. Алгоритмы Краскала и Прима.
4. Постановка задачи нахождения кратчайшего пути от заданной вершины в графе.
5. Алгоритмы Дейкстры и Форда – Беллмана.
6. Постановка задачи нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин в графе.
7. Алгоритм Флойда.

Обозначения, используемые в разделе

u – число вершин графа

v – число ребер (дуг) графа

X – множество вершин графа: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_u\}$

E – множество ребер (дуг) графа: $E = \{e_1, e_2, \dots, e_v\} = \{(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}), (x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}), \dots, (x_{\alpha_v}, x_{\beta_v})\}$, $x_{\alpha_i} \in X$, $x_{\beta_i} \in X$, $i = 1, \dots, v$

$G = (X, E)$ – граф

c_{ij} – вес (длина) ребра (x_i, x_j), $(x_i, x_j) \in E$, $x_i \in X$, $x_j \in X$

$\omega(G)$ – вес графа G

$l(i)$ – расстояние от начальной вершины до вершины x_i, $x_i \in X$

d_{ij} – расстояние между вершинами x_i и x_j, $x_i \in X$, $x_j \in X$

Решение типовых задач

Задача 7.1. Минимальное остовное дерево

Проектируется сеть дорог, соединяющих семь населенных пунктов x_1, x_2, ..., x_7 (дороги, соединяющие два пункта, могут проходить через другие населенные пункты). Требуется минимизировать общую длину дорог. Расстояния между населенными пунктами заданы матрицей

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\hline
x_1 & - & 10 & 12 & \infty & \infty & 11 & \infty \\
x_2 & 10 & - & 14 & 16 & 13 & \infty & 9 \\
x_3 & 12 & 14 & - & 11 & 12 & \infty & 13 \\
x_4 & \infty & 16 & 11 & - & 10 & 5 & 14 \\
x_5 & \infty & 13 & 12 & 10 & - & 8 & \infty \\
x_6 & 11 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\
x_7 & \infty & 9 & 13 & 14 & \infty & 7 & -
\end{array}\right).$$

Решение

По заданной матрице весов построим граф $G = (X, E)$ (рисунок 7.1) состоящий из семи вершин: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ и 15 ребер (так как заданная матрица весов симметрична относительно главной диагонали, то граф неориентированный): $E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_4, x_7), (x_5, x_6), (x_6, x_7)\}$.

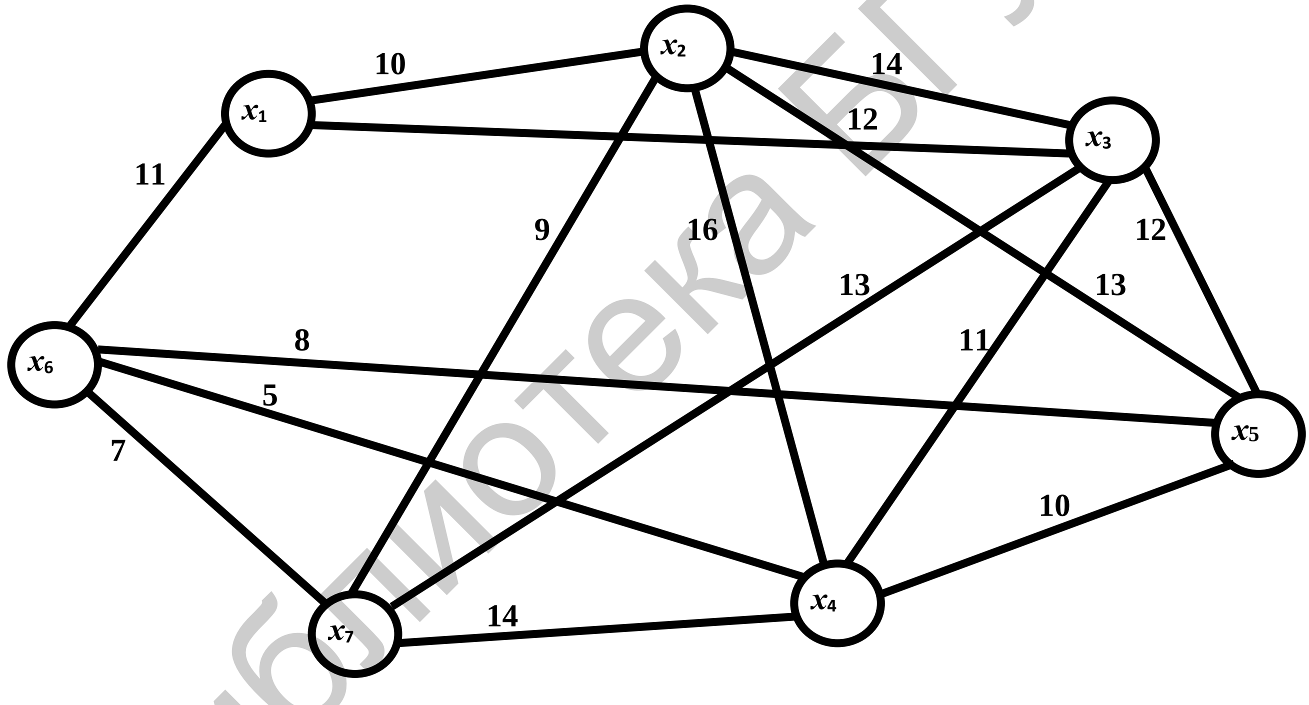


Рисунок 7.1 – Заданный взвешенный граф

Для нахождения сети дорог минимальной длины нужно построить минимальное остовное дерево G' графа G и найти его вес $\omega_{\min}(G')$.

Остовом графа G называется частичный граф графа G, включающий все вершины графа G. **Остовным деревом** графа G называется остов графа G типа дерево. Таким образом, остовное дерево выделяется из графа G удалением из него ребер до тех пор, пока он не станет графом типа дерево, включающим все вершины.

Минимальное остовное дерево – остовное дерево, сумма весов ребер которого наименьшая.

I. Построим минимальное остовное дерево заданного графа по алгоритму Краскала.

Алгоритм Краскала

***Шаг* 0.** Из графа удаляются все ребра, получается остовной подграф, где все вершины изолированы.

Удалив все ребра данного графа, получаем семь изолированных вершин x_1, x_2, ..., x_7, составляющих остов графа.

***Шаг* 1.** Ребра ранжируются по возрастанию весов.

Проранжируем ребра данного графа по весу, получим следующую таблицу 7.1.

Таблица 7.1 – Ранжированные по весу ребра графа G

Ребра	(x_4, x_6)	(x_6, x_7)	(x_5, x_6)	(x_2, x_7)	(x_1, x_2), (x_4, x_5)	(x_1, x_6), (x_3, x_4)	(x_1, x_3), (x_3, x_5)	(x_2, x_5), (x_3, x_7)	(x_2, x_3), (x_4, x_7)	(x_2, x_4)
Вес	5	7	8	9	10	11	12	13	14	16

***Шаг* 2.** Выбирается ребро, имеющее наименьший вес, и включается в формируемое остовное дерево.

Наименьший вес 5 имеет ребро (x_4, x_6) – включаем его в остовное дерево.

***Шаг* 3.** Из оставшихся ребер выбирается снова то, которое имеет минимальный вес, и включается в остовное дерево, если при этом не образуются циклы.

1) Наименьший вес 7 имеет ребро (x_6, x_7) – включаем его в остовное дерево.

2) Следующий наименьший вес 8 имеет ребро (x_5, x_6) – включаем его в остовное дерево.

3) Следующий наименьший вес 9 имеет ребро (x_2, x_7) – включаем его в остовное дерево.

4) Следующий наименьший вес 10 имеют ребра (x_4, x_5) и (x_1, x_2). Однако ребро (x_4, x_5) при его включении в остовное дерево образует цикл с уже включенными ребрами (x_4, x_6) и (x_5, x_6). Включаем только ребро (x_1, x_2).

5) Следующий наименьший вес 11 имеют ребра (x_1, x_6) и (x_3, x_4). Однако ребро (x_1, x_6) при его включении в остовное дерево образует цикл с уже включенными ребрами (x_1, x_2), (x_2, x_7) и (x_6, x_7). Включаем только ребро (x_3, x_4), что и завершает формирование остова.

***Шаг* 4.** Пока не все вершины включены в остовное дерево, вернуться к шагу 2, иначе **конец алгоритма**.

Поскольку все вершины включены в остовное дерево, **конец алгоритма**.

Таким образом, искомое минимальное остовное дерево G' содержит следующие ребра:

$$(x_4, x_6), (x_6, x_7), (x_5, x_6), (x_2, x_7), (x_1, x_2), (x_3, x_4).$$

Общий вес ребер составляет $\omega_{\min}(G') = 5 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 50$.

II. Найдем минимальное остовное дерево по алгоритму Прима.

Алгоритм Прима

***Шаг* 0.** Из графа удаляются все ребра, получается остовной подграф, где все вершины изолированы.

Удалив все ребра данного графа, получаем семь изолированных вершин x_1, x_2, ..., x_7, составляющих остов графа.

***Шаг* 1.** Включим любую вершину в формируемое остовное дерево.

Включим в остовное дерево вершину x_6.

***Шаг* 2.** Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин, включенных в остов к оставшимся вершинам, и из них выберем ребро с минимальным весом. Ее концевую вершину включим в остовное дерево.

1) Рассмотрим все ребра, исходящие из вершины x_6, – это ребра (x_1, x_6), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7), их веса 11, 5, 8 и 7 соответственно. Выберем ребро с минимальным весом – это ребро (x_4, x_6) с весом 5. Включим в остовное дерево вершину x_4.

2) Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин x_6 и x_4 к другим вершинам, – это ребра (x_1, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_7), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_7), их веса 11, 8, 7, 16, 11, 10 и 14 соответственно. Выберем ребро с минимальным весом – это ребро (x_6, x_7) с весом 7. Включим в остовное дерево вершину x_7.

3) Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин x_6, x_7 и x_4 к другим вершинам, – это ребра (x_1, x_6), (x_5, x_6), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_2, x_7), (x_3, x_7) их веса 11, 8, 16, 11, 10, 9 и 13 соответственно. Выберем ребро с минимальным весом – это ребро (x_5, x_6) с весом 8. Включим в остовное дерево вершину x_5.

4) Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин x_6, x_7, x_5 и x_4 к другим вершинам, – это ребра (x_1, x_6), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_2, x_7), (x_3, x_7), (x_2, x_5), (x_3, x_5), их веса 11, 16, 11, 9, 13, 13 и 12 соответственно. Выберем ребро с минимальным весом – это ребро (x_2, x_7) с весом 9. Включим в остовное дерево вершину x_2.

5) Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин x_6, x_2, x_7, x_5 и x_4 к другим вершинам, – это ребра (x_1, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_3, x_5), (x_1, x_2), (x_2, x_3), их веса 11, 11, 13, 12, 10 и 14 соответственно. Выберем ребро с минимальным весом – это ребро (x_1, x_2) с весом 10. Включим в остовное дерево вершину x_1.

6) Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин x_6, x_2, x_7, x_1, x_5 и x_4 к другим вершинам, – это ребра (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_3, x_5), (x_2, x_3), (x_1, x_3), их веса 11, 13, 12, 14 и 12 соответственно. Выберем ребро с минимальным весом – это ребро (x_3, x_4) веса 11. Включим в остовное дерево вершину x_3.

***Шаг* 3.** Пока не все вершины включены в остовное дерево, вернуться к шагу 2, иначе **конец алгоритма**.

Поскольку все вершины включены в остовное дерево, **конец алгоритма**.

Замечание. В этом алгоритме не нужно следить за образованием циклов.

Таким образом, искомый минимальный по весу остов G' содержит следующие ребра:

$$(x_4, x_6), (x_6, x_7), (x_5, x_6), (x_2, x_7), (x_1, x_2), (x_3, x_4).$$

Общий вес $\omega_{\min}(G')$ ребер остова составляет 50.

Построенное остовное дерево минимального веса имеет вид, показанный на рисунке 7.2.

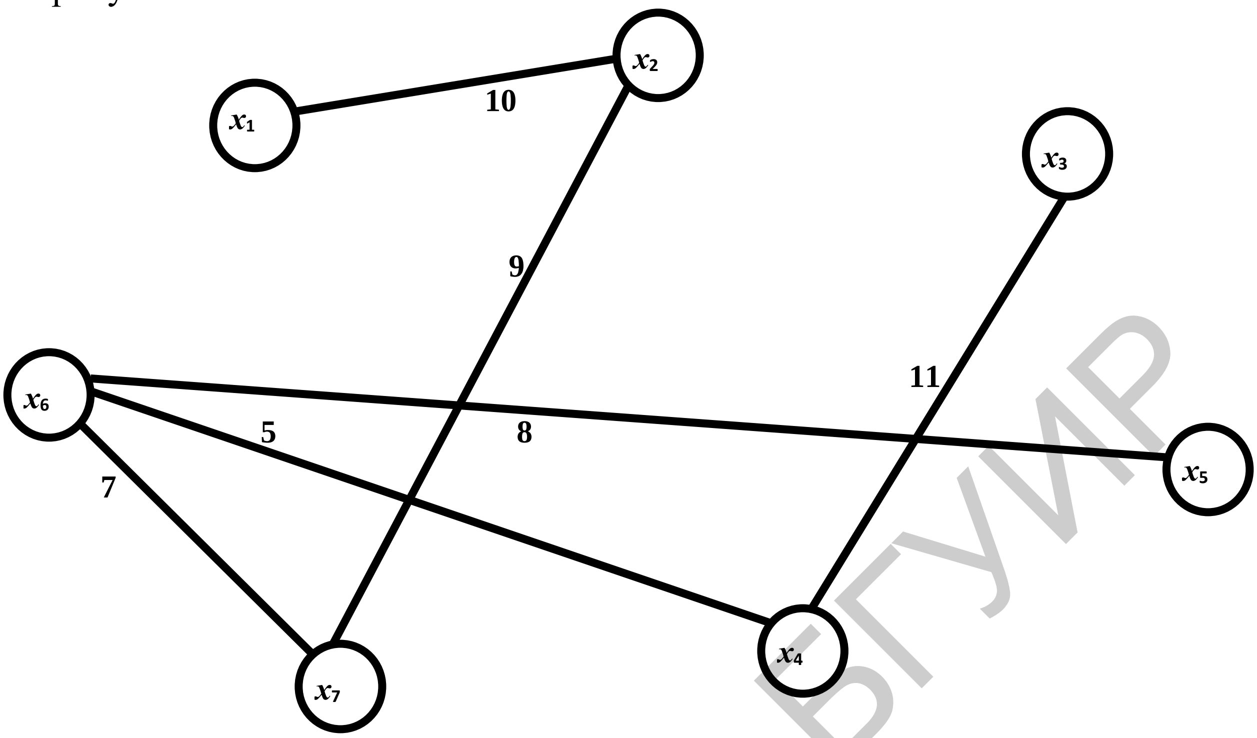


Рисунок 7.2 – Минимальное остовное дерево

Задача 7.2. Кратчайшие пути от заданной вершины в графе

На рисунке 7.3 изображена сеть дорог между магазинами розничной торговой сети (числа над ребрами означают длины). В пункте 1 расположен оптовый склад. Требуется найти кратчайшие пути перевозки продукции со склада во все магазины сети, используя алгоритмы Дейкстры и Форда – Беллмана.

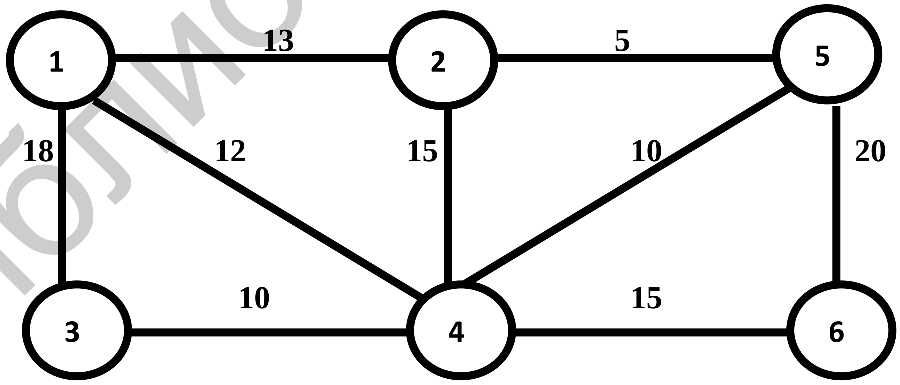


Рисунок 7.3 – Исходные данные к задаче 7.2

Решение

Найдем кратчайший путь из вершины 1 во все остальные вершины с помощью **алгоритма Дейкстры**.

Этот алгоритм позволяет найти кратчайшие пути от заданной вершины до всех остальных в неориентированном графе с неотрицательными весами.

Каждой вершине i, $i = 1, \ldots, u$ графа присваивают метки. Метки вершин имеют вид пары чисел $(l(i), X(i))$, первая часть которых $l(i)$ – длина текущего пути от вершины 1 до вершины i, а вторая – вершина, предшествующая вершине i в этом пути.

***Шаг* 0.** Присваиваем начальной вершине 1 постоянную метку ($X^*(1) = 1^*$) и считаем путь до начальной вершины равным нулю ($l^*(1) = 0^*$). Помечаем остальные вершины временными метками: $l(i)$ равно длине ребра $(1, i)$, если вершины 1 и i соединены ребром, и ∞ – в противном случае, $X(i) = 1$, $i = 2, \ldots, u$.

Вершина 1 получает постоянную метку (0*, 1*), множество помеченных вершин (обозначим его R) $R = \{1\}$, соседние с ней вершины 2, 3, 4 получают временные метки (13, 1), (18, 1) и (12, 1) соответственно, а остальные вершины получают временные метки (∞, 1).

На этом шаге помеченный граф имеет вид, показанный на рисунке 7.4.

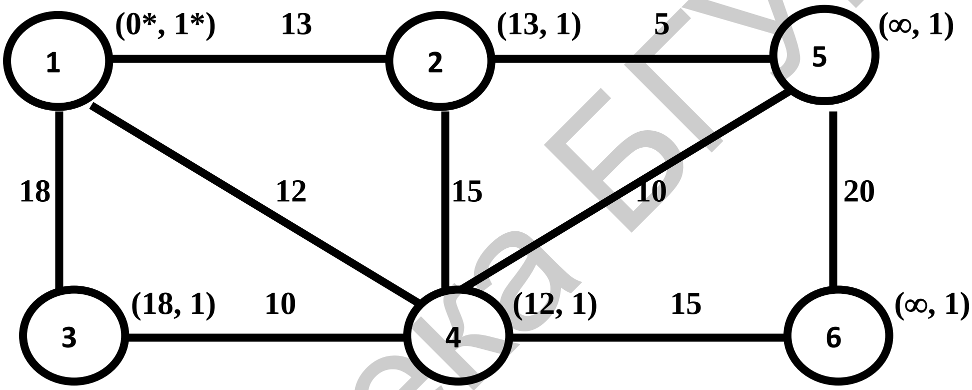


Рисунок 7.4 – Помеченный граф перед первой итерацией

Итерация: для вершин i с временными метками $l(i)$, соединенных ребром с какой-нибудь вершиной y с постоянной меткой $l^*(y)$, пересчитываем значения $l(i)$ следующим образом:

$$l(i) = \min_{1 \le q \le u} \{l(i),\ l^*(y) + c_{qi}\},\ i = 2, \ldots, u,$$

где c_{yi} – длина ребра (y, i).

Если метка $l(i)$ приняла новое значение, соответствующим образом изменяется и метка $X(i)$.

Среди вершин с временными метками находим вершину, расстояние до которой наименьшее, – ее метка становится постоянной.

Итерация повторяется до тех пор, пока все вершины не получат постоянные метки.

***Первая итерация*:**

1) Минимальное значение первой части меток всех вершин, равное 12, соответствует четвертой вершине, т. е. $\arg(\min_{2 \le j \le 4} l(j)) = 4$. Метка четвертой вершины становится постоянной. Полагаем $R := R \cup \{4\} = \{1, 4\}$.

2) Просматриваем все вершины, соседние с вершиной, получившей постоянную метку (вершиной 4).

Для вершины 5 имеем $l^*(4) + c_{45} = 12 + 10 = 22 < l(5) = \infty$, поэтому полагаем $l(5) = 22$, $X(5) = 4$. Аналогично получаем $l(6) = 27$, $X(6) = 4$.

Метки вершин 2 и 3 не меняются.

На этой итерации помеченный граф имеет вид, показанный на рисунке 7.5.

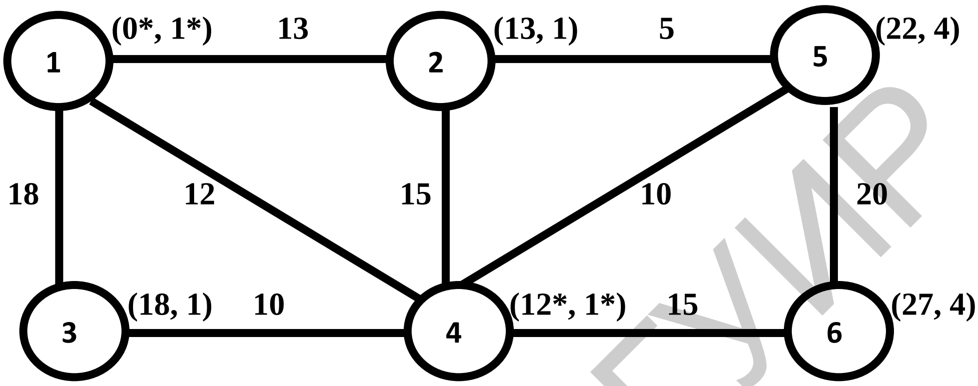


Рисунок 7.5 – Помеченный граф после первой итерации

Поскольку не все вершины имеют постоянные метки, переходим ко ***второй итерации***:

1) Минимальное значение первой части меток всех вершин, равное 13, соответствует второй вершине. Метка второй вершины становится постоянной. Полагаем $R := R \cup \{2\} = \{1, 2, 4\}$.

2) Просматриваем все вершины, соседние с вершиной, получившей постоянную метку (вершиной 2).

Для вершины 5 имеем $l^*(2) + c_{25} = 13 + 5 = 18 < l(5) = 22$, поэтому полагаем $l(5) = 18$, $X(5) = 2$. Метки вершин 3 и 6 не меняются.

На этой итерации помеченный граф имеет вид, показанный на рисунке 7.6.

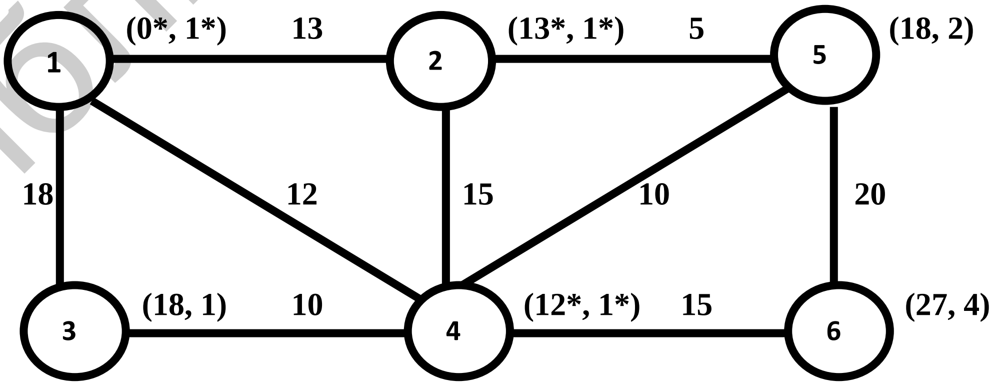


Рисунок 7.6 – Помеченный граф после второй итерации

Поскольку не все вершины имеют постоянные метки, переходим к ***третьей итерации***:

1) Минимальное значение первой части меток всех вершин, равное 18, соответствует третьей и пятой вершинам. Метка третьей вершины становится постоянной. Полагаем $R := R \cup \{3\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

2) Просматриваем все вершины, соседние с вершиной, получившей постоянную метку (вершиной 3). Метки вершин не меняются.

На этой итерации помеченный граф имеет вид, показанный на рисунке 7.7.

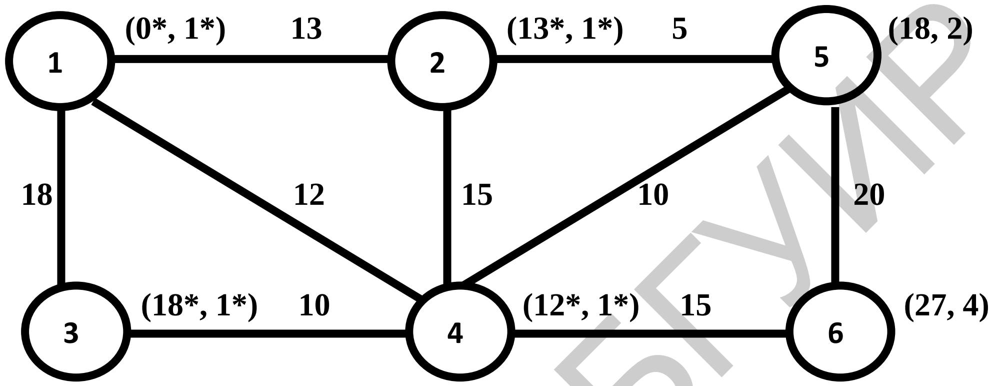


Рисунок 7.7 – Помеченный граф после третьей итерации

На ***четвертой и пятой итерациях*** постоянные метки (18*, 2*) и (27*, 4*) получили соответственно вершины 5 и 6. Результаты вычислений на всех итерациях заносим в таблицу 7.2.

<u>Алгоритм закончил работу</u> на **5-*й итерации***, найдены длины кратчайших путей ко всем вершинам.

Таблица 7.2 – Результаты работы алгоритма Дейкстры

Итерация	**Вершина**	**Вершины**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	0*, 1*	13, 1	18, 1	12, 1	∞, 1	∞, 1
1	4		13, 1	18, 1	12*, 1*	22, 4	27, 4
2	2		13*, 1*	18, 1		18, 2	27, 4
3	3			18*, 1*		18, 2	27, 4
4	5					18*, 2*	27, 4
5	6						27*, 4*

<u>Траектория пути определяется следующим образом.</u>

Осуществляем обратный просмотр таблицы от конечной вершины к начальной. Просматриваем столбец, соответствующий вершине, снизу вверх и фиксируем первое появление минимальной величины. Вершина, определяющая эту строку, указывает вершину, к которой следует перейти, т. е. следующим нужно рассматривать столбец, соответствующий этой вершине, и т. д. Таким образом, получаем следующие траектории пути:

- от вершины 1 к вершине 2: путь 1 → 2 длины 13;
- от вершины 1к вершине 3: путь 1 → 3 длины 18;
- от вершины 1к вершине 4: путь 1 → 4 длины 12;
- от вершины 1к вершине 5: путь 1 → 2 → 5 длины 18;
- от вершины 1к вершине 6: путь 1 → 4 → 6 длины 27.

Все дуги графа, входящие в кратчайшие пути, изображены на рисунке 7.8.

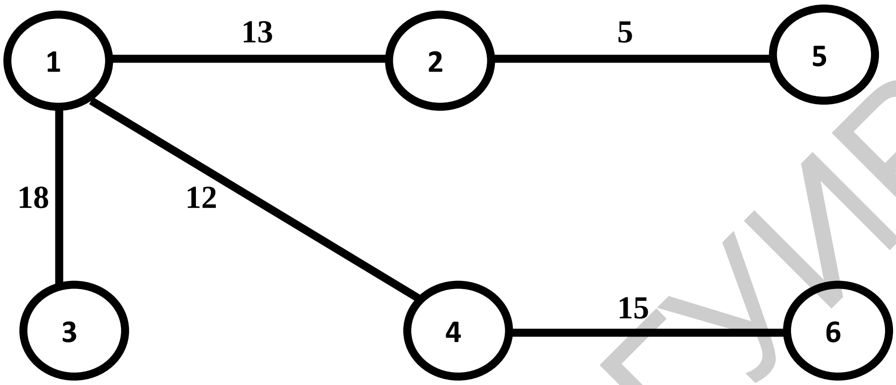


Рисунок 7.8 – Кратчайшие пути из вершины 1

Найдем теперь искомый кратчайший путь из вершины 1 во все остальные вершины с помощью **<u>алгоритма Форда – Беллмана</u>**.

Каждой вершине $\boldsymbol{i}$ присваивают метку $\boldsymbol{l(i)}$. На $\boldsymbol{m}$-м шаге значение $\boldsymbol{l_m(i)}$ означает **длину кратчайшего пути из 1 в $\boldsymbol{i}$**, содержащего не более $\boldsymbol{m}$ ребер.

<u>Начало</u>: Вначале $l_0(i) = 0$ при $i = 1$, и $+\infty$ в противном случае, т. к. путь, содержащий 0 ребер, существует только до вершины **1**.

Положим $l_0(1) = 0$, $l_0(2)=l_0(3) = l_0(4) = l_0(5) = l_0(6) = \infty$. Эти значения занесем в первую строку таблицы 7.3.

<u>Шаг алгоритма</u>: просматриваются все ребра графа, и производится *релаксация* вдоль **каждого** ребра (i, j) веса c_{ij}.

Если $l_{m-1}(i) + c_{ij} < l_{m-1}(j)$, то новое значение $l_m(j) = l_{m-1}(i) + c_{ij}$.

Шаг 1. Просматриваем все ребра графа и проводим релаксацию вдоль каждого ребра. Формула для релаксации на этом шаге имеет вид

$$l_1(i) = \min_{1\le j\le 6}\{l_0(j) + c_{ji}\},\ i = 1, \ldots, 6.$$

Получаем:

$$l_1(2) = \min\{l_0(1)+c_{21};\ l_0(2)+c_{22};\ l_0(3)+c_{23};\ l_0(4)+c_{24};\ l_0(5)+c_{25};\ l_0(6)+c_{26}\} =$$
$$= \min\{0+13;\ \infty+0;\ \infty+\infty;\ \infty+15;\ \infty+5;\ \infty+\infty\} = 13;$$
$$l_1(3) = \min\{l_0(1)+c_{31};\ l_0(2)+c_{32};\ l_0(3)+c_{33};\ l_0(4)+c_{34};\ l_0(5)+c_{35};\ l_0(6)+c_{36}\} =$$
$$= \min\{0+18;\ \infty+\infty;\ \infty+0;\ \infty+10;\ \infty+\infty;\ \infty+\infty\} = 18;$$
$$l_1(4) = \min\{l_0(1)+c_{41};\ l_0(2)+c_{42};\ l_0(3)+c_{43};\ l_0(4)+c_{44};\ l_0(5)+c_{45};\ l_0(6)+c_{46}\} =$$
$$= \min\{0+12;\ \infty+15;\ \infty+10;\ \infty+0;\ \infty+10;\ \infty+15\} = 12;$$

$l_1(6) = \min\{l_0(1)+c_{61};\ l_0(2)+c_{62};\ l_0(3)+c_{63};\ l_0(4)+c_{64};\ l_0(5)+c_{65};\ l_0(6)+c_{66}\} =$
$= \min\{0+\infty;\ \infty+\infty;\ \infty+\infty;\ \infty+15;\ \infty+20;\ \infty+0\} = \infty.$

Полученные значения $l_1(i)$ занесем во вторую строку таблицы 7.3. Убеждаемся, что вторая строка, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $l_1(i)$,которые равны длине минимального пути из первой вершины в i-ю, содержащего не более одной дуги.

Шаг 2. Формула для релаксации на этом шаге имеет вид

$$l_2(i) = \min_{1\le j\le 6}\{l_1(j)+c_{ji}\},\ i = 1,\ \ldots,\ 6.$$

Получаем:

$l_2(2) = \min\{l_1(1)+c_{21};\ l_1(2)+c_{22};\ l_1(3)+c_{23};\ l_1(4)+c_{24};\ l_1(5)+c_{25};\ l_1(6)+c_{26}\} =$
$= \min\{0+13;\ 13+0;\ 18+\infty;\ 12+15;\ \infty+5;\ \infty+\infty\} = 13;$

$l_2(3) = \min\{l_1(1)+c_{31};\ l_1(2)+c_{32};\ l_1(3)+c_{33};\ l_1(4)+c_{34};\ l_1(5)+c_{35};\ l_1(6)+c_{36}\} =$
$= \min\{0+18;\ 13+\infty;\ 18+0;\ 12+10;\ \infty+\infty;\ \infty+\infty\} = 18;$

$l_2(4) = \min\{l_1(1)+c_{41};\ l_1(2)+c_{42};\ l_1(3)+c_{43};\ l_1(4)+c_{44};\ l_1(5)+c_{45};\ l_1(6)+c_{46}\} =$
$= \min\{0+12;\ 13+15;\ 18+10;\ 12+0;\ \infty+10;\ \infty+15\} = 12;$

$l_2(5) = \min\{l_1(1)+c_{51};\ l_1(2)+c_{52};\ l_1(3)+c_{53};\ l_1(4)+c_{54};\ l_1(5)+c_{55};\ l_1(6)+c_{56}\} =$
$= \min\{0+\infty;\ 13+5;\ 18+\infty;\ 12+10;\ \infty+0;\ \infty+20\} = 18;$

$l_2(6) = \min\{l_1(1)+c_{61};\ l_1(2)+c_{62};\ l_1(3)+c_{63};\ l_1(4)+c_{64};\ l_1(5)+c_{65};\ l_1(6)+c_{66}\} =$
$= \min\{0+\infty;\ 13+\infty;\ 18+\infty;\ 12+15;\ \infty+20;\ \infty+0\} = 27.$

Полученные значения $l_2(i)$ занесем в третью строку таблицы 7.3. Величины $l_2(i)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ю, содержащего не более двух дуг.

Шаг 3. Формула для релаксации на этом шаге имеет вид

$$l_3(i) = \min_{1\le j\le 6}\{l_2(j)+c_{ji}\},\ i = 1,\ \ldots,\ 6.$$

Получаем:

$l_3(2) = \min\{l_2(1)+c_{21};\ l_2(2)+c_{22};\ l_2(3)+c_{23};\ l_2(4)+c_{24};\ l_2(5)+c_{25};\ l_2(6)+c_{26}\} =$
$= \min\{0+13;\ 13+0;\ 18+\infty;\ 12+15;\ 18+5;\ 27+\infty\} = 13;$

$l_3(3) = \min\{l_2(1)+c_{31};\ l_2(2)+c_{32};\ l_2(3)+c_{33};\ l_2(4)+c_{34};\ l_2(5)+c_{35};\ l_2(6)+c_{36}\} =$
$= \min\{0+18;\ 13+\infty;\ 18+0;\ 12+10;\ 18+\infty;\ 27+\infty\} = 18;$

$l_3(4) = \min\{l_2(1)+c_{41};\ l_2(2)+c_{42};\ l_2(3)+c_{43};\ l_2(4)+c_{44};\ l_2(5)+c_{45};\ l_2(6)+c_{46}\} =$
$= \min\{0+12;\ 13+15;\ 18+10;\ 12+0;\ 18+10;\ 27+15\} = 12;$

$l_3(5) = \min\{l_2(1)+c_{51};\ l_2(2)+c_{52};\ l_2(3)+c_{53};\ l_2(4)+c_{54};\ l_2(5)+c_{55};\ l_2(6)+c_{56}\} =$
$= \min\{0+\infty;\ 13+5;\ 18+\infty;\ 12+10;\ 18+0;\ 27+20\} = 18;$

$$l_3(6) = \min\{l_2(1)+c_{61};\ l_2(2)+c_{62};\ l_2(3)+c_{63};\ l_2(4)+c_{64};\ l_2(5)+c_{65};\ l_2(6)+c_{66}\} =$$
$$= \min\{0+\infty;\ 13+\infty;\ 18+\infty;\ 12+15;\ 18+20;\ 27+0\} = 27.$$

Полученные значения $l_3(i)$ занесем в четвертую строку таблицы 7.3. Величины $l_3(i)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ю, содержащего не более трех дуг.

Шаг 4. Формула для релаксации на этом шаге имеет вид

$$l_4(i) = \min_{1\le j\le 6}\{l_3(j)+c_{ji}\},\ i = 1,\ \ldots,\ 6.$$

Однако, поскольку на предыдущем шаге изменения в оценках длин путей не произошли, можно не продолжать выполнение алгоритма.

Таблица 7.3 – Результаты работы алгоритма Форда – Беллмана

Шаг	**Вершины**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	13	18	12	∞	∞
2	0	13	18	12	18	27
3	0	13	18	12	18	27
4						

В общем случае алгоритм закончит работу на ***пятой итерации***.

Алгоритм завершает работу через u – 1 шаг, т. к. любой кратчайший путь не может иметь более u – 1 ребер. Для недостижимых вершин расстояние остается равным ∞.

Траектория пути определяется следующим образом.

Осуществляем обратный просмотр таблицы 7.3 от конечной вершины к начальной. Просматриваем столбец, соответствующий вершине, снизу вверх и фиксируем первое появление минимальной величины. Вершина, определяющая эту строку, указывает шаг, который следует рассмотреть.

Так, для вершин 5 и 6 минимальные величины появились на шаге 2.

Тогда для вершины 5 нужно проверить, для какого значения i выполняется равенство

$$l_1(i)+c_{i5} = l_2(5), \quad i \in G^{-1}(5) = \{2,\ 4,\ 6\}.$$

Здесь $G^{-1}(i)$ – прообраз вершины i в графе G.

Подставив значения переменной i, получим:

$$l_1(2)+c_{25} = 13+5 = l_2(5) = 18;$$
$$l_1(4)+c_{45} = 12+10 = 22 \ne l_2(5) = 18;$$
$$l_1(6)+c_{65} = \infty+20 = \infty \ne l_2(5) = 18.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине 5, является вершина 2.

Для вершины 6 аналогично нужно проверить, для какого значения i выполняется равенство

$$l_1(i) + c_{i6} = l_2(6), \quad i \in G^{-1}(6) = \{4,\ 6\}.$$

Подставив значения переменной i, получим:

$$l_1(4) + c_{46} = 12 + 15 = l_2(6) = 27;$$

$$l_1(5) + c_{56} = \infty + 0 = \infty \neq l_2(6) = 27.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине 6, является вершина 4.

Для вершин 2, 3 и 4 минимальные величины появились на шаге 1. Следовательно, нужно проверить следующие равенства:

- для вершины 2 – $l_0(i) + c_{i2} = l_1(2), \quad i \in G^{-1}(2) = \{1,\ 4,\ 5\}$;
- для вершины 3 – $l_0(i) + c_{i3} = l_1(3), \quad i \in G^{-1}(3) = \{1\ ,4\}$;
- для вершины 4 – $l_0(i) + c_{i4} = l_1(4), \quad i \in G^{-1}(6) = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$.

Подставив, получим, что для всех этих вершин предшествующей вершиной является вершина 1.

Таким образом, получаем следующие траектории пути:

- от вершины 1 к вершине 2: путь 1 → 2 длины 13.
- от вершины 1к вершине 3: путь 1 → 3 длины 18.
- от вершины 1к вершине 4: путь 1 → 4 длины 12.
- от вершины 1к вершине 5: путь 1 → 2 → 5 длины 18.
- от вершины 1к вершине 6: путь 1 → 4 → 6 длины 27.

Задача 7.3. Кратчайшие пути между всеми парами вершин в графе

Авиакомпания разрабатывает маршруты полетов между различными городами. Нужно предложить клиентам наиболее краткие по времени маршруты. Используя алгоритм Флойда, найти искомые маршруты для карты, заданной графом на рисунке 7.9. Дуги графа – направления полетов между городами (веса – разница во времени между вылетом и прилетом); вершины графа – города.

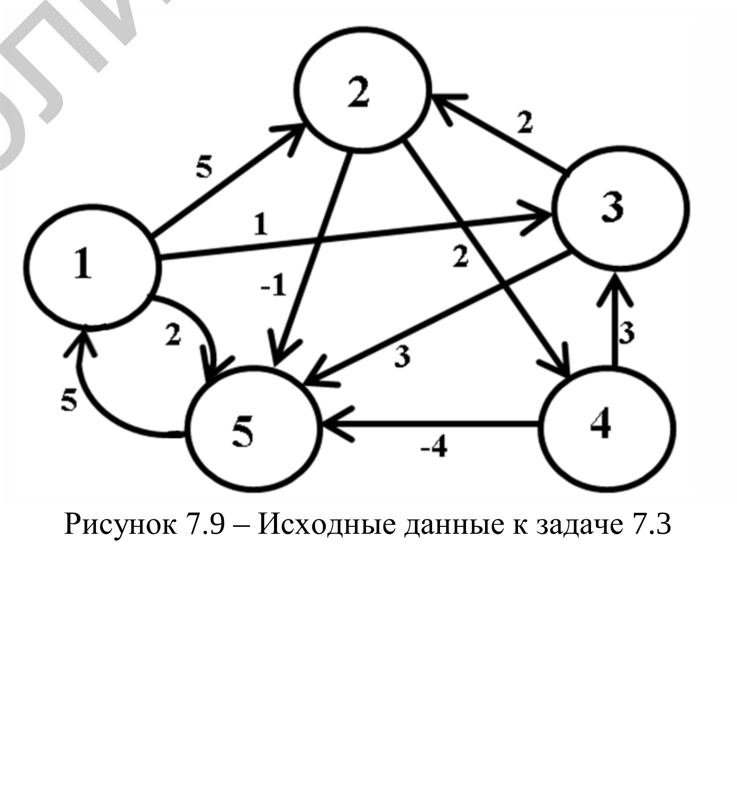


Рисунок 7.9 – Исходные данные к задаче 7.3

Решение

Найдем для данного ориентированного графа кратчайшие пути между любыми двумя вершинами по алгоритму Флойда.

Заданный граф содержит 5 вершин, следовательно, алгоритм Флойда найдет кратчайшие расстояния между всеми парами вершин за 5 шагов.

На каждом шаге m строятся две матрицы – D_m (матрица расстояний) и S_m (матрица последовательности вершин)

Элементы матрицы D_m – $d_{ij}^{(m)}$ – длины кратчайшего пути из вершины x_i в вершину x_j с промежуточными вершинами во множестве $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

При определении кратчайшего пути на шаге m выбирается минимум из расстояния между смежными вершинами x_i и x_j, рассчитанного на шаге $m - 1$, и суммарного расстояния при проходе через дополнительную вершину x_m:

$$d_{ij}^{(m)} = \min\left(d_{ij}^{(m-1)};\ d_{i,m}^{(m-1)} + d_{m,j}^{(m-1)}\right), \qquad i,\ j,\ m = 1, \ldots, 5.$$

Последняя матрица содержит искомые кратчайшие пути между всеми парами вершин.

Шаг 0. Начальные матрицы D_0 и S_0 строятся непосредственно по заданному графу. Поскольку дан ***ориентированный*** граф, то матрица D_0 является несимметричной квадратной матрицей размером $u \times u$. Элемент (i, j) равен расстоянию d_{ij} от вершины i к вершине j, которое имеет конечное значение, равное длине дуги, если существует дуга (i, j), и равен бесконечности в противном случае: $D_0 = (c_{ij})$. В матрице S_0 для элемента s_{ij} указано значение i.

D_0

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	5	1	∞	2
2	∞	–	∞	2	–1
3	∞	2	–	∞	3
4	∞	∞	3	–	–4
5	5	∞	∞	∞	–

S_0

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	1	1	1	1
2	2	–	2	2	2
3	3	3	–	3	3
4	4	4	4	–	4
5	5	5	5	5	–

Шаг 1. В матрице D_0 ведущими являются первая строка и первый столбец ($m = 1$). Пересчет элементов матрицы будем производить по формуле

$$d_{ij}^{(1)} = \min\left(d_{ij}^{(0)};\ d_{i1}^{(0)} + d_{1j}^{(0)}\right),\ i,\ j = 1, \ldots, 5.$$

Элементы первой строки и первого столбца останутся без изменений.

$$d_{23}^{(1)} = \min(\infty;\ \infty + 1) = \infty; \qquad d_{24}^{(1)} = \min(2;\ \infty + \infty) = 2;$$

$$d_{25}^{(1)} = \min(-1;\ \infty + 2) = -1; \qquad d_{32}^{(1)} = \min(2;\ \infty + 5) = 2;$$

$$d_{34}^{(1)} = \min(\infty;\ \infty + \infty) = \infty; \qquad d_{35}^{(1)} = \min(3;\ \infty + 2) = 3;$$

$$d_{42}^{(1)} = \min(\infty;\ \infty + 5) = \infty; \qquad d_{43}^{(1)} = \min(3;\ \infty + 1) = 3;$$

$$d_{45}^{(1)} = \min(-4;\ \infty + 2) = -4; \qquad d_{52}^{(1)} = \min(\infty;\ 5 + 5) = 10;$$

$$d_{53}^{(1)} = \min(\infty;\ 5 + 1) = 6; \qquad d_{54}^{(1)} = \min(\infty;\ 5 + \infty) = \infty.$$

По сравнению с матрицей D_0 в матрице D_1 изменились значения элементов d_{52} и d_{53}, следовательно, в матрице S_1 получаем $s_{52} = s_{12} = 1$ и $s_{53} = s_{13} = 1$.

Матрицы D_1 и S_1 принимают следующий вид:

D_1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	5	1	∞	2
2	∞	–	∞	2	–1
3	∞	2	–	∞	3
4	∞	∞	3	–	–4
5	5	10	6	∞	–

S_1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	1	1	1	1
2	2	–	2	2	2
3	3	3	–	3	3
4	4	4	4	–	4
5	5	1	1	5	–

<u>Шаг 2</u>. Полагаем $m = 2$; в матрице D_1 ведущие – вторая строка и второй столбец. Пересчет элементов матрицы будем производить по формуле

$$d_{ij}^{(2)} = \min\left(d_{ij}^{(1)};\ d_{i2}^{(1)} + d_{2j}^{(1)}\right),\ i,\ j = 1,\ \dots,\ 5.$$

Элементы второй строки и второго столбца останутся без изменений.

$d_{13}^{(2)} = \min(1;\ \infty + 5) = 1;$ $d_{14}^{(2)} = \min(\infty;\ 5 + 2) = 7;$

$d_{15}^{(2)} = \min(2;\ 5 + (-1)) = 2;$ $d_{31}^{(2)} = \min(\infty;\ \infty + 2) = \infty;$

$d_{34}^{(2)} = \min(\infty;\ 2 + 2) = 4;$ $d_{35}^{(2)} = \min(3;\ 2 + (-1)) = 1;$

$d_{41}^{(2)} = \min(\infty;\ \infty + \infty) = \infty;$ $d_{43}^{(2)} = \min(3;\ \infty + \infty) = 3;$

$d_{45}^{(2)} = \min(-4;\ \infty + (-1)) = -4;$ $d_{51}^{(2)} = \min(5;\ \infty + 10) = 5;$

$d_{53}^{(2)} = \min(6;\ \infty + 10) = 6;$ $d_{54}^{(2)} = \min(\infty;\ 10 + 2) = 12.$

По сравнению с матрицей D_1 в матрице D_2 изменились значения элементов d_{14}, d_{34}, d_{54}, d_{35}. В результате получаем следующие матрицы D_2 и S_2:

D_2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	5	1	7	2
2	∞	–	∞	2	–1
3	∞	2	–	4	1
4	∞	∞	3	–	–4
5	5	10	6	12	–

S_2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	1	1	2	1
2	2	–	2	2	2
3	3	3	–	2	2
4	4	4	4	–	4
5	5	1	1	2	–

<u>Шаг 3</u>. Полагаем $m = 3$; в матрице D_2 ведущие – третья строка и третий столбец. Пересчет элементов матрицы будем производить по формуле

$$d_{ij}^{(3)} = \min\left(d_{ij}^{(2)};\ d_{i3}^{(2)} + d_{3j}^{(2)}\right),\ i,\ j = 1,\ \dots,\ 5.$$

Элементы третьей строки и третьего столбца останутся без изменений.

$d_{12}^{(3)} = \min(5;\ 1 + 2) = 3;$ $d_{14}^{(3)} = \min(7;\ 1 + 4) = 5;$

$d_{15}^{(3)} = \min(2;\ 1 + 1) = 2;$ $d_{21}^{(3)} = \min(\infty;\ \infty + \infty) = \infty;$

$$d_{24}^{(3)} = \min\left(2;\ \infty + 4\right) = 2; \qquad d_{25}^{(3)} = \min\left(-1;\ \infty + 1\right) = -1;$$
$$d_{41}^{(3)} = \min\left(\infty;\ \infty + 3\right) = \infty; \qquad d_{42}^{(3)} = \min\left(\infty;\ 2 + 3\right) = 5;$$
$$d_{45}^{(3)} = \min\left(-4;\ 3 + 1\right) = -4; \qquad d_{51}^{(3)} = \min\left(5;\ \infty + 6\right) = 5;$$
$$d_{52}^{(3)} = \min\left(10;\ 2 + 6\right) = 8; \qquad d_{54}^{(3)} = \min\left(12;\ 6 + 4\right) = 10.$$

По сравнению с матрицей D_2 в матрице D_3 изменились значения элементов d_{12}, d_{14}, d_{42}, d_{54}, d_{52}. В результате получаем следующие матрицы D_3 и S_3:

***D*₃**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	3	1	5	2
2	∞	–	∞	2	–1
3	∞	2	–	4	1
4	∞	5	3	–	–4
5	5	8	6	10	–

***S*₃**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	3	1	2	1
2	2	–	2	2	2
3	3	3	–	2	2
4	4	3	4	–	4
5	5	3	1	2	–

***Шаг 4*.** Полагаем m = 4, ведущие – четвертая строка и четвертый столбец. Пересчет элементов матрицы будем производить по формуле

$$d_{ij}^{(4)} = \min\left(d_{ij}^{(3)};\ d_{i4}^{(3)} + d_{4j}^{(3)}\right),\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ 5.$$

Элементы четвертых строки и столбца останутся без изменений.

$$d_{12}^{(4)} = \min\left(3;\ 5 + 5\right) = 3; \qquad d_{13}^{(4)} = \min\left(1;\ 3 + 5\right) = 1;$$
$$d_{15}^{(4)} = \min\left(2;\ 5 + (-4)\right) = 1; \qquad d_{21}^{(4)} = \min\left(\infty;\ \infty + 2\right) = \infty;$$
$$d_{23}^{(4)} = \min\left(\infty;\ 3 + 2\right) = 5; \qquad d_{25}^{(4)} = \min\left(-1;\ 2 + (-4)\right) = -2;$$
$$d_{31}^{(4)} = \min\left(\infty;\ \infty + 4\right) = \infty; \qquad d_{32}^{(4)} = \min\left(2;\ 5 + 4\right) = 2;$$
$$d_{35}^{(4)} = \min\left(1;\ 4 + (-4)\right) = 0; \qquad d_{51}^{(4)} = \min\left(5;\ \infty + 10\right) = 5;$$
$$d_{52}^{(4)} = \min\left(8;\ 5 + 10\right) = 8; \qquad d_{53}^{(4)} = \min\left(6;\ 3 + 10\right) = 6.$$

По сравнению с матрицей D_3 в матрице D_4 изменились значения элементов d_{15}, d_{23}, d_{25}, d_{35}. Получаем новые матрицы D_4 и S_4:

***D*₄**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	3	1	5	1
2	∞	–	5	2	–2
3	∞	2	–	4	0
4	∞	5	3	–	–4
5	5	8	6	10	–

***S*₄**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	3	1	2	4
2	2	–	4	2	4
3	3	3	–	2	4
4	4	3	4	–	4
5	5	3	1	2	–

***Шаг 5*.** Полагаем m = 5, ведущие – пятая строка и пятый столбец. Пересчет элементов матрицы будем производить по формуле

$$d_{ij}^{(5)} = \min\left(d_{ij}^{(4)};\ d_{i5}^{(4)} + d_{5j}^{(4)}\right),\ i,\ \ j = 1,\ ...,\ 5.$$

Элементы пятой строки и пятого столбца останутся без изменений.

$d_{12}^{(5)} = \min\left(3;\ 1+8\right) = 3;$ $\qquad d_{13}^{(5)} = \min\left(1;\ 1+6\right) = 1;$

$d_{14}^{(5)} = \min\left(5{,}1+10\right) = 5;$ $\qquad d_{21}^{(5)} = \min\left(\infty;\ 5+(-2)\right) = 3;$

$d_{23}^{(5)} = \min\left(5;\ 6+(-2)\right) = 4;$ $\qquad d_{24}^{(5)} = \min\left(2;\ 10+(-2)\right) = 2;$

$d_{31}^{(5)} = \min\left(\infty;\ 5+0\right) = 5;$ $\qquad d_{32}^{(5)} = \min\left(2;\ 8+0\right) = 2;$

$d_{34}^{(5)} = \min\left(4;\ 10+0\right) = 4;$ $\qquad d_{41}^{(5)} = \min\left(\infty;\ 5+(-4)\right) = 1;$

$d_{42}^{(5)} = \min\left(5;\ 8+(-4)\right) = 4;$ $\qquad d_{43}^{(5)} = \min\left(3;\ 6+(-4)\right) = 2.$

По сравнению с матрицей D_4 в матрице D_5 изменились значения элементов d_{21}, d_{23}, d_{31}, d_{41}, d_{42}, d_{43}. Получаем новые матрицы D_5 и S_5:

***D*₅**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	3	1	5	1
2	3	–	4	2	–2
3	5	2	–	4	0
4	1	4	2	–	–4
5	5	8	6	10	–

***S*₅**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	–	3	1	2	4
2	5	–	1	2	4
3	5	3	–	2	4
4	5	3	1	–	4
5	5	3	1	2	–

Конечные матрицы D_5 и S_5 содержат всю информацию, необходимую для определения длин кратчайших путей и самих кратчайших путей между любыми двумя узлами сети.

Покажем составление кратчайшего пути на примере пути из вершины 5 в вершину 4. В матрице S_5 элемент $s_{54} = 2 \neq 5$. Далее элемент $s_{52} = 3 \neq 5$, затем элемент $s_{53} = 1 \neq 5$, и наконец, элемент $s_{51} = 5$. Следовательно, путь из вершины 5 в вершину 4 содержит три промежуточные точки (2, 3 и 1) и имеет вид $5 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4$.

Кратчайшие пути между всеми парами вершин и их длины приведены в таблице 7.4.

Таблица 7.4 – Длины кратчайших путей между вершинами

Пара вершин	**Путь**	**Длина**
1	**2**	**3**
1 и 2	$1 \to 3 \to 2$	3
1 и 3	$1 \to 3$	1
1 и 4	$1 \to 3 \to 2 \to 4$	5
1 и 5	$1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5$	1
2 и 1	$2 \to 4 \to 5 \to 1$	3
2 и 3	$2 \to 4 \to 5 \to 1 \to 3$	4
2 и 4	$2 \to 4$	2
2 и 5	$2 \to 4 \to 5$	–2

1	2	3
3 и 1	$3 \to 2 \to 4 \to 5 \to 1$	5
3 и 2	$3 \to 2$	2
3 и 4	$3 \to 2 \to 4$	4
3 и 5	$3 \to 2 \to 4 \to 5$	0
4 и 1	$4 \to 5 \to 1$	1
4 и 2	$4 \to 5 \to 1 \to 3 \to 2$	4
4 и 3	$4 \to 5 \to 1 \to 3$	2
4 и 5	$4 \to 5$	–4
5 и 1	$5 \to 1$	5
5 и 2	$5 \to 1 \to 3 \to 2$	8
5 и 3	$5 \to 1 \to 3$	6
5 и 4	$5 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4$	10

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.4. Минимальное остовное дерево

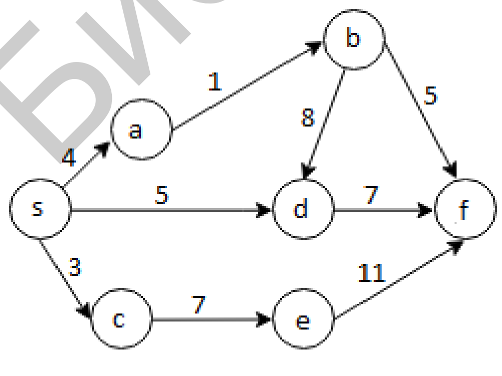
При проектировании сети дорог, соединяющих населенные пункты, требуется минимизировать общую длину дорог, используя алгоритмы Краскала и Прима. Для каждого варианта карта представлена графом в таблице 7.5 (считаем его неориентированным), веса ребер – расстояния между населенными пунктами.

Задача 7.5. Кратчайшие пути от заданной вершины в графе

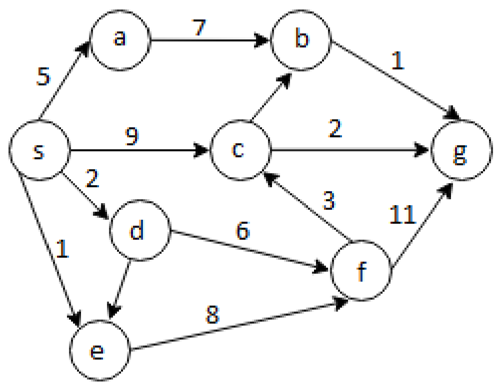
На графе в таблице 7.5 изображена сеть дорог между магазинами розничной торговой сети (числа над ребрами означают длины). В пункте *s* расположен оптовый склад. Требуется найти кратчайшие пути перевозки продукции со склада во все магазины сети, используя алгоритмы Дейкстры и Форда – Беллмана.

Таблица 7.5 – Исходные данные к задачам 7.4. и 7.5

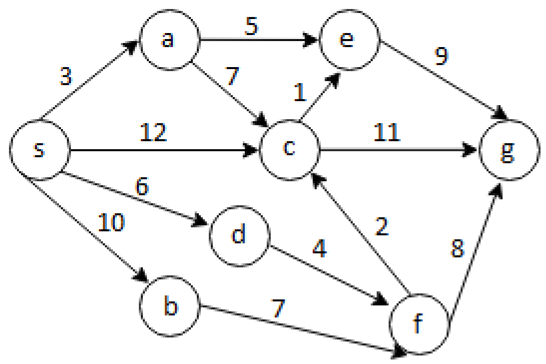
В1



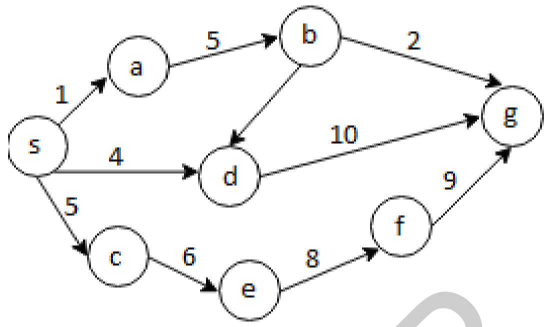
В2



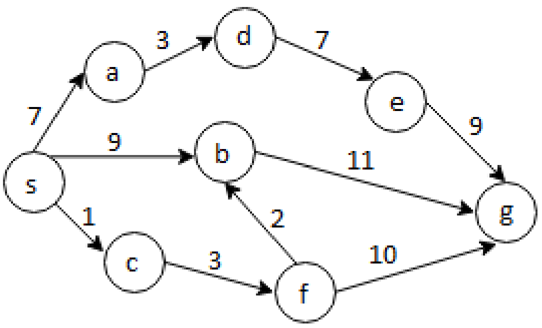
B3



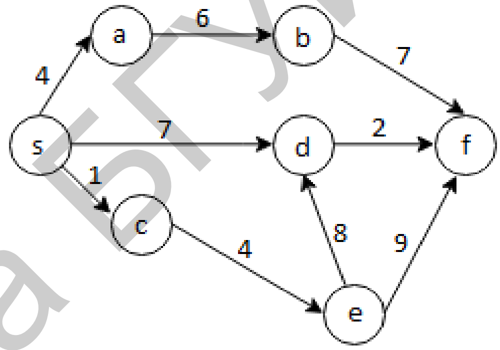
B4



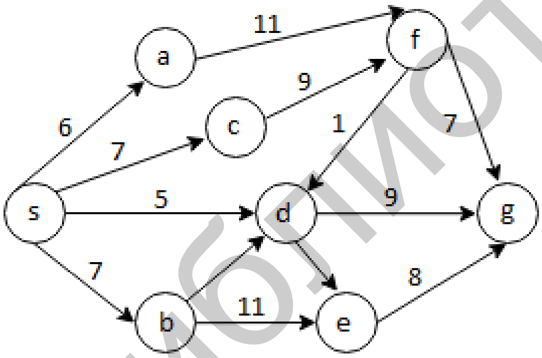
B5



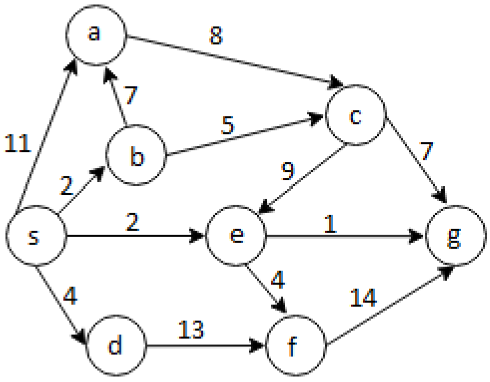
B6



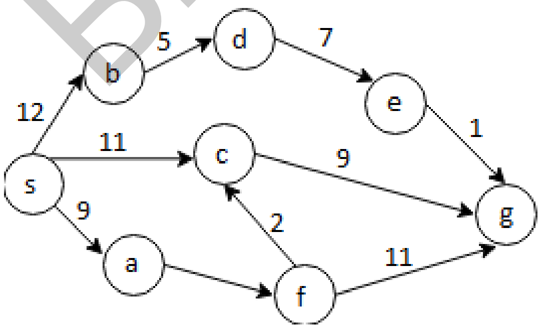
B7



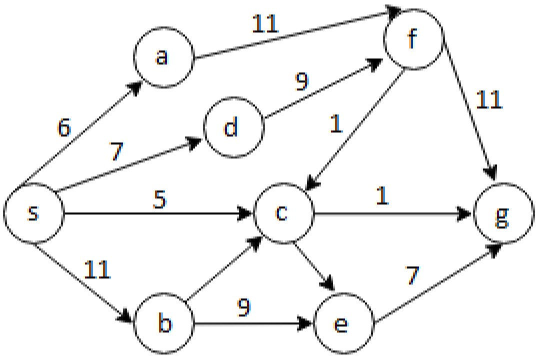
B8



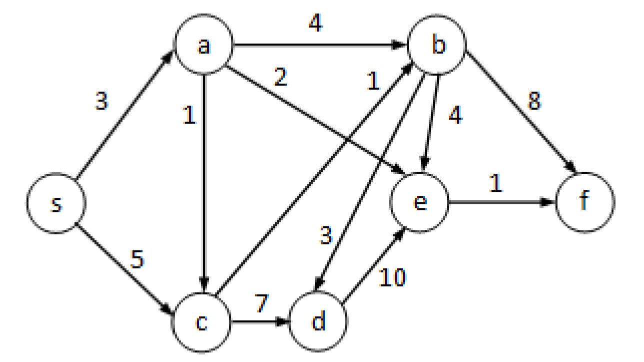
B9



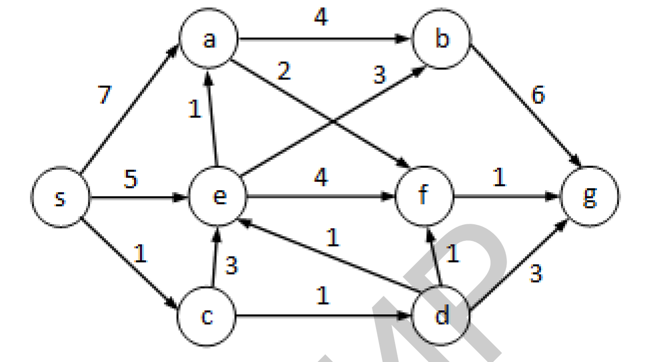
B10



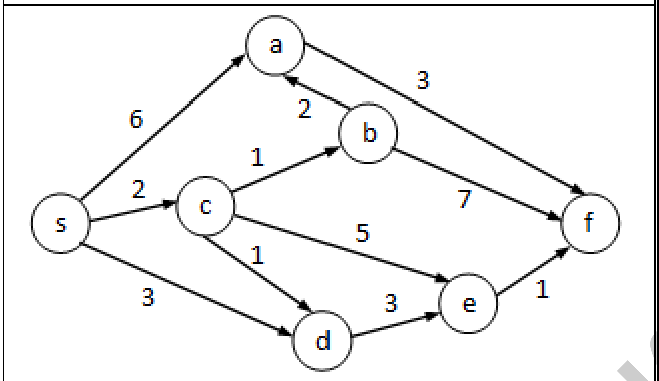
B11



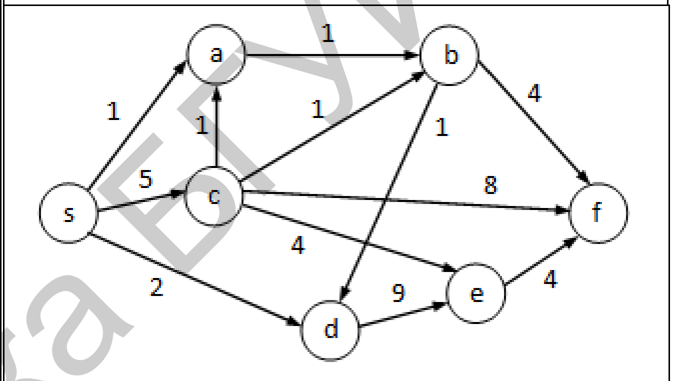
B12



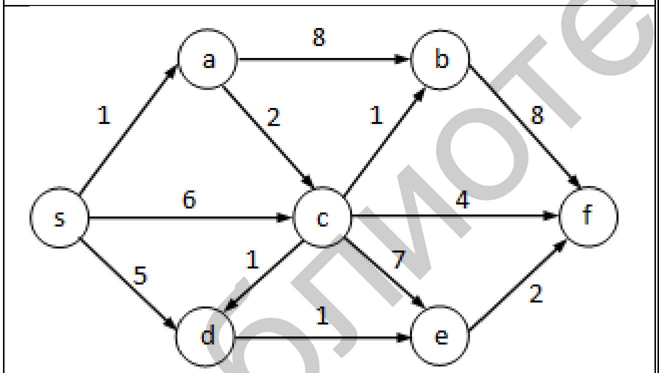
B13



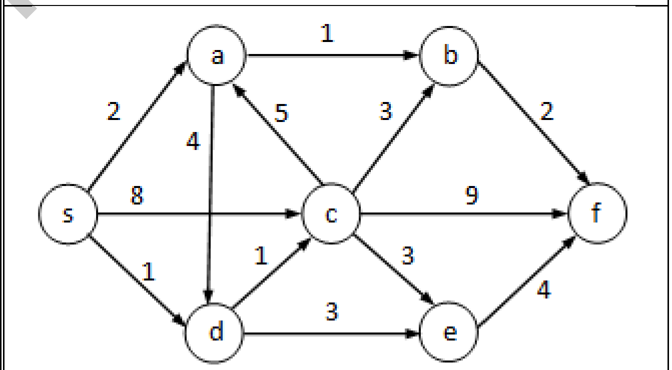
B14



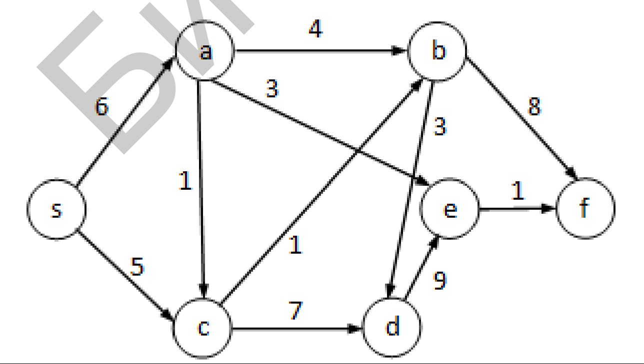
B15



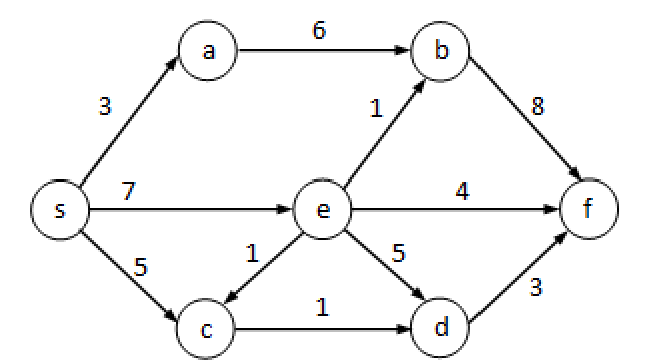
B16

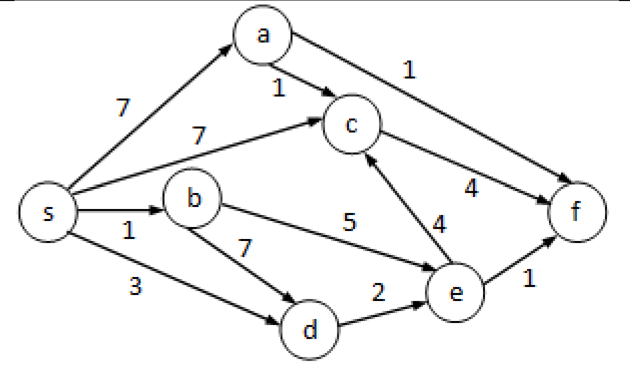
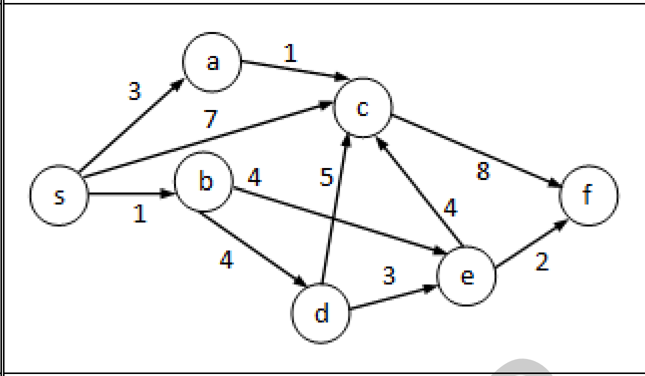
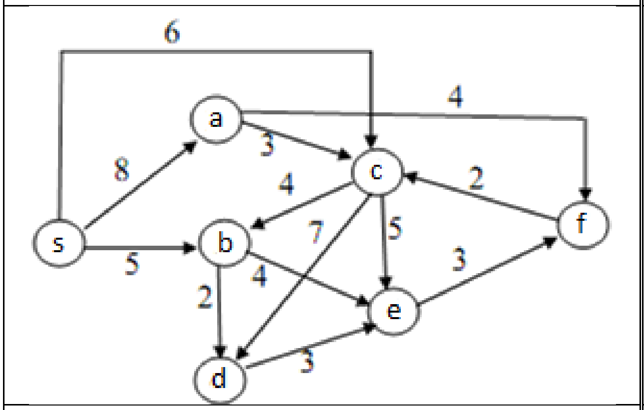
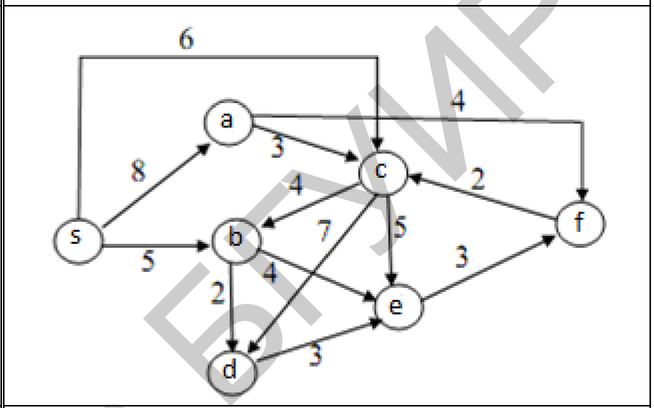
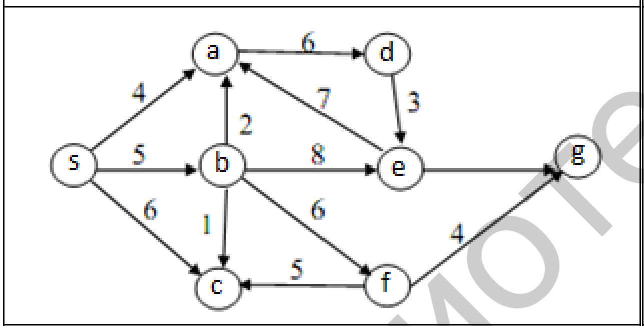
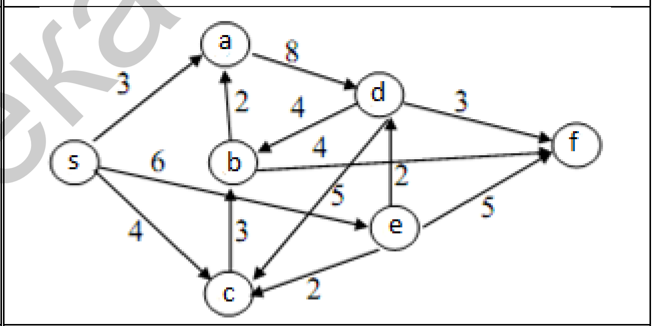
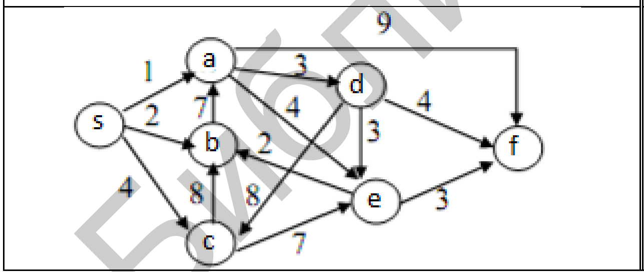
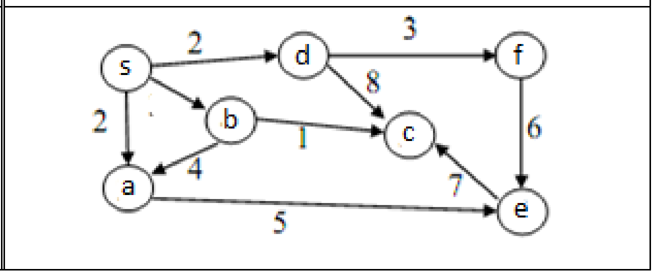


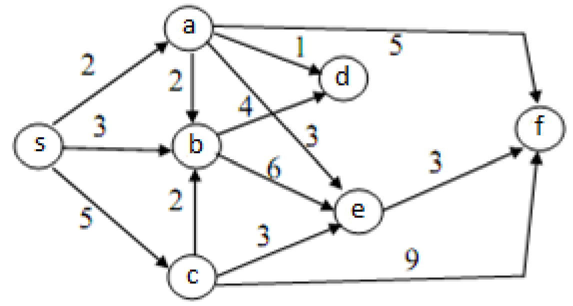
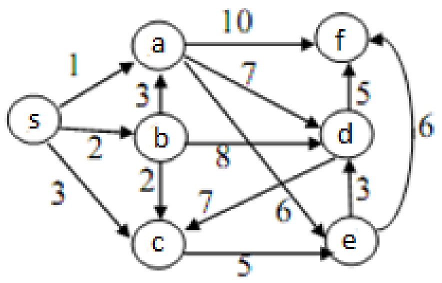
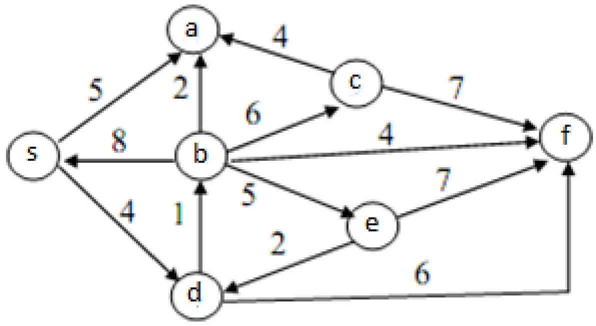
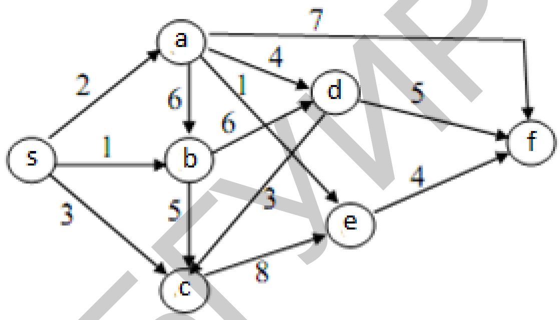
B17



B18



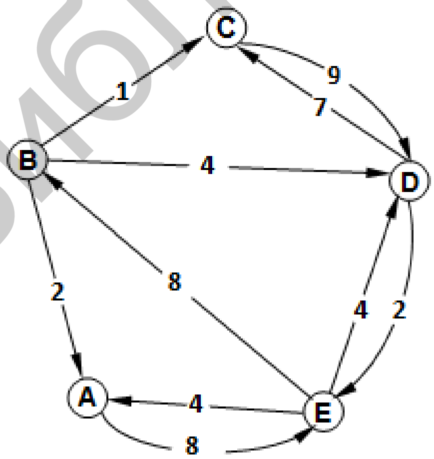
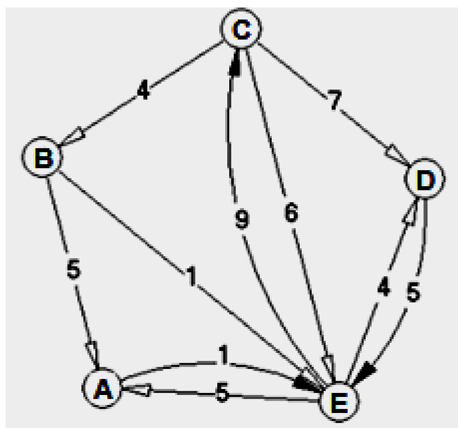
<table>
<tr><th>B19</th><th>B20</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th>B21</th><th>B22</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th>B23</th><th>B24</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th>B25</th><th>B26</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

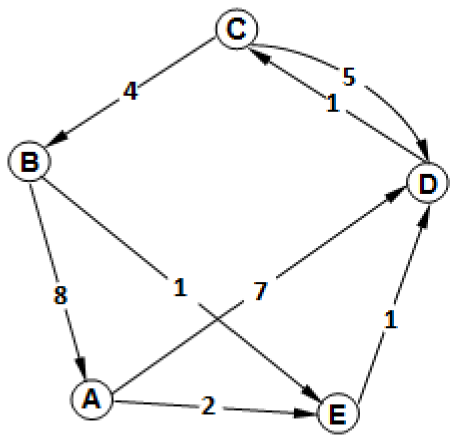
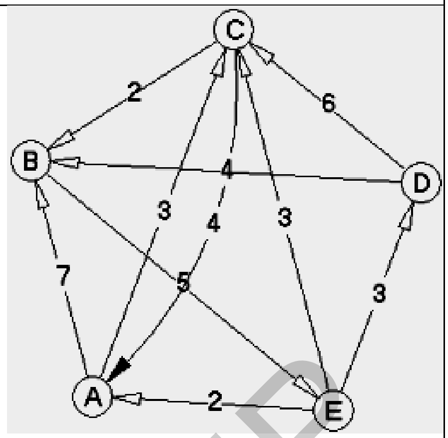
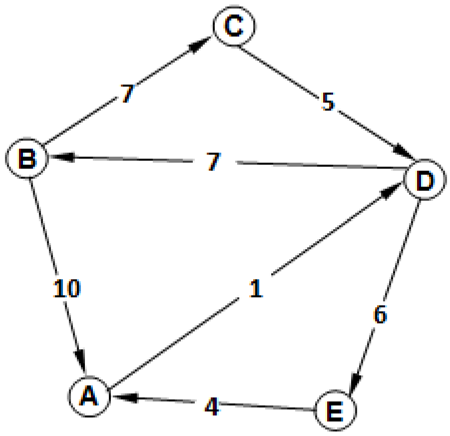
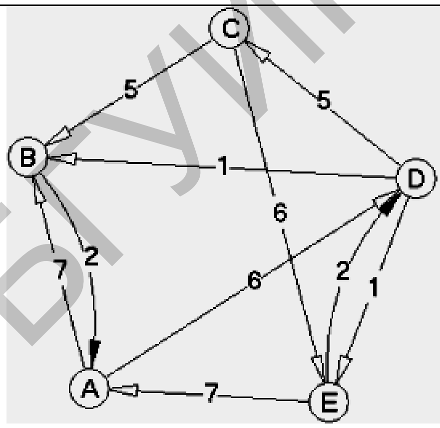
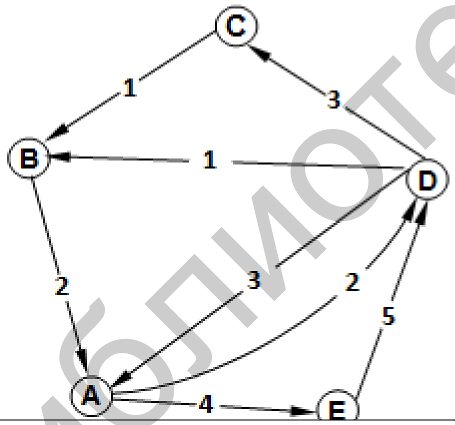
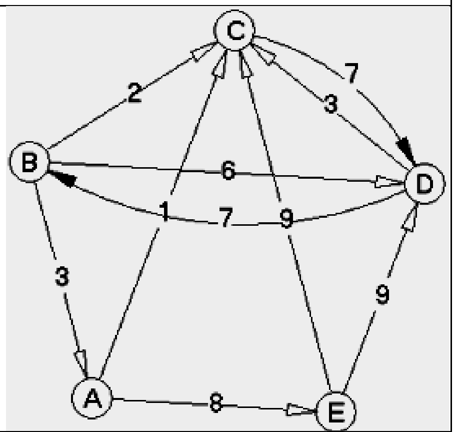
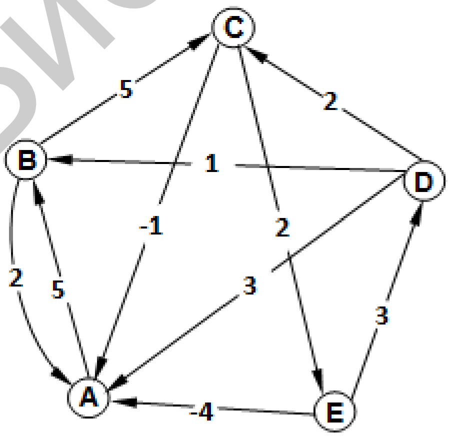
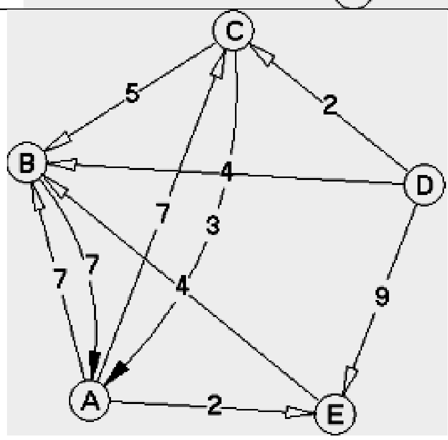
B27	B28
	
B29	**B30**
	

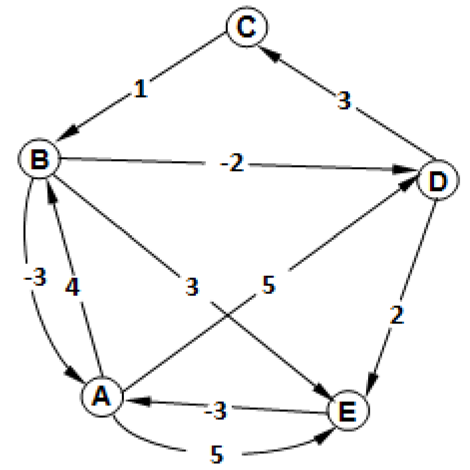
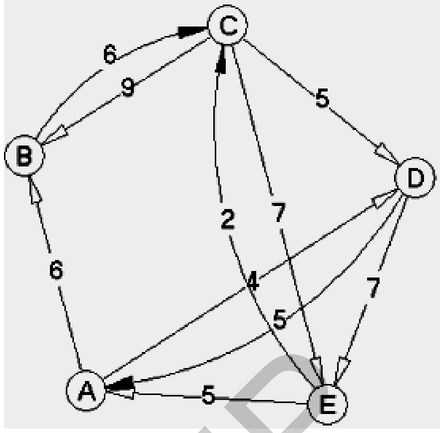
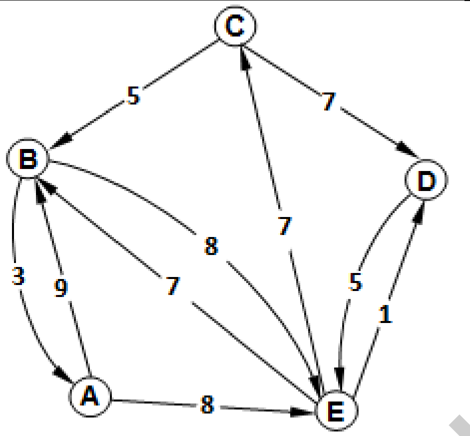
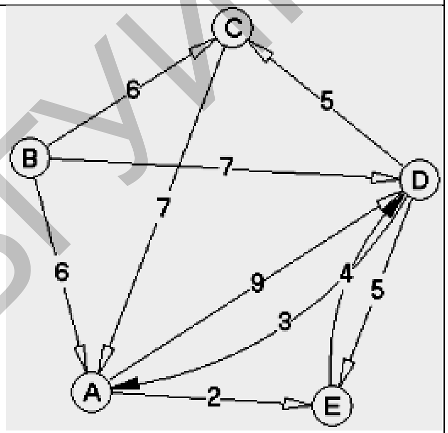
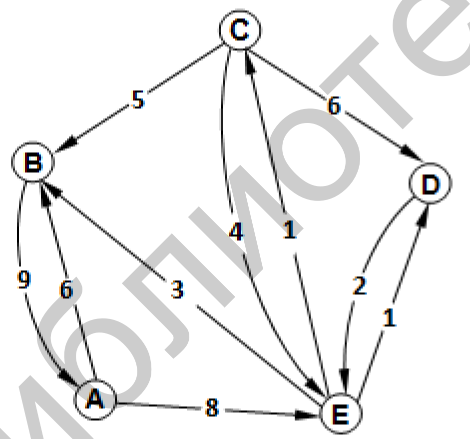
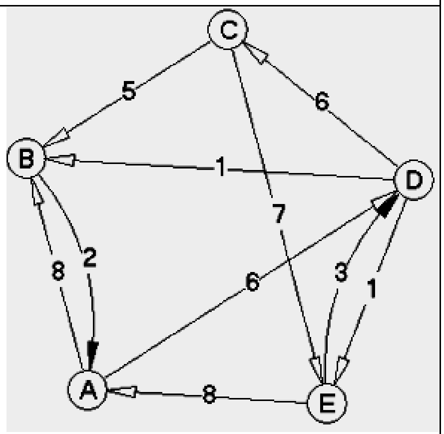
Задача 7.6. Кратчайшие пути между всеми парами вершин в графе

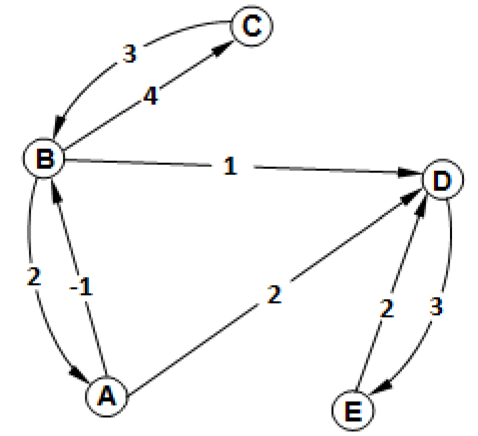
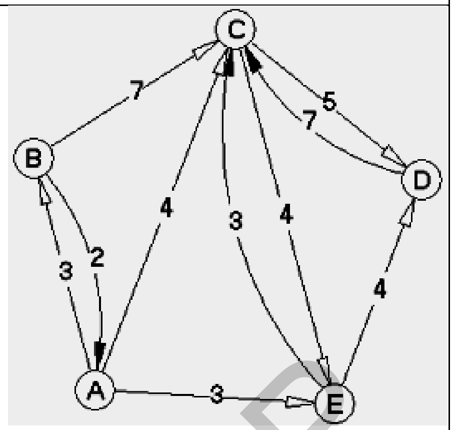
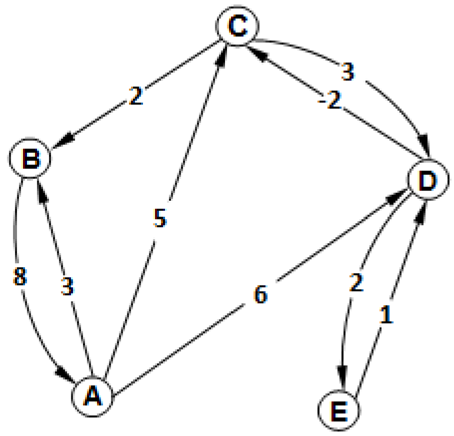
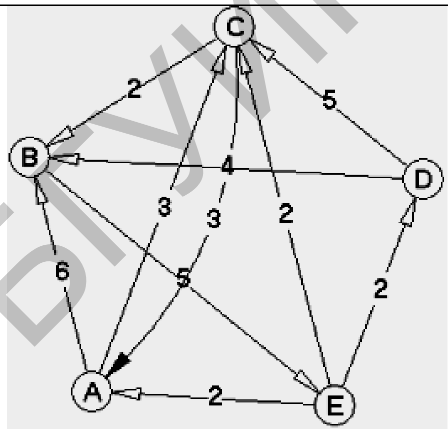
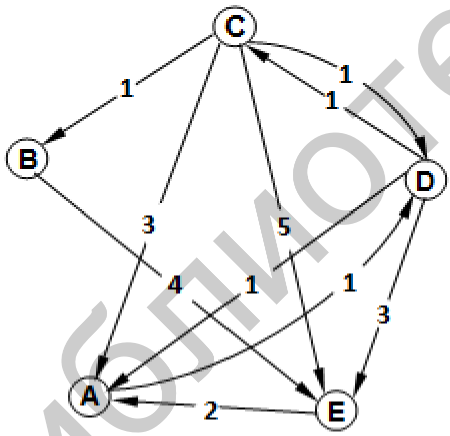
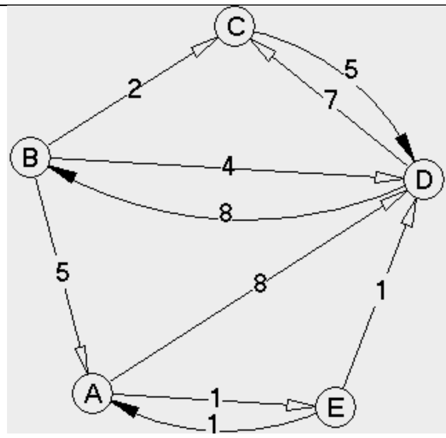
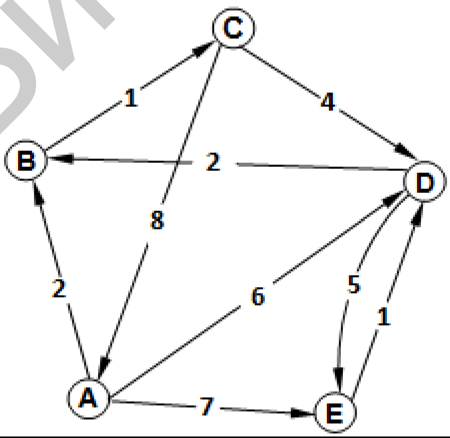
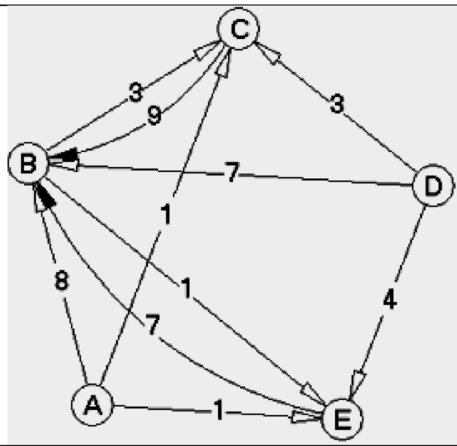
Авиакомпания разрабатывает маршруты полетов между различными городами. Нужно предложить клиентам наиболее краткие по времени маршруты. Используя алгоритм Флойда, найти искомые маршруты для карты, заданной графом в таблице 7.6 (по вариантам). Дуги графа – направления полетов между городами (веса – разница во времени между вылетом и прилетом); вершины графа – города.

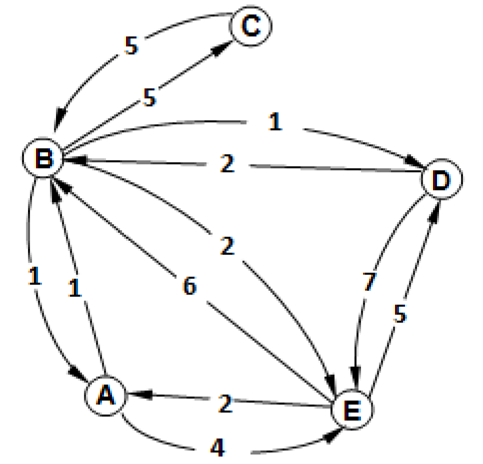
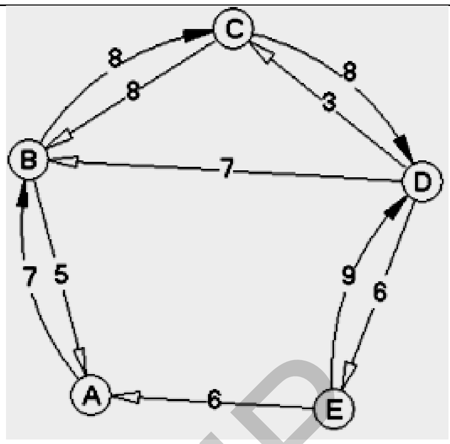
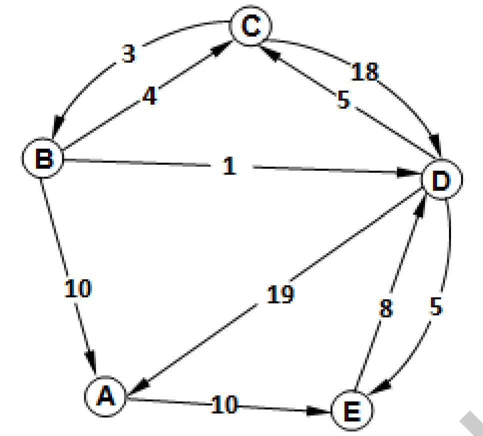
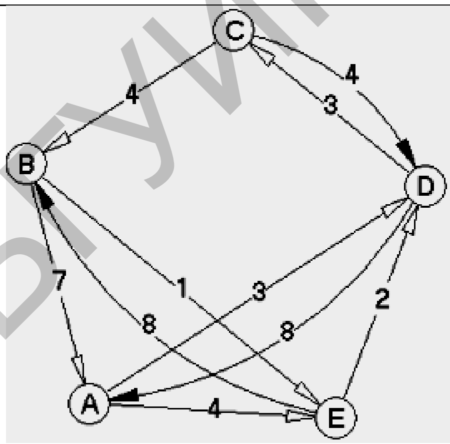
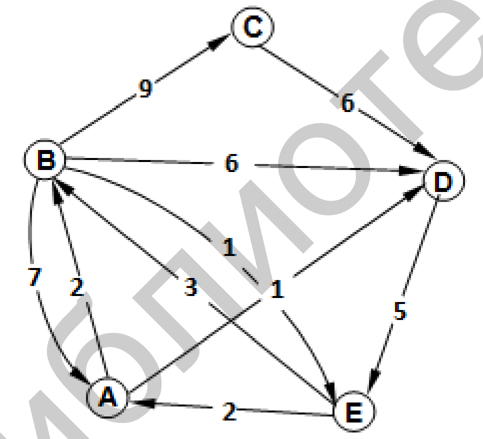
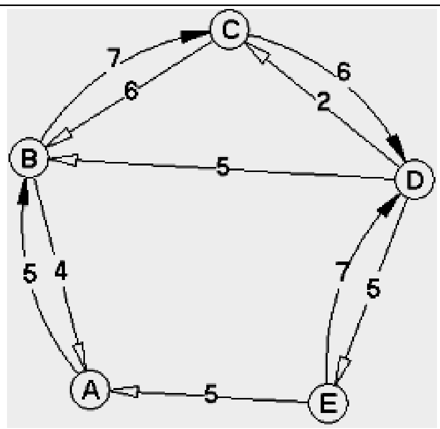
Таблица 7.6 – Исходные данные к задаче 7.6

Вариант	Граф	Вариант	Граф
1	2	3	4
B1		B2	

1	2	3	4
В3		**В4**	
В5		**В6**	
В7		**В8**	
В9		**В10**	

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>В11</td><td>
</td><td>В12</td><td>
</td></tr>
<tr><td>В13</td><td>
</td><td>В14</td><td>
</td></tr>
<tr><td>В15</td><td>
</td><td>В16</td><td>
</td></tr>
</table>

1	2	3	4
В17		**В18**	
В19		**В20**	
В21		**В22**	
В23		**В24**	

1	2	3	4
B25		**B26**	
B27		**B28**	
B29		**B30**	

Тема 8. Нахождение центра и медианы в графе

Литература: *основная* [19, с. 98–145], *дополнительная* [25, с. 59–65].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Центр графа, алгоритм поиска центра графа.
2. Абсолютный центр графа.
3. Метод Хакими нахождения абсолютных центров графа.
4. Кратные центры (p-центры) графа.
5. Абсолютные p-центры графа.
6. Постановка задачи нахождения абсолютного p-центра графа.
7. Медиана графа, алгоритм поиска медианы графа.
8. Кратные медианы (p-медианы) графа.
9. Абсолютные медианы графа.

Обозначения, используемые в разделе

Все обозначения предыдущего раздела.

w_i – вес вершины x_i, $i = 1, \ldots, u$

y – точка графа (расположенная в вершине либо на ребре)

$d(y_\alpha, y_\beta)$ – кратчайшее расстояние между двумя точками графа

$s(y)$ – кратчайшее расстояние от точки графа y до наиболее удаленной от нее вершины графа

Решение типовых задач

Задача 8.1. Центр, медиана, абсолютные центр и медиана графа

На рисунке 8.1 изображена сеть дорог между населенными пунктами на территории сельскохозяйственного предприятия. Числа над ребрами означают расстояния. Требуется найти места для размещения пожарной части и электроподстанции, считая, что они могут находиться: *а*) только в населенных пунктах; *б*) в любой точке на дороге.

Решение

Для решения задачи нужно найти центр, медиану, абсолютные центр и медиану заданного графа. Поскольку населенные пункты равнозначны, будем считать веса вершин равными 1.

Центром графа называется такая вершина, для которой максимальное расстояние между ней и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных.

Медианой графа называется такая вершина, для которой сумма расстояний от нее до всех остальных вершин является наименьшей из всех возможных.

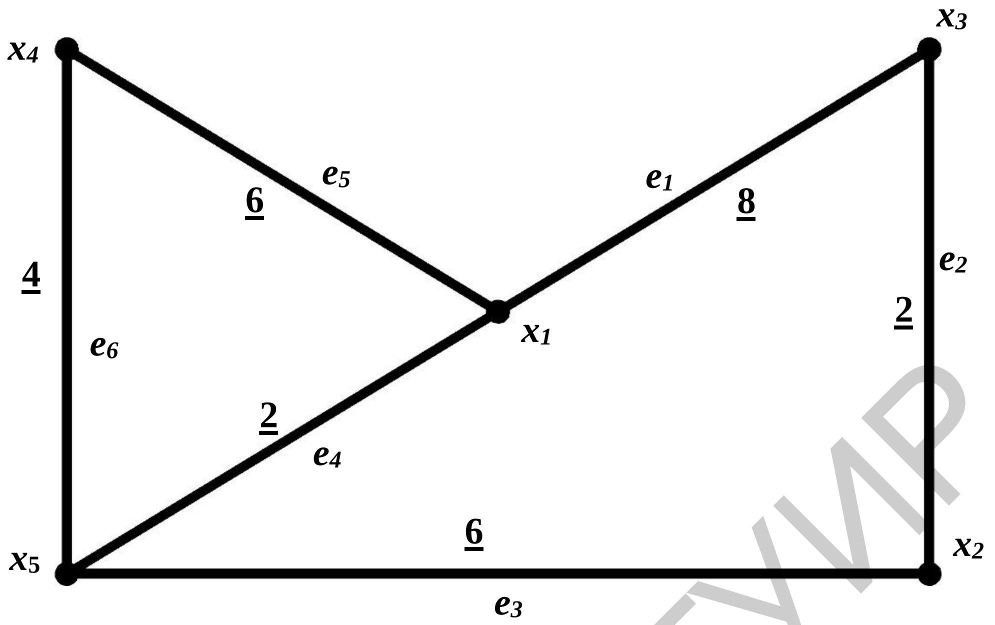


Рисунок 8.1 – Исходные данные к задаче 8.1

Будем искать центр и медиану данного графа в соответствии со следующим **алгоритмом:**

1. Запишем D_0 – матрицу, элементами которой являются c_{ij} – длины ребер между вершинами x_i и x_j.

2. Вычислим $D(G)$ – матрицу длин кратчайших расстояний (например, с помощью алгоритма Флойда). Если заданы веса вершин, умножим каждый столбец матрицы $D(G)$ на вес соответствующей вершины.

3. Найдем максимальный элемент в каждой строке (это будет расстояние до наиболее удаленной вершины для каждой вершины графа).

4. Из найденных величин выберем минимальную – **радиус** графа, а соответствующая ей вершина – **центр** графа.

5. Найдем сумму элементов в каждой строке.

6. Из найденных величин выберем минимальную – **передаточное число** графа, а соответствующая ей вершина – **медиана** графа.

Данный граф является неориентированным, поэтому матрица расстояний симметрична относительно главной диагонали.

1. Чтобы определить центр и медиану графа, найдем вначале матрицу $D(G)$ расстояний между вершинами графа, элементами d_{ij} которой будут расстояния между вершинами x_i и x_j. Для нахождения матрицы расстояний используем алгоритм Флойда (см. тему 7):

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \max & \sum \end{array} \\
D(G)= \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 8 & 8 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 2 & 10 & 6 \\ 8 & 2 & 0 & 12 & 8 \\ 6 & 10 & 12 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 8 & 24 \\ 10 & 26 \\ 12 & 30 \\ 12 & 32 \\ 8 & 20 \end{array}
\end{array}
$$

2. Веса вершин по условию равны 1, поэтому после умножения каждого столбца полученной матрицы расстояний на вес соответствующей вершины матрица расстояний не изменяется.

3. Для нахождения центра графа для каждой вершины графа G определим наибольшее удаление – найдем максимальные элементы по строкам (запишем их в первый дополнительный столбец). Среди полученных чисел найдем минимальное (это число 8), соответствующая этому числу строка и будет определять центр графа.

4. Нетрудно видеть, что заданный граф имеет два центра – вершины x_1 и x_5, радиус графа равен 8.

5. Для нахождения медианы графа для каждой вершины графа G определим суммарное удаление – найдем суммы элементов по строкам (запишем их во второй дополнительный столбец). Среди полученных чисел найдем минимальное (это число 20) и соответствующая этому числу строка и будет определять медиану графа.

6. Нетрудно видеть, что медианой данного графа является вершина x_5, передаточное число графа равно 20.

Абсолютный центр графа – это любая точка графа y, такая, что расстояние от нее до наиболее отдаленной вершины минимально.

Для нахождения абсолютных центров заданного графа воспользуемся методом Хакими.

Шаг 1. Для каждого ребра $e_k = (x_\alpha, x_\beta) \in E$ длины $c_{\alpha\beta}$ графа найдем точки (или точку) y_k^* на e_k с минимальным расстоянием до наиболее удаленной вершины. Для точки y_k имеем

$$
s(y_k) = \max_{x_i \in X}\{w_i d(y_k, x_i)\} =
$$

$$
= \max_{x_i \in X}\left\{w_i \min\{d(y_k, x_\beta) + d(x_\beta, x_i);\; d(y_k, x_\alpha) + d(x_\alpha, x_i)\}\right\}.
$$

Поскольку расстояние $d(y_k, x_i)$ равно либо длине маршрута, проходящего через вершину x_α, либо длине маршрута, проходящего через x_β, то $d(y_k, x_\alpha)$ и $d(y_k, x_\beta)$ являются длинами соответствующих частей ребра e_k.

Пусть $d(y_k, x_\beta) = \xi$. Тогда $d(y_k, x_\alpha) = c_{\alpha\beta} - d(y_k, x_\beta) = c_{\alpha\beta} - \xi$ и

$$
s(y_k) = \max_{x_i \in X}\min\left\{w_i(\xi + d(x_\beta, x_i));\; w_i(c_{\alpha\beta} + d(x_\alpha, x_j) - \xi)\right\}.
$$

Для фиксированной вершины $\boldsymbol{x_i}$ и при каждом значении ξ ($0 \le \xi \le c_{\alpha\beta}$) рассмотрим каждое из выражений $T_i = \xi + d(x_\beta, x_i)$ и $T_i' = c_{\alpha\beta} + d(x_\alpha, x_j) - \xi$ как функцию от ξ, и построим нижнюю «огибающую» для соответствующих им прямых линий.

Повторяя эту процедуру для всех вершин $x_i \in X$, построим на одном и том же чертеже все остальные нижние «огибающие». Далее вычертим верхнюю «огибающую» для всех ранее построенных нижних «огибающих» и найдем ее минимум (их может быть несколько) и точку y_k^*, соответствующую наименьшему из этих минимумов.

Для сокращения перебора ребер найдем верхнюю границу H абсолютного радиуса графа (E – множество ребер графа) по формуле

$$H = \min_{(x_i, x_j) \in E} \left\{ p_{ij} + \frac{1}{2} w_{s^*} \cdot c_{ij} \right\},$$

где $p_{ij} = \max\limits_{x_s \in X} \left\{ w_s \min\limits_{x_s \in X} \{ d(x_s, x_i);\ d(x_s, x_j) \} \right\}$, а w_{s^*} – вес той вершины x_s, в которой достигается наибольшее значение величины p_{ij}.

Таким образом, всякое ребро (x_α, x_β), для которого $p_{\alpha\beta} \ge H$, может не рассматриваться при поиске абсолютного центра.

Для рассматриваемого графа получаем следующие результаты:

- центр на $e_1 = (x_3, x_1)$ дает

$$p_{3,1} = \max\{\min\{8;\ 0\};\ \min\{2;\ 8\};\ \min\{0;\ 8\};\ \min\{12;\ 6\};\ \min\{8;\ 2\}\} =$$
$$= \max\{0;\ 2;\ 0;\ 6;\ 2\} = 6;$$

- центр на $e_2 = (x_2, x_3)$ дает $p_{2,3} = \max\{8;\ 0;\ 0;\ 10;\ 6\} = 10;$
- центр на $e_3 = (x_5, x_2)$ дает $p_{5,2} = \max\{2;\ 0;\ 2;\ 4;\ 0\} = 4;$
- центр на $e_4 = (x_1, x_5)$ дает $p_{1,5} = \max\{0;\ 6;\ 8;\ 4;\ 0\} = 8;$
- центр на $e_5 = (x_1, x_4)$ дает $p_{1,4} = \max\{0;\ 8;\ 8;\ 0;\ 2\} = 8;$
- центр на $e_6 = (x_4, x_5)$ дает $p_{4,5} = \max\{2;\ 6;\ 8;\ 0;\ 0\} = 8.$

Тогда верхняя оценка H равна

$$H = \min\{6+4;\quad 10+1;\quad 4+3;\quad 8+1;\quad 8+3;\quad 8+2\} = 7.$$

Следовательно, все ребра, для которых $p_{ij} > 7$, могут быть исключены из списка кандидатов на размещение абсолютного центра. Таким образом, из списка кандидатов исключаются ребра e_2, e_4, e_5 и e_6.

Поиск абсолютного центра нужно вести только на двух оставшихся ребрах. Сначала возьмем ребро e_1, и пусть расстояние ξ измеряется от вершины x_3 до вершины x_1 (рисунок 8.2). Выражения T_i и T_i' имеют следующий вид:

$$T_1 = \xi + d(x_3, x_1) = \xi + 8, \qquad T_1' = c_{3,1} + d(x_1, x_1) - \xi = 8 - \xi,$$
$$T_2 = \xi + d(x_3, x_2) = \xi + 2, \qquad T_2' = c_{3,1} + d(x_1, x_2) - \xi = 16 - \xi,$$
$$T_3 = \xi + d(x_3, x_3) = \xi, \qquad T_3' = c_{3,1} + d(x_1, x_3) - \xi = 16 - \xi,$$

$$T_4 = \xi + d(x_3, x_4) = \xi + 12, \qquad T_4' = c_{3,1} + d(x_1, x_4) - \xi = 14 - \xi,$$
$$T_5 = \xi + d(x_3, x_5) = \xi + 8, \qquad T_5' = c_{3,1} + d(x_1, x_5) - \xi = 10 - \xi.$$

Графики этих функций изображены на рисунке 8.2 для $0 \le \xi \le 8$.

Для каждой вершины x_i построены графики функций (пунктирной линией) и нижняя «огибающая» выделена сплошной линией. Затем полужирной линией выделена верхняя «огибающая» для всех ранее построенных нижних «огибающих» – получена ломаная линия, она имеет два минимума в точках (6; 8) и (8; 8).

Таким образом, имеются два локальных абсолютных центра y_1^* на расстоянии 6 и 8 от вершины x_3. Радиусы (величина минимального расстояния до наиболее удаленной вершины) этих двух центров равны 8.

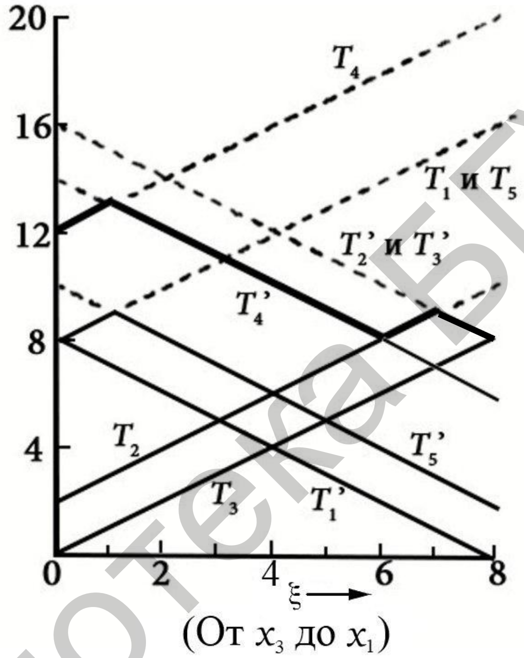


Рисунок 8.2 – Размещение центра на ребре $\boldsymbol{e}_1$

Аналогично рассмотрим ребро e_3 (рисунок 8.3), и пусть расстояние ξ измеряется от вершины x_5 до вершины x_2. Выражения T_i и T_i' имеют следующий вид:

$$T_1 = \xi + d(x_5, x_1) = \xi + 2, \qquad T_1' = c_{5,2} + d(x_2, x_1) - \xi = 14 - \xi.$$
$$T_2 = \xi + d(x_5, x_2) = \xi + 6, \qquad T_2' = c_{5,2} + d(x_2, x_2) - \xi = 6 - \xi.$$
$$T_3 = \xi + d(x_5, x_3) = \xi + 8, \qquad T_3' = c_{5,2} + d(x_2, x_3) - \xi = 8 - \xi.$$
$$T_4 = \xi + d(x_5, x_4) = \xi + 4, \qquad T_4' = c_{5,2} + d(x_2, x_4) - \xi = 16 - \xi.$$
$$T_5 = \xi + d(x_5, x_5) = \xi, \qquad T_5' = c_{5,2} + d(x_2, x_5) - \xi = 12 - \xi.$$

Графики этих функций изображены на рисунке 8.3 для $0 \le \xi \le 6$. Верхняя «огибающая» для всех нижних «огибающих» имеет минимум в точке (2; 6).

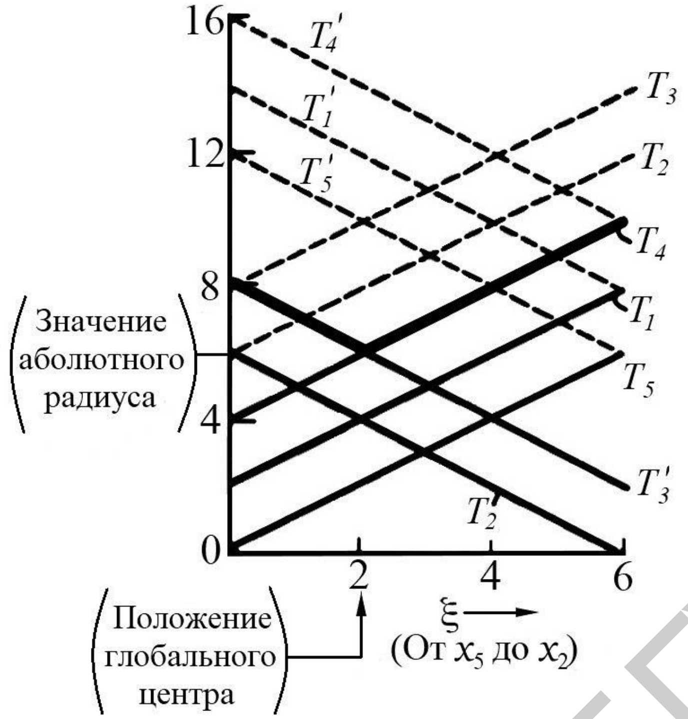


Рисунок 8.3 – Размещение центра на ребре ***e*₃**

Имеется один локальный абсолютный центр y_3^* на расстоянии 2 единиц от вершины x_5. Радиус этого центра равен 6.

Шаг 2. Из всех найденных точек y_k* (k = 1 ,…, v) в качестве абсолютного центра графа G выберем точку с наименьшей величиной минимального расстояния до наиболее удаленной вершины.

Легко видеть, что для рассматриваемого графа абсолютный центр y^* находится на ребре e_3 на расстоянии двух единиц от вершины x_5. **Абсолютный радиус** графа (соответствующий y^*) равен 6.

Абсолютная медиана графа совпадает с его медианой. Следовательно, абсолютной медианой данного графа является вершина x_5, передаточное число графа равно 20.

Задача 8.2. Кратные центры графа

На графе (рисунок 8.4) изображена сеть дорог между населенными пунктами на территории сельскохозяйственного предприятия. Число, стоящее около каждого ребра, задает время проезда по этому пути (в минутах). Требуется найти минимальное количество мест для размещения пунктов охраны правопорядка, чтобы выполнялось условие прибытия по вызову в течение 3,5 мин.

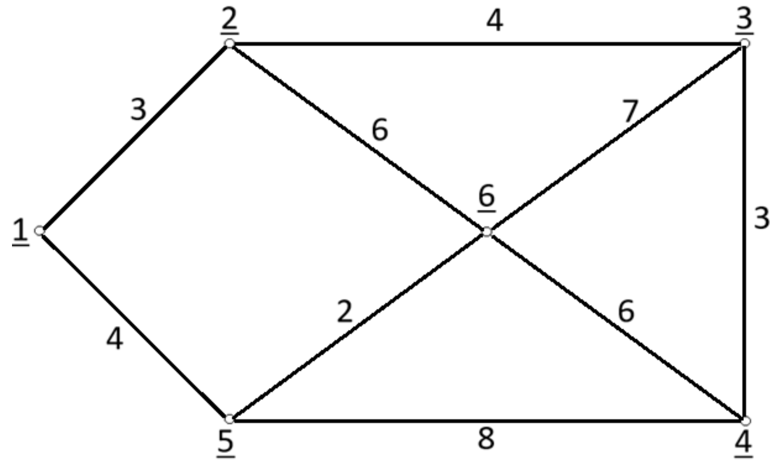


Рисунок 8.4 – Исходные данные к задаче 8.2

Решение

В задаче требуется найти абсолютный p-центр с минимально возможной величиной параметра p, такой, чтобы каждая вершина графа отстояла хотя бы от одного из этих p-центров на расстоянии, не превосходящем 3,5 ед. Вес каждой вершины примем равным единице.

Задача нахождения абсолютного *p*-центра формулируется следующим образом: для заданного «критического» расстояния λ найти наименьшее число центров и их размещение, чтобы все вершины графа лежали в пределах этого критического расстояния (по крайней мере каждая вершина – от ближайшего к ней центра).

Алгоритм нахождения абсолютного *p*-центра графа.

Шаг 1. Зададим «критическое» значение λ.

Шаг 2. Построим множества $Q_\lambda(x_i)$ для всех $x_i \in X$

$$Q_\lambda(x_i) = \{ y \mid w_i d(y, x_i) \le \lambda \quad y - точка\_графа\_G \}.$$

Здесь множество $Q_\lambda(x_i)$ состоит из точек всех ребер (или частей ребер), принадлежащих кратчайшим маршрутам между метками и вершиной x_i.

Любое ребро графа из вершины x_i при заданном λ либо не достижимо, либо достижимо целиком, либо частично (от какого-либо конца ребра до некоторой «предельной» точки на нем) – тогда над предельной точкой ставится «метка».

После размещения всех меток (для всех вершин) каждое ребро будет разделено на ряд участков: каждый участок определяет вершины, которые из него могут быть достигнуты. Опишем участки бинарными векторами SI = $(j_1, j_2, \ldots, j_u)$ длины u: если вершина x_k достижима из этого участка, то $j_k = 1$, иначе $j_k = 0$, $k = 1, \ldots, u$.

Совокупность всех участков с одинаковым бинарным вектором – область. Обозначим такие области Φ_λ.

Области, из которых можно достигнуть ровно t вершин $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}$:

$$\Phi_\lambda(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}) = \bigcap_{q=1,\ldots,t} Q_\lambda(x_{i_q}) - \{ (\bigcap_{q=1,\ldots,t} Q_\lambda(x_{i_q}) \cap (\bigcup_{q=t+1,\ldots,u} Q_\lambda(x_{i_q})) \}.$$

Области, из которых не достижимы никакие вершины:

$$\Phi_{\lambda}(0)=\{y \mid y\_на\_G\}-\bigcup_{i=1,\ldots,u} Q_{\lambda}(x_i).$$

Шаг 3. Образуем двудольный граф $G' = (X' \cup X, E')$, где X' – множество вершин, каждая из которых соответствует некоторой области Φ_λ, и E' – множество ребер, такое, что ребро между областью-вершиной и вершиной x_i существует тогда и только тогда, когда x_i достижима из этой области.

Шаг 4. Найдем наименьшее доминирующее множество графа G'. Области этого множества образуют абсолютный p-центр графа G.

Воспользуемся этим **алгоритмом:**

1. По условию $\lambda = 3{,}5$.

2. На рисунке 8.5 показаны метки, определяющие множества $Q_\lambda(x_i)$. Они расставлялись сразу же в процессе последовательного «прохождения» ребер.

Числа в кружках, стоящие около произвольной метки, указывают номера вершин, которым эта метка соответствует. Так, кружок «1,3» на ребре (2, 3) означает, что только отмеченная точка достижима из вершин 1 и 3 в пределах расстояния 3,5. Точками около ребер показано достижимое множество $Q_\lambda(5)$, соответствующее вершине 5.

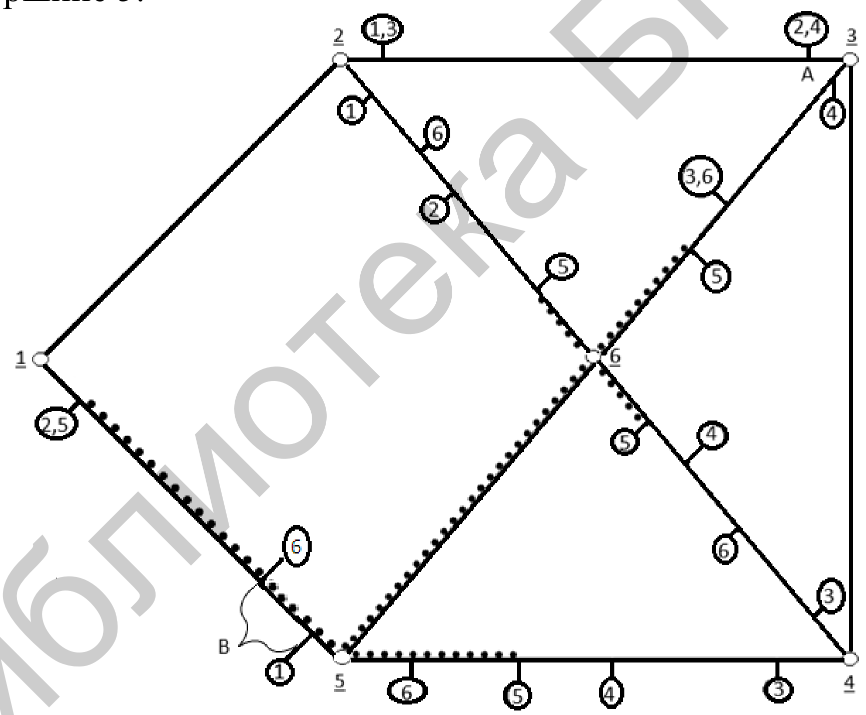


Рисунок 8.5 – Метки для достижимых множеств (множество $Q_\lambda(5)$ отмечено точками)

Всего существует 33 участка ребер, включая пустой участок, из которого ни одна вершина не может достигаться в пределах расстояния 3,5 ед.

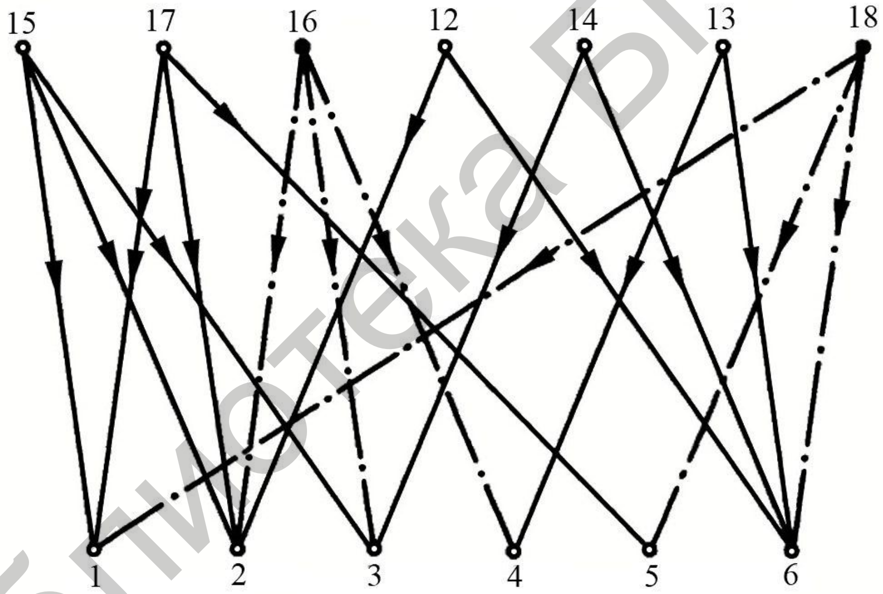
Пустой участок расположен между метками 4 и 5 на ребре (4, 5). Некоторые из этих 33 участков имеют одинаковые SI; существует всего 18 областей со следующими SI:

(1)	000000	(7)	000011	(13)	000101
(2)	010000	(8)	110000	(14)	001001
(3)	001000	(9)	001100	(15)	111000
(4)	000100	(10)	100010	(16)	011100
(5)	000010	(11)	011000	(17)	110010
(6)	000001	(12)	010001	(18)	100011

Так, например, участок между метками 1 и 6 на ребре (1, 5) принадлежит области с SI, равным 100011, поскольку лишь из точек графа, лежащих между этими двумя метками, можно достигнуть вершин 1, 5 и 6 (и никаких других) в пределах расстояния $\lambda = 3{,}5$.

3. После исключения тех SI, которые доминируются другими SI (SI_1 доминирует над SI_2, если $SI_1 \otimes SI_2 = SI_2$, где $\otimes$ означает булево произведение), остается только семь областей (с номерами SI от 12 до 18). Граф *G*' после выполнения шага 3 алгоритма выглядит так, как показано на рисунке 8.6.

Области графа *G*



Вершины графа *G*

Рисунок 8.6 – Граф *G*' (выделены области в доминирующем множестве)

4. Для нахождения наименьшего доминирующего множества этого графа можно воспользоваться алгоритмом решения задачи о наименьшем покрытии. Однако в нашем (простом) примере наименьшее множество легко строится с помощью прямого последовательного перебора; оно порождается SI с номерами 16 и 18 в списке, приведенном в пункте 2.

Область, соответствующая SI с номером 16, состоит из одной точки, расположенной на ребре (2, 3) – на рисунке она обозначена буквой А. Область, соответствующая SI с номером 18, представляет собой участок ребра (1, 5) между метками 6 и 1 – на рисунке она обозначена буквой В.

Следовательно, в данном случае требуются два центра: один расположен в точке A, а другой – в любой точке области B. Поскольку область A является точкой, то λ = 3,5 является минимально возможным критическим расстоянием для существования 2-центра. Поэтому при λ < 3,5 область A исчезнет совсем, и тогда уже нужно строить 3-центр.

Таким образом, при λ = 3,5 абсолютный 2-центр состоит из точек A, расположенной на ребре (2; 3) на расстоянии 0,5 от вершины 3, и B, расположенной на ребре (1; 5) в любом месте на расстоянии от 1 до 0,5 от вершины 5.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.3. Центры и медианы графа

Для графа, изображенного на рисунке 8.7:

а) найти центр, медиану, абсолютные центр и медиану, считая веса вершин равными 1;

б) найти абсолютный *p*-центр с минимально возможной величиной параметра *p*, такой, чтобы каждая вершина графа отстояла хотя бы от одного из этих *p*-центров на расстоянии, не превосходящем половины самого длинного ребра. Исходные данные по вариантам представлены в таблице 8.1.

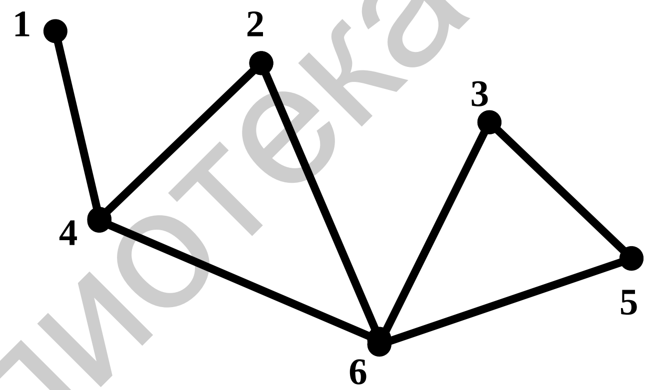


Рисунок 8.7 – Граф к задаче 8.3

Таблица 8.1 – Исходные данные к задаче 8.3

Ребро	**1-4**	**2-4**	**2-6**	**3-5**	**3-6**	**4-6**	**5-6**
Вариант	**Длина**						
B1	1	12	5	16	12	10	8
B2	18	17	15	4	17	14	11
B3	7	1	3	8	4	4	20
B4	9	3	1	1	8	11	12
B5	12	13	4	14	10	8	2
B6	13	16	16	11	7	18	15
B7	19	19	11	4	10	5	17
B8	5	16	17	20	20	13	8
B9	6	7	17	1	8	3	14
B10	2	1	18	6	6	12	14

Ребро	1-4	2-4	2-6	3-5	3-6	4-6	5-6
Вариант	**Длина**						
B11	17	15	10	5	15	10	10
B12	19	15	3	12	8	15	13
B13	12	8	4	5	9	16	11
B14	20	15	8	4	13	10	2
B15	14	11	4	19	4	18	14
B16	7	9	2	19	14	4	18
B17	17	12	5	4	17	10	4
B18	11	15	9	6	12	14	15
B19	15	10	3	8	17	2	11
B20	14	9	3	19	19	11	8
B21	10	8	17	7	10	6	20
B22	7	15	12	5	15	17	9
B23	11	18	2	20	12	2	11
B24	5	17	13	13	5	17	3
B25	3	15	7	19	6	7	4
B26	15	17	14	12	15	6	4
B27	1	2	16	17	5	3	12
B28	1	3	10	15	14	11	2
B29	9	5	14	7	9	5	12
B30	11	13	4	11	19	14	19

Тема 9. Оптимизационные задачи на сетях

Литература: *основная* [25, с. 70–84], [29, с. 269–299], *дополнительная* [3, с. 99–110], [11, с. 35–45], [13, с. 59–87], [16, с. 56–57], [19, с. 310–422], [20, с. 76–81], [28, с. 241–253].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Основные понятия и определения: транспортная сеть, поток, разрез, остаточная сеть, дополняющий поток.
2. Постановка задачи о максимальном потоке в сети и минимальном разрезе.
3. Распределение начального потока.
4. Алгоритм Форда – Фалкерсона (две интерпретации).
5. Постановка задачи о потоке минимальной стоимости.

Обозначения, используемые в разделе

Обозначения предыдущего раздела.

s – исток сети, $s \in X$

t – сток сети, $t \in X$

c_{ij} – пропускная способность ребра (x_i, x_j), $(x_i, x_j) \in E$, $x_i \in X$, $x_j \in X$

f – величина потока в сети

f_{ij} – поток по ребру (x_i, x_j), $(x_i, x_j) \in E$, $x_i \in X$, $x_j \in X$

δ – величина дополняющего потока в сети

w_{ij} – стоимость транспортировки единицы потока по ребру (x_i, x_j), $(x_i, x_j) \in E$, $x_i \in X$, $x_j \in X$

(S, T) – минимальный разрез сети

$C(S, T)$ – пропускная способность минимального разреза сети

Решение типовых задач

Задача 9.1. Максимальный поток в сети и поток минимальной стоимости

Задана сеть (рисунок 9.1) с пропускными способностями ребер. Известны объемы продукции у поставщиков 1 и 2: $a_1 = 15$ и $a_2 = 28$, и потребность в продукции у потребителей 5 и 6: $b_5 = 20$ и $b_6 = 30$.

Требуется максимально удовлетворить потребности потребителей:

а) свести данную задачу к задаче о максимальном потоке,

б) найти максимальный поток и построить минимальный разрез на сети;

в) построить поток минимальной стоимости величиной в 2 раза меньше, чем найденный максимальный поток, если заданы стоимости транспортировок (таблица 9.1).

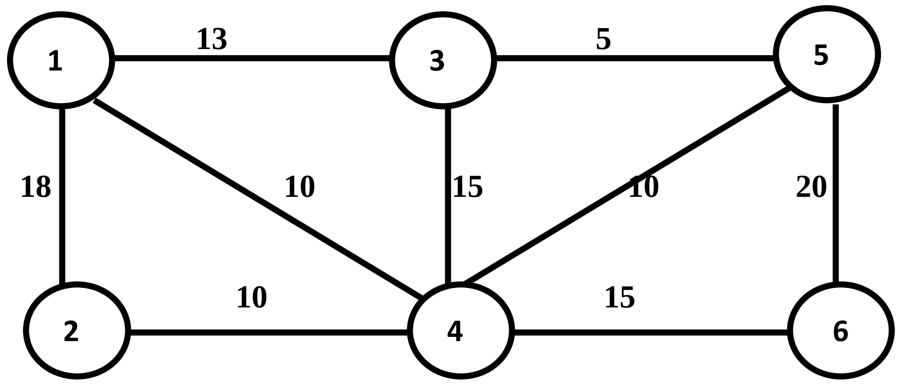


Рисунок 9.1 – Исходные данные

Таблица 9.1 – Стоимости транспортировок

Ребро	1-2	1-3	1-4	2-4	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6
Стоимость	1	3	5	3	1	3	5	3	1

Решение

а) Это задача нахождения ***максимального потока в сети*** с несколькими источниками и стоками. В задаче имеются два источника 1, 2 с запасами продукции a_1 и a_2 и два стока 5 и 6 с потребностями b_5 и b_6. Добавим единственный источник *s* и соединим с источниками 1 и 2 ребрами с пропускными способностями 15 и 28 соответственно; аналогично, каждый сток 5 и 6 соединим с единственным добавленным стоком *t* ребрами с пропускными способностями 20 и 30 соответственно. Получим следующую транспортную сеть, представленную на рисунке 9.2.

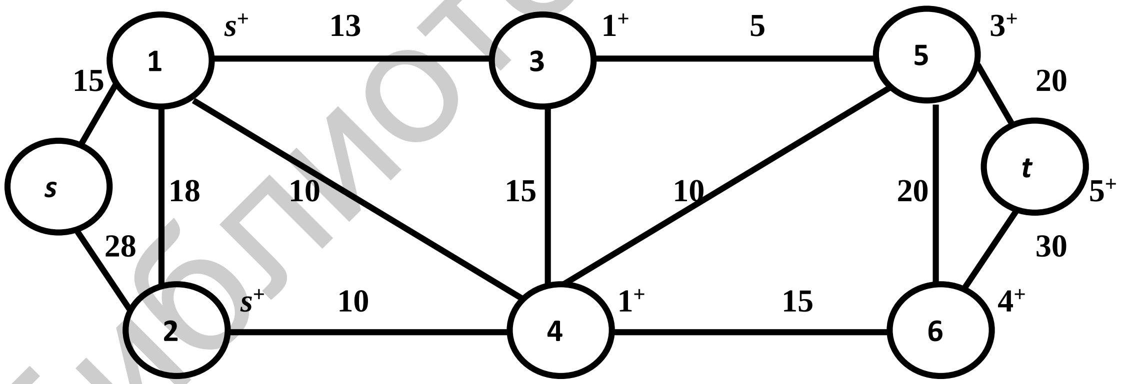


Рисунок 9.2 – Транспортная сеть для задачи о максимальном потоке

б) Воспользуемся ***алгоритмом Форда – Фалкерсона*** построения максимального потока в сети двумя способами: по графу и с использованием таблиц.

<u>Способ I</u>

Начальный поток будем считать нулевым.

***Итерация* 1.** Найдем увеличивающий путь.

***Шаг* 1.** Произведем **расстановку меток** (см. рисунок 9.2).

Для ребра (i, j): если вершина i помечена, вершина j не помечена, и $f_{ij} < c_j$, вершина j получает метку i^+; если вершина j помечена, вершина i не помечена и $f_{ij} > 0$, вершина i получает метку (j^-).

Метку s^+ получают вершины 1 и 2. Метку 1^+ получают вершины 3 и 4.

Меткой 2^+ никакие вершины пометить нельзя, т. к. все соседние вершины уже помечены.

Метку 3^+ получает только вершина 5, т. к. вершина 4 уже помечена.

Соответственно вершина 6 получает метку 4^+.

Далее рассматриваем метку 5^+ – ее получает вершина t.

Шаг **2.** Поскольку вершина t (сток) помечена, увеличивающий путь существует. Пройдем от стока до истока по меткам, получим следующий **увеличивающий путь**: $s \to 1 \to 3 \to 5 \to t$.

Шаг **3.** Увеличим поток вдоль этого пути. Находим

$$\delta = \min\{c_{S1} - f_{S1};\ c_{13} - f_{13};\ c_{35} - f_{35};\ c_{5t} - f_{5t}\} = \min\{15;\ 13;\ 5;\ 20\} = 5.$$

Полагаем

$$f_{S1} = f_{13} = f_{35} = f_{5t} = 5.$$

Шаг **4.** Величина суммарного потока в сети равна 5.

Результат итерации показан на рисунке 9.3.

Число до черты указывает пропускную способность ребра, число после черты – поток по ребру (положительное, если поток перемещается в направлении нумерации вершин, и отрицательное в обратном случае).

Итерация **2.** Найдем увеличивающий путь.

Шаг **1.** Произведем **расстановку меток** (на рисунке 9.3).

Метку s^+ получают вершины 1 и 2. Метку 1^+ получают вершины 3 и 4.

Метками 2^+ и 3^+ никакие вершины пометить нельзя, т. к. все соседние вершины либо уже помечены, либо соединены насыщенными ребрами.

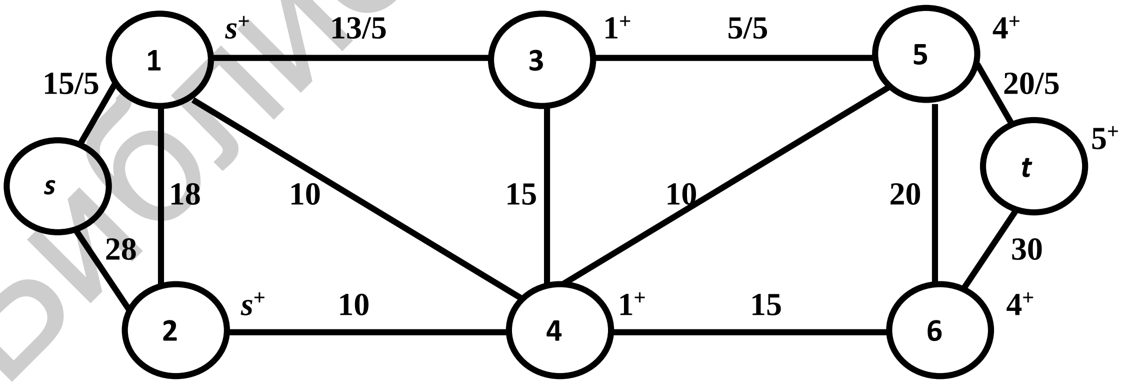


Рисунок 9.3 – Распределение потока после первой итерации

Вершины 5 и 6 получают метку 4^+. Вершина t получает метку 5^+.

Шаг **2.** Поскольку вершина t (сток) помечена, увеличивающий путь существует. Пройдем от стока до истока по меткам, получим следующий **увеличивающий путь**: $s \to 1 \to 4 \to 5 \to t$.

Шаг **3.** Увеличим поток вдоль этого пути. Находим

$$\delta = \min\{c_{S1} - f_{S1};\ c_{14} - f_{14};\ c_{45} - f_{45};\ c_{5t} - f_{5t}\} = \min\{10;\ 10;\ 10;\ 15\} = 10.$$

Полагаем

$$f_{S1} = 5 + 10 = 15, \quad f_{14} = 10, \quad f_{45} = 10, \quad f_{5t} = 5 + 10 = 15.$$

***Шаг* 4.** Величина суммарного потока в сети равна 15.

Результат итерации показан на рисунке 9.4.

***Итерация* 3.** Найдем увеличивающий путь.

***Шаг* 1.** Произведем **расстановку меток** (на рисунке 9.4).

Метку s^+ получает только вершина 2.

Метку 2^+ получают вершины 1 и 4.

Метку 1^+ получает только вершина 3.

Меткой 3^+ никакие вершины пометить нельзя.

Вершина 6 получает метку 4^+. Вершины 5 и t получают метку 6^+.

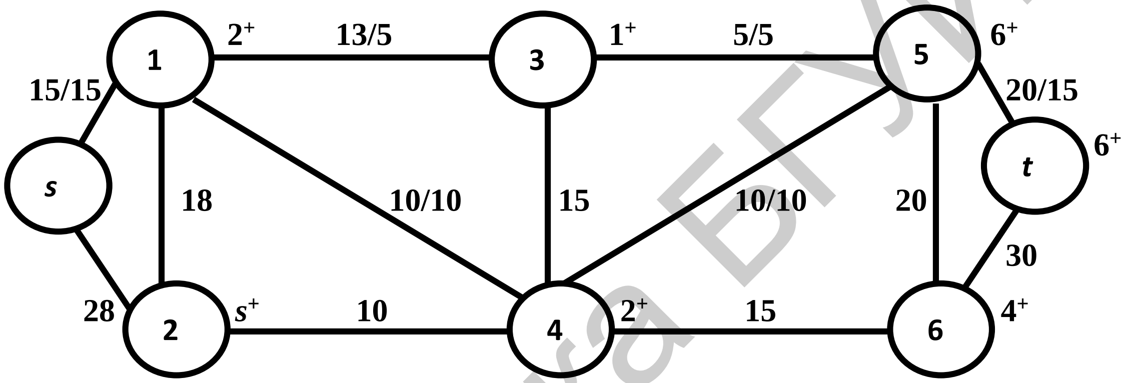


Рисунок 9.4 – Распределение потока после второй итерации

***Шаг* 2.** Поскольку вершина t (сток) помечена, увеличивающий путь существует. Пройдем от стока до истока по меткам, получим следующий **увеличивающий путь**: $s \to 2 \to 4 \to 6 \to t$.

***Шаг* 3.** Увеличим поток вдоль этого пути. Находим

$$\delta = \min\{c_{S2} - f_{S2};\ c_{24} - f_{24};\ c_{46} - f_{46};\ c_{6t} - f_{6t}\} = \min\{28;\ 10;\ 15;\ 30\} = 10.$$

Полагаем $f_{S2} = f_{24} = f_{46} = f_{6t} = 10$.

***Шаг* 4.** Величина суммарного потока в сети равна 25.

Результат итерации показан на рисунке 9.5.

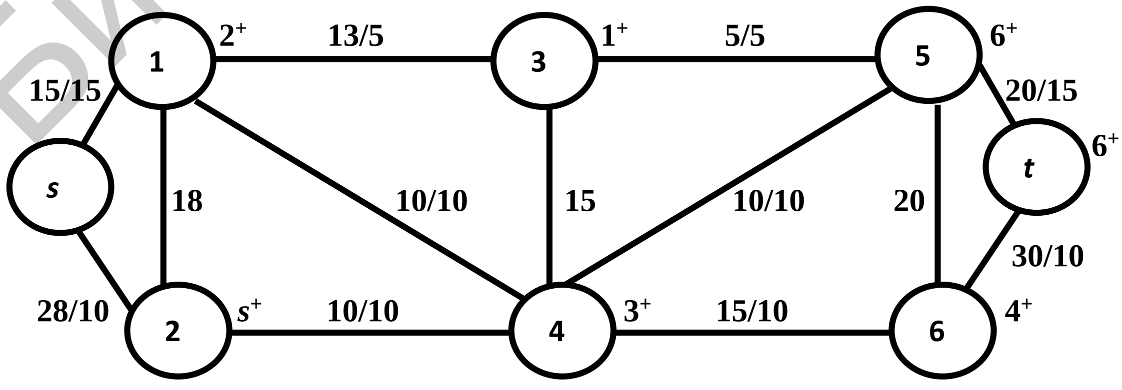


Рисунок 9.5 – Распределение потока после третьей итерации

***Итерация* 4.** Найдем увеличивающий путь.

***Шаг* 1.** Произведем **расстановку меток** (на рисунке 9.5).

Метку s^+ получает только вершина 2.

Метку 2^+ получает только вершина 1.

Вершина 3 получает метку 1^+. Вершина 4 получает метку 3^+.

Вершина 6 получает метку 4^+. Вершины 5 и t получают метку 6^+.

***Шаг* 2.** Поскольку вершина t (сток) помечена, увеличивающий путь существует. Пройдем от стока до истока по меткам, получим следующий **увеличивающий путь**: $s \to 2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 6 \to t$.

***Шаг* 3.** Увеличим поток вдоль этого пути. Находим

$$\delta = \min\{c_{S2} - f_{S2};\ c_{23} - f_{23};\ c_{34} - f_{34};\ c_{46} - f_{46};\ c_{6t} - f_{6t}\} =$$
$$= \min\{18;\ 18;\ 8;\ 15;\ 5;\ 20\} = 5.$$

Полагаем

$$f_{S2} = 10 + 5 = 15,\quad f_{21} = 5,\quad f_{13} = 5 + 5 = 10,\quad f_{34} = 5,\quad f_{46} = 10 + 5 = 15,\quad f_{6t} = 10 + 5 = 15.$$

***Шаг* 4.** Величина суммарного потока в сети равна 30.

Результат итерации показан на рисунке 9.6.

***Итерация* 5.** Найдем увеличивающий путь.

***Шаг* 1**. Произведем **расстановку меток** (на рисунке 9.6).

Метку s^+ получает только вершина 2.

Метку 2^+ получает только вершина 1.

Вершина 3 получает метку 1^+. Вершина 4 получает метку 3^+.

Вершины 5, 6 и t пометить нельзя.

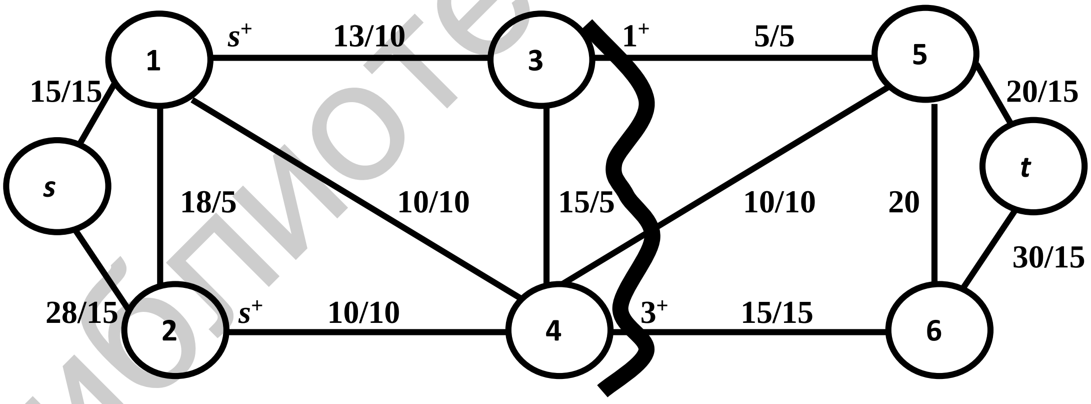


Рисунок 9.6 – Распределение потока после четвертой итерации

***Шаг* 2.** Следовательно, увеличивающего пути нет, и построенный поток величины 30 является максимальным.

Минимальный разрез (S,T), где $S = \{s, 1, 2, 3, 4\}$, $T = \{5, 6, t\}$ состоит из ребер $(S,T) = \{(3, 5), (4, 5), (4, 6)\}$ и обладает пропускной способностью

$$C(S,T) = c_{35} + c_{45} + c_{46} = 30.$$

<u>Способ II</u>

***Шаг* 1.** Построим матрицу $D = (c_{ij})$ (таблица 9.2), соответствующую сети на рисунке 9.2 (в данной задаче даны ребра, а не дуги, поэтому матрица симметрична относительно главной диагонали – каждое ребро $\{i, j\}$ представляем в виде двух дуг (i, j) и (j, i)).

Таблица 9.2 – Исходная матрица пропускных способностей дуг

Метки		**s**	**s**	**1**	**1**	**3**	**4**	**5**
–	***s***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
s	–	15 –	28	0	0	0	0	0
1	15+	–	18	13 –	10	0	0	0
2	28	18	–	0	10	0	0	0
3	0	13 +	0	–	15	5 –	0	0
4	0	10	10	15	–	10	15	0
5	0	0	0	5 +	10	–	20	20 –
6	0	0	0	0	15	20	–	30
t	0	0	0	0	0	20 +	30	–

***Шаг* 2.** Разметка столбцов.

В строке *s* найдем дуги с пропускной способностью больше 0 и столбцы, в которых они находятся, помечаем *s*.

Просмотрим по порядку те строки, номера которых совпадают с номерами помеченных столбцов следующим образом: найдем дуги с пропускной способностью больше 0 и, если они ранее не были помечены, пометим номером просматриваемой строки.

***Шаг* 3.** Если нельзя пометить столбец, соответствующий конечной вершине – наибольший поток найден, перейдем к заключительному шагу 7. В противном случае – к шагу 4. В нашем случае столбец, соответствующий конечной вершине, помечен, перейдем к шагу 4.

***Шаг* 4.** Построим дополняющий путь из 1 в 7, используя метки (в матрице указан стрелками). Получим путь $s \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow t$.

***Шаг* 5.** Анализ таблицы «–» «+». Для выбранного пути пометим знаком «–» дуги, входящие в этот путь в соответствующих клетках. Пометим знаком «+» клетки, симметричные к отмеченным «–» дугам.

Таким образом (см. таблицу 9.2), ячейки (*s*, 1), (1, 3), (3, 5), (5, *t*) помечаются знаком «–», а ячейки (1, *s*), (3, 1), (5, 3), (*t*, 5) – знаком «+».

***Шаг* 6.** Преобразование таблицы.

- Находим пропускную способность найденного пути по наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в найденный путь.

- В таблице пропускную способность каждой из дуг, отмеченных «–», уменьшаем на величину пропускной способности найденного пути, а отмеченные «+» – увеличиваем на эту величину.

Для данной цепи максимальный поток определяется как

$$\delta = \min\{d_{S1};\ d_{13};\ d_{35};\ d_{5t}\} = \min\{15;\ 13;\ 5;\ 20\} = 5.$$

Матрица *D* в таблице 9.2 корректируется путем вычитания δ=5 из всех элементов, помеченных знаком «–», и сложения со всеми элементами, имеющими знак «+». Результаты приведены в таблице 9.3.

Таблица 9.3 – Выполнение второй итерации

Метки		***s***	***s***	**1**	**1**	**4**	**4**	**5**
–	***s***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
s	–	10 –	28	0	0	0	0	0
1	20 +	–	18	8	10 –	0	0	0
2	28	18	–	0	10	0	0	0
3	0	18	0	–	15	0	0	0
4	0	10 +	10	15	–	10 –	15	0
5	0	0	0	10	10 +	–	20	15 –
6	0	0	0	0	15	20	–	30
t	0	0	0	0	0	25 +	30	–

Далее на этой же таблице выполняем ***шаги*** **2–5**.

Дополняющая цепь $s \to 1 \to 4 \to 5 \to t$. Ячейки ($s$, 1), (1, 4), (4, 5), (5, t) помечаются знаком «–», а ячейки (1, s), (4, 1), (5, 4), (t, 5) – знаком «+».

Шаг **6.** Преобразование таблицы.

Величина дополняющего потока

$$\delta = \min\{d_{S1};\ d_{14};\ d_{45};\ d_{5t}\} = \min\{10;\ 10;\ 10;\ 15\} = 10 .$$

Скорректированная матрица приведена в таблице 9.4.

Таблица 9.4 – Выполнение третьей итерации

Метки		**2**	***s***	**1**	**2**	**6**	**4**	**6**
–	***s***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
s	–	0	28 –	0	0	0	0	0
1	30	–	18	8	0	0	0	0
2	28 +	18	–	0	10 –	0	0	0
3	0	18	0	–	15	0	0	0
4	0	20	10 +	15	–	0	15 –	0
5	0	0	0	10	20	–	20	5
6	0	0	0	0	15 +	20	–	30 –
t	0	0	0	0	0	35	30 +	–

Далее на этой же таблице выполняем ***шаги*** **2–5**.

Дополняющая цепь $s \to 2 \to 4 \to 6 \to t$. Ячейки ($s$, 2), (2, 4), (4, 6), (6, t) помечаются знаком «–», а ячейки (2, s), (4, 2), (6, 4), (t, 6) – знаком «+».

Шаг **6.** Преобразование таблицы.

Дополняющий поток

$$\delta = \min\{d_{S1};\ d_{14};\ d_{45};\ d_{5t}\} = \min\{28;\ 10;\ 15;\ 30\} = 10 .$$

Скорректированная матрица приведена в таблице 9.5.

Далее на таблице 9.5 выполняем ***шаги*** **2–5.**

Дополняющая цепь $s \to 2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 6 \to t$. Ячейки ($s$, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 6), (6, t) помечаются знаком «–», а ячейки (2, s), (1, 2), (3, 1), (4, 3) , (6, 4), (t, 6) – знаком «+».

Шаг **6.** Преобразование таблицы.

Дополняющий поток

$$\delta = \min\{d_{S2};\ d_{21};\ d_{13};\ d_{34};\ d_{46};\ d_{6t}\} = \min\{18;\ 18;\ 8;\ 15;\ 5;\ 20\} = 5.$$

Таблица 9.5 – Выполнение четвертой итерации

Метки		**2**	***s***	**1**	**3**		**4**	**6**
–	***s***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
s	–	0	18 –	0	0	0	0	0
1	30	–	18 +	8 –	0	0	0	0
2	38 +	18 –	–	0	0	0	0	0
3	0	18 +	0	–	15 –	0	0	0
4	0	20	20	15 +	–	0	5 –	0
5	0	0	0	10	20	–	20	5
6	0	0	0	0	25 +	20	–	20 –
t	0	0	0	0	0	35	40 +	–

Скорректированная матрица приведена в таблице 9.6.

Таблица 9.6 – Выполнение пятой итерации

Метки		**2**	***s***	**1**	**3**			
–	***s***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
s	–	0	13	0	0	0	0	0
1	30	–	23	3	0	0	0	0
2	43	13	–	0	0	0	0	0
3	0	23	0	–	10	0	0	0
4	0	20	20	20	–	0	0	0
5	0	0	0	10	20	–	20	5
6	0	0	0	0	30	20	–	15
t	0	0	0	0	0	35	45	–

Так как нельзя пометить столбец, соответствующий конечной вершине, то между S и t нельзя построить цепи с положительным потоком, таким образом, таблица 9.6 дает матрицу D^*. Переходим к заключительному шагу 7.

***Шаг* 7.** Максимальный (оптимальный) поток f получают путем вычитания из матрицы D (см. таблицу 9.2) матрицы D^* (см. таблицу 9.6) и заменой отрицательных величин нулями (пустыми клетками). Таблица 9.7 дает матрицу $F=D–D^*$.

Таблица 9.7 – Матрица максимального потока F

	s	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
s	–	15	15	0	0	0	0	0
1	0	–	0	10	10	0	0	0
2	0	5	–	0	10	0	0	0
3	0	0	0	–	5	5	0	0
4	0	0	0	0	–	10	15	0
5	0	0	0	0	0	–	20	15
6	0	0	0	0	0	0	–	15
t	0	0	0	0	0	0	0	–

Размер максимального потока в сети равен сумме элементов строки s или столбца t и равен $f = 30$.

Ребра, образующие на сети минимальный разрез, также найдем из таблицы 9.6.

Так как помеченными оказались вершины s, 1, 2, 3, 4, то минимальный разрез (S, T), где $S = \{s, 1, 2, 3, 4\}$, $T = \{5, 6, t\}$ состоит из дуг

$$(S,T) = \{(3, 5), (4, 5), (4,6)\}$$

и обладает пропускной способностью $C(S,T) = c_{35} + c_{45} + c_{46} = 30$.

Таким образом, максимальный поток в 30 ед. продукции распределен следующим образом:

- от поставщика 2 к поставщику 1 переходят 5 ед. продукции;
- от поставщика 1 по 10 ед. продукции отправляются в пункты 3 и 4;
- от поставщика 2 отправляются 10 ед. продукции в пункт 4;
- из пункта 3 по 5 ед. продукции отправляются в пункт 4 и потребителю 5;
- из пункта 4 отправляются 10 ед. продукции потребителю 5 и 15 – потребителю 6.

в) Для построения ***потока минимальной стоимости*** нанесем на исходный размеченный граф (на рисунке 9.2) значения стоимостей транспортировки грузов (через запятую после пропускных способностей). Стоимости на ребрах, идущих от истока и к стоку, положим равными нулю, получим рисунок 9.7.

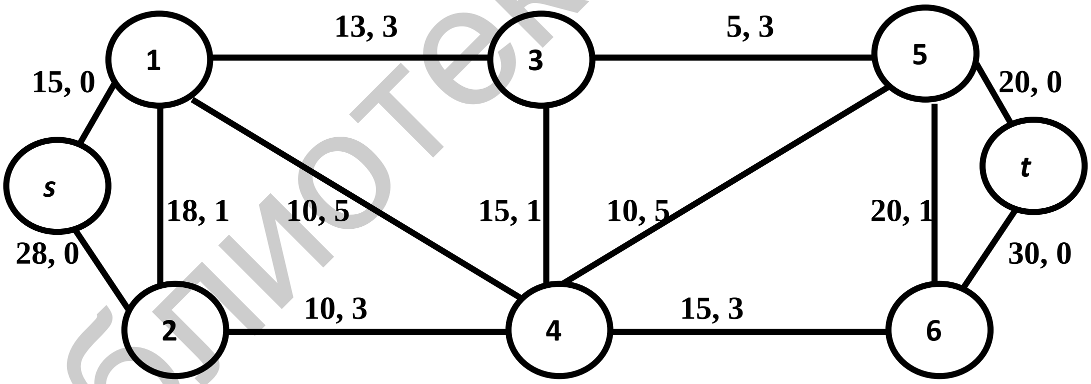


Рисунок 9.7 – Транспортная сеть со значениями стоимостей

Поскольку найденный в предыдущем пункте максимальный поток равен 30, то нужно построить поток минимальной стоимости размером 15.

Шаг 1. Пусть начальный поток f – нулевой.

Шаг 2. Построим остаточную сеть G_f по стоимостям (рисунок 9.8).

В построенной сети найдем кратчайший путь (это будет путь наименьшей стоимости) от s к t. Воспользуемся алгоритмом Дейкстры. Матрица весов для остаточной сети симметрична и имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix}
- & 0 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
0 & - & 1 & 3 & 5 & \infty & \infty & \infty \\
0 & 1 & - & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 3 & \infty & - & 1 & 3 & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 3 & 1 & - & 5 & 3 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 3 & 5 & - & 1 & 0 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 1 & - & 0 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & -
\end{pmatrix}.
$$

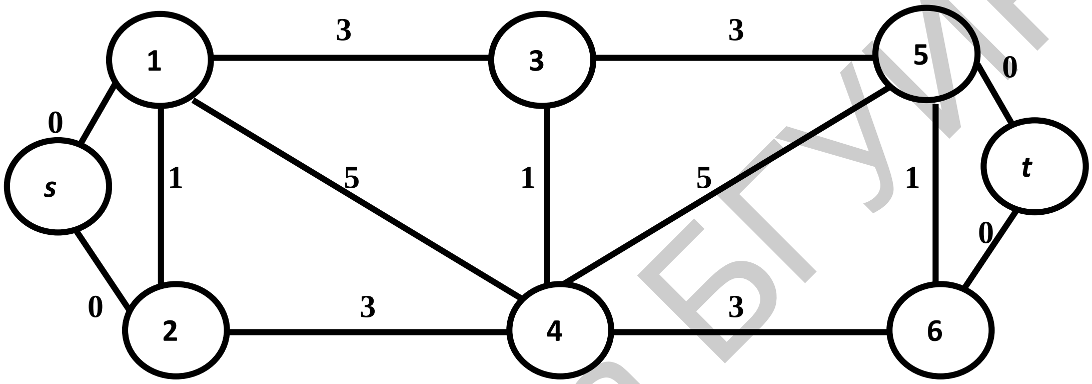


Рисунок 9.8 – Остаточная сеть по стоимостям

Таблица алгоритма Дейкстры имеет следующий вид (таблица 9.8).

Таблица 9.8 – Нахождение кратчайшего пути алгоритмом Дейкстры

Шаг	**Вершины**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
0	0*	0	∞	∞	∞	∞	∞
1		0*	3	5	∞	∞	∞
2			3*	3	6	∞	∞
3				3*	6	∞	∞
4					6*	6	∞
5						6*	6
6							6*

Восстановив пути, получаем следующую траекторию пути от вершины s к вершине t длиной 6:

$$s \to 1 \to 3 \to 5 \to t.$$

Шаг 3. Найдем величину δ дополняющего потока, который можно пропустить вдоль найденного кратчайшего пути в графе G.

$$\delta = \min\{c_{S1};\ c_{13};\ c_{35};\ c_{5t}\} = \min\{15;\ 13;\ 5;\ 20\} = 5.$$

Получили, что значение потока $|f| + \delta = 0 + 5 = 5 < 15$. Следовательно, увеличим поток вдоль найденного пути на величину δ и снова выполним шаг 2.

Шаг 2. Построим остаточную сеть G_f по стоимостям (рисунок 9.9).

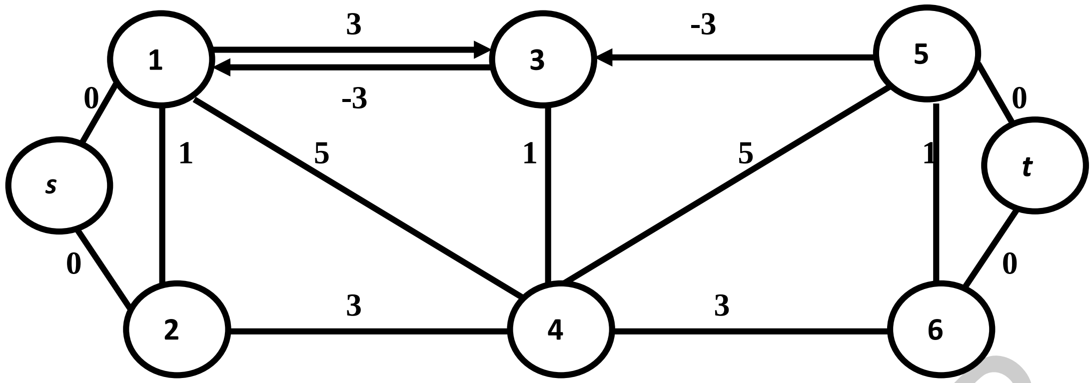


Рисунок 9.9 – Остаточная сеть по стоимостям после первой итерации

Насыщенное ребро (3, 5) заменим дугой (5, 3) со стоимостью, противоположной исходной стоимости. Нагруженные ненасыщенные ребра следует заменить двумя разнонаправленными дугами: исходной стоимости в направлении потока и противоположной величины – в противоположном направлении (не будем производить это с ребрами (s, 1) и (5, t), т. к. их стоимости равны 0).

В построенной дополняющей сети вновь найдем кратчайший путь от s к t с помощью алгоритмом Форда – Беллмана.

Таблица алгоритма Форда – Беллмана имеет вид таблицы 9.9.

Таблица 9.9 – Нахождение кратчайшего пути алгоритмом Форда – Беллмана

Шаг	**Вершины**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***t***
0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	0	3	3	∞	∞	∞
2	0	0	3	3	8	6	∞
3	0	0	3	3	7	6	6
4	0	0	3	3	7	6	6

Восстановив пути, получаем следующую траекторию пути от вершины s к вершине t длины 6:

$$s \to 2 \to 4 \to 6 \to t.$$

Шаг 3. Найдем величину δ дополняющего потока, который можно пропустить вдоль найденного кратчайшего пути в графе G:

$$\delta = \min\{c_{S2} - f_{S2};\ c_{24} - f_{24};\ c_{46} - f_{46};\ c_{6t} - f_{6t}\} = \min\{28;\ 10;\ 15;\ 30\} = 10.$$

Получили, что значение потока $|f| + \delta = 5 + 10 = 15$. Следовательно, увеличим поток вдоль найденного пути на величину δ и получим искомый поток заданного размера минимальной стоимости

Итоговый поток показан на рисунке 9.10.

Его стоимость равна

$$6{\cdot}5 + 6{\cdot}10 = 90.$$

Таким образом, поток размером 15 ед. продукции имеет минимальную стоимость, равную 90 ден. ед., и представляет собой перемещение 5 ед. продукции от поставщика 1 через пункт 3 к потребителю 5, и перемещение 10 ед. продукции от поставщика 2 через пункт 4 к потребителю 6.

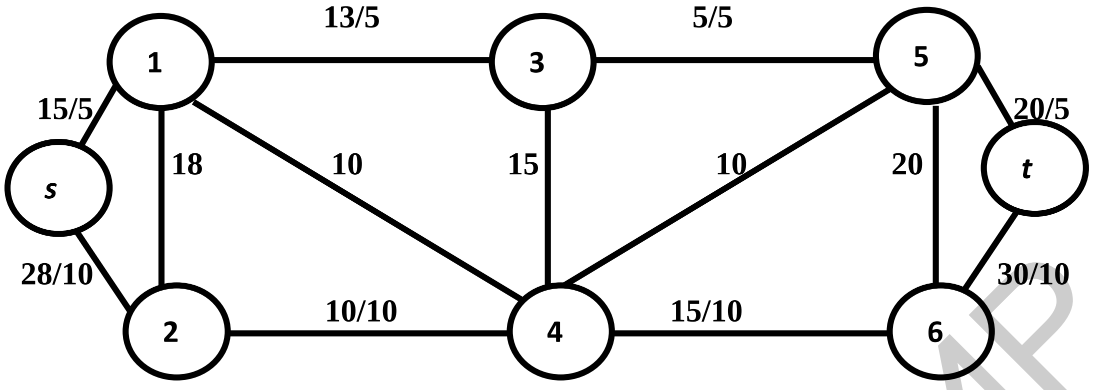


Рисунок 9.10 – Итоговый поток минимальной стоимости

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.2. Максимальный поток в сети и поток минимальной стоимости

В таблице 9.10 приведены транспортные сети в виде ориентированных графов. На каждой из дуг (x_i, x_j) через черту проставлены значения пропускной способности c_{ij} дуги и стоимость транспортировки единицы потока w_{ij} по этой дуге.

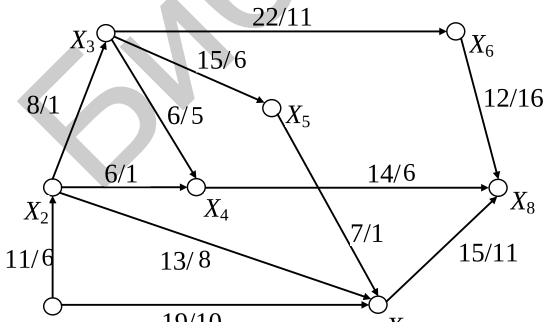
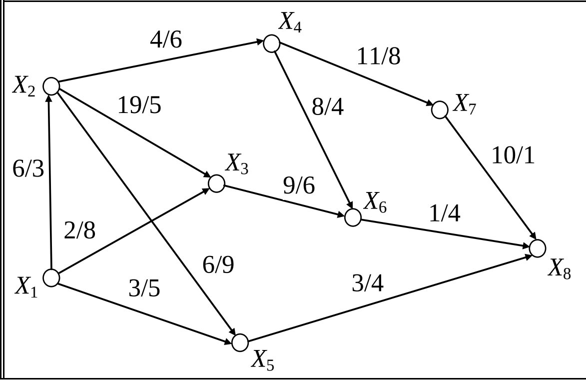
Для заданной сети определить:

1) максимальный поток $f_{\max}$ транспортировки груза между первой и последней вершинами, считая одну из них источником, а другую – стоком;

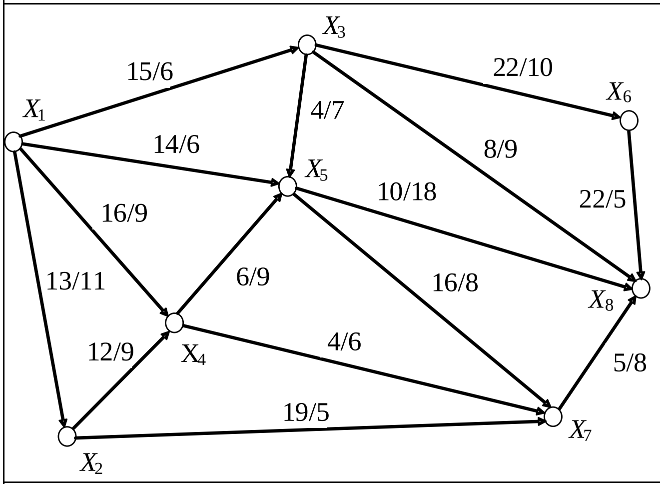
2) стоимость доставки груза по путям, формирующим максимальный поток в сети,

3) поток минимальной стоимости величины в 2 раза меньшей, чем найденный максимальный поток.

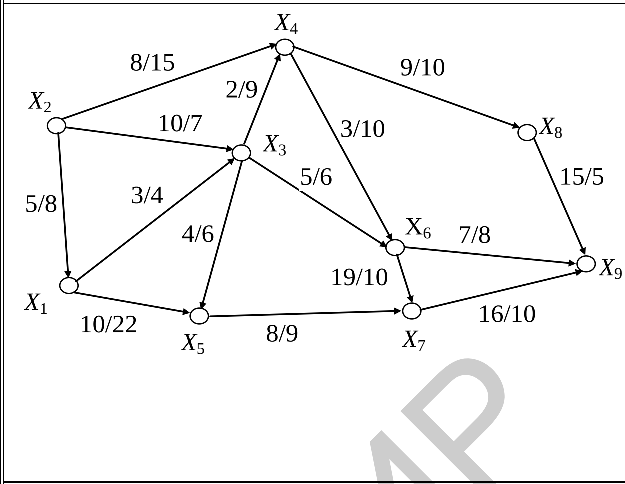
Таблица 9.10 – Исходные данные к задаче 9.2

B1	**B2**
	

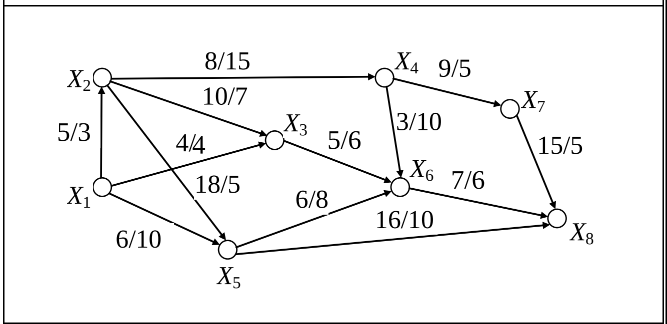
B3



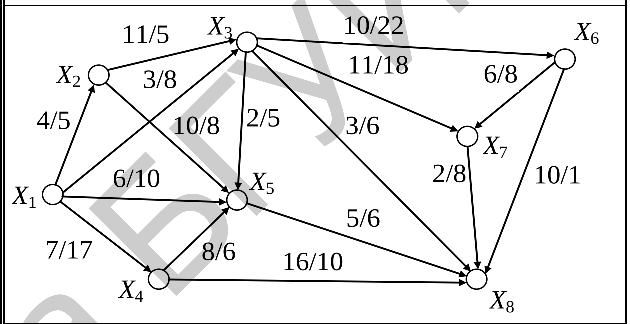
B4



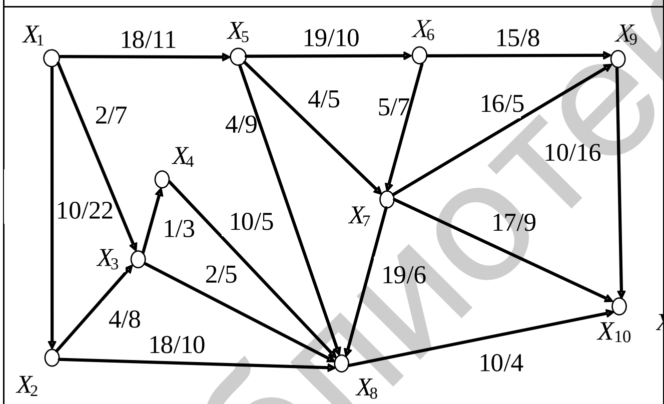
B5



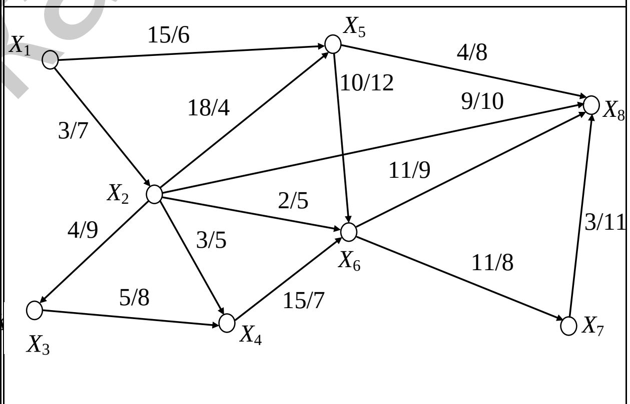
B6



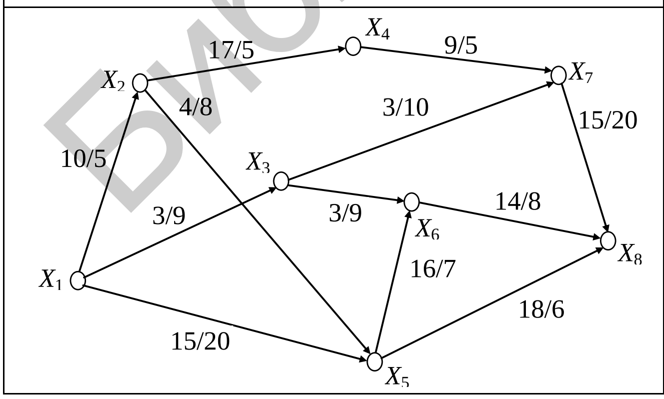
B7



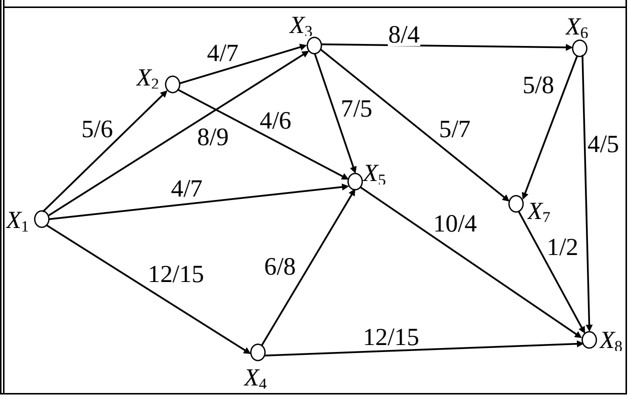
B8



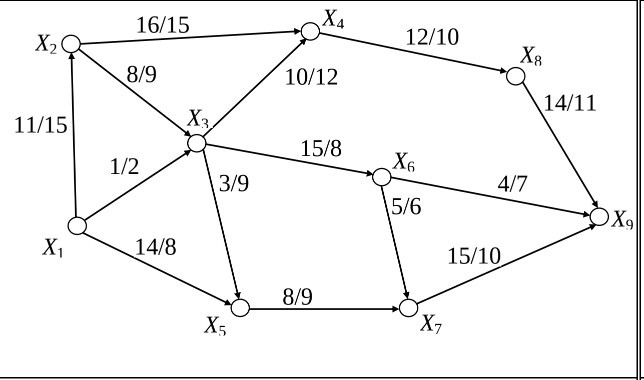
B9



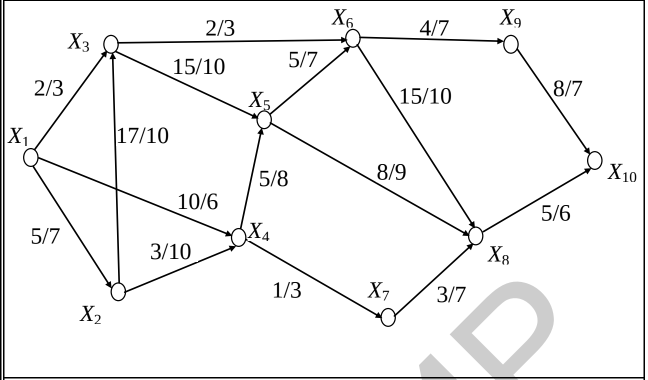
B10



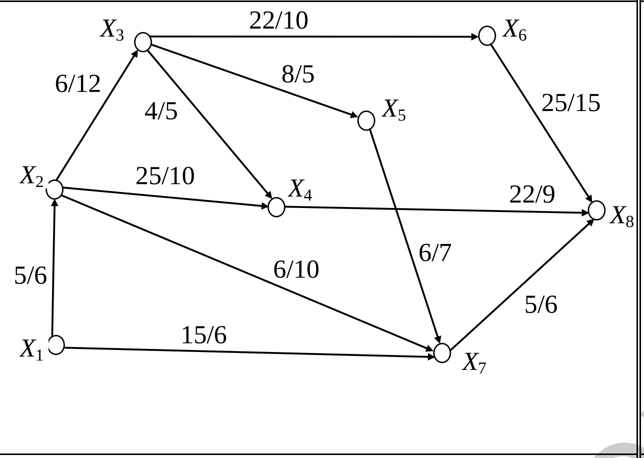
B11



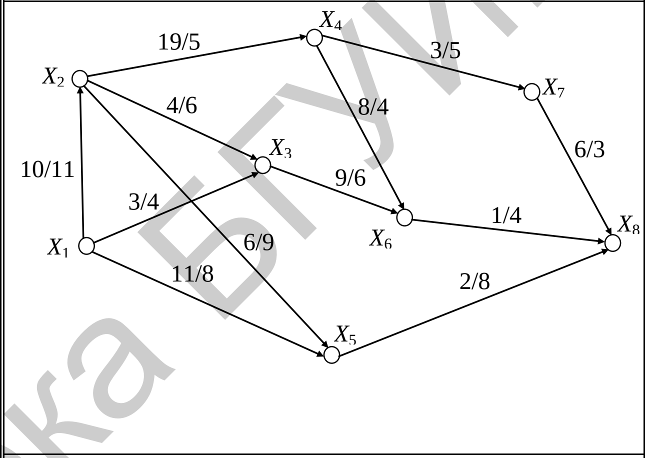
B12



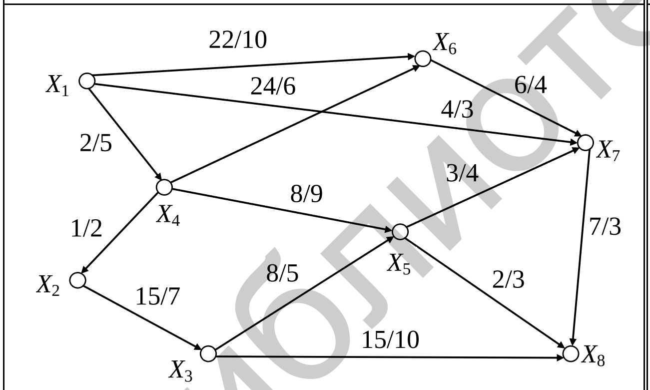
B13



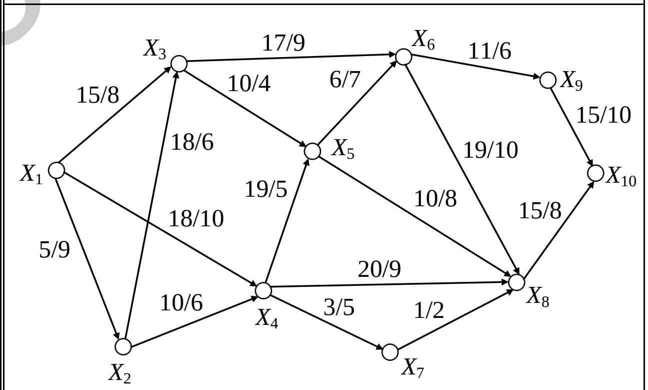
B14



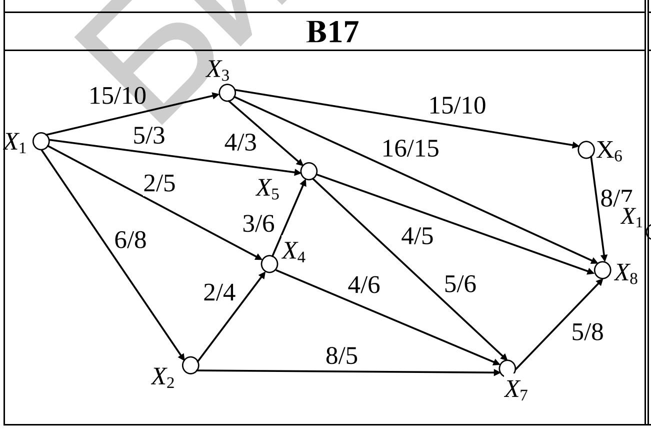
B15



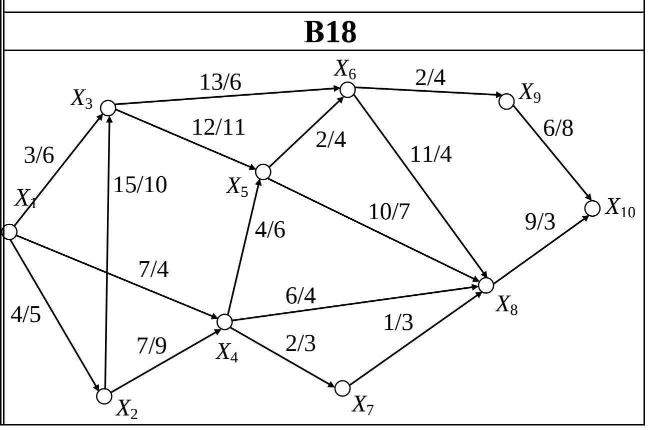
B16



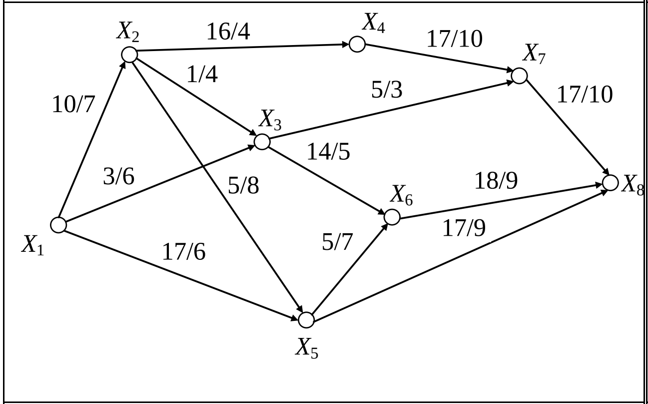
B17



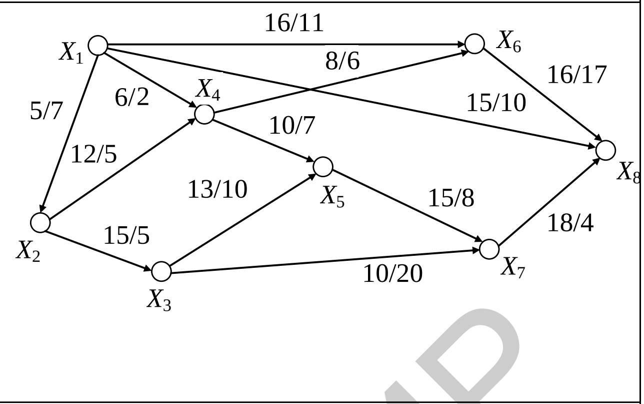
B18



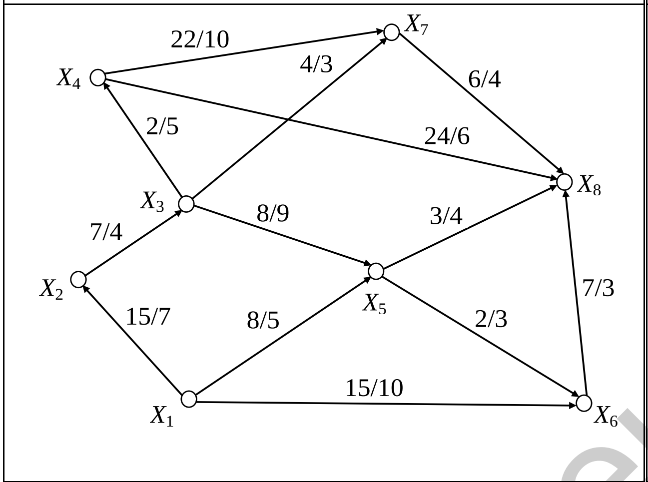
B19



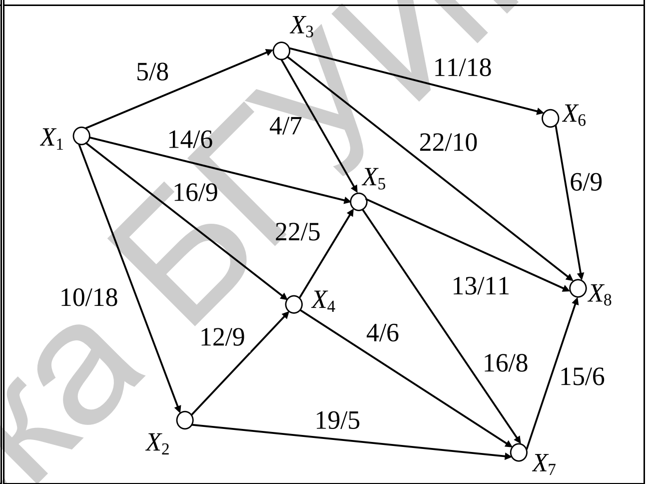
B20



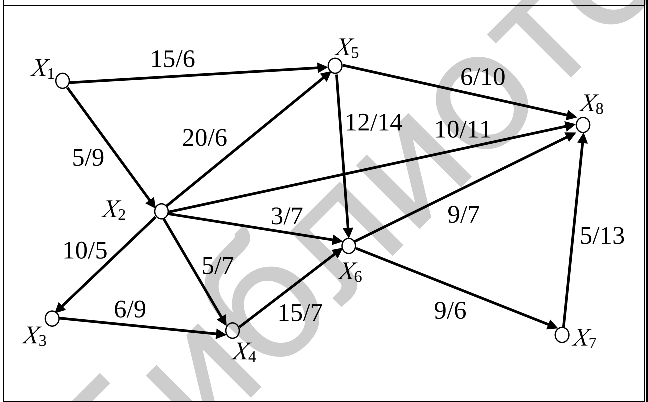
B21



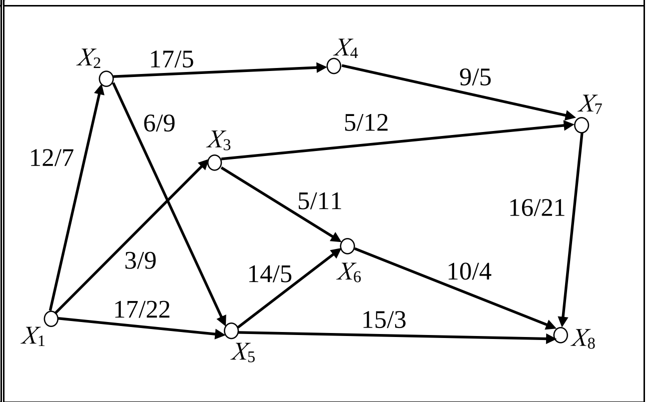
B22



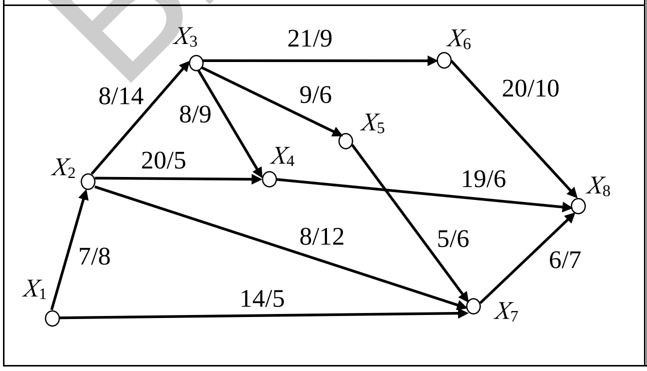
B23



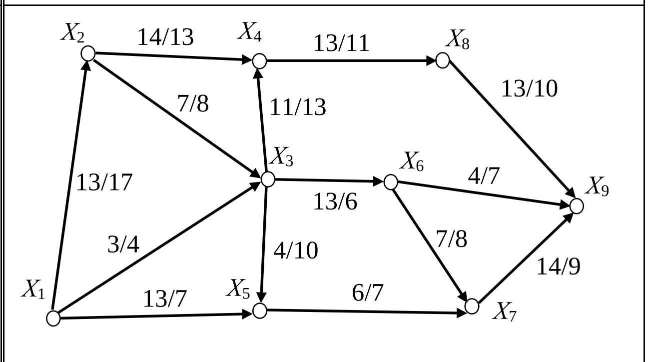
B24



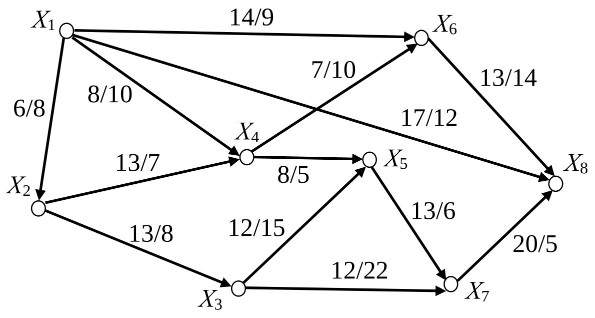
B25



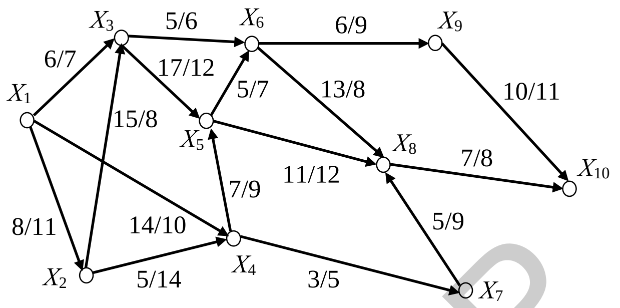
B26



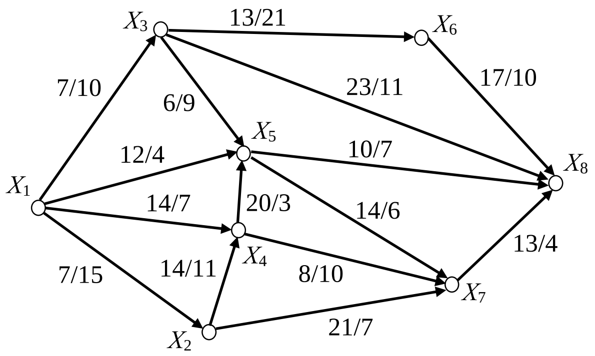
B27



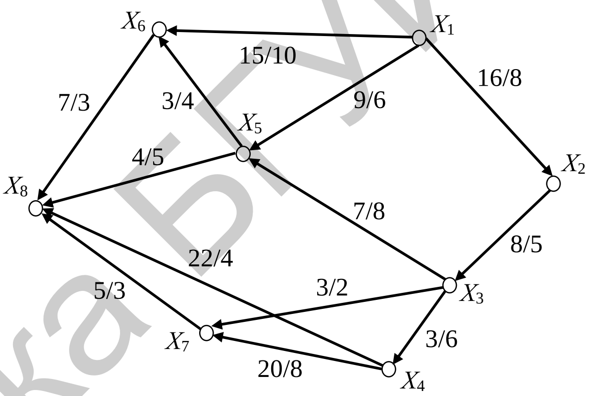
B28



B29



B30



Тема 10. Марковские цепи с дискретным и непрерывным временем

Литература: *основная* [8, с. 101–120], *дополнительная* [5, с. 173–176], [6, с. 181–232], [7], [12, с. 326–375], [14, с. 58–62], [15, с. 20–23], [16, с. 57–70], [24, с. 219–226], [25, с. 101–105], [29, с. 756–764], [30, с. 11–30].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие потока событий, пуассоновского потока, простейшего потока, характеристики потока.
2. Случайный процесс: понятие, виды.
3. Понятие марковских цепей с дискретным и непрерывным временем.
4. Дискретная марковская цепь: определение, вероятности состояний и переходов, финальные вероятности.
5. Уравнения Чепмена – Колмогорова.
6. Непрерывная марковская цепь: определение, вероятности состояний и переходов, финальные вероятности.
7. Уравнения Колмогорова.
8. Цепи гибели и размножения, расчет финальных вероятностей состояний.

Обозначения, используемые в разделе

λ – интенсивность простейшего потока

$X(\tau)$ – число событий потока, попадающих на участок времени длиной τ

S – рассматриваемая система

n – число состояний системы

S_i – i-е состояние системы S, $i = 1, \ldots, n$

m – номер шага в дискретной марковской цепи, $m = 0, 1, \ldots$

$P_i(m)$ – вероятность состояния S_i в дискретной марковской цепи (вероятность того, что после m-го шага (и до $(m+1)$-го) система будет находиться в состоянии S_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, $m = 0, 1, \ldots$

$p_{ij}(m)$ – вероятность перехода системы S из состояния S_i в состояние S_j на m-м шаге в дискретной марковской цепи, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $m = 0, 1, \ldots$

$\left(p_{ij}(m)\right)$ – матрица переходных вероятностей системы S из состояния S_i в состояние S_j на m-м шаге в дискретной марковской цепи, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $m = 0, 1, \ldots$

$P_i(t)$ – вероятность состояния S_i в непрерывной марковской цепи (вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$\lambda_{ij}(t)$ – плотность вероятности (интенсивность) перехода системы S из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t в непрерывной марковской цепи, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$

$\left(\lambda_{ij}(t)\right)$ – матрица интенсивностей перехода системы S из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t в непрерывной Марковской цепи, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$

Решение типовых задач

Задача 10.1. Потоки событий

Для анализа изменения с течением времени размера текущего фонда компании, ведущей дела по страхованию автомобилей, важно обладать информацией о процессе поступления в компанию требований по выплатам в соответствии со страховыми полисами.

Наблюдение за работой компании в предшествующий период показало, что число поступающих требований по выплатам за любой промежуток времени τ зависит только от его продолжительности; требования в компанию в любые два непересекающихся интервала времени поступают независимо; в достаточно малые промежутки времени в компанию поступает по одному требованию. Ожидаемое число требований, поступающих в компанию за неделю, – 2.

Какова вероятность того, что:

1) за месяц в компанию поступит семь требований;
2) за месяц в компанию поступит менее семи требований;
3) за месяц в компанию поступит не менее семи требований;
4) за неделю в компанию не поступит ни одного требования;
5) за две недели в компанию поступит хотя бы одно требование;
6) интервал времени между двумя соседними требованиями будет не менее 2 дней;
7) интервал времени между двумя соседними требованиями будет меньше 2 дней?

Решение

Обозначим поток требований по выплатам, поступающим в компанию, через Π. По условию число поступающих в компанию требований по выплатам за любой промежуток времени τ не зависит от начала этого промежутка, а зависит лишь от его длины. Поэтому поток Π будет стационарным.

Поскольку требования за любые два непересекающиеся интервала времени поступают в компанию независимо, то поток Π обладает свойством отсутствия последействия. Так как в достаточно малые промежутки времени в компанию поступает по одному требованию, то поток ординарен.

Таким образом, поток Π является стационарным пуассоновским, т. е. простейшим потоком.

В условиях данной ситуации за единицу времени естественно принять неделю. По условию интенсивность λ потока Π равна двум требованиям в неделю.

$X(\tau)$ – число требований по выплатам, поступающим в компанию за промежуток τ (недель), распределено по закону Пуассона:

$$p_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Продолжительность промежутков между событиями имеет экспоненциальное (показательное) распределение: вероятность того, что промежуток времени между событиями не превысит величины τ определяется по формуле

$$F(\tau) = 1 - \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}.$$

1. Имеем $\tau = 1$ месяц = 4 недели и $k = 7$. Тогда вероятность поступления за месяц семи требований по выплатам вычисляем по закону распределения Пуассона: $p_7(4) = \dfrac{(2 \cdot 4)^7}{7!} e^{-2 \cdot 4} \approx 0{,}14$.

2. Вероятность поступления в компанию менее семи требований по выплатам за месяц: $p(X(4) < 7) = e^{-2 \cdot 4} \sum\limits_{k=0}^{6} \dfrac{(2 \cdot 4)^k}{k!} \approx 0{,}313$.

3. Вероятность поступления в компанию не менее семи требований по выплатам за месяц: $p(X(4) \geq 7) = 1 - p(X(4) < 7) = 1 - 0{,}313 = 0{,}687$.

4. Имеем $\tau = 1$ неделя. Вероятность того, что за неделю в компанию не поступит ни одного требования по выплатам: $p_0(1) = e^{-2 \cdot 1} \approx 0{,}135$.

5. Имеем $\tau = 2$ недели. Вероятность того, что за 2 недели в компанию поступит хотя бы одно требование: $p(X(2) \geq 1) = 1 - e^{-2 \cdot 2} \approx 0{,}98$.

6. Вероятность, что T (промежуток времени между любыми двумя соседними требованиями по выплатам) не меньше 2 дней, находим при $t = 2$ дня = 2/7 недели: $p(T \geq 2/7) = e^{-2 \cdot 2/7} \approx 0{,}565$.

7. Вероятность того, что T меньше 2 дней, находим при $t = 2$ дня = 2/7 недели: $p(T < 2/7) = 1 - p(T \geq 2/7) = 1 - e^{-2 \cdot 2/7} \approx 0{,}435$.

Задача 10.2. Дискретный марковский процесс с дискретным временем

Рассмотрим состояния банка, характеризующиеся одной из процентных ставок: 2, 3, 4 %, которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении. Задана следующая матрица переходных вероятностей:

$$\left(p_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением временем пренебрежимо мало.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний системы;

б) определить вероятности состояний банка в конце года, если в конце предыдущего года процентная ставка банка составляла 3 %;

в) определить финальные вероятности состояний банка.

Решение

а) Примем за систему S рассматриваемый банк, тогда в каждый момент времени возможны следующие состояния: S_1 – процентная ставка 2 %, S_2 – процентная ставка 3 %, S_3 – процентная ставка 4 %. Размеченный граф состояний банка изображен на рисунке 10.1.

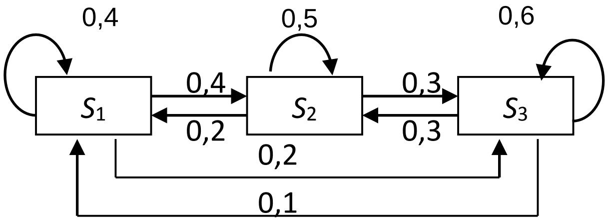


Рисунок 10.1 – Размеченный граф состояний для задачи 10.2

Так как множество состояний, в которых может находиться система S, конечно (три состояния), то протекающий в системе S случайный процесс – дискретный.

С определенной степенью погрешности можно предположить, что вероятность пребывания банка в одном из своих состояний в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от его состояний в прошлом. А потому рассматриваемый случайный процесс можно считать марковским.

По условию банк может переходить из состояния в состояние только в заранее определенные моменты времени: t_m – начало m-го квартала, $m = 1, 2, 3, 4$, следовательно, случайный процесс в системе S является процессом с дискретным временем.

Так как зависимостью переходных вероятностей от времени можно пренебречь, то рассматриваемый процесс будет однородным.

Таким образом, в системе S протекает однородный марковский дискретный случайный процесс с дискретным временем, т. е. имеем однородную марковскую цепь.

Так как в конце предшествующего года процентная ставка составляла 3 %, то можно считать, что в начальный момент времени $t = 0$ система S находилась в состоянии S_2. Поэтому начальное распределение вероятностей имеет вид

$$\overline{P}(0) = (P_1(0) \;\; P_2(0) \;\; P_3(0)) = (0 \; 1 \; 0).$$

б) Вероятность состояний банка в конце года, т. е. по прошествии четырех кварталов, можно найти по формуле

$$\overline{P}(m) = \overline{P}(m-1)\cdot\left(p_{ij}\right) = \overline{P}(0)\cdot\left(p_{ij}\right)^m,$$

при $m = 4$. Для этого подсчитаем сначала $\left(p_{ij}\right)^4$:

$$\left(p_{ij}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left(p_{ij}\right)^4=\left(p_{ij}\right)^2\cdot\left(p_{ij}\right)^2=\begin{pmatrix}0,26 & 0,42 & 0,32\\ 0,21 & 0,42 & 0,37\\ 0,16 & 0,37 & 0,47\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,26 & 0,42 & 0,32\\ 0,21 & 0,42 & 0,37\\ 0,16 & 0,37 & 0,47\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,2070 & 0,4040 & 0,3890\\ 0,2020 & 0,4015 & 0,3965\\ 0,1945 & 0,3965 & 0,4090\end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\overline{P}(4)=(P_1(0)\quad P_2(0)\quad P_3(0))\cdot\left(p_{ij}\right)^4=$$

$$=(0\quad 1\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}0,2070 & 0,4040 & 0,3890\\ 0,2020 & 0,4015 & 0,3965\\ 0,1945 & 0,3965 & 0,4090\end{pmatrix}=(0,2020\quad 0,4015\quad 0,3965).$$

Итак, $P_1(4)$ = 0,2020, $P_2(4)$ = 0,4015, $P_3(4)$ = 0,3965, т. е. в конце года вероятности процентных ставок 2, 3, 4 % равны соответственно 0,2020, 0,4015, 0,3965. Таким образом, вероятнее всего процентная ставка к концу года останется такой же, как и была в конце предшествующего года, т. е. 3 %.

Замечание. Для нахождения вектора ($P_1(4)$; $P_2(4)$; $P_3(4)$) можно было четырежды последовательно использовать рекуррентную формулу:

- сначала найти вектор вероятностей состояний в первом квартале:

$$\overline{P}(1)=(P_1(1)\quad P_2(1)\quad P_3(1))=(P_1(0)\quad P_2(0)\quad P_3(0))\cdot\left(p_{ij}\right);$$

- затем во втором квартале:

$$\overline{P}(2)=(P_1(2)\quad P_2(2)\quad P_3(2))=(P_1(1)\quad P_2(1)\quad P_3(1))\cdot\left(p_{ij}\right);$$

- в третьем квартале:

$$\overline{P}(3)=(P_1(3)\quad P_2(3)\quad P_3(3))=(P_1(2)\quad P_2(2)\quad P_3(2))\cdot\left(p_{ij}\right);$$

- в четвертом квартале:

$$\overline{P}(4)=(P_1(4)\quad P_2(4)\quad P_3(4))=(P_1(3)\quad P_2(3)\quad P_3(3))\cdot\left(p_{ij}\right).$$

в) При финальном стационарном режиме вероятности состояний системы не зависят ни от времени, ни от начального распределения вероятностей. Вероятности состояний системы в финальном стационарном режиме называются финальными (предельными, стационарными) $\overline{P}$ = (P_1, P_2, P_3).

Поскольку все элементы матрицы $\left(p_{ij}\right)$ положительны, то система S регулярна, и потому существуют финальные вероятности состояний P_1, P_2 и P_3.

Составим систему уравнений Колмогорова:

$$\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{3}P_i\cdot p_{ij}+P_j\cdot(p_{jj}-1)=0,\quad j=1,\ 2,\ 3.$$

Получаем

$$\begin{cases} P_2 \cdot 0,2 + P_3 \cdot 0,1 + P_1 \cdot (0,4-1) = 0, \\ P_1 \cdot 0,4 + P_3 \cdot 0,3 + P_2 \cdot (0,5-1) = 0, \\ P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,3 + P_3 \cdot (0,6-1) = 0. \end{cases}$$

После преобразований получаем

$$\begin{cases} -0,6P_1 + 0,2P_2 + 0,1P_3 = 0, \\ 0,4P_1 - 0,5P_2 + 0,3P_3 = 0, \\ 0,2P_1 + 0,3P_2 - 0,4P_3 = 0. \end{cases}$$

Уравнения полученной системы пропорциональны, а потому одно из них, например второе, можно отбросить. Заменив второе уравнение нормировочным условием $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} -0,6P_1 + 0,2P_2 + 0,1P_3 = 0, \\ 0,2P_1 + 0,3P_2 - 0,4P_3 = 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1, \end{cases}$$

решив которую, найдем P_1 = 0,2, P_2 = 0,4, P_3 = 0,4.

Таким образом, при достаточно длительном функционировании банка финальные вероятности процентных ставок 2, 3, 4 % равны приблизительно 0,2, 0,4 и 0,4. При этом они не зависят от начальной процентной ставки.

Полученный результат можно также трактовать следующим образом: при достаточно длительном функционировании банка среднее время за год, которое система проводит в состояниях S_1, S_2 и S_3, равно приблизительно 0,2, 0,4 и 0,4 года.

Задача 10.3. Дискретный марковский процесс с непрерывным временем

Техническое устройство (ТУ) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ = 0,02 ч$^{-1}$. Отказ обнаруживается не сразу, а через случайное время, распределенное по показательному закону с параметром ν = 2 ч$^{-1}$. Как только отказ обнаружен, производится осмотр ТУ, в результате которого оно либо направляется в ремонт (вероятность этого P = 0,7), либо списывается и заменяется новым. Время осмотра – показательное с параметром γ = 7 ч$^{-1}$, время ремонта – показательное с параметром μ = 0,5 ч$^{-1}$, время замены списанного ТУ новым – показательное с параметром χ = 1,8 ч$^{-1}$.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний системы;

б) найти финальные вероятности состояний системы;

в*) построить графики функциональных зависимостей вероятностей состояний системы.

Решение

а) Имеем однородный марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Обозначим следующие состояния системы S:

- 1 – ТУ исправно;

- 2 – ТУ неисправно, отказ не обнаружен;
- 3 – обнаружен отказ, производится осмотр ТУ;
- 4 – производится ремонт ТУ;
- 5 – производится замена списанного ТУ новым.

Из условия задачи получаем следующую матрицу интенсивностей переходов:

$$\left\|\lambda_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P\gamma & (1-P)\gamma \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}9 & 2{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размеченный граф состояний системы изображен на рисунке 10.2.

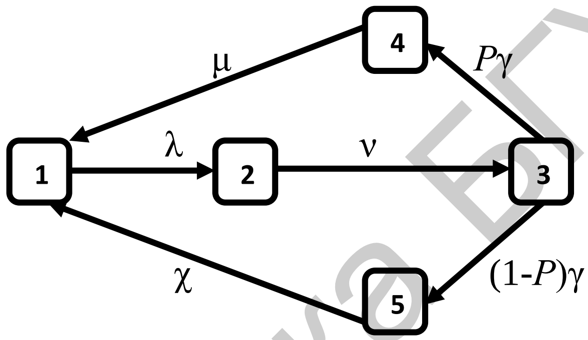


Рисунок 10.2 – Размеченный граф состояний для задачи 10.3

б) По условию все потоки событий, порождающие переходы системы S из состояния в состояние, – простейшие.

По графу видно, что система S эргодична, т. е. из любого своего состояния может перейти (за конечное число шагов) в любое другое свое состояние.

Значит, существуют финальные вероятности состояний $\overline{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, не зависящие от времени и состояний системы S в начальный момент времени.

Для нахождения финальных вероятностей системы в стационарном режиме построим систему алгебраических уравнений Колмогорова, соответствующую этому графу:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_1 + \mu P_4 + \chi P_5, \\ 0 = \lambda P_1 - \nu P_2, \\ 0 = -\gamma P_3 + \nu P_2, \\ 0 = P \cdot \gamma P_3 - \mu P_4, \\ 0 = (1-P) \cdot \gamma P_3 - \chi P_5. \end{cases}$$

Получим следующую систему уравнений (с нормировочным условием):

$$\begin{cases} 0,02P_1 - 0,5P_4 - 1,8P_5 = 0, \\ 0,02P_1 - 2P_2 = 0, \\ 7P_3 - 2P_2 = 0, \\ 0,7 \cdot 7P_3 - 0,5P_4 = 0, \\ 0,3 \cdot 7P_3 - 1,8P_5 = 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему (отбросим любое из первых пяти уравнений, например первое), имеем следующие финальные вероятности системы: P_1=0,95768, P_2=0,009577, P_3=0,002736, P_4 = 0,026815, P_5 = 0,003192.

*в**) Для нахождения функциональных зависимостей вероятностей состояний ТУ построим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, соответствующую этому графу:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1 + \mu P_4 + \chi P_5,$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1 - \nu P_2,$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\gamma P_3 + \nu P_2,$$
$$\frac{dP_4(t)}{dt} = P \cdot \gamma P_3 - \mu P_4,$$
$$\frac{dP_5(t)}{dt} = (1-P) \cdot \gamma P_3 - \chi P_5.$$

Подставим численные значения:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -0,02P_1 + 0,5P_4 + 1,8P_5,$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = 0,02P_1 - 2P_2,$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -7P_3 + 2P_2,$$
$$\frac{dP_4(t)}{dt} = 4,9P_3 - 0,5P_4,$$
$$\frac{dP_5(t)}{dt} = 2,1P_3 - 1,8P_5.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ ТУ находилось в исправном состоянии, то решать эту систему уравнений нужно при начальных условиях:

$$P_1(0) = 1,\ P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = P_5(0) = 0.$$

Построим графики функциональных зависимостей вероятностей состояний ТУ в пакете MATLAB.

Для этого создадим файл-функцию с именем **zadacha3.m** следующего содержания:

```
function F=zadacha3(t,P)
F=[-0.02*P(1)+0.5*P(4)+1.8*P(5);0.02*P(1)-2*P(2);
-7*P(3)+2*P(2);4.9*P(3)-0.5*P(4) ;2.1*P(3)-1.8*P(5)];
```

После этого в командной строке MATLAB введем следующие команды:

```
>> [T,Y]=ode45('zadacha3',[0,10],[1;0;0;0;0]);
>> plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2),T,Y(:,3),T,Y(:,4),T,Y(:,5));
>> grid on;
>> legend('P1','P2','P3','P4','P5');
```

В результате будет построен следующий график зависимостей вероятностей состояний P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 от времени в промежутке от 0 до 10 ч (рисунок 10.3).

Таким образом, более 95 % всего времени система проводит в состоянии 1 – ТУ исправно.

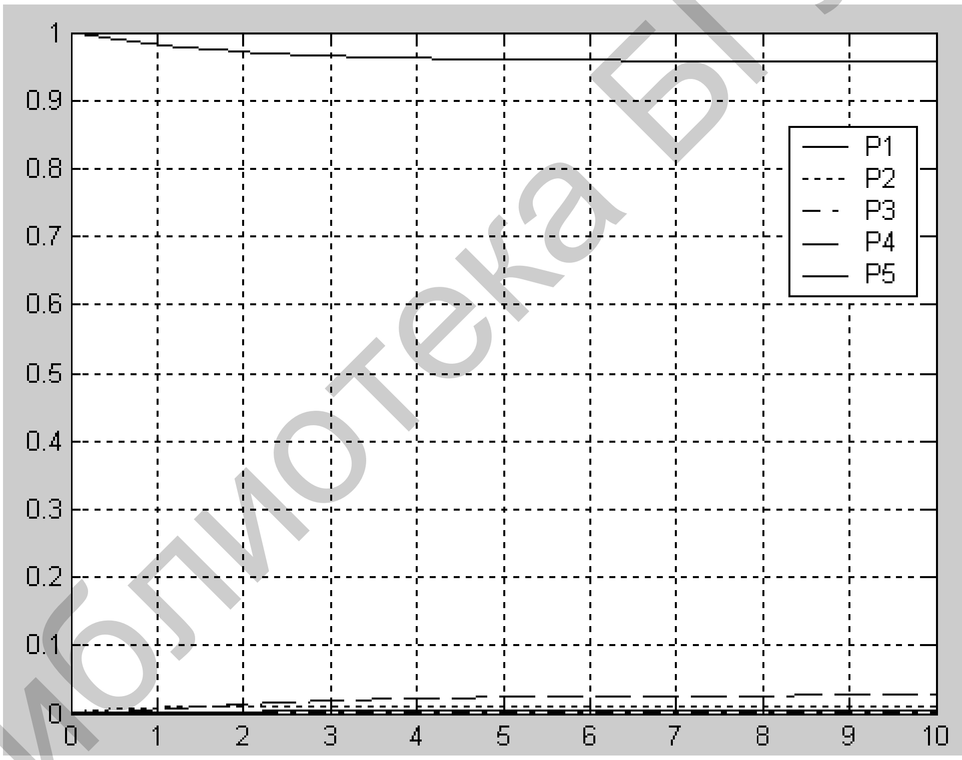


Рисунок 10.3 – Графики функциональных зависимостей вероятностей состояний ТУ в пакете MATLAB

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.4. Потоки событий

Число вкладов частных лиц в сберегательный банк за любой определенный промежуток времени не зависит от начала этого промежутка, а зависит лишь от его продолжительности. Вклады в банк в любые два непересекающиеся промежутка времени делаются независимо. В промежутки времени достаточно малой длины вклады в банк поступают по одному.

Средний интервал времени между двумя соседними вкладами равен $\left(\left[\dfrac{k}{10}\right]+2\right)$ ч (k – номер варианта). Найти вероятность для следующих случаев:

1) за 2 дня в банк будет сделано $\left[\dfrac{k}{5}\right]+1$ вкладов;
2) за день в банк не будет сделано ни одного вклада;
3) промежуток времени между двумя соседними вкладами составит меньше $\left(\left[\dfrac{k}{10}\right]+2\right)$ ч;
4) за 3 дня в банк будет сделан хотя бы один вклад.

Задача 10.5. Дискретный марковский процесс с дискретным временем

Некое техническое устройство подвергается регулярному техническому осмотру, по результатам которого его считают находящимся в следующих пяти состояниях:

1 – исправное;
2 – работающее с отказавшим элементом;
3 – проводится средний ремонт;
4 – находится на профилактике;
5 – проводится капитальный ремонт.

Переходные вероятности между состояниями для каждого варианта даны в таблице 10.1. Требуется:

а) построить размеченный граф состояний системы;

б) найти вероятность состояния работы с неисправным элементом после третьего техосмотра в зависимости от начального состояния;

в) найти среднее время за год, которое проведет техническое устройство в состоянии работы с неисправным элементом.

Таблица 10.1 – Исходные данные к задаче 10.5

Вариант	P_{12}	P_{14}	P_{23}	P_{25}	P_{31}	P_{41}	P_{43}	P_{45}	P_{51}
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
В1	0,48	0,45	0,25	0,31	0,61	0,24	0,26	0,28	0,81
В2	0,24	0,34	0,23	0,3	0,4	0,24	0,11	0,1	0,57
В3	0,19	0,26	0,3	0,17	0,69	0,28	0,16	0,16	0,73
В4	0,27	0,35	0,11	0,34	0,92	0,12	0,3	0,16	0,55
В5	0,17	0,31	0,14	0,35	0,6	0,31	0,26	0,15	0,88
В6	0,12	0,49	0,27	0,41	0,85	0,21	0,28	0,15	0,42

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В7	0,28	0,22	0,15	0,16	0,38	0,19	0,28	0,28	0,88
В8	0,41	0,42	0,13	0,14	0,8	0,18	0,33	0,28	0,9
В9	0,33	0,48	0,29	0,34	0,35	0,18	0,16	0,23	0,72
В10	0,31	0,39	0,14	0,15	0,89	0,33	0,11	0,16	0,58
В11	0,49	0,16	0,41	0,29	0,12	0,3	0,17	0,17	0,9
В12	0,35	0,19	0,27	0,46	0,35	0,24	0,29	0,25	0,93
В13	0,17	0,23	0,34	0,36	0,22	0,3	0,2	0,2	0,33
В14	0,29	0,49	0,3	0,28	0,64	0,24	0,14	0,26	0,18
В15	0,39	0,35	0,36	0,12	0,5	0,12	0,2	0,2	0,98
В16	0,44	0,27	0,14	0,29	0,16	0,17	0,33	0,11	0,36
В17	0,42	0,41	0,23	0,12	0,67	0,25	0,28	0,21	0,38
В18	0,14	0,29	0,36	0,27	0,28	0,16	0,32	0,23	0,92
В19	0,17	0,17	0,46	0,21	0,98	0,28	0,15	0,18	0,41
В20	0,12	0,46	0,44	0,36	0,77	0,2	0,2	0,17	0,17
В21	0,17	0,4	0,49	0,37	0,46	0,21	0,11	0,1	0,82
В22	0,23	0,16	0,11	0,31	0,24	0,24	0,11	0,27	0,62
В23	0,17	0,4	0,25	0,22	0,63	0,33	0,27	0,31	0,11
В24	0,37	0,16	0,36	0,14	0,92	0,28	0,1	0,29	0,47
В25	0,13	0,48	0,1	0,33	0,14	0,32	0,16	0,16	0,46
В26	0,36	0,29	0,17	0,1	0,42	0,12	0,33	0,21	0,62
В27	0,45	0,45	0,25	0,31	0,61	0,24	0,26	0,28	0,81
В28	0,24	0,35	0,23	0,3	0,4	0,24	0,11	0,1	0,57
В29	0,19	0,28	0,3	0,17	0,69	0,28	0,16	0,16	0,73
В30	0,27	0,34	0,11	0,34	0,92	0,12	0,3	0,16	0,55

Задача 10.6. Дискретный марковский процесс с непрерывным временем

Техническое устройство (ТУ) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. Отказ обнаруживается не сразу, а через случайное время, распределенное по показательному закону с параметром υ. Как только отказ обнаружен, производится осмотр ТУ, в результате которого оно либо направляется в ремонт (вероятность этого P), либо списывается и заменяется новым. Время осмотра – показательное с параметром γ, время ремонта – показательное с параметром μ, время замены списанного ТУ новым – показательное с параметром χ. Значения параметров указаны в таблице 10.2.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний системы;

б) найти финальные вероятности состояний системы;

*в**) построить графики функциональных зависимостей вероятностей состояний системы.

Таблица 10.2 – Исходные данные к задаче 10.6

Вариант	***λ*, ч$^{-1}$**	***υ*, ч$^{-1}$**	***P***	***γ*, ч$^{-1}$**	***μ*, ч$^{-1}$**	***χ*, ч$^{-1}$**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
В1	0,01	3	0,9	10	0,3	1,1
В2	0,03	3	0,8	9	0,3	1,9
В3	0,02	2	0,7	8	0,3	1,5
В4	0,01	1	0,8	5	0,5	1,4
В5	0,01	2	0,8	6	0,5	2
В6	0,02	3	0,9	6	0,2	0,7
В7	0,02	1	0,9	9	0,5	0,7
В8	0,03	2	0,9	6	0,5	1,8
В9	0,03	3	0,7	10	0,4	1,3
В10	0,03	2	0,9	6	0,4	0,9
В11	0,01	1	0,8	5	0,5	0,5
В12	0,02	3	0,8	5	0,2	0,5
В13	0,03	1	0,8	7	0,4	1,9
В14	0,01	3	0,7	5	0,5	1
В15	0,02	1	0,7	9	0,5	1,7
В16	0,01	3	0,7	7	0,4	1,8
В17	0,02	2	0,7	7	0,5	1,8
В18	0,02	2	0,7	8	0,3	0,9
В19	0,03	3	0,9	7	0,4	1,3
В20	0,03	3	0,9	6	0,2	1,1
В21	0,02	1	0,9	6	0,3	0,7
В22	0,02	2	0,7	5	0,5	1,7
В23	0,01	2	0,8	8	0,5	1
В24	0,02	2	0,8	10	0,4	2
В25	0,02	3	0,7	6	0,4	1,8
В26	0,01	1	0,8	10	0,4	2
В27	0,02	3	0,9	6	0,3	0,7
В28	0,02	1	0,9	8	0,5	0,7
В29	0,03	2	0,8	6	0,5	1,8
В30	0,03	2	0,7	10	0,4	1,3

Тема 11. Управляемые марковские цепи с доходами

Литература: *основная* [30], *дополнительная* [14, с. 62–64], [22, с. 14–26], [25, с. 105–113], [29, с. 737–752].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие управляемой марковской цепи.
2. Постановка задачи нахождения оптимальной стратегии в управляемой марковской цепи с доходами.
3. Рекуррентный и итерационный алгоритмы решения задачи нахождения оптимальной стратегии в управляемой марковской цепи с доходами.

Обозначения, используемые в разделе

S – рассматриваемая система

n – число состояний системы

S_i – i-е состояние системы S, $i = 1, \ldots, n$

K_i – множество возможных стратегий в состоянии i, $i = 1, \ldots, n$

$P^k = \left(p_{ij}^k\right)$ – матрица вероятностей перехода системы из состояния S_i в состояние S_j за один шаг при выборе стратегии k, $k \in K_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$

$R^k = \left(r_{ij}^k\right)$ – матрица доходов при переходе системы из состояния S_i в состояние S_j за один шаг при применении стратегии k, $k \in K_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$

m – номер шага

$u_m(i)$ – управление на m-м шаге в состоянии i, $i = 1, \ldots, n$, $m = 1, 2, \ldots$

Решение типовых задач

Задача 11.1. Управляемые марковские цепи с доходами

Игрушечных дел мастер открывает новое производство игрушек, выпуская каждую неделю одну новую игрушку, которая может получить большой спрос у публики (состояние S_1) или не найти спроса (состояние S_2). Если мастер находится в состоянии S_1, то в 50 % случаев к концу следующей недели он в нем и останется и, соответственно, в 50 % неудачных случаев он переходит в состояние S_2. Будучи в состоянии S_2, мастер экспериментирует с новыми игрушками и с вероятностью 0,4 может вернуться через неделю в состояние S_1 или с вероятностью 0,6 остаться в невыгодном состоянии S_2.

Если мастер имеет удачную игрушку и на следующей неделе сделал не менее удачную игрушку (система переходит из состояния S_1 в состояние S_1), то за эту неделю он получает доход 9 ден. ед. Если неделя закончилась переходом от неудачной игрушки к неудачной же (из состояния S_2 в состояние S_2), то мастер теряет 7 ден. ед. Наконец, если неудачная игрушка сменилась удачной или наоборот, то заработок измеряется 3 ден. ед.

В зависимости от обстановки мастер может действовать различными способами, которые изменят вероятности и доходы, управляющие процессом.

Если изготовленная игрушка удачна, то для повышения спроса на нее он может воспользоваться рекламой (назовем это стратегия 2), при этом вероятность того, что следующая игрушка будет удачная, равна 0,8, неудачная – 0,2. Однако так как за рекламу приходится платить, то ожидаемые за неделю доходы будут, конечно, ниже и составят 4 ден. ед. в обоих случаях.

В случае неудачной игрушки проведение исследования рынка (стратегия 2) повышает вероятность получения удачной игрушки: вероятность того что следующая игрушка будет удачная, равна 0,7, неудачная – 0,3. Но при этом возрастает и стоимость пребывания в этом состоянии: если следующая игрушка будет удачной, мастер получит доход 1 ден. ед., неудачной – потеряет 19 ден. ед.

Первоначальную стратегию (при отсутствии рекламы в случае удачной игрушки и проведения исследования в случае неудачной) будем называть стратегия 1.

Требуется найти наиболее выгодный набор еженедельного выбора стратегий в следующих случаях:

а) игрушечных дел мастер собирается остановить производство через семь недель;

б) игрушечных дел мастер не собирается останавливать производство.

Решение

Имеем управляемый марковский процесс с двумя состояниями (множество состояний эргодично) и доходами. В каждом из состояний каждую неделю возможен выбор одной из двух стратегий.

Матрицы переходных вероятностей и доходов для состояний S_1 и S_2 при применении стратегий 1 и 2 имеют следующий вид:

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix},\quad R^1 = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix},\qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix},\quad R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$$

и не зависят от номера недели.

а) В этом случае имеем задачу <u>с конечным числом</u> шагов, следовательно, для ее решения воспользуемся рекуррентным алгоритмом.

Разобьем процесс на шаги, номер шага m – номер недели.

Управление $u_m(i)$ в состоянии S_i на m-м шаге – номер стратегии, выбираемой в состоянии S_i и используемой на m-м шаге, т. е. стратегии, которой следует придерживаться при следующем переходе (на следующей неделе). Решение (поведение мастера) определено, если для всех i и m задано $u_m(i)$. Оптимальным является такое решение, которое максимизирует полный ожидаемый доход для всех i и m.

Рекуррентное уравнение имеет вид

$$W_m(i) = \max_{k \in \{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \, W_{m+1}(j) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad m = 7, \ldots, 1,$$

где $W_m(i)$ – ожидаемый оптимальный доход за шаги с m-го до последнего.

Использование этого рекуррентного соотношения подскажет мастеру, какую стратегию выбирать в каждом состоянии на каждом шаге, а также ознакомит его с ожидаемым будущим заработком на каждом шаге процесса. Чтобы применить эти соотношения, нужно задать граничные доходы процесса $W_8(i)$. Зададимся нулевыми значениями для обеих величин $W_8(1)$ и $W_8(2)$.

Найдем непосредственный ожидаемый доход q_i^k в состоянии S_i при использовании стратегии k по формуле $q_i^k = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k r_{ij}^k$ и внесем его в таблицу 11.1.

Таблица 11.1 – Исходные данные для задачи игрушечных дел мастера

Состояние S_i	**Стратегия k**	**Вероятность перехода**		**Доход**		**Непосредственно ожидаемый доход**
		p_{i1}^k	p_{i2}^k	r_{i1}^k	r_{i2}^k	q_i^k
1. Удачная игрушка	1. Без рекламы	0,5	0,5	9	3	6
	2. С рекламой	0,8	0,2	4	4	4
2. Неудачная игрушка	1. Без исследований	0,4	0,6	3	–7	–3
	2. Проводя исследования	0,7	0,3	1	–19	–5

Рассмотрим седьмую неделю ($m = 7$). С учетом начальных условий из рекуррентного уравнения получаем

$$W_7(i) = \max_{k \in \{1,2\}} \left\{ q_i^k \right\}.$$

Стратегия, которую нужно использовать в состоянии S_1, должна иметь наибольший непосредственный ожидаемый доход. Из таблицы 11.1 получаем

$$W_7(1) = \max_{k \in \{1,2\}} \left\{ q_1^k \right\} = \max\left\{6; 4\right\} = 6.$$

Следовательно, в состоянии S_1 лучше использовать первую стратегию, при этом доход будет равен 6.

Аналогично $W_7(2) = \max_{k \in \{1,2\}} \left\{ q_2^k \right\} = \max\left\{-3; -5\right\} = -3$.

Таким образом, и в состоянии S_2 лучшей является первая стратегия, а ожидаемый доход составит –3.

Вычислив $W_7(i)$ для всех состояний, можно снова использовать рекуррентное уравнение для определения $W_6(i)$ и стратегий для второго шага. Все вычисления сведены в таблицу 11.2.

Получаем следующее оптимальное управление: первые шесть недель вне зависимости от состояния на начале шага следует использовать более дорогую вторую стратегию, и только на последнем этапе (в последнюю неделю) можно воспользоваться более дешевой первой стратегией (без рекламы и исследований).

Таблица 11.2 – Решение задачи игрушечных дел мастера рекуррентным методом

Неделя	**Состояние** S_i	**Стратегия**		**Оптимальный ожидаемый доход**	**Оптимальное управление**
		k**=1**	k**=2**		
m	i	$W_7(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k \right\}$		$W_7(i)$	$u_7(i)$
7	**1**	6	4	6	1
	2	–3	–5	–3	1
		$W_6(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^k W_7(j) \right\}$		$W_6(i)$	$u_6(i)$
6	**1**	7,5	8,2	8,2	2
	2	–2,4	–1,7	–1,7	2
		$W_5(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^k W_6(j) \right\}$		$W_5(i)$	$u_5(i)$
5	**1**	9,25	10,22	10,22	2
	2	–0,74	0,23	0,23	2
		$W_4(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^k W_5(j) \right\}$		$W_4(i)$	$u_4(i)$
4	**1**	11,225	12,222	12,222	2
	2	1,226	2,223	2,223	2
		$W_3(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^k W_4(j) \right\}$		$W_3(i)$	$u_3(i)$
3	**1**	13,2225	14,2222	14,2222	2
	2	3,2226	4,2223	4,2223	2
		$W_2(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^k W_3(j) \right\}$		$W_2(i)$	$u_2(i)$
2	**1**	15,2223	16,2222	16,2222	2
	2	5,22226	6,22223	6,22223	2
		$W_1(i) = \max\limits_{k\in\{1,2\}} \left\{ q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}^k W_2(j) \right\}$		$W_1(i)$	$u_1(i)$
1	**1**	17,2222	18,2222	18,2222	2
	2	7,22223	8,22222	8,22222	2

Это означает, что мастеру предлагается пользоваться рекламой и проводить исследования, несмотря на увеличение расходов. Изменения, произведенные в переходных вероятностях, компенсируют дополнительные затраты.

При этом суммарный ожидаемый доход составит 18,2222, если в начале периода игрушечных дел мастер изготовил удачную игрушку, и 8,2222 – если игрушка была неудачной.

б) Поскольку по условию имеем задачу с бесконечным числом шагов, оптимальное управление будет определять стратегию, максимизирующую ***средний*** заработок за неделю.

Значения величины q_i^k – ожидаемого дохода за один переход при выходе из состояния i и при выборе стратегии k – представлены в таблице 11.1.

Применим **итерационный алгоритм**, состоящий из двух процедур на каждом шаге: 1) определения весов; 2) улучшения решения. Величины v_1 и v_2 – веса – показывают, насколько в среднем отличается доход, если процесс заканчивается в соответствующем состоянии.

Выполнение алгоритма можно начинать с любой процедуры.

Итерация 1:

1) Выполним ***процедуру определения весов***. Положим $v_1 = v_2 = 0$.

2) Выполним ***процедуру улучшения решения***. Для каждого состояния S_i, используя найденные относительные веса, найдем стратегию k, которая максимизирует критерий $q_i^k + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k v(j)$.

Значения q_i^k найдены в таблице 11.1. Получаем:

- для первого состояния $\max\{6 + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \cdot 0;\ \ 4 + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \cdot 0\} = \max\{6;\ 4\} = 6$;

- для второго состояния

$$\max\{-3 + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \cdot 0;\ \ -5 + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \cdot 0\} = \max\{-3;\ -5\} = -3.$$

Таким образом, в качестве начального выберем управление, которое максимизирует непосредственно ожидаемый доход в каждом состоянии. Для мастера это управление состоит в выборе первой стратегии в обоих состояниях S_1 и S_2:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Итерация 2:

1) Выполним ***процедуру определения весов***, решив систему уравнений $g + v(i) = q_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v(j)$, которая оценит наше начальное решение.

$$g + v_1 = 6 + 0,5v_1 + 0,5v_2,$$
$$g + v_2 = -3 + 0,4v_1 + 0,6v_2.$$

Это система из двух уравнений с тремя неизвестными. Положим $v_2 = 0$, получим

$$g = 1,\ v_1 = 10,\ v_2 = 0.$$

2) Выполним ***процедуру улучшения решения***. Сведем вычисления в таблицу 11.3.

Таблица 11.3 – Улучшение решения в задаче игрушечных дел мастера

Состояние S_i	Стратегия k	Критерий $q_i^k + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k v_j$	Оптимальный ожидаемый доход	Оптимальная стратегия
S_1	1	6+0,5·10+0,5·0=11	12	2
	2	4+0,8·10+0,2·0=12		
S_2	1	–3+0,4·10+0,6·0=1	2	2
	2	–5+0,7·10+0,3·0=2		

Получаем, что вторая стратегия в каждом состоянии приводит к большему значению величины критерия, чем первая. Таким образом, управление, составленное из вторых стратегий в каждом состоянии, дает большую прибыль, чем исходное управление. Для этого решения

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Однако необходимо продолжить процедуру, т. к. у нас нет еще полной уверенности в том, что новое управление – наилучшее из всех, которое можно найти.

Итерация 3:

1) Выполним ***процедуру определения весов***. Система уравнений в этом случае принимает вид

$$g + v_1 = 4 + 0,8v_1 + 0,2v_2,$$
$$g + v_2 = -5 + 0,7v_1 + 0,3v_2.$$

Решением этих уравнений при $v_2 = 0$ является

$$g = 2,\ v_1 = 10,\ v_2 = 0.$$

Таким образом, прибыль процесса при управлении $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ удваивается по сравнению с прибылью, получаемой при исходном управлении.

2) Мы должны теперь снова использовать ***процедуру улучшения решения***, но т. к. относительные веса случайно оказались теми же самыми, что и в предыдущей итерации, вычисления, приведенные в таблице 11.3, просто повторяются. Снова получается управление $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, а т. к. оно совпадает с предыдущим, то и является **оптимальным**.

Мастеру следует придерживаться второй стратегии в каждом состоянии. Следуя этому правилу, он заработает 2 ден. ед. за неделю в среднем; это будет больше, чем заработок, обеспечиваемый любым другим решением (можно проверить, например, что оба управления $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ обеспечивают меньшие прибыли).

Для оптимального решения $v_1 = 10$, $v_2 = 0$, так что $v_1 - v_2 = 10$. Это означает, что даже если мастер придерживается оптимального поведения, используя рекламу и проводя исследования, он готов заплатить до 10 ден. ед. постороннему изобретателю за удачную игрушку в любой момент времени, если у него нет таковой. Относительные веса процесса при оптимальном решении могут, таким образом, помочь мастеру принять определенное решение о том, стоит ли покупать право на удачную игрушку, если его производство в упадке.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 11.2. Управляемые марковские цепи с доходами

Транспортное средство в процессе эксплуатации может переходить из рабочего состояния 1 в нерабочее 2 и обратно. Условно считается, что состояния могут меняться с шагом в один день с некой вероятностью. Для устранения поломки можно выбрать интенсивную стратегию ремонта, дающую вероятность p_{21}^1 устранения неисправности за один день (перехода из состояния 2 в состояние 1) и вероятность $p_{22}^1 = 1 - p_{21}^1$ неудачного ремонта. Интенсивная стратегия ремонта ежедневно требует $r_{21}^1 = r_{22}^1$ единиц средств, независимо от того, устранена ли неисправность. Применение более дешевой стратегии ремонта стоимостью $r_{21}^2 = r_{22}^2$ единиц средств дает меньшую вероятность устранения неисправности p_{21}^2 ($p_{22}^2 = 1 - p_{21}^2$). Вероятности поломок (переход из состояния 1 в 2) в обоих случаях одинаковы ($p_{12}^1 = p_{12}^2$). При успешной эксплуатации транспортного средства (поломка не произошла) доход составляет $r_{11}^1 = r_{11}^2$ единиц, при возникновении поломки дохода нет ($r_{12}^1 = r_{12}^2 = 0$). Все данные представлены в виде матриц P^1, P^2 вероятностей переходов и R^1, R^2 величин дохода (таблица 11.4). Найти:

а) наиболее выгодный набор ежедневного выбора стратегий ремонта в течение недели с использованием рекуррентного метода;

б) наиболее выгодный набор ежедневного выбора стратегий ремонта на достаточно большой срок (с использованием итерационного метода).

Таблица 11.4 – Исходные данные к задаче 11.2

Вариант	**Вероятности переходов**	**Доход**	**Вариант**	**Вероятности переходов**	**Доход**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
В1	$P^1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ -2,2 & -2,2 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ -1,3 & -1,3 \end{pmatrix}$	**В2**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2,3 & -2,3 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1,9 & -1,9 \end{pmatrix}$

1	2	3	4	5	6
В3	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3{,}5 & -3{,}5 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1{,}3 & -1{,}3 \end{pmatrix}$	**В4**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2{,}8 & -2{,}8 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1{,}4 & -1{,}4 \end{pmatrix}$
В5	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1{,}2 & -1{,}2 \end{pmatrix}$	**В6**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2{,}4 & -2{,}4 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1{,}7 & -1{,}7 \end{pmatrix}$
В7	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2{,}4 & -2{,}4 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1{,}4 & -1{,}4 \end{pmatrix}$	**В8**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3{,}5 & -3{,}5 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1{,}8 & -1{,}8 \end{pmatrix}$
В9	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3{,}3 & -3{,}3 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1{,}8 & -1{,}8 \end{pmatrix}$	**В10**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2{,}6 & -2{,}6 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1{,}4 & -1{,}4 \end{pmatrix}$
В11	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2{,}5 & -2{,}5 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$	**В12**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2{,}9 & -2{,}9 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1{,}4 & -1{,}4 \end{pmatrix}$
В13	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3{,}4 & -3{,}4 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1{,}8 & -1{,}8 \end{pmatrix}$	**В14**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3{,}7 & -3{,}7 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1{,}2 & -1{,}2 \end{pmatrix}$
В15	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3{,}1 & -3{,}1 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1{,}3 & -1{,}3 \end{pmatrix}$	**В16**	$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$	$R^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2{,}8 & -2{,}8 \end{pmatrix}$ $R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1{,}4 & -1{,}4 \end{pmatrix}$

1	2	3	4	5	6
B17	$P^1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,6 & 0,4\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}3 & 0\\-4,4 & -4,4\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1,2 & -1,2\end{pmatrix}$	**B18**	$P^1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}5 & 0\\-2,2 & -2,2\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\-1,5 & -1,5\end{pmatrix}$
B19	$P^1=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}4 & 0\\-2,2 & -2,2\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\-1,4 & -1,4\end{pmatrix}$	**B20**	$P^1=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,9 & 0,1\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}3 & 0\\-3 & -3\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1,8 & -1,8\end{pmatrix}$
B21	$P^1=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}3 & 0\\-2,5 & -2,5\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1,5 & -1,5\end{pmatrix}$	**B22**	$P^1=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}5 & 0\\-2 & -2\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\-1,7 & -1,7\end{pmatrix}$
B23	$P^1=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,8 & 0,2\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}5 & 0\\-3,4 & -3,4\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\-1,8 & -1,8\end{pmatrix}$	**B24**	$P^1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}5 & 0\\-3,7 & -3,7\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}5 & 0\\-1,2 & -1,2\end{pmatrix}$
B25	$P^1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,8 & 0,2\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}4 & 0\\-2 & -2\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\-1,3 & -1,3\end{pmatrix}$	**B26**	$P^1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,3 & 0,7\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}4 & 0\\-2,8 & -2,8\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\-1,4 & -1,4\end{pmatrix}$
B27	$P^1=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,6 & 0,4\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}3 & 0\\-4,4 & -4,4\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1,2 & -1,2\end{pmatrix}$	**B28**	$P^1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}4 & 0\\-2,2 & -2,2\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\-1,5 & -1,5\end{pmatrix}$
B29	$P^1=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,7 & 0,3\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}2,5 & 0\\-2,2 & -2,2\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}2,5 & 0\\-1,4 & -1,4\end{pmatrix}$	**B30**	$P^1=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,9 & 0,1\end{pmatrix}$ $P^2=\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,2 & 0,8\end{pmatrix}$	$R^1=\begin{pmatrix}3 & 0\\-3,5 & -3,5\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1,8 & -1,8\end{pmatrix}$

Тема 12. Одноканальные и многоканальные СМО с отказами и ожиданием

Литература: *основная* [27, с. 134–162], *дополнительная* [5, с. 298–308], [6, с. 238–268], [8, с. 120–142], [9, с. 300–311], [12, с. 360–362, 375–399], [14, с. 64–76], [15, с. 23–27], [16, с. 70–80], [18, с. 548–563], [24, с. 226–236], [29, с. 629–650], [31, с. 412–431].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Структура систем массового обслуживания (СМО).
2. Классификация и характеристики СМО.
3. Одноканальные СМО с отказами: граф состояний, расчет характеристик эффективности их работы.
4. Одноканальные СМО с неограниченной очередью: граф состояний, расчет характеристик эффективности их работы.
5. Одноканальные СМО с ограниченной очередью: граф состояний, расчет характеристик эффективности их работы.
6. Многоканальные СМО с отказами: граф состояний, расчет характеристик эффективности их работы.
7. Многоканальные СМО с неограниченной очередью: граф состояний, расчет характеристик эффективности их работы.
8. Многоканальные СМО с ограниченной очередью: граф состояний, расчет характеристик эффективности их работы.
9. Формулы Литтла.

Обозначения, используемые в разделе

n – число каналов в системе

m – максимальное число заявок в очереди

S_i – i-е состояние системы , $i = 0, 1, \ldots, n + m$

λ – интенсивность потока поступления заявок

μ – интенсивность потока обслуживания заявок

$\bar{t}$ – среднее время между поступлением заявок

$\bar{t}_{ОБ}$ – среднее время обслуживания заявок

ρ –интенсивность нагрузки системы

Q – относительная пропускная способность системы

A – абсолютная пропускная способность системы

P_i – финальная вероятность i-го состояния системы, $i = 0, 1, \ldots, n + m$

P_0 – вероятность простоя системы

$P_{отк}$ – вероятность отказа

$P_{зан}$ – вероятность занятости канала

$P_{обсл}$ – вероятность обслуживания заявки

$P_{очер}$ – вероятность наличия очереди

$P_{оч}$ – вероятность для заявки стать в очередь
k – среднее число занятых каналов
$k_{очер}$ – среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)
$k_{сист}$ – среднее число заявок в системе
$t_{очер}$ – среднее время пребывания заявки в очереди
$t_{сист}$ – среднее время пребывания заявки в системе

Решение типовых задач

Задача 12.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Известно, что звонки в телевизионное ателье с одним телефонным аппаратом поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\bar{t}_{ОБ} = 2$ мин.

Определить вид СМО и рассчитать показатели качества обслуживания.

Решение

Поток звонков можно считать пуассоновским. Будем также считать, что продолжительность разговора по телефону представляет собой экспоненциальную случайную величину. Следовательно, и входной, и выходной потоки в рассматриваемой системе являются пуассоновскими. Тогда телевизионное ателье можно рассматривать как **одноканальную СМО с отказами (**типа **M/M/1)**.

Приведем исходные данные к одним единицам измерения.

Интенсивность потока заявок

$$\lambda = 90 \text{ звонков в час.}$$

Интенсивность потока обслуживания

$$\mu = 1/\bar{t}_{ОБ} = 1/2 \text{ звонков в минуту} = 30 \text{ звонков в час.}$$

СМО имеет два состояния: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят. Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 12.1.

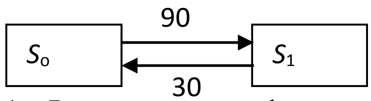


Рисунок 12.1 – Размеченный граф состояний к задаче 12.1

Найдем показатели качества работы СМО.

Приведенная интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки системы**:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{90}{30} = 3.$$

За среднее время обслуживания одной заявки приходит в среднем 3 новые заявки.

Финальные вероятности состояний

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{30}{90 + 30} = 0,25,$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{90}{90 + 30} = 0,75$$

выражают соответственно среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0 (когда канал свободен) и среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_1 (когда канал занят).

Вероятность отказа

$$P_{отк} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0,75.$$

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Значит, в среднем только 25 % поступающих заявок будут обслужены (состоится разговор по телефону).

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} = 90 \cdot 0,25 = 22,5,$$

т. е. в среднем в час будут обслужены только 22,5 заявки.

Задача 12.2. Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью

Авиационная техническая база имеет одно место для технического обслуживания самолетов, которые прибывают на обслуживание случайным образом, и если их не могут сразу обслужить, они становятся в очередь. На длину очереди ограничений нет. Промежутки времени t между двумя последовательными прибытиями самолетов удовлетворяют экспоненциальному закону с параметром λ = 5 самолетов в сутки. Время обслуживания также имеет экспоненциальное распределение с параметром μ = 0,25 самолета в час.

Определить вид СМО и рассчитать показатели качества обслуживания.

Решение

Поскольку по условию промежутки времени между двумя последовательными прибытиями самолетов и время обслуживания самолетов распределены по экспоненциальному закону, и входной, и выходной потоки в рассматриваемой системе являются пуассоновскими. Имеем **одноканальную СМО с неограниченной очередью (**типа **M/M/1/∞).**

Приведем исходные данные к одним единицам измерения.

Интенсивность потока заявок

$\lambda = 5$ самолетов в сутки.

Интенсивность потока обслуживания

$\mu = 0,25$ самолета в час = 6 самолетов в сутки.

Система имеет бесконечное количество состояний S_0, S_1, …, S_i, …, где S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят, очереди нет, S_2 – канал занят, одна заявка в очереди, S_i – канал занят, (i–1) заявок стоят в очереди.

Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 12.2.

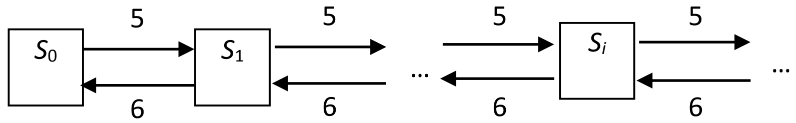


Рисунок 12.2 – Размеченный граф состояний к задаче 12.2

Найдем показатели качества работы СМО.

Приведенная интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки системы**:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} = 0{,}833.$$

За среднее время обслуживания одной заявки приходит в среднем 0,833 новой заявки. ***Проверка***: $\rho < 1$, следовательно, бесконечное накопление очереди не произойдет.

Финальные вероятности состояний

$$P_i = \rho^i (1-\rho), \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i. Поскольку общее количество состояний системы равно бесконечности, не представляется возможным найти вероятности всех состояний.

Вероятность простоя равна

$$P_0 = \rho^0 (1-\rho) = 1-\rho = 1-0{,}833 = 0{,}167,$$

т. е. в среднем 0,167 суток база будет простаивать.

Вероятность занятости канала

$$P_{зан} = 1 - P_0 = \rho = 0{,}833.$$

В рассматриваемой системе эта же величина определяет **среднее число занятых каналов:** $k = 0{,}833$.

Вероятность отказа

$$P_{отк} = 0,$$

в рассматриваемой системе будут обслужены все заявки.

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0 = 1.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 5 \cdot 1 = 5,$$

т. е. в среднем в сутки будут обслужены 5 самолетов.

Среднее число заявок в системе:

$$k_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}833}{1-0{,}833} = 5 \text{ самолетов.}$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди):

$$k_{очер} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}833^2}{1-0{,}833} = 4{,}167 \text{ самолета.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$t_{сист} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6-5} = 1 \text{ сутки.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$t_{очер} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{0,833}{6 \cdot (1-0,833)} = 0,833 \text{ суток.}$$

Получаем, что эффективность обслуживания самолетов высокая.

Задача 12.3. Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью

На авиационной технической базе в ангаре имеется $n = 1$ место для технического обслуживания самолетов и перед ангаром $m = 5$ стоянок для ожидания обслуживания. Поток прибывающих на обслуживание самолетов – пуассоновский с параметром $\lambda = 3,5$ (самолета в сутки), время технического обслуживания – случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром $\mu = 0,1$ (самолета в час).

Определить вид СМО и рассчитать показатели качества обслуживания.

Решение

Поскольку по условию входной поток самолетов является пуассоновским, а время технического обслуживания самолетов представляет собой экспоненциальную случайную величину, имеем **одноканальную СМО с ограниченной очередью (**типа **М/М/1/5)**.

Приведем исходные данные к одним единицам измерения.

Интенсивность потока заявок

$$\lambda = 3,5 \text{ самолета в сутки.}$$

Интенсивность потока обслуживания

$$\mu = 2,4 \text{ самолета в сутки.}$$

Система имеет всего 7 состояний S_0, S_1, …, S_6, где S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят, очереди нет, S_2 – канал занят, одна заявка в очереди, S_3 – канал занят, две заявки стоят в очереди, …, S_6 – канал занят, пять заявок стоят в очереди.

Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 12.3.

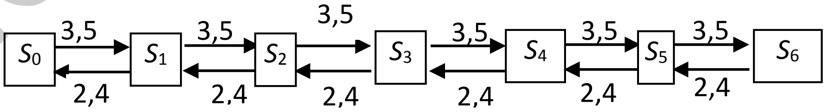


Рисунок 12.3 – Размеченный граф состояний к задаче 12.3

Найдем показатели качества работы СМО.

Интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки системы:**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3,5}{2,4} = 1,458.$$

За среднее время обслуживания одной заявки приходит в среднем 1,458 новой заявки.

Вероятность простоя

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^7} = 0,035.$$

Вероятность занятости канала

$$P_{зан} = 1 - P_0 = 1 - 0,035 = 0,965.$$

В рассматриваемой системе эта же величина определяет **среднее число занятых каналов** k = 0,965.

Финальные вероятности состояний

$$P_i = \rho^i P_0, \quad i = 1, \ ..., \ 6.$$

Вероятность одной заявки в системе (на обслуживании)

$$P_1 = \rho^1 P_0 = 1,458 \cdot 0,035 = 0,051.$$

Вероятность одной заявки в очереди

$$P_2 = \rho^2 P_0 = 1,458^2 \cdot 0,035 = 0,075.$$

Вероятность двух заявок в очереди

$$P_3 = \rho^3 P_0 = 1,458^3 \cdot 0,035 = 0,109.$$

Вероятность трех заявок в очереди

$$P_4 = \rho^4 P_0 = 1,458^4 \cdot 0,035 = 0,159.$$

Вероятность четырех заявок в очереди

$$P_5 = \rho^5 P_0 = 1,458^5 \cdot 0,035 = 0,232.$$

Вероятность пяти заявок в очереди

$$P_6 = \rho^6 P_0 = 1,458^6 \cdot 0,035 = 0,338.$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} = P_6 = 0,338.$$

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,338 = 0,662.$$

В среднем 66,2 % самолетов будут обслужены.

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 3,5 \cdot 0,662 = 2,317,$$

т. е. в среднем в сутки будут обслужены 2,317 самолета.

Среднее число заявок в системе:

$$k_{сист} = \frac{\rho(1 - 7 \cdot \rho^6 + 6 \cdot \rho^7)}{(1-\rho^7) \cdot (1-\rho)} = \frac{1,458 \cdot (1 - 7 \cdot 1,458^6 + 6 \cdot 1,458^7)}{(1 - 1,458^7) \cdot (1 - 1,458)} = 4,35 \text{ самолета.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (по формуле Литтла)

$$t_{сист} = \frac{k_{сист}}{\lambda} = \frac{4,35}{3,5} = 1,244 \text{ суток.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди

$$t_{очер} = t_{сист} - \frac{Q}{\mu} = 1,244 - \frac{0,662}{2,4} = 1,227 \text{ суток.}$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди) – по формуле Литтла

$$k_{очер} = t_{очер} \cdot \lambda = 1,227 \cdot 3,5 = 4,296 \text{ самолета.}$$

Видим, что эффективность обслуживания самолетов невысокая.

Задача 12.4. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

В круглосуточном пункте охраны семь бригад. В случае выезда всех бригад вновь поступивший вызов игнорируется. Бригада проводит на вызове в среднем 40 мин. За сутки поступает 25 вызовов.

Определить вид СМО и рассчитать показатели качества обслуживания.

Решение

Поток вызовов можно считать пуассоновским. Будем также считать, что время обслуживания вызова бригадой представляет собой экспоненциальную случайную величину. Тогда пункт охраны можно рассматривать как **многоканальную СМО с отказами (**типа **М/М/7)**.

Приведем исходные данные к одним единицам измерения.

Интенсивность потока заявок

λ = 25 вызовов в сутки.

Интенсивность потока обслуживания

μ = 40/60 ·24= 16 вызовов в сутки.

Число каналов равно n = 7.

Система имеет всего 8 состояний S_0, S_1, …, S_7, где S_0 – канал свободен, S_1 – первый канал занят, очереди нет, S_2 – второй канал занят, очереди нет, S_3 – третий канал занят, очереди нет, …, S_7 – седьмой канал занят, очереди нет.

Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 12.4.

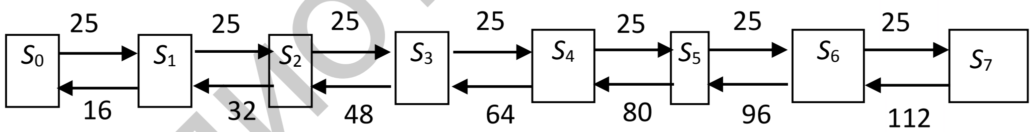


Рисунок 12.4 – Размеченный граф состояний к задаче 12.4

Найдем показатели качества работы СМО.

Интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки системы:**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{25}{16} = 1,5625.$$

Вероятность простоя

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \left(\frac{1,5625^0}{0!} + \frac{1,5625^1}{1!} + \frac{1,5625^2}{2!} + \frac{1,5625^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1,5625^4}{4!} + \frac{1,5625^5}{5!} + \frac{1,5625^6}{6!} + \frac{1,5625^7}{7!} \right)^{-1} = 0,21.$$

Финальные вероятности состояний

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \quad i = 1, \ \ldots, \ 7.$$

Вероятность занятости одного канала

$$P_1 = \frac{\rho^1}{1!} P_0 = 1{,}5625 \cdot 0{,}21 = 0{,}328.$$

Вероятность занятости двух каналов

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 = \frac{1{,}5625^2}{2!} \cdot 0{,}21 = 0{,}256.$$

Вероятность занятости трех каналов

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = \frac{1{,}5625^3}{3!} \cdot 0{,}21 = 0{,}134.$$

Вероятность занятости четырех каналов

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!} P_0 = \frac{1{,}5625^4}{4!} \cdot 0{,}21 = 0{,}052.$$

Вероятность занятости пяти каналов

$$P_5 = \frac{\rho^5}{5!} P_0 = \frac{1{,}5625^5}{5!} \cdot 0{,}21 = 0{,}016.$$

Вероятность занятости шести каналов

$$P_6 = \frac{\rho^6}{6!} P_0 = \frac{1{,}5625^6}{6!} \cdot 0{,}21 = 0{,}004.$$

Вероятность занятости семи каналов

$$P_{отк} = P_7 = \frac{\rho^7}{7!} P_0 = \frac{1{,}5625^7}{7!} \cdot 0{,}21 = 0{,}0009.$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} = P_7 = 0{,}0009.$$

Вероятность обслуживания

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}0009 = 0{,}9991.$$

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 0{,}9991.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 25 \cdot 0{,}9991 = 24{,}9775 \text{ вызовов в сутки.}$$

Среднее число занятых каналов

$$k = \frac{A}{\mu} = \frac{24{,}9775}{16} = 1{,}561,$$

т. е. в среднем 1,561 бригады находится на выезде.

Очевидно, что эффективность обслуживания вызовов высокая.

Задача 12.5. Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью

Для регистрации пассажиров аэропорт обладает четырьмя регистрационными стойками. Прибытие в аэропорт пассажиров во времени происходит в соответствии с распределением Пуассона со средней интенсивностью 41 пассажир в час. Время регистрации пассажиров подчиняется экспоненциальному распределению с математическим ожиданием 5 мин.

Определить вид СМО и рассчитать показатели качества обслуживания.

Решение

Поскольку в нашем случае по условию прибытие в аэропорт пассажиров во времени происходит в соответствии с распределением Пуассона, а время регистрации пассажиров подчиняется экспоненциальному распределению, то входной и выходной потоки являются пуассоновскими.

Имеем **многоканальную СМО без ограничений на очередь (**типа **М/М/4/∞)**.

Приведем исходные данные к одним единицам измерения.

Интенсивность потока заявок

λ = 41 пассажир в час.

Интенсивность потока обслуживания

μ = 60 /5 = 12 пассажиров в час.

Число каналов равно n = 4.

Система имеет бесконечное количество состояний S_0, S_1, …, S_4, S_5, …, S_i, …, где S_0 – канал свободен, S_1 – один канал занят, очереди нет, …, S_4 – четыре канала занято, очереди нет, S_5 – четыре канала занято, одна заявка в очереди, …, S_i – четыре канала занято, $(i - 4)$ заявок в очереди, … .

Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 12.5.

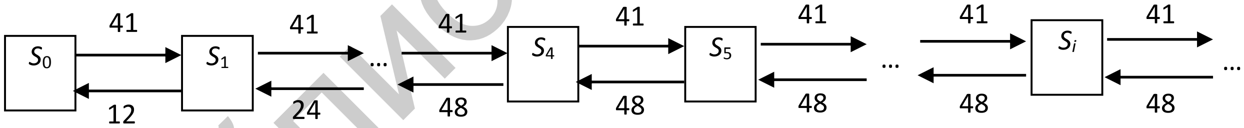


Рисунок 12.5 – Размеченный граф состояний к задаче 12.5

Найдем показатели качества работы СМО.

Интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки системы:**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{41}{12} = 3{,}42.$$

Проверка: $\rho < 4$, следовательно, бесконечное накопление очереди не произойдет.

Финальные вероятности состояний

$$\begin{cases} P_i = \dfrac{\rho^i}{i!} \cdot P_0, & 0 \le i \le n, \\ P_i = \dfrac{\rho^i}{n! \cdot n^{i-n}} \cdot P_0, & i \ge n \end{cases}$$

выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i. Поскольку общее количество состояний системы равно бесконечности, не представляется возможным найти вероятности всех состояний.

Вероятность простоя системы (т. е. вероятность того, что все каналы свободны)

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n-\rho} \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 3,42 + \frac{3,42^2}{2!} + \frac{3,42^3}{3!} + \frac{3,42^4}{4!} + \frac{3,42^{4+1}}{(4-3,42)\cdot 4!} \right]^{-1} \approx 0,0178.$$

Вероятность отказа

$$P_{отк} = 0.$$

В рассматриваемой системе будут обслужены все заявки.

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0 = 1.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 41 \cdot 1 = 41,$$

т. е. в среднем в час будет обслужен 41 пассажир.

Среднее число занятых каналов

$$k = \rho = 3,42.$$

Соответственно, среднее число свободных каналов $4 - k = 0,58$, что составляет 14,5 %.

Вероятность наличия очереди

$$P_{очер} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0 = \frac{3,42^5}{4!(4-3,42)} \cdot 0,0178 = 0,595.$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$k_{очер} = \frac{\rho^{n+1} \cdot n}{n! \cdot (n-\rho)^2} \cdot P_0 = \frac{3,42^5 \cdot 4}{4! \cdot (4-3,42)^2} \cdot 0,0178 = 4,126 \text{ пассажира}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер} = \frac{k_{очер}}{\lambda} = \frac{4,126}{41} = 0,101 \text{ ч}.$$

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист} = k_{очер} + k = 4,126 + 3,42 = 7,546 \text{ пассажира}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе (по формуле Литтла)

$$t_{сист} = \frac{k_{сист}}{\lambda} = \frac{7,546}{41} = 0,184 \text{ ч.}$$

Таким образом, эффективность обслуживания пассажиров высокая.

Задача 12.6. Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью

В круглосуточной службе доставки пиццы два курьера. В случае выезда всех курьеров к клиентам принимается не более пяти новых заявок. Курьер выполняет заказ в среднем за 20 мин и столько же тратит на обратную дорогу. У службы доставки 1000 заказов в месяц.

Определить вид СМО и рассчитать показатели качества обслуживания.

Решение

Поток заявок можно считать пуассоновским. Будем также считать, что время доставки заказа курьером представляет собой экспоненциальную случайную величину. Тогда службу доставки пиццы можно рассматривать как **многоканальную СМО с ограниченной очередью (**типа **M/M/2/5)**.

Приведем исходные данные к одним единицам измерения.

Интенсивность потока заявок

λ = 1000/720 (заявок в час) ≈ 1,3889 заявки в час.

Интенсивность потока обслуживания

μ = 60 /(20+20) = 1,5 заявки в час.

Число каналов равно $n = 2$.

Максимальная длина очереди $m = 5$.

Система имеет всего 8 состояний S_0, S_1, S_2, S_3, …, S_7, где S_0 – канал свободен, S_1 – один канал занят, очереди нет, S_2 – два канала занято, очереди нет, S_3 – два канала занято, одна заявка в очереди, …, S_7 – два канала занято, пять заявок в очереди.

Размеченный граф состояний системы представлен на рисунке 12.6.

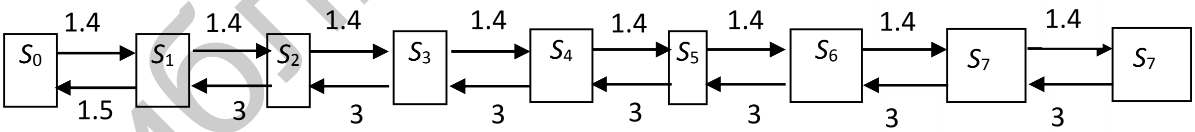


Рисунок 12.6 – Размеченный граф состояний к задаче 12.6

Найдем показатели качества работы СМО.

Интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки каналов**:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1,3889}{1,5} = 0,926.$$

Вероятность простоя системы (т. е. вероятность того, что все каналы свободны)

$$P_0=\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho^i}{i!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!}\cdot\frac{1-(\rho/n)^m}{n-\rho}\right]^{-1}=\left[1+\frac{0,926}{1!}+\frac{0,926^2}{2!}+\frac{0,926^3}{2!}\cdot\frac{1-0,463^5}{2-0,926}\right]^{-1}=0,368,$$

т. е. 36,8 % времени все каналы свободны – в системе нет заявок.

Финальные вероятности состояний

$$\begin{cases} P_i=\dfrac{\rho^i}{i!}\cdot P_0, & 1\le i\le n,\\ P_{n+i}=\dfrac{\rho^{n+i}}{n!\cdot n^i}\cdot P_0, & 1\le i\le m.\end{cases}$$

Вероятность занятости одного канала

$$P_1=\frac{\rho^1}{1!}P_0=0,926\cdot 0,368=0,341.$$

Вероятность занятости двух каналов

$$P_2=\frac{\rho^2}{2!}P_0=\frac{0,926^2}{2!}\cdot 0,368=0,158.$$

Вероятность занятости двух каналов и одной заявки в очереди

$$P_3=\frac{\rho^{2+1}}{2!\cdot 2^1}P_0=\frac{0,926^3}{2!\cdot 2}\cdot 0,368=0,073.$$

Вероятность занятости двух каналов и двух заявок в очереди

$$P_4=\frac{\rho^{2+2}}{2!\cdot 2^2}P_0=\frac{0,926^4}{2!\cdot 2^2}\cdot 0,368=0,034.$$

Вероятность занятости двух каналов и трех заявок в очереди

$$P_5=\frac{\rho^{2+3}}{2!\cdot 2^3}P_0=\frac{0,926^5}{2!\cdot 2^3}\cdot 0,368=0,016.$$

Вероятность занятости двух каналов и четырех заявок в очереди

$$P_6=\frac{\rho^{2+4}}{2!\cdot 2^4}P_0=\frac{0,926^6}{2!\cdot 2^4}\cdot 0,368=0,007.$$

Вероятность занятости двух каналов и пяти заявок в очереди

$$P_7=\frac{\rho^{2+5}}{2!\cdot 2^5}P_0=\frac{0,926^7}{2!\cdot 2^5}\cdot 0,368=0,003.$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк}=P_{n+m}=P_7=0,003.$$

Относительная пропускная способность системы

$$Q=1-P_{отк}=1-0,003=0,997.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A=\lambda Q=1,3889\cdot 0,997=1,3847,$$

т. е. в среднем в час будет обслужена 1,3847 заявки.

Среднее число занятых каналов (среднее число заявок на обслуживании)

$$k = \frac{A}{\mu} = 0,923.$$

Соответственно, среднее число свободных каналов 2 – k = 1,077.

Вероятность наличия очереди

$$P_{очер} = 1 - (P_0 + P_1) = 1 - 0,368 - 0,341 = 0,291.$$

Вероятность того, что вновь прибывшая заявка станет в очередь

$$P_{оч} = 1 - (P_0 + P_1 + P_7) = 1 - 0,368 - 0,341 - 0,003 = 0,288.$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$k_{очер} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot P_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m (m + 1 - m \cdot \frac{\rho}{n})}{(1 - \frac{\rho}{n})^2} =$$

$$= \frac{0,926^{2+1}}{2!\cdot 2} \cdot 0,368 \cdot \frac{1 - 0,463^5 \cdot (5 + 1 - 5 \cdot 0,463)}{(1 - 0,463)^2} = 0,233 \text{ заявки.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер} = \frac{k_{очер}}{\lambda} = \frac{0,233}{1,3889} = 0,168 \text{ ч.}$$

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист} = k_{очер} + k = 0,233 + 0,923 = 1,156 \text{ заявки.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (по формуле Литтла)

$$t_{сист} = \frac{k_{сист}}{\lambda} = \frac{1,156}{1,3889} = 0,832 \text{ ч.}$$

Таким образом, эффективность обслуживания клиентов высокая.

Задача 12.7*. «Двойная» система массового обслуживания

Система массового обслуживания представляет собой стоянку такси, на которую поступает поток пассажиров с интенсивностью λ, и поток машин с интенсивностью μ. Пассажиры образуют очередь, которая уменьшается на 1, когда к стоянке подходит машина. В случае когда на стоянке нет пассажиров, в очередь становятся машины. Число мест n для машин на стоянке ограничено.

Требуется определить характеристики СМО для двух случаев:

а) Все потоки простейшие, λ =12,0 (пассажиров в час), μ =15,0 (машин в час), m = 10. Очередь пассажиров не ограничена, посадка производится мгновенно. Определить средние значения очередей пассажиров и машин и средние значения времени пребывания на стоянке пассажиров и машин.

б) Все потоки простейшие, λ =12,0 (пассажиров в час), μ =12,0 (машин в час), m = 10. Очередь пассажиров ограничена (l = 20), посадка производится мгновенно. Определить средние значения очередей пассажиров и машин и средние значения времени пребывания на стоянке пассажиров и машин, вероятность для пассажира уехать на такси.

Решение

а) Пронумеруем состояния рассматриваемой СМО соответственно числу пассажиров и машин на стоянке двумя индексами:

- первый – число пассажиров;
- второй – число машин.

$S_{0,0}$ –на стоянке нет ни пассажиров, ни машин;

$S_{0,1}$ – на стоянке нет пассажиров, одна машина;

…;

$S_{0,i}$ – на стоянке нет пассажиров, i машин;

...;

$S_{0,m}$ – на стоянке нет пассажиров, m машин;

$S_{1,0}$ – на стоянке нет машин и один пассажир;

…;

$S_{j,0}$ – на стоянке нет машин и j пассажиров;

…

Размеченный ***граф состояний*** системы представлен на рисунке 12.7.

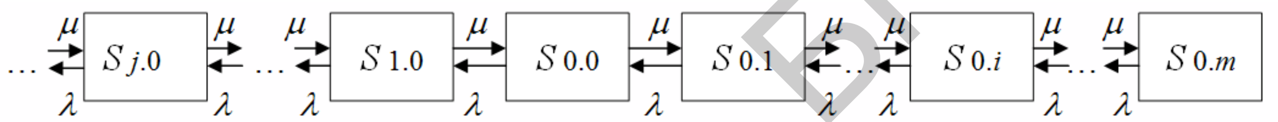


Рисунок 12.7 – Размеченный граф состояний для случая *а*

По условию все потоки ***простейшие***, λ =12,0, μ =15,0.

Тогда, воспользовавшись построенным графом гибели и размножения, найдем финальные вероятности состояний. Так как количество состояний бесконечно, и все $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda$ и все $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu$, получаем аналогично одноканальной системе массового обслуживания систему с бесконечной очередью:

$$P_0 = P_{0,m} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0,8 = 0,2,$$

т. е. 20 % времени на стоянке 10 машин и ни одного пассажира.

Вероятность очереди машин:

- девяти: $P_{0,9} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$

- восьми: $P_{0,8} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128;$

- семи: $P_{0,7} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7 P_0 = 0,8^7 \cdot 0,2 = 0,1024;$

- шести: $P_{0,6} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 = 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,0819;$

- пяти: $P_{0,5} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0 = 0,8^5 \cdot 0,2 = 0,0655;$

- четырех: $P_{0,4} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 P_0 = 0,8^6 \cdot 0,2 = 0,0524;$

- трех: $P_{0,3} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7 P_0 = 0,8^7 \cdot 0,2 = 0,0419;$

- двух: $P_{0,2} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^8 P_0 = 0,8^8 \cdot 0,2 = 0,0336;$

- одной: $P_{0,1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^9 P_0 = 0,8^9 \cdot 0,2 = 0,0268.$

Вероятность того, что на стоянке нет ни пассажиров, ни машин:

$$P_{0,0} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} P_0 = 0,8^{10} \cdot 0,2 = 0,0215.$$

Вероятность нахождения заявок в очереди

- одной: $P_{1,0} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{11} P_0 = 0,8^{11} \cdot 0,2 = 0,0172;$

- двух: $P_{2,0} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{12} P_0 = 0,8^{12} \cdot 0,2 = 0,0137$ и т. д.

Поскольку общее количество состояний системы равно бесконечности, не представляется возможным найти вероятности всех состояний.

Рассмотрим теперь **систему массового обслуживания пассажиров** и найдем ее характеристики.

Для этой системы приход пассажира – поступление заявки, а приезд такси – ее обработка. Количество пассажиров в очереди не ограничено. Пассажир, стоящий первым в очереди и ожидающий машину, находится на обслуживании в системе, остальные – в очереди на обслуживание. В момент посадки пассажира в такси он уезжает со стоянки и покидает систему.

Получаем одноканальную систему массового обслуживания с неограниченной очередью (типа **M/M/1**) – в размеченном графе состояний имеем следующее соответствие: состояния $S_{0,0}$, …, $S_{0,10}$ – простой, $S_{1,0}$ – один пассажир находится на обслуживании, $S_{2,0}$ – один пассажир находится на обслуживании и один в очереди, …, $S_{j,0}$ – один пассажир находится на обслуживании и j – 1 в очереди, … .

Для этой системы интенсивность потока заявок λ = 12 пассажиров в час, интенсивность потока обслуживания μ = 15 машин в час.

Найдем характеристики этой системы.

Интенсивность нагрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,8 < 1.$$

За среднее время обслуживания одной заявки (за среднее время ожидания первым пассажиром машины) приходит в среднем 0,8 новой заявки (нового пассажира).

Проверка: $\rho < 1$, следовательно, бесконечное накопление очереди не произойдет.

Финальные вероятности состояний выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i – найдены ранее.

Вероятность простоя системы есть вероятность того, что на стоянке не будет пассажиров:

$$P_0 = \sum_{i=0}^{m} P_{0,i} = P_{0,0} + P_{0,1} + \ldots + P_{0,m} = 0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 + 0,0819 + 0,0655 +$$

$$+0,0524 + 0,0419 + 0,0336 + 0,0268 + 0,0215 = 0,914.$$

Вероятность занятости канала (среднее число занятых каналов), т. е. вероятность того, что в системе будет находиться пассажир на обслуживании:

$$P_{зан} = 1 - P_0 = 1 - 0,914 = 0,086.$$

Вероятность отказа

$$P_{отк} = 0.$$

В рассматриваемой системе будут обслужены все заявки.

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0 = 1.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 12 \cdot 1 = 12,$$

т. е. в среднем в час будут обслужены 12 пассажиров.

Среднее число заявок (пассажиров) в системе

$$k_{сист} = \frac{\rho^{11}}{1-\rho} = \frac{0,8^{11}}{1-0,8} = 0,429 \text{ пассажира.}$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$k_{очер} = \frac{\rho^{12}}{1-\rho} = \frac{0,8^{12}}{1-0,8} = 0,344 \text{ пассажира.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (по формуле Литтла)

$$t_{сист} = \frac{k_{сист}}{\lambda} = \frac{0,429}{12} = 0,036 \text{ ч.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер} = \frac{k_{очер}}{\lambda} = \frac{0,344}{12} = 0,029 \text{ ч.}$$

С другой стороны, для **системы массового обслуживания машин** приезд такси – поступление заявки, а приход пассажира ее обработка. Количество машин на стоянке ограничено, m = 10. Машина, стоящая первой в очереди и ожидающая пассажира, находится на обслуживании в системе, остальные – в очереди на обслуживание. В момент посадки пассажира в такси они уезжают со стоянки и покидают систему.

Получаем одноканальную систему массового обслуживания с ограниченной очередью (типа **M/M/1/9**) – в размеченном графе имеем следующее соответствие: состояния $S_{0,0}$, …, $S_{j,0}$, … – простой, $S_{0,1}$ – одна машина находится на обслуживании, $S_{0,2}$ – одна машина находится на обслуживании и одна стоит в очереди, …, $S_{0,10}$ – одна машина находится на обслуживании и девять стоят в очереди.

Для этой системы интенсивность потока заявок μ = 15 машин в час, интенсивность потока обслуживания λ = 12 пассажиров в час.

Найдем характеристики этой системы.

Интенсивность потока заявок, или **интенсивность нагрузки системы:**

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{15}{12} = 1,25.$$

За среднее время ожидания одного пассажира приходит в среднем 1,25 машины.

Вероятность простоя системы есть вероятность того, что на стоянке не будет машин

$$P_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} P_{0,i} = 1 - (P_{0,1} + ... + P_{0,n}) = 1 - (0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 + 0,0819 +$$
$$+0,0655 + 0,0524 + 0,0419 + 0,0336 + 0,0268) = 1 - 0,714 = 0,1075.$$

Вероятность занятости канала (среднее число занятых каналов), т. е. вероятность того, что в системе будет находиться машина на обслуживании:

$$P_{зан} = 1 - P_0 = 1 - 0,1075 = 0,8925.$$

Финальные вероятности состояний выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i – найдены при исследовании размеченного графа состояний.

Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} = P_{0,10} = 0,2,$$

в среднем 20 % машин не смогут найти место на стоянке.

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \mu Q = 15 \cdot 0,8 = 12,$$

т. е. в среднем в час будут обслужены 12 машин.

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист}=\sum_{i=1}^{10}P_{0,i}\cdot i=\sum_{i=1}^{10}\rho^{i-10}\cdot\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\cdot i=\frac{\rho-1}{\rho^{11}}\sum_{i=1}^{10}i\rho^{i}=$$

$$=\frac{\rho-1}{\rho^{11}}\cdot\frac{\rho(1+10\rho^{11}-11\rho^{10})}{(1-\rho)^2}=\frac{1+10\rho^{11}-11\rho^{10}}{\rho^{10}(\rho-1)}=6,43 \text{ машины.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (по формуле Литтла)

$$t_{сист}=\frac{k_{сист}}{\mu}=\frac{6,43}{15}=0,429 \text{ ч.}$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди) (по формуле Литтла)

$$k_{очер}=\sum_{i=1}^{9}P_{0,i+1}\cdot i=\sum_{i=1}^{9}\rho^{i-9}\cdot(1-\frac{1}{\rho})\cdot i=\frac{\rho-1}{\rho^{10}}\sum_{i=1}^{9}i\rho^{i}=$$

$$=\frac{\rho-1}{\rho^{10}}\cdot\frac{\rho(1+9\rho^{10}-10\rho^{9})}{(1-\rho)^2}=\frac{1+9\rho^{10}-10\rho^{9}}{\rho^{9}(\rho-1)}=5,54 \text{ машины.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер}=\frac{k_{очер}}{\mu}=\frac{5,54}{15}=0,369 \text{ ч.}$$

б) Аналогично случаю *а* размеченный ***граф состояний*** системы имеет вид, представленный на рисунке 12.8.

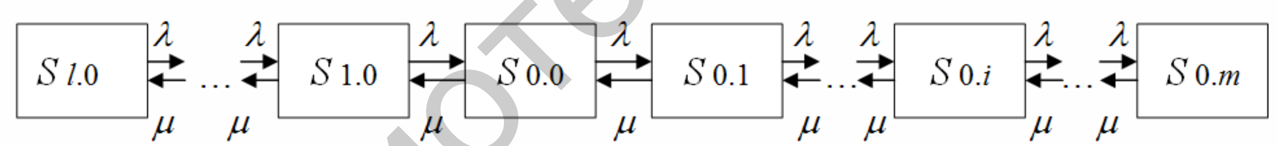


Рисунок 12.8 – Размеченный граф состояний для случая *б*

По условию все потоки ***простейшие***, λ =12,0, μ =12,0.

В этом случае как для СМО машин (типа **M/M/1/10**), так и для СМО пассажиров (**M/M/1/20**) получаем, что

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{12}{12}=1.$$

Отсюда, рассматривая обычный вывод формулы для СМО с конечным числом состояний и $\rho=1$, получаем, что все состояния равновероятны, и вероятность каждого состояния равна P = 1/31.

Финальные вероятности состояний

$$P_{20,0}=\ldots=P_{j,0}=\ldots=P_{1,0}=P_{0,0}=P_{0,1}=\ldots=P_{0,i}=\ldots=P_{0,10}=0,0323.$$

Вероятности отказа в обслуживании для СМО пассажиров и СМО машин

$$P_{отк.пас}=P_{20,0}=P_{отк.маш}=P_{0,10}=0,0323.$$

Вероятность простоя системы для СМО пассажиров есть вероятность того, что на стоянке не будет пассажиров,

$$P_0 = \sum_{i=0}^{m} P_{0,i} = P_{0,0} + P_{0,1} + ... + P_{0,m} = 11 \cdot \frac{1}{31} = 0,355.$$

Вероятность занятости канала для СМО пассажиров (среднее число занятых каналов), т. е. вероятность того, что в системе будет находиться пассажир на обслуживании:

$$P_{зан} = 1 - P_0 = 1 - 0,355 = 0,545.$$

Вероятность простоя для СМО машин есть вероятность того, что на стоянке не будет машин:

$$P_0 = \sum_{j=0}^{l} P_{j,0} = P_{0,0} + P_{1,0} + ... + P_{l,0} = 21 \cdot \frac{1}{31} = 0,677.$$

Вероятность занятости канала для СМО машин (среднее число занятых каналов), т. е. вероятность того, что в системе будет находиться машина на обслуживании:

$$P_{зан} = 1 - P_0 = 1 - 0,677 = 0,323.$$

Относительные пропускные способности СМО пассажиров и СМО машин

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,0323 = 0,9677.$$

в среднем по 96,77 % пассажиров и машин будут обслужены.

Абсолютные пропускные способности СМО пассажиров и СМО машин:

$$A = \lambda Q = \mu Q = 12 \cdot 0,9677 = 11,6124,$$

т. е. в среднем в час будут обслужены 11,6124 машины и пассажира.

Среднее число пассажиров в СМО пассажиров

$$k_{пас.сист} = \sum_{i=1}^{20} P \cdot i = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{31} \cdot i = \frac{1}{31} \cdot \sum_{i=1}^{20} i = \frac{1+2+3+...+20}{31} = \frac{210}{31} \approx 6,77 \text{ пассажира.}$$

Среднее время пребывания пассажиров в СМО пассажиров (по формуле Литтла)

$$t_{пас.сист} = \frac{k_{пас.сист}}{\lambda} = \frac{6,77}{12} = 0,564 \text{ ч.}$$

Среднее число пассажиров в очереди в СМО пассажиров

$$k_{пас.очер} = \sum_{i=1}^{19} P \cdot i = \sum_{i=1}^{19} \frac{1}{31} \cdot i = \frac{1}{31} \cdot \sum_{i=1}^{19} i = \frac{1+2+3+...+19}{31} = \frac{190}{31} \approx 6,13 \text{ пассажира.}$$

Среднее время пребывания пассажиров в очереди в СМО пассажиров (по формуле Литтла)

$$t_{пас.очер} = \frac{k_{пас.очер}}{\lambda} = \frac{6,13}{12} = 0,5108 \text{ ч.}$$

Среднее число машин в СМО машин

$$k_{маш.сист} = \sum_{i=1}^{10} P \cdot i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{31} \cdot i = \frac{1}{31} \cdot \sum_{i=1}^{10} i = \frac{1+2+3+...+10}{31} = \frac{55}{31} \approx 1,77 \text{ машины.}$$

Среднее время пребывания машин в СМО машин (по формуле Литтла)

$$t_{маш.сист} = \frac{k_{маш.сист}}{\mu} = \frac{1,77}{12} = 0,1475 \text{ ч.}$$

Среднее число машин в очереди в СМО машин

$$k_{маш.очер} = \sum_{i=1}^{9} P \cdot i = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{31} \cdot i = \frac{1}{31} \cdot \sum_{i=1}^{9} i = \frac{1+2+3+...+9}{31} = \frac{45}{31} \approx 1,45 \text{ машины.}$$

Среднее время пребывания машин в очереди в СМО машин (по формуле Литтла)

$$t_{маш.очер} = \frac{k_{маш.очер}}{\mu} = \frac{1,45}{12} = 0,121 \text{ ч.}$$

Таким образом, эффективность обслуживания пассажиров высокая.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 12.8. Системы массового обслуживания

1. Авиационная техническая база (АТБ) имеет одно место для технического обслуживания самолетов, которые прибывают на обслуживание случайным образом, и если их не могут сразу обслужить, они становятся в очередь. Промежутки времени t между двумя последовательными прибытиями самолетов удовлетворяют экспоненциальному закону с параметром λ. Время обслуживания на АТБ также имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Определить показатели качества СМО в двух случаях:

а) на длину очереди ограничений нет;

б) на площадке перед ангаром могут поместиться не более m самолетов.

2. Пусть ангар расширили, и теперь в него помещаются n самолетов на техническое обслуживание. Определить показатели качества СМО при следующих предположениях:

а) на длину очереди ограничений нет;

б) место для ожидания обслуживания для самолетов перед ангаром не предусмотрено;

в) на площадке перед ангаром могут поместиться не более m самолетов.

Числовые значения приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1 – Исходные данные к задаче 12.8

Вариант	**В1**	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**	**В6**	**В7**	**В8**	**В9**	**В10**
λ, 1/сут	2,5	5,5	1,5	4,5	1,5	1,5	3,5	2,5	3,5	4,5
μ, 1/ч	0,2	0,15	0,2	0,15	0,15	0,15	0,15	0,2	0,15	0,2
n	3	2	2	3	4	2	2	4	3	2
m	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3
Вариант	**В11**	**В12**	**В13**	**В14**	**В15**	**В16**	**В17**	**В18**	**В19**	**В20**
λ, 1/сут	3,5	4,5	5,5	1,5	5,5	5,5	4,5	4,5	4,5	5,5
μ, 1/ч	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,15	0,1	0,2	0,1	0,1
n	3	2	3	2	4	4	2	3	3	2
m	4	5	3	4	5	3	4	5	6	3
Вариант	**В21**	**В22**	**В23**	**В24**	**В25**	**В26**	**В27**	**В28**	**В29**	**В30**
λ, 1/сут	2,5	3,5	4,5	2,5	2,5	4,5	2,5	5,5	1,5	4,5
μ, 1/ч	0,15	0,2	0,15	0,15	0,15	0,15	0,3	0,16	0,22	0,16
n	3	2	2	3	4	4	2	3	4	4
m	4	5	6	4	5	6	4	5	6	3

Тема 13. Полумарковские СМО, многофазные СМО и сети СМО, замкнутые СМО

Литература: *основная* [27, с. 162–173], *дополнительная* [6, с. 268–291], [8, с. 142–147], [9, с. 300–311], [29, с. 683–692].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие полумарковских СМО, их особенности.
2. Расчет характеристик эффективности работы полумарковских СМО.
3. СМО с ограниченным временем ожидания.
4. СМО с разным временем обслуживания требований.
5. СМО с абсолютными и относительными приоритетами.
6. Замкнутые СМО.
7. Многофазные СМО и сети СМО.

Обозначения, используемые в разделе

Все обозначения предыдущего раздела.

D – дисперсия времени обслуживания заявок

σ – среднее квадратическое отклонение времени обслуживания заявок

α – второй начальный момент времени обслуживания заявок

v – коэффициент вариации времени поступления заявок

ε – коэффициент вариации времени обслуживания заявок

N – общее число заявок в замкнутой СМО

T – среднее время между моментом окончания обслуживания заявки и поступлением ее на обслуживание в замкнутой СМО

Решение типовых задач

Задача 13.1. Системы массового обслуживания с разным временем поступления заявок

Аэропорт с четырьмя стойками обслуживает пассажиров четырех национальностей: португальцев, казахов, палестинцев и чилийцев. Прибытие в аэропорт пассажиров всех четырех национальностей во времени происходит в соответствии с распределением Пуассона со средней интенсивностью 15, 9, 7, 10 пассажиров в час соответственно. Время регистрации пассажиров подчиняется экспоненциальному распределению с математическим ожиданием 5 мин. Определите тип и характеристики системы массового обслуживания.

Решение

Поскольку в нашем случае по условию прибытие в аэропорт пассажиров всех четырех национальностей во времени происходит в соответствии с распределением Пуассона, то **входной поток** является **простейшим**, и его интенсивность складывается из интенсивностей входных потоков для каждой из национальностей.

Выходной поток из системы также является **простейшим**, т. к. по условию время регистрации пассажиров подчиняется экспоненциальному распределению.

В нашем случае количество каналов n (количество регистрационных стоек) равно 4, следовательно, рассматриваемая система является **многоканальной**. Имеем СМО типа **M/M/*n* без ограничений на очередь**.

В этой СМО **интенсивность входящих потоков** равна: λ_1 = 15 португальцев в час, λ_2 = 9 казахов в час, λ_3 = 7 палестинцев в час, λ_4 = 10 чилийцев в час, **интенсивность выходящего потока** μ = 12 пассажиров в час.

Найдем **нагрузку на СМО** по формуле

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{\mu} = \frac{15+9+7+10}{12} = 3,42 < 4.$$

Следовательно, бесконечного накопления очереди не будет.

Найдем **вероятность простоя системы** (т. е. вероятность того, что все каналы свободны) P_0 по формуле

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n-\rho}\right]^{-1}.$$

Получаем

$$P_0 = \left[1 + 3,42 + \frac{3,42^2}{2!} + \frac{3,42^3}{3!} + \frac{3,42^4}{4!} + \frac{3,42^{4+1}}{(4-3,42)\cdot 4!}\right]^{-1} \approx 0,0178.$$

Финальные вероятности состояний

$$\begin{cases} P_i = \dfrac{\rho^i}{i!} \cdot P_0, & 0 \le i \le n, \\ P_i = \dfrac{\rho^i}{n! \cdot n^{i-n}} \cdot P_0, & i \ge n \end{cases}$$

выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i. Поскольку общее количество состояний системы равно бесконечности, не представляется возможным найти вероятности всех состояний.

Вероятность отказа

$$P_{отк} = 0,$$

в рассматриваемой системе будут обслужены все заявки.

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0 = 1.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 41 \cdot 1 = 41,$$

т. е. в среднем в час будет обслужен 41 пассажир.

Среднее число занятых каналов

$$k = \rho = 3,42.$$

Соответственно, среднее число свободных каналов 4 – k = 0,58, что составляет 14,5 %.

Вероятность наличия очереди

$$P_{очер} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0 = \frac{3,42^5}{4!(4-3,42)} \cdot 0,0178 = 0,595.$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$k_{очер} = \frac{\rho^{n+1} \cdot n}{n! \cdot (n-\rho)^2} \cdot P_0 = \frac{3,42^5 \cdot 4}{4! \cdot (4-3,42)^2} \cdot 0,0178 = 4,126 \text{ пассажира.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер} = \frac{k_{очер}}{\lambda} = \frac{4,126}{41} = 0,101 \text{ ч} = 6,06 \text{ мин.}$$

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист} = k_{очер} + k = 4,126 + 3,42 = 7,546 \text{ пассажира.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе (по формуле Литтла)

$$t_{сист} = \frac{k_{сист}}{\lambda} = \frac{7,546}{41} = 0,184 \text{ ч} = 11,04 \text{ мин.}$$

Таким образом, эффективность обслуживания пассажиров высокая.

Задача 13.2. Системы массового обслуживания с разным временем обслуживания заявок

Детали, при изготовлении которых допущен дефект, направляются для устранения дефекта на специальный станок. При изготовлении деталей возможны дефекты трех видов (обозначим их как A, B и C). Детали, имеющие несколько дефектов (два или три) одновременно, не подлежат ремонту; поэтому каждая деталь, поступающая на станок, имеет только один дефект. Детали, имеющие дефект A, поступают на станок в среднем через каждые 20 мин, с дефектом B – через каждые 10 мин, с дефектом C – через каждые 25 мин. Потоки деталей с дефектами каждого вида можно считать пуассоновскими. Устранение дефекта A занимает от 2 до 5 мин, устранение дефекта B – ровно 5 мин; время устранения дефекта C представляет собой гауссовскую случайную величину со средним значением 7 мин и стандартным отклонением 1,5 мин.

Требуется найти характеристики работы станка.

Решение

Так как потоки всех деталей с дефектами каждого вида можно считать пуассоновскими, поток всех деталей также можно считать пуассоновским.

Найдем интенсивности потоков деталей с дефектами каждого вида: λ_A = 1/20 = 0,05 детали в минуту, λ_B = 1/10 = 0,1 детали в минуту, λ_C = 1/25 = = 0,04 детали в минуту. Интенсивность потока всех деталей представляет собой сумму интенсивностей отдельных потоков: $\lambda = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C$ = 0,19 детали в минуту.

Найдем доли деталей каждого вида в общем потоке деталей:

$P_А = 0{,}05/0{,}19 = 0{,}26$, $P_В = 0{,}1/0{,}19 = 0{,}53$, $P_С = 0{,}04/0{,}19 = 0{,}21$.

Средние времена обработки деталей каждого вида

$\bar{t}_{ОБ.А} = (2 + 5)/2 = 3{,}5$ мин, $\bar{t}_{ОБ.В} = 5$ мин, $\bar{t}_{ОБ.С} = 7$ мин.

Среднее время обработки деталей всех видов

$$\bar{t}_{ОБ} = \sum_{i\in\{А,В,С\}} P_i \bar{t}_{ОБi},$$

откуда

$$\bar{t}_{ОБ} = 0{,}26\cdot 3{,}5 + 0{,}53\cdot 5 + 0{,}21\cdot 7 = 5{,}03 \text{ мин.}$$

Найдем коэффициент вариации времени обработки всех деталей. Для этого необходимо определить дисперсии времен обработки деталей каждого вида.

Время обработки деталей с дефектом А – случайная величина, распределенная по равномерному закону, границы диапазона значений равны $a = 2$ и $b = 5$. Тогда

$$D_А = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{5-2}{2\sqrt{3}} = 0{,}87.$$

Время обработки деталей с дефектом В – детерминированная (точно известная) величина. Для таких величин дисперсия равна нулю: $D_В = 0$.

Время обработки деталей с дефектом С – случайная величина, распределенная по гауссовскому закону. Для нее известно стандартное отклонение: $\sigma = 1{,}5$ мин. Так как дисперсия любой случайной величины представляет собой квадрат ее стандартного отклонения, $D_С = \sigma^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

Найдем коэффициент вариации времени обслуживания всех заявок.

Для этого найдем вначале вторые начальные моменты времен обработки деталей каждого вида:

$$\alpha_А = D_А + \bar{t}^2_{ОБ.А} = 0{,}87 + 3{,}5^2 = 13{,}12; \quad \alpha_В = 0 + 5^2 = 25; \quad \alpha_С = 2{,}25 + 7^2 = 51{,}25.$$

Второй начальный момент времени обслуживания всех заявок

$$\alpha = \sum_{i\in\{А,В,С\}} P_i\alpha_i = 0{,}26\cdot 13{,}12 + 0{,}52\cdot 25 + 0{,}21\cdot 51{,}25 = 27{,}42.$$

Дисперсия времени обслуживания всех заявок

$$D = \alpha - \bar{t}_{ОБ}^{\,2} = 27{,}42 - 5{,}03^2 = 2{,}12.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания всех заявок

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{D}}{\bar{t}_{ОБ}} = \frac{\sqrt{2{,}12}}{5{,}03} = 0{,}29.$$

Таким образом, все параметры, необходимые для расчета характеристик станка, известны. Поток деталей, поступающих на обработку, является пуассоновским, время обслуживания распределено по некоторому произвольному закону, и имеется один канал обслуживания. Поэтому станок можно представить как СМО типа **M/G/1**. В этой СМО $\lambda = 0{,}19$ детали в минуту, $\bar{t}_{ОБ} = 5{,}03$ мин, $\mu = 1/5{,}03 = 0{,}2$ детали в минуту, $\nu = 1$, $\varepsilon = 0{,}29$.

Найдем характеристики СМО.

Интенсивность нагрузки системы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,19}{0,2} = 0,95 < 1.$$

Вероятность простоя равна

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Финальные вероятности состояний

$$P_i = \rho^i (1 - \rho), \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Вероятность отказа

$$P_{отк} = 0.$$

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0 = 1.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 0,19 \cdot 1 = 0,19.$$

Вероятность занятости канала (среднее число занятых каналов)

$$k = 1 - P_0 = \rho = 0,95.$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$k_{очер} = \frac{\rho^2(\nu^2 + \varepsilon^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,95^2(1^2 + 0,29^2)}{2 \cdot (1 - 0,95)} = 9,78.$$

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист} = k_{очер} + k = 9,78 + 0,95 = 10,73.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер} = \frac{k_{очер}}{\lambda} = \frac{9,78}{0,19} = 51,5.$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$t_{сист} = t_{очер} + \bar{t}_{ОБ} = 51,5 + 5,03 = 56,53.$$

Из полученных характеристик видно, что станок явно перегружен: коэффициент загрузки 0,95. Это приводит к скоплению большого количества деталей, ожидающих обработки: в среднем ожидают обработки 9,78 детали. Среднее время пребывания деталей в очереди (т. е. время ожидания обработки) очень велико: оно составляет 51,5 мин, что более чем в 10 раз превышает время самой обработки. Для устранения этих недостатков можно рекомендовать установить еще один станок для ремонта дефектных деталей.

Задача 13.3. Замкнутые системы массового обслуживания

В цехе имеется 10 установок для производства пластмассы. Заправка установки сырьем занимает в среднем 20 мин. После заправки установка работает в среднем 2 ч; затем требуется новая заправка. Производительность установки – 13 кг пластмассы в час. Прибыль предприятия от продажи одного килограмма пластмассы составляет 3 ден. ед. Оператор, обслуживающий установки, получает 70 ден. ед. за рабочую смену (8 ч). Требуется определить, сколько операторов должно обслуживать цех, чтобы прибыль предприятия от его работы была максимальной.

Решение

Операторы, выполняющие заправку установок, могут рассматриваться как **замкнутая СМО**. **Заявками** в такой СМО являются установки, для которых периодически требуется заправка. Здесь T = 120 мин, $\bar{t}_{ОБ}$ = 20 мин, N = 10. Будем считать, что время работы установки (время между заправками) и время ее заправки – экспоненциальные случайные величины. Тогда операторы могут рассматриваться как замкнутая СМО типа **M/M/*n***. Величину n (количество операторов) требуется выбрать по результатам решения задачи.

а) Пусть в цехе работает только один оператор (n = 1). Найдем **характеристики работы оператора** по формулам для замкнутой СМО.

Вероятность простоя

$$P_0 = \left\{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{N!(\bar{t}_{ОБ}/T)^i}{(N-i)!i!} + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{N!(\bar{t}_{ОБ}/T)^i}{n^{i-n} \cdot n! \cdot (N-i)!}\right\}^{-1}.$$

Получаем

$$P_0 = \left[1 + \frac{10! \cdot (20/120)^1}{9! \cdot 1!} + \frac{10! \cdot (20/120)^2}{8! \cdot 1! \cdot 1^1} + \frac{10! \cdot (20/120)^3}{7! \cdot 1! \cdot 1^2} + \frac{10! \cdot (20/120)^4}{6! \cdot 1! \cdot 1^3} + \right.$$

$$+ \frac{10! \cdot (20/120)^5}{5! \cdot 1! \cdot 1^4} + \frac{10! \cdot (20/120)^6}{4! \cdot 1! \cdot 1^5} + \frac{10! \cdot (20/120)^7}{3! \cdot 1! \cdot 1^6} + \frac{10! \cdot (20/120)^8}{2! \cdot 1! \cdot 1^7} +$$

$$\left. + \frac{10! \cdot (20/120)^9}{1! \cdot 1! \cdot 1^8} + \frac{10! \cdot (20/120)^{10}}{0! \cdot 1! \cdot 1^9}\right]^{-1} \approx 0,043.$$

Среднее число заявок на обслуживание (среднее число занятых каналов)

$$k = \begin{cases} 1 - P_0, & n = 1, \\ n(1-P_0) - P_0 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \dfrac{N!(\bar{t}_{ОБ}/T)^i}{(N-i)!i!}, & n > 1. \end{cases}$$

Получаем

$$k = 1 - 0,043 = 0,957.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \frac{k}{\bar{t}_{ОБ}} = \frac{0,957}{20} = 0,048 \text{ установки в минуту.}$$

В этой системе все заявки будут рано или поздно обслужены, поэтому для **вероятностей отказа, обслуживания и относительной пропускной способности** имеем

$$P_{отк} = 0,$$
$$P_{обсл} = Q = 1.$$

Среднее число заявок в очереди

$$k_{очер}=P_0\sum_{i=n+1}^{N}(i-n)\frac{N!(\overline{t}_{ОБ}/T)^i}{n^{i-n}\cdot n!\cdot(N-i)!}=0,043\cdot(1\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^2}{8!\cdot 1!\cdot 1^1}+$$

$$+2\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^3}{7!\cdot 1!\cdot 1^2}+3\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^4}{6!\cdot 1!\cdot 1^3}+4\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^5}{5!\cdot 1!\cdot 1^4}+$$

$$+5\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^6}{4!\cdot 1!\cdot 1^5}+6\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^7}{3!\cdot 1!\cdot 1^6}+7\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^8}{2!\cdot 1!\cdot 1^7}+$$

$$+8\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^9}{1!\cdot 1!\cdot 1^8}+9\cdot\frac{10!\cdot(20/120)^{10}}{0!\cdot 1!\cdot 1^9})=3,302\ \text{установки.}$$

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист}=k_{очер}+k=3,302+0,957=4,259\ \text{установки.}$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$t_{сист}=\frac{T\cdot k_{сист}}{N-k_{сист}}=\frac{120\cdot 4,259}{10-4,259}=89,017\ \text{мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди

$$t_{очер}=t_{сист}-\overline{t}_{ОБ}=89,017-20=69,017\ \text{мин.}$$

Внесем результаты вычислений в первый столбец таблицы 13.1.

Для определения прибыли от работы цеха за смену вычислим, какую долю рабочего времени составляют простои установки, связанные с заправкой и ожиданием заправки. Величина $t_{сист}$ = 89,017 мин означает, что простой установки (включающий ожидание заправки и саму заправку) занимает в среднем 89,017 мин. После заправки установка работает в среднем 120 мин, затем снова простаивает в течение 89,017 мин и т. д. Таким образом, простои составляют 89,017/(120+89,017) = 0,426, или 42,6 % рабочего времени. Установка работает только 100 – 42,6 = 57,4 % рабочего времени.

Определим прибыль от работы цеха за рабочую смену (8 ч). В цехе имеется 10 установок. Каждая установка выпускает 12 кг пластмассы в час (когда установка ожидает заправки или заправляется, она не выпускает пластмассу). Каждый килограмм пластмассы приносит предприятию прибыль в размере 3 ден. ед. Из этой прибыли необходимо вычесть заработную плату оператора (70 ден. ед.). Таким образом, прибыль от работы цеха за 8 ч можно найти следующим образом:

10·8·(1 – 0,426) ·12·3 – 70 = 1583 ден. ед.

Видно, что данный вариант организации работы цеха имеет серьезные недостатки, основной из которых – значительные простои установок в ожидании заправки, что приводит к потерям прибыли. Еще один недостаток – явная перегрузка оператора (коэффициент загрузки k/n = 0,957/1 = 0,957).

б) Выполним аналогичные расчеты для случаев, когда в цехе работают два, три или четыре оператора (n = 2, 3 или 4). Результаты сведем в таблицу 13.1.

Таблица 13.1 – Характеристики работы замкнутой СМО

Характеристика	**Номер оператора, *n***			
	1	**2**	**3**	**4**
P_0	0,043	0,178	0,209	0,213
$P_{отк}$	0	0	0	0
$P_{обсл}$	1	1	1	1
Q	1	1	1	1
A	0,048	0,067	0,071	0,071
k/n	0,957	0,674	0,472	0,257
k**, кол-во установок**	0,957	1,348	1,415	1,427
$k_{очер}$**, кол-во установок**	3,302	0,564	0,092	0,013
$k_{сист}$**, кол-во установок**	4,259	1,912	1,508	1,44
$t_{очер}$**, мин**	69,017	8,361	1,305	0,187
$t_{сист}$**, мин**	89,017	28,36	21,305	20,187
Простой установок, %	42,6	19,1	15,1	14,4
Прибыль, ден. ед. за смену	1583	2190	2235	2185

Из таблицы видно, что максимальная прибыль от работы цеха (2235 ден. ед. за смену) достигается, если обслуживание установок выполняется тремя операторами (n = 3). При большем количестве операторов прибыль снижается, т. к. затраты, связанные с заработной платой операторов, превышают выигрыши от сокращения простоев установок.

Таким образом, можно рекомендовать, чтобы установки для производства пластмассы обслуживали три оператора. Однако следует отметить, что этот вариант имеет и недостаток – низкую загрузку операторов (0,472).

Задача 13.4. Многофазные системы массового обслуживания. Сети

На производственный участок У3 поступают для обработки детали с двух других участков (У1 и У2). Схема участка У3 приведена на рисунке 13.1.

Детали с участка У1 поступают в среднем через каждые 10 мин, с участка У2 – через каждые 15 мин. Все детали проходят обработку на станке СТ1. Обработка детали на этом станке занимает от 3 до 7 мин. Со станка СТ1 детали направляются на группу из трех одинаковых станков СТ2. Перед этими станками находится накопитель для деталей, ожидающих обработку (общий для всех трех станков). Деталь направляется на любой свободный станок СТ2. Обработка детали на станке СТ2 занимает в среднем 20 мин. Накопитель, расположенный перед станками СТ2, вмещает восемь деталей. При его заполнении детали направляются для обработки на станок СТ3. Обработка на этом станке занимает в среднем 25 мин.

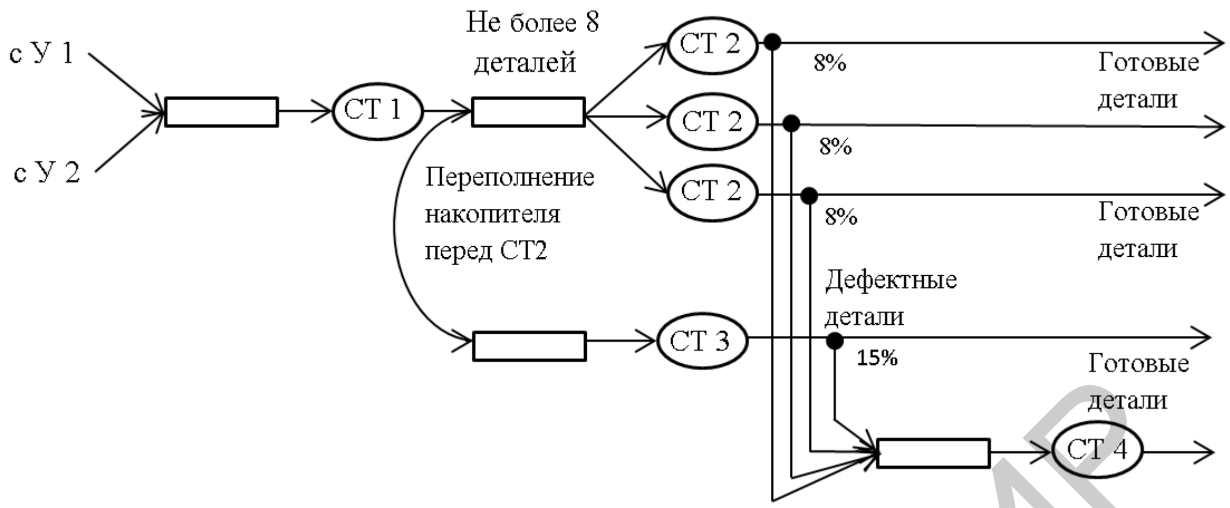


Рисунок 13.1 – Схема движения деталей по участку У3

При обработке деталей возможны дефекты. На станках СТ2 дефект допускается примерно в 8 % случаев, на станке СТ3 – в 15 % случаев. Все дефектные детали направляются на станок СТ4 для устранения дефекта: это занимает в среднем 10 мин.

Требуется найти характеристики работы всех станков, а также определить среднее время пребывания детали на участке У3.

Решение

***Расчет характеристик станка* СТ1.**

Чтобы выполнить этот расчет, будем считать потоки деталей с участков У1 и У2 пуассоновскими. Тогда станок СТ1 можно рассматривать как **одноканальную СМО с бесконечной очередью**, где поток заявок является пуассоновским, а время обслуживания распределено по равномерному закону, т. е. СМО типа **M/G/1/**∞.

Найдем интенсивности потоков деталей с участков У1 и У2: $\lambda_1 = 0{,}1$ детали в минуту, $\lambda_2 = 0{,}07$ детали в минуту. **Интенсивность входного потока** для станка СТ1 равна сумме интенсивностей этих потоков: $\lambda_{\text{СТ1}} = 0{,}17$ детали в минуту. Среднее время обработки детали $t_{об.\text{СТ1}} = (3 + 7)/2 = 5$ мин, **интенсивность обработки деталей** $\mu_{\text{СТ1}} = 1/5 = 0{,}2$ детали в минуту. По таблице коэффициентов вариации для различных распределений найдем коэффициенты вариации, необходимые для расчета средней длины очереди: коэффициент вариации потока заявок $\nu = 1$ (т. к. поток заявок – пуассоновский), коэффициент вариации потока обслуживания $\varepsilon = 0{,}23$ (определяется по формуле для равномерного распределения).

По формулам одноканальной СМО с бесконечной очередью найдем характеристики СМО.

Интенсивность нагрузки системы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}17}{0{,}2} = 0{,}85 < 1.$$

Вероятность простоя равна

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,85 = 0,15.$$

Финальные вероятности состояний

$$P_i = \rho^i (1-\rho), \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Вероятность отказа

$$P_{отк} = 0.$$

Относительная пропускная способность системы

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0 = 1.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda Q = 0,17 \cdot 1 = 0,17 \text{ деталей в минуту.}$$

Вероятность занятости канала (среднее число занятых каналов)

$$k = 1 - P_0 = \rho = 0,85.$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди):

$$k_{очер} = \frac{\rho^2(\nu^2 + \varepsilon^2)}{2\cdot(1-\rho)} = \frac{0,85^2(1^2 + 0,23^2)}{2\cdot(1-0,85)} = 2,54 \text{ деталей.}$$

Среднее число заявок в системе

$$k_{сист} = k_{очер} + k = 2,54 + 0,85 = 3,39 \text{ деталей.}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (по формуле Литтла)

$$t_{очер} = \frac{k_{очер}}{\lambda} = \frac{2,54}{0,17} = 14,9 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$t_{сист} = t_{очер} + \bar{t}_{ОБ} = 14,9 + 5 = 19,9 \text{ мин.}$$

Внесем результаты вычислений в первый столбец таблицы 13.2.

***Расчет характеристик станков* СТ2.**

Будем считать поток деталей, выходящих со станка СТ1, пуассоновским (хотя это не совсем точно, т. к. время обработки на станке СТ1 – не экспоненциальная, а равномерная случайная величина). Будем также считать, что время обработки деталей на станках СТ2 представляет собой экспоненциальную случайную величину. Тогда группу станков СТ2 можно рассматривать как **трехканальную** марковскую **СМО (М/М/3/8) с ограничением на длину очереди** (т. к. накопитель вмещает только 8 деталей, и при его заполнении детали направляются на другой станок). Здесь $\lambda_{\text{СТ2}}$ = 0,17 детали в минуту (т. к. на станки СТ2 поступают все детали со станков СТ1), $t_{об.\text{СТ2}}$ = 20 мин, $\mu_{\text{СТ2}}$ = 0,05 детали в минуту.

Расчет характеристик станка СТ2 выполняется как обычно (см. тему 12), результаты внесены во второй столбец итоговой таблицы 13.2.

***Расчет характеристик станка* СТ3.**

На этот станок поступают детали, не попавшие на станки СТ2 из-за заполнения накопителя (т. е. детали, получившие отказ в обслуживании станками

СТ2). Поэтому интенсивность входного потока для станка СТ3 можно найти следующим образом: $\lambda_{СТ3} = P_{отк}\ \lambda_{СТ2}$ = 0,16·0,17 = 0,027 детали в минуту (здесь $P_{отк}$ = 0,16 – вероятность отказа в обслуживании для группы станков СТ2, рассчитанная ранее). Будем считать поток деталей на станок СТ3 пуассоновским, а время обработки на этом станке – экспоненциальным. Тогда станок СТ3 можно рассматривать как **одноканальную марковскую СМО (М/М/1/∞) без ограничений на очередь**, где $t_{об.СТ3}$ = 25 мин, $\mu_{СТ3}$ = 0,04 детали в минуту.

Расчет характеристик станка СТ3 выполняется обычным образом (см. тему 12), результаты внесены в третий столбец итоговой таблицы 13.2.

***Расчет характеристик станка* СТ4.**

На этот станок поступает 8 % деталей, обработанных на станках СТ2, и 15 % деталей, обработанных на СТ3. Поэтому интенсивность входного потока для станка СТ3 можно найти следующим образом:

$\lambda_{СТ4} = 0{,}08\cdot\gamma_{СТ2} + 0{,}15\cdot\gamma_{СТ3} = 0{,}08\cdot0{,}14 + 0{,}15\cdot0{,}027 = 0{,}015$ детали в минуту, где $\gamma_{СТ2}$, $\gamma_{СТ3}$ – значения пропускной способности станков СТ2 и СТ3, рассчитанные ранее.

Будем считать поток деталей на станок СТ4 пуассоновским, а время обработки на этом станке – экспоненциальным. Тогда станок СТ4 можно рассматривать как **одноканальную марковскую СМО (М/М/1/∞) без ограничений на очередь**, где $t_{об.СТ4}$ = 10 мин, $\mu_{СТ4}$ = 0,1 детали в минуту.

Расчет характеристик станка СТ4 выполняется обычным образом (см. тему 12), результаты внесены в четвертый столбец итоговой таблицы 13.2.

Таблица 13.2 – Характеристики работы станков на участке У3

Характеристика	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4
ρ	0,85	1,13	0,68	0,15
P_0	0,15	0,009	0,32	0,85
$P_{отк}$	0	0,16	0	0
$P_{обсл}$	1	0,84	1	1
A	0,17	0,14	0,027	0,015
k/n	0,85	0,959	0,68	0,15
k, кол-во деталей	0,85	2,86	0,68	0,15
$k_{очер}$, кол-во деталей	2,54	4,38	1,4	0,027
$k_{сист}$, кол-во деталей	3,39	7,24	2,08	0,177
$t_{очер}$, мин	14,9	31,29	51,9	1,76
$t_{сист}$, мин	19,9	51,29	76,9	11,8

***Расчет среднего времени пребывания детали на участке* У3.**

Все детали проходят обработку на станке СТ1. Среднее время пребывания детали на этом станке (включая время ожидания обработки и само время обработки) составляет 19,9 мин. Затем 84 % деталей проходят обработку на одном из станков СТ2; среднее время пребывания детали на этих станках составляет

51,29 мин. Остальные 16 % деталей обрабатываются на станке СТ3; среднее время пребывания детали на этом станке – 76,9 мин. Кроме того, для 8 % деталей, обрабатывавшихся на станках СТ2, и 15 % деталей, обрабатывавшихся на станке СТ3, требуется устранение дефекта на станке СТ4. Это занимает в среднем 11,8 мин. Таким образом, среднее время пребывания детали на участке можно найти следующим образом:

$$t_{У3} = 19{,}9 + 0{,}84\cdot 51{,}29 + 0{,}16\cdot 76{,}9 + (0{,}84\cdot 0{,}08 + 0{,}16\cdot 0{,}15)\cdot 11{,}8 = 76{,}36 \text{ мин.}$$

По результатам анализа характеристик станков выявлен следующий недостаток в работе участка: перегрузка группы станков СТ2 и недостаточная загрузка станка СТ3. Для устранения этого недостатка можно предложить уменьшить размер накопителя перед станками СТ2. В таком случае большее количество деталей будет направляться на станок СТ3. В результате загрузка станков СТ2 снизится, а станка СТ3 – повысится.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 13.5. Многофазные системы массового обслуживания. Сети

На участок, на котором выпускаются детали двух видов, поступают заготовки для выпуска деталей. Все заготовки обрабатываются на станке А. Интервалы времени между моментами поступления заготовок для выпуска деталей, времена обработки на станках А, В1, В2 и С заданы в таблице 13.3.

Таблица 13.3 – Характеристики обработки деталей на участке

<table>
<tr><th colspan="3">Интервалы времени между моментами поступления заготовок</th></tr>
<tr><td colspan="2">Варианты 1–10</td><td>От 4 до 6 мин</td></tr>
<tr><td colspan="2">Варианты 11–20</td><td>Пуассоновский поток, среднее 6 мин</td></tr>
<tr><td colspan="2">Варианты 21–30</td><td>От 4 до 7 мин</td></tr>
<tr><td colspan="2">Варианты 31–40</td><td>Примерно постоянное и составляет 5 мин</td></tr>
<tr><td colspan="3">Время обработки:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Варианты 1–10</td></tr>
<tr><td>Станок А</td><td colspan="2">Гауссовская случайная величина со средним значением 3 мин и стандартным отклонением 0,5 мин</td></tr>
<tr><td>Станок В</td><td colspan="2">Экспоненциальный закон со средним значением 20 мин</td></tr>
<tr><td>Станок С</td><td colspan="2">В среднем 8 мин (экспоненциальная случайная величина)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Варианты 11–20</td></tr>
<tr><td>Станок А</td><td colspan="2">От 2 до 5 мин</td></tr>
<tr><td>Станок В</td><td colspan="2">Экспоненциальный закон со средним значением 12 мин</td></tr>
<tr><td>Станок С</td><td colspan="2">Ровно 7 мин</td></tr>
<tr><td colspan="3">Варианты 21–30</td></tr>
<tr><td>Станок А</td><td colspan="2">Примерно постоянное и составляет 5 мин</td></tr>
<tr><td>Станок В</td><td colspan="2">Экспоненциальный закон со средним значением 20 мин</td></tr>
<tr><td>Станок С</td><td colspan="2">В среднем 6 мин (экспоненциальная случайная величина)</td></tr>
</table>

Детали, выпущенные на станке А (*а %*) (таблица 13.4), продаются как готовые изделия (детали типа 1). Остальные проходят дальнейшую обработку (из них выпускаются детали типа 2). И со станка А поступают на два одинаковых станка В1 и В2. Перед станками В1 и В2 установлен общий накопитель, вмещающий *b* деталей (см. таблицу 13.4); при его заполнении все поступающие детали типа 1 направляются на станок С, время обработки деталей на котором также задано в таблице 13.3.

Таблица 13.4 – Числовые данные к задаче 13.5

Вариант	a	b	p_A	p_B	p_C	q_A	q_B	q_C	d_1	d_2	c_1	c_2
В1	15	5	0,4	0,5	0,8	0,1	0,2	0,1	5	15	10	50
В2	10	5	0,3	0,6	0,5	0,1	0,2	0,1	2	8	5	22
В3	10	5	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	8	45
В4	10	5	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	8	45
В5	10	8	0,4	0,5	0,8	0,1	0,2	0,1	5	15	10	50
В6	15	3	0,3	0,6	0,5	0,1	0,2	0,1	2	8	5	22
В7	15	8	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	8	45
В8	10	3	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	8	45
В9	15	3	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	5	15
В10	10	8	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	10	55
В11	25	5	0,4	0,5	0,8	0,1	0,2	0,1	5	15	10	50
В12	10	15	0,3	0,6	0,5	0,1	0,2	0,1	2	8	5	22
В13	10	5	0,4	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	8	45
В14	10	5	0,2	0,5	0,8	0,1	0,1	0,1	4	10	8	45
В15	10	8	0,4	0,5	0,3	0,1	0,2	0,1	5	15	10	50
В16	15	3	0,3	0,6	0,5	0,2	0,2	0,1	2	8	5	22
В17	15	8	0,2	0,3	0,8	0,1	0,2	0,1	4	10	8	45
В18	10	3	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,2	4	10	8	45
В19	15	3	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	8	10	5	15
В20	10	8	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	20	10	55
В21	8	5	0,4	0,5	0,8	0,1	0,2	0,1	5	11	10	50
В22	9	5	0,3	0,6	0,5	0,1	0,2	0,1	2	4	5	22
В23	7	5	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	6	8	45
В24	8	5	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	8	8	45
В25	10	8	0,4	0,5	0,8	0.1	0,2	0,1	5	10	10	50
В26	12	3	0,3	0,6	0,5	0,1	0,2	0,1	2	12	5	22
В27	4	8	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	5	8	45
В28	9	3	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	6	8	45
В29	13	3	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	7	5	15
В30	14	8	0,2	0,3	0,8	0,1	0,1	0,1	4	8	10	55

Затраты (в денежных единицах), связанные с работой (p_A, p_B, p_C) и простоями (q_A, q_B, q_C) каждого станка (в минуту), приведены в таблице 13.4. Прочие расходы, связанные с выпуском деталей типа 1 и 2, составляют d_1 и d_2

ден. ед. соответственно. Детали типа 1 продаются по цене c_1 ден. ед., типа 2 – c_2 ден. ед. (см. таблицу 13.4).

Требуется:

1) найти характеристики работы станка А;

2) найти характеристики работы группы станков В1-В2;

3) найти характеристики работы станка С;

4) найти прибыль от работы участка за 8 ч;

5) найти вероятность того, что деталь, поступившая на станки В1-В2, сразу же начнет обрабатываться (не будет ждать в очереди).

Тема 14. Матричные игры

Литература: *основная* [8, с. 158–178], *дополнительная* [3, с. 66–84], [5, с. 242–276], [6, с. 446–489], [9, с. 311–317], [10, с. 16–35, 126–128, 133–138, 158–166], [12, с. 256–283], [13, с. 108–196], [16, с. 27–31], [17, с. 234–244], [18, с. 513–532], [23, с. 12–55], [25, с. 84–96], [28, с. 236–241], [29, с. 580–591, [31, с. 456–467], [32, с. 112–117].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Классификация и описание игр.
2. Понятие матричной игры с нулевой и ненулевой суммой.
3. Основные определения: игроки, стратегии, исходы, платежная матрица, верхняя и нижняя цена игры, седловая точка, максиминная и минимаксная стратегии.
4. Решение матричной игры в чистых стратегиях.
5. Равновесные и доминирующие стратегии.
6. Смешанные стратегии.
7. Основные теоремы теории игр.
8. Геометрический способ решения матричных игр.
9. Приведение матричной игры к паре взаимно двойственных задач линейного программирования.

Обозначения, используемые в разделе

А – первый игрок

В – второй игрок

m – число стратегий игрока А

n – число стратегий игрока В

A_i – i-я стратегия игрока А, $i = 1, \ldots, m$

B_j – j-я стратегия игрока В, $j = 1, \ldots, n$

$A = (a_{ij})$ – платежная матрица, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$

α – нижняя цена игры

β – верхняя цена игры

v – цена игры

$\bar{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ – смешанная стратегия игрока А

$\bar{Q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ – смешанная стратегия игрока В

Решение типовых задач

Задача 14.1. Матричные игры в чистых стратегиях

В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: А1, А2, А3; у противника – три вида самолетов: В1, В2, В3. Наша задача поразить самолет; задача противника – сохранить его непораженным. При применении вооружения А1 самолеты В1, В2, В3 поражаются соответственно с вероятностями 0,9, 0,4, 0,2; при вооружении А2 – с вероятностями 0,7, 0,6 и 0,8; при вооружении В3 – с вероятностями 0,5, 0,5 и 0,2.

Требуется сформулировать ситуацию в терминах теории игр и найти оптимальное поведение сторон.

Решение

1. Определим игроков. В данной задаче присутствуют два игрока: мы (игрок А) и противник (игрок В). Имеем парную игру, которую можно описать платежными матрицами игроков.

2. Определим стратегии игроков. Игрок А располагает тремя чистыми стратегиями: A_1 – использовать вооружение вида А1, A_2 – использовать вооружение вида А2, A_3 – использовать вооружение вида А3. Игрок В также располагает тремя чистыми стратегиями: B_1 – отправить на вылет самолет вида В1, B_2 – отправить на вылет самолет вида В2, B_3 – отправить на вылет самолет вида В3. Следовательно, платежные матрицы игры будут иметь размерности 3×3.

3. Определим выигрыши игроков для каждого из исходов игры. Исходов игры всего два: самолет поражен, самолет не поражен. Будем считать, что при исходе «самолет поражен» выигрыш игрока А равен 1, а выигрыш игрок В равен –1. Соответственно при исходе «самолет не поражен» выигрыши игроков равны 0. Поскольку выигрыш игрока А равен проигрышу игрока В и наоборот, рассматриваемая игра является антагонистической и может быть описана одной платежной матрицей.

4. Составим платежную матрицу. Рассмотрим все возможные сочетания чистых стратегий игроков.

Элемент a_{11} соответствует ситуации «игрок А выбрал чистую стратегию A_1, игрок В выбрал чистую стратегию B_1». Это означает, противник отправил на вылет самолет типа В1, а мы использовали вооружение А1. Поскольку в этом случае вероятность поражения самолета противника (и выигрыша, равного 1) по условию равна 0,9, и, соответственно, вероятность промаха (и выигрыша, равного 0) равна 1 – 0,9 = 0,1, то по формуле полной вероятности получаем следующую величину платежа:

$$a_{11} = 0{,}9 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}9.$$

Аналогичным образом рассчитываются остальные элементы платежной матрицы:

$$a_{12} = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}4,$$
$$a_{13} = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 0 = 0{,}2,$$
$$\ldots$$
$$a_{33} = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 0 = 0{,}2.$$

Получаем следующую платежную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Попытаемся решить полученную матричную игру в чистых стратегиях.

Проверим условие существования седловой точки. Должно выполняться равенство

$$\alpha = \beta,$$

где

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\} = \max_{1 \le i \le m} \{\alpha_j\} \text{ – нижняя цена игры,}$$

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} \{a_{ij}\} = \min_{1 \le j \le n} \{\beta_j\} \text{ – верхняя цена игры.}$$

Получаем

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{array} \\ \beta_j \quad \begin{array}{ccc} 0,9 & 0,6 & 0,8 \end{array} & \end{array}$$

Отсюда

$$\alpha = \max\{0,2; \quad 0,6; \quad 0,2\} = 0,6,$$

$$\beta = \min\{0,9; \quad 0,6; \quad 0,7\} = 0,6.$$

Окончательно получаем

$$\alpha = 0,6 = \beta.$$

Следовательно, седловая точка существует, и игра имеет решение в чистых стратегиях. Цена игры $v = 0,6$.

Седловой элемент 0,6 соответствует элементу платежной матрицы a_{22}, и седловая точка имеет вид (A_2, B_2), т. е. чистой оптимальной (максиминной) стратегией игрока А является стратегия A_2, и чистой оптимальной (минимаксной) стратегией игрока В является стратегия B_2.

Таким образом, игрок А каждый раз должен использовать вооружение типа А2, а игрок В каждый раз должен отправлять на вылет только самолеты типа В2. При этом гарантированный выигрыш игрока А (и проигрыш игрока В) будет наибольшим (наименьшим) и составит 0,6.

Задача 14.2. Матричные игры со смешанными стратегиями

Производственные мощности фирмы могут быть направлены на выпуск четырех видов продукции, которые могут быть отправлены в четыре региона. Прибыль от реализации продукции в регионах по результатам маркетинговых исследований представлена в следующей платежной матрице:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1,5 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальные стратегии производства и распределения продукции, максимизирующие прибыль фирмы, упростив предварительно заданную платежную матрицу:

а) проверить существование седловой точки;

б) выполнить доминирование стратегий;

в) решить задачу графически;

г) свести задачу к паре двойственных задач линейного программирования и решить;

д) записать решение задачи в смешанных стратегиях.

Решение

Имеем парную антагонистическую матричную игру, в распоряжении игроков находятся по четыре стратегии.

а) **Проверим условие существования седловой точки**. Должно выполняться равенство

$$\alpha=\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n}\{a_{ij}\}=\beta=\min_{1\le j\le n}\max_{1\le i\le m}\{a_{ij}\}.$$

Получаем

$$\alpha=\max\{-1;\ -1;\ -1,5;\ -1\},\qquad \beta=\min\{0;\ 2;\ 3;\ 1\},$$

$$\alpha=-1\ne\beta=0.$$

Седловая точка отсутствует. Следовательно, игра не имеет решения в чистых стратегиях.

б) **Выполним доминирование**. Сравнивая элементы первой строки (выигрыши, соответствующие первой чистой стратегии игрока А) с соответствующими элементами четвертой строки видим, что следует предпочесть четвертую стратегию, т. е. первую стратегию игрока А можно исключить из рассмотрения. В свою очередь, четвертой стратегии следует предпочесть третью, поэтому четвертую стратегию также можно исключить из рассмотрения. Так как игрок В (выбирающий столбцы) минимизирует прибыль игрока А, то его первая стратегия доминирует над второй. Исключая доминируемую стратегию B_2, получим игру с платежной матрицей

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1,5 \end{pmatrix}.$$

в) **Найдем решение данной задачи в смешанных стратегиях геометрическим методом.** Решение игры (2×3) проводим с позиции игрока А, придерживающегося максиминной стратегии.

Обозначим смешанную стратегию игрока А через $\bar{P} = (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$, смешанную стратегию игрока В через $\bar{Q} = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)$. При этом в силу проведенного доминирования стратегий всегда будет выполняться $p_1 = 0$, $p_4 = 0$ и $q_2 = 0$. Поэтому далее вместо 4-мерного вектора $\bar{P}$ будем рассматривать 2-мерный вектор смешанных стратегий игрока А: $\tilde{P} = (p_2,\ p_3)$.

Найдем вероятности применения стратегий A_2 и A_3 игроком А, т. е. значения p_2 и p_3. В декартовой системе координат по оси абсцисс отложим отрезок, длина которого равна 1 (рисунок 14.1). Левый конец отрезка (точка 0) соответствует применению стратегии A_2, правый (точка 1) – стратегии A_3. Промежуточные точки соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $\tilde{P}$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками отрезка [0, 1] и множеством смешанных стратегий игрока А.

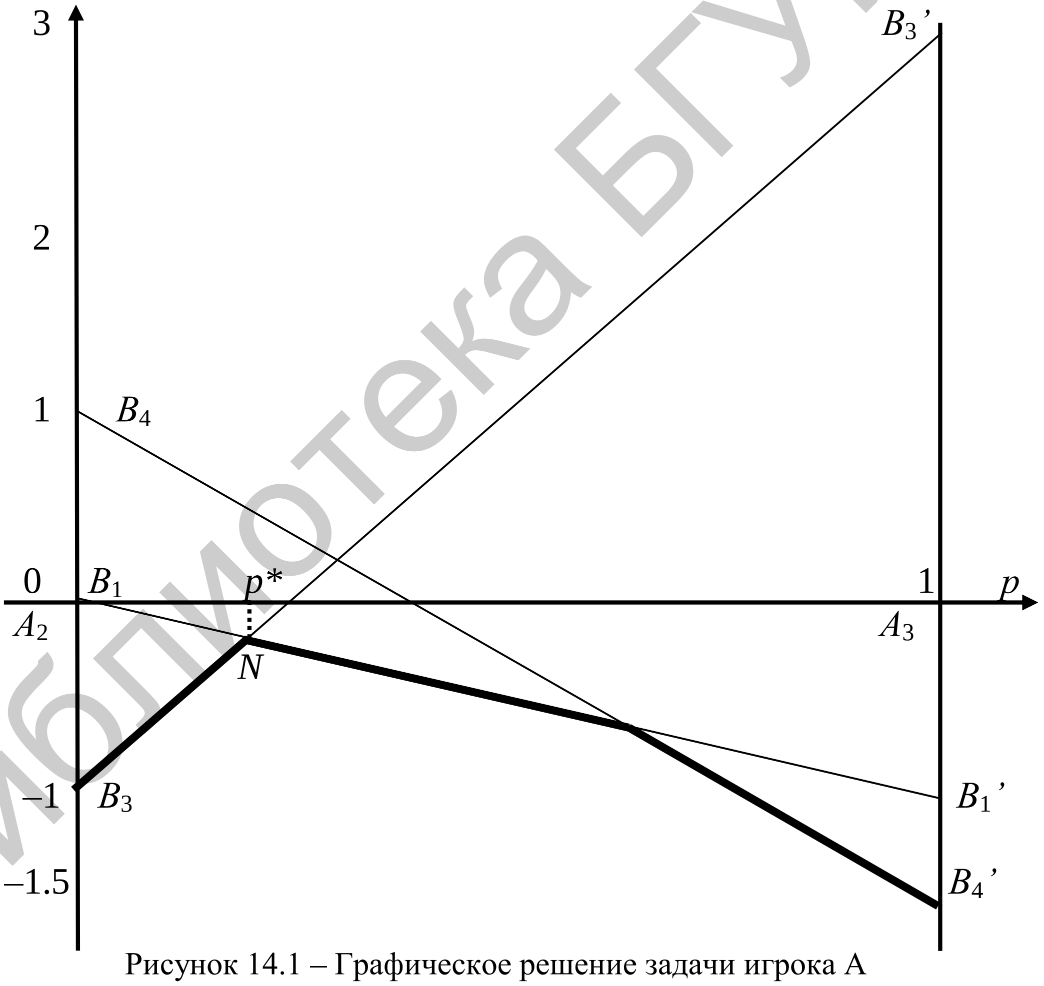


Рисунок 14.1 – Графическое решение задачи игрока А

Обозначим $p_3 = p$, получим $p_2 = 1 - p$, или $\tilde{P} = (1 - p, p)$. Тогда точке $p = 0$ (чистой стратегии A_2 игрока А) соответствует значение $\tilde{P} = (1, 0)$, а точке $p = 1$ (чистой стратегии A_3 игрока А) соответствует значение $\tilde{P} = (0, 1)$.

На оси ординат откладываются выигрыши игрока А при выборе стратегии A_2. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши при выборе стратегии A_3. Получаем три отрезка, по числу имеющихся в распоряжении игрока В чистых стратегий: B_1B_1' (соединяет точки (0, 0) и (1, −1)), B_3B_3' (соединяет точки (0, −1) и (1, 3)) и B_4B_4' (соединяет точки (0, 1) и (1, –1,5)). Если игрок В придерживается одной из чистых стратегий, то выигрыш игрока А при всех его смешанных стратегиях будет лежать на соответствующем отрезке.

Первый игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы ***максимизиро-вать*** свой минимальный ожидаемый выигрыш. Минимальный ожидаемый выигрыш при применении смешанной стратегии $\tilde{P} = (1 - p, p)$ для различных значений p графически представляет собой нижнюю огибающую (выделена на рисунке 14.1). Максиминной оптимальной стратегии игрока А соответствует наивысшая точка на огибающей (точка N). Абсцисса точки N соответствует оптимальной стратегии $\tilde{P} = (1 - p^*, p^*)$ игрока А. Ордината точки N – ***цена игры*** v.

Найдем координаты точки N, лежащей на пересечении прямых B_1B_1' и B_3B_3', для чего запишем уравнения этих прямых:

$$v = 0 + (-1 + 0)\, p^*;$$
$$v = -1 + (3 - (-1))\, p^*;$$

или

$$v = -p^*;$$
$$v = -1 + 4p^*.$$

Приравняв правые части, получим

$$-p^* = -1 + 4p^*;$$
$$p^* = 1/5.$$

Откуда $p_2 = 4/5$; $p_3 = 1/5$. Цена игры $v = -1/5$.

Найдем теперь <u>минимаксную смешанную стратегию игрока В</u>, исключив стратегию B_4, которая дает явно больший проигрыш игроку В. Следовательно, $q_4 = 0$, и задача сводится к задаче 2×2 (вместо 4-мерного вектора $\bar{Q}$ будем рассматривать 2-мерный вектор смешанных стратегий игрока В: $\tilde{Q} = (q_1,\ q_3)$).

Заметим, что <u>число активных стратегий</u> всегда равно $\min(m, n)$.

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим декартову систему координат (рисунок 14.2). Точка 0 соответствует применению стратегии B_1, точка 1 – стратегии B_3. Промежуточные точки соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $\tilde{Q} = (q_1, q_3)$.

Также обозначим $q_3 = q$, тогда $q_1 = 1 - q$, или $\tilde{Q} = (1 - q, q)$.

На оси ординат откладываются проигрыши игрока В при выборе стратегии B_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются проигрыши при стратегии B_3. Получаем два отрезка: A_1A_1' (соединяет точки (0, 0) и (1, −1)) и A_3A_3' (соединяет точки (0, −1) и (1, 3)). Если игрок А придерживается одной из чистых стратегий, то проигрыш игрока В при всех его смешанных стратегиях будет лежать на соответствующем отрезке.

Второй игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы *минимизировать свой максимальный ожидаемый проигрыш*. При применении смешанной стратегии $\tilde{Q} = (1 - q, q)$) для различных значений q максимальный ожидаемый проигрыш графически представляет собой верхнюю огибающую (выделена на рисунке 14.2). Минимаксной оптимальной стратегии игрока B соответствует низшая точка на огибающей (точка N). Абсцисса точки N соответствует оптимальной стратегии $\tilde{Q}$ =(1–q*, q*) игрока A. Ордината точки N – ***цена игры*** v.

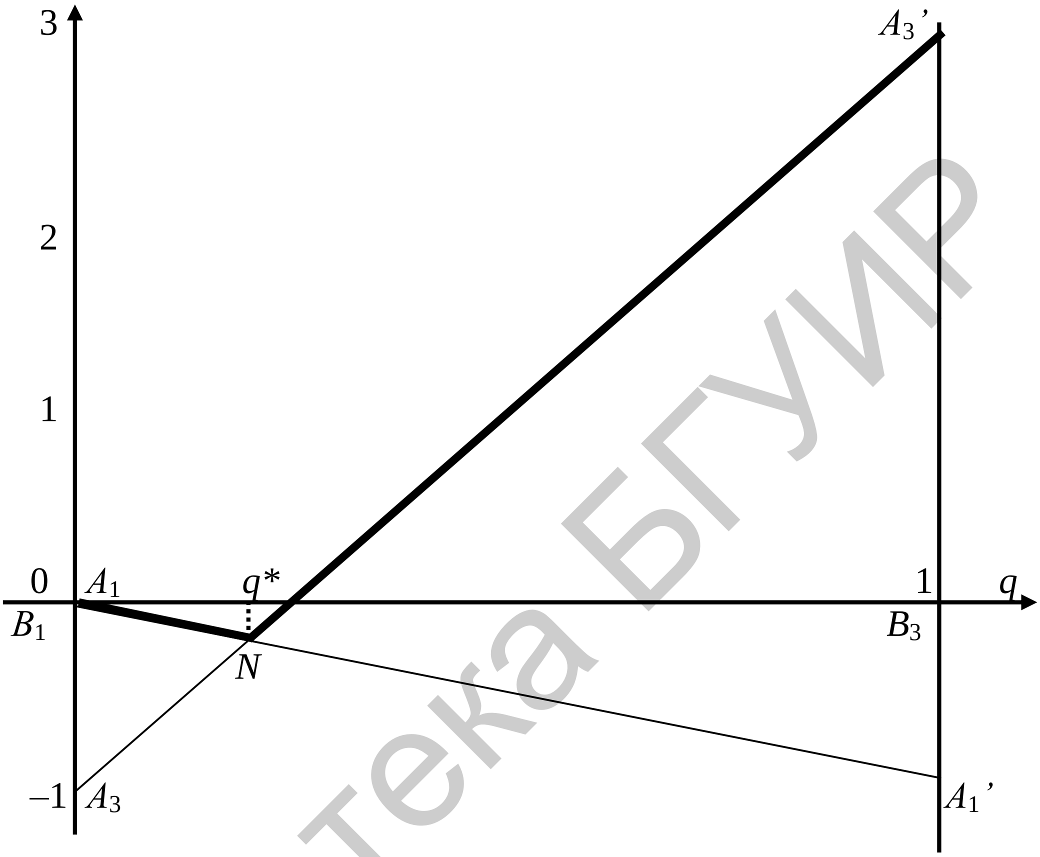


Рисунок 14.2 – Графическое решение задачи игрока B

Найдем координаты точки N, записав уравнения прямых A_1A_1’ и A_3A_3’:

$$v = 0 + (-1 + 0)q^*;$$
$$v = -1 + (3 - (-1))q^*;$$

или

$$v = -q^*;$$
$$v = -1 + 4q^*.$$

Приравняв правые части, получим

$$-q^* = -1 + 4q^*;$$
$$q^* = 1/5.$$

Откуда $q_1 = 4/5$; $q_3 = 1/5$. Цена игры $v = -1/5$.

Окончательно получаем, что **оптимальные смешанные стратегии игроков** (учитывая доминируемые стратегии) имеют вид $\bar{P}^* = (0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ 0)$, $\bar{Q}^* = (\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0)$, цена игры $v = -\frac{1}{5}$.

Заметим, что оптимальная смешанная стратегия игрока B могла быть найдена аналогично оптимальной смешанной стратегии игрока A, учитывая, что матрица выигрышей игрока B имеет вид $-\tilde{A}^T$ (исключив из рассмотрения стратегию B_4).

г) **Сведем полученную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования** (обозначения смешанных стратегий игроков введены при выполнении предыдущего пункта). Введем следующие переменные:

- в прямой задаче: $x_i = \dfrac{p_i}{v}$, i = 2, 3;

- в двойственной задаче: $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, j = 1, 3, 4.

Чтобы исключить случай $v \le 0$, избавимся от отрицательных элементов матрицы $\tilde{A}$, прибавив ко всем элементам 2. Получим эквивалентную игру:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Пара двойственных задач линейного программирования запишется следующим образом:

1. Прямая задача (задача первого игрока)

$$Z = x_2 + x_3 \to \min,$$

при ограничениях $\begin{cases} 2x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 3x_2 + 0,5x_3 \ge 1, \end{cases}$ $\quad x_i \ge 0,\ i = 2,\ 3.$

2. Двойственная задача (задача второго игрока)

$$W = y_1 + y_3 + y_4 \to \max,$$

при ограничениях $\begin{cases} 2y_1 + y_3 + 3y_4 \le 1, \\ y_1 + 5y_3 + 0,5y_4 \le 1, \end{cases}$ $\quad y_j \ge 0,\ j = 1,\ 3,\ 4.$

Решая двойственную задачу (задачу второго игрока) симплекс-методом, получим, что последняя (оптимальная) симплекс-таблица имеет вид, представленный в таблице 14.1

Таблица 14.1 – Оптимальная симплекс-таблица решения задачи второго игрока

$\boldsymbol{Y_Б}$	**Значения**	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_3}$	$\boldsymbol{y_4}$	$\boldsymbol{y_5}$	$\boldsymbol{y_6}$
$\boldsymbol{y_1}$	4/9	1	0	29/18	5/9	–1/9
$\boldsymbol{y_3}$	1/9	0	1	–2/9	–1/9	2/9
$\boldsymbol{W}$	5/9	0	0	7/18	4/9	1/9

Отсюда находим решение задачи линейного программирования: y_1 = 4/9, y_3 = 1/9, y_4 = 0, W = 5/9 – максимальное значение целевой функции.

Тогда цена игры A' равна

$$v(A') = 1/W = 9/5.$$

В исходной игре $v(A) = v(A') - 2 = -1/5$ (из полученного значения цены игры вычли ранее прибавленное значение 2).

д) Из формулы $y_j = \dfrac{q_j}{v}$ получаем:

$$q_1 = y_1 \cdot v = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{4}{5};$$

$$q_3 = y_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5};$$

$$q_4 = y_4 \cdot v = 0 \cdot \frac{9}{5} = 0.$$

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока В (учитывая удаленную стратегию) $\bar{Q}^* = (\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0)$.

Оптимальная смешанная стратегия игрока А находится из решения прямой задачи (из последней строки таблицы 14.1) и после преобразований равна $\bar{P}^* = (0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ 0)$.

Следовательно, фирма должна 80 % производственных мощностей направить на изготовление продукции второго вида и 20 % – на изготовление продукции третьего вида, при этом 80 % изготовленной продукции следует реализовывать в первом регионе и 20 % продукции – в третьем. В этом случае средняя величина прибыли от реализации продукции будет максимальной и равной минус 1/5.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 14.3. Матричные игры в чистых стратегиях

Игроки А и В одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: $k - 1$, k или $k + 1$ (k – номер варианта). Если сумма написанных чисел четная, то В платит А эту сумму в рублях; если она нечетная, то, наоборот, А платит В эту сумму.

Сформулировать ситуацию в терминах теории игр (описать стратегии игроков, возможные исходы игры и составить платежную матрицу). Проверить наличие седловой точки.

Задача 14.4. Матричные игры со смешанными стратегиями

Две конкурирующие на рынке фирмы-перевозчики планируют открыть по четыре одинаковых новых маршрута перевозки. Оценки прибыли компаний в зависимости от поведения конкурента представлены в виде матрицы (таблица 14.2). Определить оптимальное распределение транспортного парка фирм по маршрутам, упростив предварительно платежную матрицу:

а) проверить существование седловой точки;

б) выполнить доминирование стратегий;

в) решить задачу графически (при возможности);

г) свести задачу к паре двойственных задач линейного программирования и решить;

д) записать решение задачи в смешанных стратегиях.

Таблица 14.2 – Исходные данные к задаче 14.4

Вари-ант	**Матрица**	**Вари-ант**	**Матрица**	**Вари-ант**	**Матрица**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
B1	$A=\begin{pmatrix}4&2&1&3\\3&1&4&2\\5&3&1&4\\2&1&3&1\end{pmatrix}$	**B2**	$A=\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\1&-1&2&0\\3&1&-1&2\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$	**B3**	$A=\begin{pmatrix}2&-3&-1&0\\4&-1&2&1\\0&1&-3&6\\-2&1&-4&3\end{pmatrix}$
B4	$A=\begin{pmatrix}6&4&3&5\\5&3&6&4\\7&5&3&6\\4&3&5&3\end{pmatrix}$	**B5**	$A=\begin{pmatrix}4&2&1&3\\3&1&2&4\\3&5&1&4\\1&2&3&1\end{pmatrix}$	**B6**	$A=\begin{pmatrix}5&3&2&4\\3&2&4&6\\1&1&-3&-2\\-5&-3&2&4\end{pmatrix}$
B7	$A=\begin{pmatrix}-3&2&-5&6\\6&4&3&5\\4&3&5&7\\2&2&-2&-1\end{pmatrix}$	**B8**	$A=\begin{pmatrix}3&4&2&6\\5&4&3&4\\2&6&4&5\\7&5&3&6\end{pmatrix}$	**B9**	$A=\begin{pmatrix}3&-4&1&-6\\2&5&3&2\\6&3&2&4\\4&1&1&-3\end{pmatrix}$
B10	$A=\begin{pmatrix}4&5&3&7\\6&5&4&5\\3&7&5&6\\8&6&4&7\end{pmatrix}$	**B11**	$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\3&1&4&2\\5&3&5&4\\2&1&3&1\end{pmatrix}$	**B12**	$A=\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\1&-1&2&0\\1&1&-3&2\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$
B13	$A=\begin{pmatrix}6&4&3&5\\5&3&4&6\\7&5&3&6\\4&3&5&3\end{pmatrix}$	**B14**	$A=\begin{pmatrix}2&-3&-1&0\\4&-2&2&1\\0&1&-3&5\\-2&1&-4&3\end{pmatrix}$	**B15**	$A=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\3&1&2&4\\3&5&1&4\\1&2&3&1\end{pmatrix}$
B16	$A=\begin{pmatrix}5&2&1&4\\2&3&4&6\\1&1&-3&-2\\-5&-3&2&2\end{pmatrix}$	**B17**	$A=\begin{pmatrix}-3&2&-5&6\\6&4&3&5\\3&4&6&4\\2&2&-2&-1\end{pmatrix}$	**B18**	$A=\begin{pmatrix}3&4&2&6\\4&5&3&4\\2&6&4&5\\7&5&3&6\end{pmatrix}$
B19	$A=\begin{pmatrix}3&-4&1&-6\\5&2&3&2\\6&3&2&4\\4&1&1&-3\end{pmatrix}$	**B20**	$A=\begin{pmatrix}4&5&3&7\\6&5&4&5\\7&3&5&6\\6&8&4&7\end{pmatrix}$	**B21**	$A=\begin{pmatrix}-3&2&-5&6\\4&4&5&5\\6&3&3&7\\2&2&-2&-1\end{pmatrix}$

1	2	3	4	5	6
В22	$A=\begin{pmatrix}3&4&2&6\\2&4&4&4\\5&6&3&5\\7&5&3&6\end{pmatrix}$	**В23**	$A=\begin{pmatrix}5&-4&1&-6\\2&3&3&2\\6&3&-3&4\\4&1&1&1\end{pmatrix}$	**В24**	$A=\begin{pmatrix}4&5&3&7\\5&6&4&5\\7&3&5&6\\8&6&4&7\end{pmatrix}$
В25	$A=\begin{pmatrix}1&3&1&3\\2&1&4&2\\5&3&1&4\\2&1&3&5\end{pmatrix}$	**В26**	$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&-1&2&0\\1&1&-1&2\\0&-3&1&-1\end{pmatrix}$	**В27**	$A=\begin{pmatrix}3&4&4&5\\5&5&3&6\\4&3&3&6\\7&3&5&6\end{pmatrix}$
В28	$A=\begin{pmatrix}2&-3&-1&0\\4&-2&1&1\\0&2&-3&5\\-2&1&-4&3\end{pmatrix}$	**В29**	$A=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\1&5&2&4\\3&3&1&4\\1&2&3&1\end{pmatrix}$	**В30**	$A=\begin{pmatrix}5&2&1&4\\2&3&3&6\\1&2&-3&-2\\-5&-3&2&4\end{pmatrix}$

Тема 15. Игры с природой. Позиционные игры

Литература: *основная* [8, с. 178 –188], *дополнительная* [1], [9, с. 311–317], [10, с. 38–63, 67–82, 108–122, 128–133, 138–142], [12, с. 283–293], [16, с. 31–37], [17, с. 244–251], [18, с. 532–548], [23, с. 187–284], [25, с. 96–101], [27, с. 173–190], [28, с. 279–285, 299–311], [29, с. 560–580], [31, с. 468–478], [32, с. 117–123].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие игры с природой в условиях риска и в условиях неопределенности.
2. Матрица рисков.
3. Правила принятия решений в условиях риска: критерии Байеса и Лапласа.
4. Правила принятия решений в условиях неопределенности: критерии Вальда, крайнего оптимизма, Сэвиджа, Гурвица.
5. Понятие позиционной игры.
6. Построение дерева решений для выбора оптимальной стратегии в условиях конфликта и риска.

Обозначения, используемые в разделе

А – первый игрок

П – второй игрок (природа)

m – число стратегий игрока А

n – число состояний игрока П

A_i – i-я стратегия игрока А, $i = 1, \ldots, m$

B_j – j-е состояние игрока П, $j = 1, \ldots, n$

$A = (a_{ij})$ – платежная матрица, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$

$R = (r_{ij})$ – матрица рисков, $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$

q_j – вероятность j-го состояния игрока П, $j = 1, \ldots, n$

λ – показатель оптимизма-пессимизма (параметр в критерии Гурвица)

Решение типовых задач

Задача 15.1. Игры с природой

За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья в зависимости от его качества составляет 15, 18, 20, 21 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья окажется недостаточно, то запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в сумме 7 ед. в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 9 ед. в расчете на единицу сырья.

Требуется:

1) Придать описанной ситуации игровую схему, выявив участников игры, и, установив ее характер, указать допустимые стратегии сторон.

2) Вычислить элементы платежной матрицы и составить ее.

3) Дать обоснованные рекомендации об оптимальном уровне запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными при следующих предположениях:

а) вероятности потребностей в сырье известны и равны соответственно $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}35$, $q_3 = 0{,}35$, $q_4 = 0{,}2$;

б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все четыре возможных состояния равновероятны;

в) о вероятностях потребления сырья ничего определенного сказать нельзя ($\lambda = 0{,}8$ – значение параметра в критерии Гурвица).

Решение

1) Имеем матричную игру в условиях риска и неопределенности (игру с природой). Участники игры: А – руководство предприятия и В – природа.

Руководство предприятия располагает четырьмя стратегиями:

- A_1 – сформировать запас сырья в количестве 15 ед.,
- A_2 – сформировать запас сырья в количестве 18 ед.,
- A_3 – сформировать запас сырья в количестве 20 ед.,
- A_4 – сформировать запас сырья в количестве 21 ед.

Природа может оказаться в одном из следующих состояний:

- B_1 – потребность в сырье оказалась равной 15 ед.;
- B_2 – потребность в сырье оказалась равной 18 ед.;
- B_3 – потребность в сырье оказалась равной 20 ед.;
- B_4 – потребность в сырье оказалась равной 21 ед.

2) Платежная матрица данной матричной игры является матрицей дополнительных затрат, рассчитывается исходя из заданных в условии затрат на дозакупку и хранение единицы сырья. Получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & -21 & -35 & -42 \\ -27 & 0 & -14 & -21 \\ -45 & -18 & 0 & -7 \\ -54 & -27 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поясним расчет элементов платежной матрицы. Элемент a_{11} равен величине дополнительных затрат в случае, когда стратегии руководства предприятия и природы приняли значения A_1 и B_1, т. е. при сформированном запасе сырья в 15 ед. его потребность оказалась равна 15 ед. Очевидно, в этом случае дополнительных затрат не понадобилось, и $a_{11} = 0$. Аналогичным образом вычисляются элементы a_{22}, a_{33}, a_{44}.

Элемент a_{12} равен величине дополнительных затрат в случае, когда стратегии руководства предприятия и природы приняли значения A_1 и B_2, т. е. при сформированном запасе сырья в 15 ед. его потребность оказалась равна 18 ед. В этом случае для выпуска запланированного объема основной продукции сырья окажется недостаточно, что приведет к появлению дополнительных затрат в сумме

7 ед. в расчете на единицу сырья: $a_{12} = -7\cdot(18 - 15) = -21$. Аналогичным образом вычисляются элементы a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}.

Элемент a_{21} равен величине дополнительных затрат в случае, когда стратегии руководства предприятия и природы приняли значения A_2 и B_1, т. е. при сформированном запасе сырья в 18 ед. его потребность оказалась равна 15 ед. В этом случае дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 9 ед. в расчете на единицу сырья, что приведет к появлению дополнительных затрат: $a_{21} = -9\cdot(18 - 15) = -27$. Аналогичным образом вычисляются элементы a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}.

Заметим, что в случае игр с природой поиск седловой точки не производится, и доминирование проводится только по строкам. В данном случае сокращение матрицы невозможно.

3) Для определения оптимальной стратегии руководства (определение оптимального уровня запаса сырья, при котором дополнительные затраты на приобретение, содержание и хранение сырья будут минимальными) вычислим значения следующих критериев.

а) **Критерий Байеса –** критерий максимума математического ожидания выигрыша (что в нашем случае будет соответствовать минимуму математического ожидания проигрыша). Оптимальная стратегия A_i по критерию Байеса определяется как стратегия, которая имеет максимальное среднее значение выигрыша B:

$$B = \max_{1\le i\le m}\{B_i\} = \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot q_j\right\}.$$

Подставив численные значения, получаем:

$$\begin{gathered} B = \max\{0,1\cdot 0 + 0,35\cdot(-21) + 0,35\cdot(-35) + 0,2\cdot(-42);\\ 0,1\cdot(-27) + 0,35\cdot 0 + 0,35\cdot(-14) + 0,2\cdot(-21);\\ 0,1\cdot(-45) + 0,35\cdot(-18) + 0,35\cdot 0 + 0,2\cdot(-7);\\ 0,1\cdot(-54) + 0,35\cdot(-27) + 0,35\cdot(-9) + 0,2\cdot 0\} =\\ = \max\{-28; -11,8; -12,2; -18\} = -11,8. \end{gathered}$$

Максимальное среднее значение выигрыша $B = -11,8$ и соответствует второй стратегии. Следовательно, по критерию Байеса руководству целесообразно использовать вторую стратегию и сформировать запас сырья в количестве 18 ед., что приведет к минимальному среднему значению дополнительных затрат, равному 11,8 ден. ед.

б) **Критерий Лапласа**, в соответствии с которым оптимальная стратегия A_i определяется как стратегия, имеющая максимальное среднее значение выигрыша L:

$$L = \max_{1\le i\le m}\{L_i\} = \max_{1\le i\le m}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right\}.$$

Подставив численные значения, получаем:

$$L = \max\{(0 + (-21) + (-35) + (-42))/4; (-27 + 0 + (-14) + (-21))/4;$$

$$(-45 + (-18) + 0 + (-7))/4; (-54 + (-27) + (-9) + 0)/4\} =$$
$$= \max \{-24{,}5; -15{,}5; -17{,}5; -22{,}5\} = -15{,}5.$$

Максимальное среднее значение выигрыша $L = -15{,}5$ и соответствует второй стратегии. Следовательно, по критерию Лапласа руководству также целесообразно использовать вторую стратегию, что приведет к среднему значению дополнительных затрат, равному 15,5 ден. ед.

в) В условиях неопределенности оптимальную стратегию руководства будем определять, основываясь на следующих критериях: Вальда, Гурвица и Сэвиджа.

Критерий Вальда – критерий крайнего пессимизма. Оптимальной по критерию Вальда среди чистых стратегий считается та, при которой минимальный выигрыш является максимальным среди минимальных выигрышей всех чистых стратегий, т. е. с максимальным выигрышем W в худшем случае:

$$W = \max_{1 \le i \le m} \{W_i\} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\} \right\}.$$

Подставив численные значения, получаем

$$\max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\} \right\} = \max\{-42; -27; -45; -54\} = -27.$$

Максимальный выигрыш в худшем случае равен $W = -27$ и соответствует второй стратегии. Следовательно, по критерию Вальда руководству также целесообразно использовать вторую стратегию, при этом значение дополнительных затрат в худшем случае составит 27 ден. ед.

Критерий Гурвица (критерий оптимизма-пессимизма): при вычислении критерия используются только наибольшее и наименьшее значения выигрышей по каждой стратегии игрока A, и оптимальной стратегией считается стратегия, обеспечивающая максимальное значение G:

$$G = \max_{1 \le i \le m} \{G_i\} = \max_{1 \le i \le m} \{\lambda \min_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\}\}.$$

Подставив численные значения, получаем:

- для стратегии руководства A_1

$$\lambda \min_{1 \le j \le n} \{a_{1j}\} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} \{a_{1j}\} = 0{,}8 \cdot (-42) + 0{,}2 \cdot 0 = -33{,}6;$$

- для стратегии руководства A_2

$$\lambda \min_{1 \le j \le n} \{a_{2j}\} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} \{a_{2j}\} = 0{,}8 \cdot (-27) + 0{,}2 \cdot 0 = -21{,}6;$$

- для стратегии руководства A_3

$$\lambda \min_{1 \le j \le n} \{a_{3j}\} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} \{a_{3j}\} = 0{,}8 \cdot (-45) + 0{,}2 \cdot 0 = -36;$$

- для стратегии руководства A_4

$$\lambda \min_{1 \le j \le n} \{a_{4j}\} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} \{a_{4j}\} = 0{,}8 \cdot (-54) + 0{,}2 \cdot 0 = -43{,}2.$$

Максимальное значение критерия Гурвица, равное –21,6, соответствует второй стратегии. Следовательно, по критерию Гурвица руководству также целесообразно использовать вторую стратегию, при этом значение дополнительных затрат составит 21,6 ден. ед.

Критерий Сэвиджа: для того чтобы воспользоваться этим критерием, нужно вначале от платежной матрицы перейти к рассмотрению матрицы рисков *R*. Элементы матрицы рисков находятся по формуле

$$r_{ij} = \max_{1 \le i \le m}\{a_{ij}\} - a_{ij},\ i = 1,\ \dots,\ m,\ j = 1,\ \dots,\ n.$$

Поскольку максимальные элементы по столбцам – нули, получим

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 35 & 42 \\ 27 & 0 & 14 & 21 \\ 45 & 18 & 0 & 7 \\ 54 & 27 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оптимальной по критерию Сэвиджа среди чистых стратегий будет стратегия, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_{1 \le i \le m}\{S_i\} = \min_{1 \le i \le m}\left\{\max_{1 \le j \le n}\{r_{ij}\}\right\}.$$

Подставив численные значения, получаем

$$S = \min_{1 \le i \le m}\left\{\max_{1 \le j \le n}\{r_{ij}\}\right\} = \min\{42;\ 27;\ 45;\ 54\} = 27.$$

Минимальное значение риска по критерию Сэвиджа, равное 27, соответствует второй стратегии. Следовательно, по критерию Сэвиджа руководству также целесообразно использовать вторую стратегию, при этом значение дополнительных затрат составит 27 ден. ед.

Все вычисления по критериям можно свести в таблицы. Для тех критериев, значения которых вычислялись по платежной матрице, получаем таблицу 15.1.

Таблица 15.1 – Вычисление значений критериев по платежной матрице

Стратегия руководства	**Состояние природы**				**Значение критерия**			
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_i	L_i	W_i	G_i
A_1	0	–21	–35	–42	–28	–24,5	–42	–33,6
A_2	–27	0	–14	–21	**–11,8**	**–15,5**	**–27**	**–21,6**
A_3	–45	–18	0	–7	–12,2	–17,5	–45	–36
A_4	–54	–27	–9	0	–18	–22,5	–54	–43,2

Для критерия Сэвиджа рассмотрим матрицу рисков (таблица 15.2).

Таблица 15.2 – Матрица рисков

Стратегия руководства	**Состояние природы**				**Значение критерия**
	B_1	B_2	B_3	B_4	S_i
A_1	0	21	35	42	42
A_2	27	0	14	21	**27**
A_3	45	18	0	7	45
A_4	54	27	9	0	54

Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям все время рекомендовалась стратегия A_2. Следовательно, руководству предприятия целесообразно применить эту стратегию и сформировать запас сырья в количестве 18 ед.

Задача 15.2. Позиционные игры

Руководство некоторой компании решает, создавать ли для выпуска новой продукции крупное производство, малое предприятие или продать патент другой фирме.

Размер выигрыша (в долларах США), который компания может получить, зависит от благоприятного или неблагоприятного состояния рынка (таблица 15.3).

Таблица 15.3 – Исходные данные задачи

Решение предприятия	**Состояние рынка**	
	Благоприятное	**Неблагоприятное**
Крупное производство	200 000	–180 000
Малое предприятие	100 000	–20 000
Патент	10 000	10 000

Вероятность благоприятного и неблагоприятного состояний экономической среды руководству неизвестны (можно принять только 50 на 50).

Поэтому перед тем, как принимать решение о строительстве, руководство компании должно определить, заказывать ли дополнительное исследование состояния рынка или нет, причем предоставляемая услуга обойдется компании в 10 000 дол. США. Руководство понимает, что дополнительное исследование по-прежнему не способно дать точную информацию, но оно поможет уточнить ожидаемые оценки конъюнктуры рынка, изменив тем самым значения вероятностей.

Относительно фирмы, которой можно заказать исследование, известно, что она способна уточнить значения вероятностей благоприятного или неблагоприятного исхода. Возможности фирмы в виде условных вероятностей благоприятности и неблагоприятности рынка сбыта представлены в таблице 15.4.

Это означает, что если фирма утверждает, что рынок благоприятный, то с вероятностью 0,78 этот прогноз оправдывается (с вероятностью 0,22 могут возникнуть неблагоприятные условия), прогноз о неблагоприятности рынка оправдывается с вероятностью 0,73.

Таблица 15.4 – Вероятности прогноза

Прогноз фирмы	Фактически	
	Благоприятно	**Неблагоприятно**
Благоприятный	0,78	0,22
Неблагоприятный	0,27	0,73

Предположим, что фирма, которой заказали прогноз состояния рынка, утверждает:

- ситуация будет благоприятной с вероятностью 0,45;
- ситуация будет неблагоприятной с вероятностью 0,55.

Определите оптимальную экономическую стратегию компании с использованием дерева решений.

Решение

Дерево решений состоит из вершин (квадратов) и исходящих из них ветвей (дуг). Квадраты обозначают пункты принятия решений (или возможные события), дуги – переходы между событиями. Из вершин исходит столько дуг, сколько имеется альтернатив решений, причем из вершин событий дуги выходят с подписанными вероятностями.

Развитие событий происходит от корня дерева к исходам, а расчет прибыли выполняется от конечных состояний к начальным.

На первом шаге руководство компании должно принять решение, заказывать или не заказывать дополнительное исследование состояния рынка. На этом шаге имеется две альтернативы:

- проводить обследование;
- не проводить обследование.

При этом если выбрано решение «проводить обследование», то следующий «ход» делает фирма. Она выполняет прогноз, и в этом случае получаем две альтернативы:

- прогноз благоприятный;
- прогноз неблагоприятный.

Эти альтернативы наступают с вероятностями 0,45 и 0,55 соответственно.

Следующий шаг снова делает руководство компании. В каждой из построенных вершин дерева решений (не проводить обследование, прогноз благоприятный и прогноз неблагоприятный) руководство может выбрать одну из следующих альтернатив:

- создание крупного производства;
- создание малого предприятия;
- продажа патента.

После этого очередной шаг делает рынок: он может оказаться в одном из следующих состояний:

- благоприятное состояние;
- неблагоприятное состояние.

Над линиями подписаны вероятности наступления альтернатив в соответствии с табл. 15.4 (если исследование не проводилось, то по условию вероятности обоих состояний рынка равны 0,5).

Заметим, что этот шаг не наступает в вершинах, соответствующих принятию решения о продаже патента.

Получаем терминальные вершины, в которых записываем размеры выигрыша компании. Полученное дерево решений приведено на рисунке 15.1.

После построения дерева решений и установления числовых значений выигрышей и проигрышей выполняется анализ, который начинается справа налево. Для каждого решения выбирается альтернатива с наибольшим показателем отдачи. Если за принятием решения следует несколько вариантов событий, то выбирается альтернатива с наибольшей прибылью или наименьшими затратами.

Для расчета выигрышей или проигрышей используют формулы расчета:

- среднее значение выигрыша при создании крупного производства (исследование не проводили): $200\,000 \cdot 0{,}5 + (-180\,000) \cdot 0{,}5 = 10\,000$;
- среднее значение выигрыша при создании малого предприятия (исследование не проводили): $100\,000 \cdot 0{,}5 + (-20\,000) \cdot 0{,}5 = 40\,000$;
- среднее значение выигрыша при создании крупного производства (исследование проводили, прогноз благоприятный): $200\,000 \cdot 0{,}78 + (-180\,000) \times 0{,}22 = 116\,400$;
- среднее значение выигрыша при создании малого предприятия (исследование проводили, прогноз благоприятный): $100\,000 \cdot 0{,}78 + (-20\,000) \times 0{,}22 = 73\,600$;
- среднее значение выигрыша при создании крупного производства (исследование проводили, прогноз неблагоприятный): $200\,000 \cdot 0{,}27 + (-180\,000) \times 0{,}73 = -77\,400$;
- среднее значение выигрыша при создании малого предприятия (исследование проводили, прогноз неблагоприятный): $100\,000 \cdot 0{,}27 + (-20\,000) \times 0{,}73 = 12\,400$.

Полученные значения подписываем под соответствующими ветвями дерева решений.

Продолжаем расчет дерева решений:

- выигрыш в случае отказа от дополнительного исследования: $\max\{10\,000; 40\,000; 10\,000\} = 40\,000$ соответствует решению о создании малого предприятия;
- выигрыш в случае благоприятного прогноза фирмы: $\max\{116\,400; 73\,600; 10\,000\} = 116\,400$ соответствует решению о создании крупного производства;
- выигрыш в случае неблагоприятного прогноза фирмы: $\max\{-77\,400; 12\,400; 10\,000\} = 12\,400$ соответствует решению о создании малого предприятия.

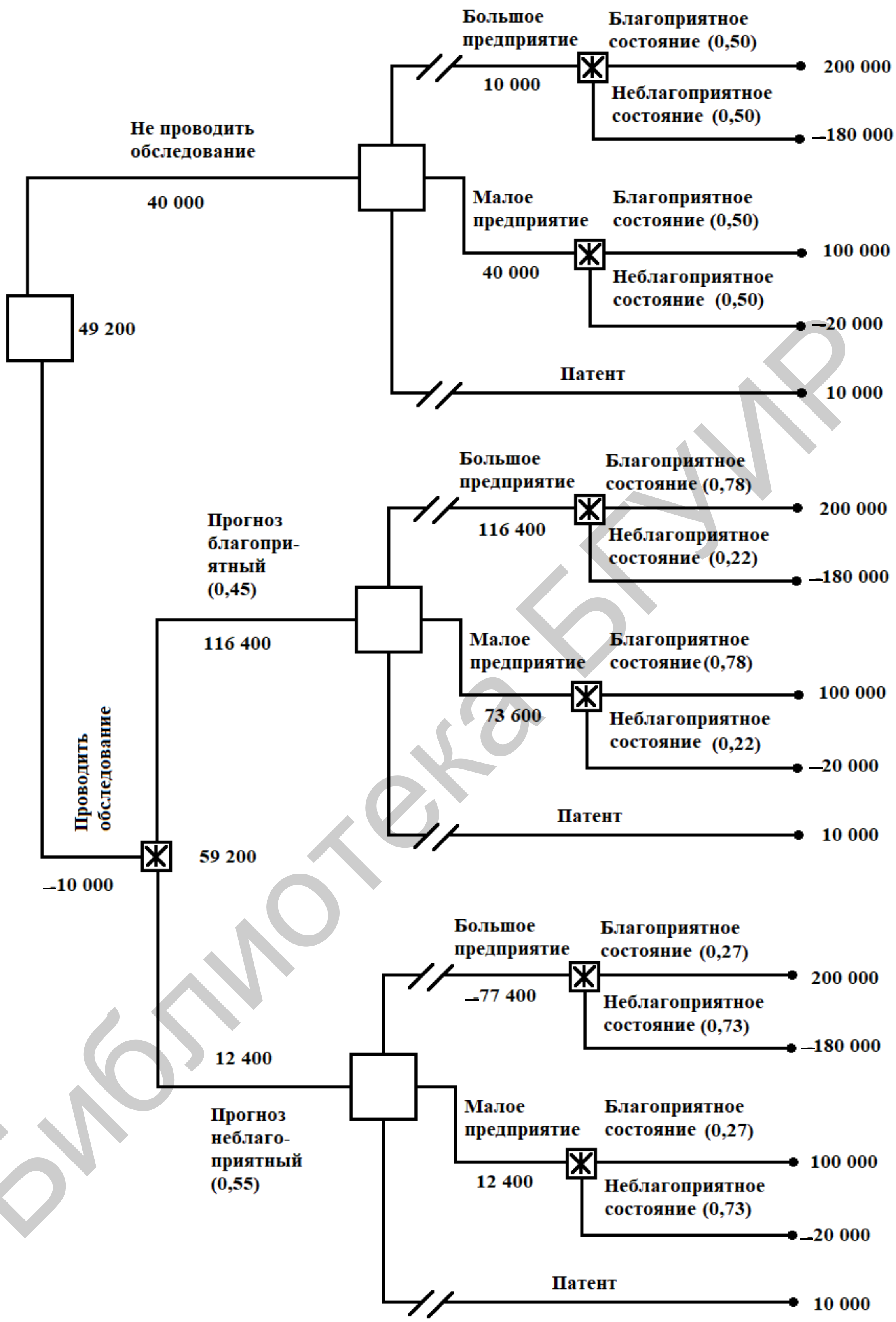


Рисунок 15.1 – Дерево решений

Среднее значение выигрыша при принятии решения о проведении дополнительного обследования: 116 400·0,45 + 12 400·0,55 = 59 200.

С учетом стоимости дополнительного исследования ветвь «проведение обследования» подписываем числом 59 200 – 10 000 = 49 200.

Окончательно получаем max{40 000; 49 200} = 49 200.

Выводы. Из анализа дерева решений следует, что среднее значение прибыли компании составит 49 200 дол. США.

При этом необходимо проводить дополнительное исследование конъюнктуры рынка, поскольку это позволяет существенно уточнить принимаемое решение:

- если фирма прогнозирует благоприятную ситуацию на рынке, то целесообразно строить большое предприятие (ожидаемая максимальная прибыль 116 400 – 10 000 = 106 400 дол. США с учетом стоимости дополнительного исследования);

- если прогноз неблагоприятный – малое предприятие (ожидаемая максимальная прибыль 12 400 – 10 000 = 2 400 дол. США).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 15.3. Игры с природой

После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний: 1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта; 2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы; 3) оборудование требует капитального ремонта или замены. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует в зависимости от обстановки затрат, равных a_1, a_2, a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1, b_2, b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости, совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1, c_2, c_3 ден. ед. (таблица 15.5). Указанные выше расходы предприятия включают, кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов, убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования.

Требуется:

- придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

- составить платежную матрицу;

- выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях:

а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1, q_2, q_3;

б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны;

в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя (λ = 0,7 – значение параметра в критерии Гурвица).

Таблица 15.5 – Исходные данные к задаче 15.3

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	q_1	q_2	q_3
B1	8	11	7	15	10	16	12	9	18	0,35	0,5	0,15
B2	1	2	3	5	4	8	7	9	11	0,35	0,5	0,15
B3	10	12	13	15	14	20	12	13	16	0,35	0,5	0,15
B4	19	18	17	16	22	21	23	29	23	0,35	0,5	0,15
B5	24	26	25	27	28	29	30	32	34	0,35	0,5	0,15
B6	31	32	29	38	37	36	40	41	28	0,35	0,5	0,15
B7	11	16	15	18	20	14	16	15	18	0,35	0,5	0,15
B8	20	15	14	13	19	17	21	22	15	0,35	0,5	0,15
B9	12	14	13	15	17	16	18	20	19	0,35	0,5	0,15
B10	8	7	9	5	8	6	9	10	11	0,35	0,5	0,15
B11	3	5	5	1	5	4	8	2	7	0,25	0,5	0,25
B12	15	14	13	12	10	11	11	10	15	0,25	0,5	0,25
B13	16	12	14	17	15	16	13	14	10	0,25	0,5	0,25
B14	15	18	19	14	19	16	17	12	13	0,25	0,5	0,25
B15	10	9	8	5	7	9	4	8	6	0,25	0,5	0,25
B16	12	13	14	15	13	16	14	19	15	0,25	0,5	0,25
B17	14	18	16	12	17	13	14	16	18	0,25	0,5	0,25
B18	9	6	8	7	6	8	9	4	8	0,25	0,5	0,25
B19	21	25	14	16	19	24	23	21	18	0,25	0,5	0,25
B20	11	12	8	15	14	12	17	19	14	0,25	0,5	0,25
B21	15	14	13	12	32	29	38	37	6	0,35	0,45	0,20
B22	16	12	14	17	16	15	18	20	4	0,35	0,45	0,20
B23	15	18	19	14	15	14	13	19	11	0,35	0,45	0,20
B24	10	9	8	5	14	13	15	17	16	0,35	0,45	0,20
B25	12	13	14	15	7	9	5	8	16	0,35	0,45	0,20
B26	14	18	16	12	5	5	1	5	9	0,35	0,45	0,20
B27	9	6	8	7	14	13	12	10	16	0,35	0,45	0,20
B28	21	25	14	16	12	14	17	15	13	0,35	0,45	0,20
B29	11	12	8	15	18	19	14	19	8	0,35	0,45	0,20
B30	8	9	7	8	6	7	9	11	7	0,35	0,45	0,20

Задача 15.4. Позиционные игры

Истребитель (И) атакует один из бомбардировщиков $Б_1$ или $Б_2$, летящих один за другим. Вооружение истребителя позволяет ему обстрелять один из бомбардировщиков. Вероятность поражения бомбардировщика при этом составляет $P_1 = 1 - k/100$ (k – номер варианта). На одном из бомбардировщиков находится бомба, однако на каком – не известно. Цель истребителя – сбить бомбардировщик с бомбой. Подлетая к бомбардировщику, истребитель подвергается обстрелу и может быть сбит с вероятностью $P_2 = 0{,}5 + k/100$. После этого он обстреливает первый бомбардировщик или летит ко второму, подвергается обстрелу бомбардировщиком $Б_2$ и обстреливает его.

Требуется построить дерево решений и определить оптимальные стратегии поведения сторон, если истребитель (сторона А) стремится максимизировать вероятность поражения бомбардировщика с бомбой, а бомбардировщики (сторона В) стремятся эту вероятность минимизировать.

Указание: целесообразно принять значения выигрыша равными 1 и 0.

Тема 16. Многокритериальная оптимизация

Литература: *основная* [14, с. 19–22], [26, с. 10–86], [28, с. 253–266], *дополнительная* [8, с. 37–46], [9, с. 112–118], [29, с. 549–560], [31, с. 303–328].

Вопросы для подготовки к занятию

1. Постановка задачи многокритериальной оптимизации.
2. Множество Парето, его нахождение.
3. Методы приоритета важнейшего критерия при нахождении оптимальной альтернативы (метод компромиссных решений, метод уступок).
4. Методы свертки при нахождении оптимальной альтернативы (аддитивная свертка, мультипликативная свертка, минимаксная свертка).
5. Постановка задачи многокритериального принятия решений.
6. Метод анализа иерархий при нахождении оптимальной альтернативы (метод Саати).

Обозначения, используемые в разделе

N – число критериев

n – число альтернатив

X – допустимое множество решений (альтернатив)

$f_i(\overline{x})$ – целевая функция i-го критерия, $i = 1, \ldots, N$, $\overline{x} \in X$

$f(\overline{x})$ – результирующая целевая функция, $\overline{x} \in X$

R^N – пространство N-мерных действительных векторов

α_i – вес i-го критерия, $i = 1, \ldots, N$

Решение типовых задач

Задача 16.1. Многокритериальная оптимизация: множество Парето

Инвестор рассматривает семь инвестиционных операций $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ с доходностями, представленными функцией $f_1(x)$, и надежностями, представленными функцией $f_2(x)$. Значения функций заданы в таблице 16.1.

Таблица 16.1 – Исходные данные к задаче 16.1

x	1	2	3	4	5	6	7
$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3
$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3

Определить инвестиционные операции, оптимальные по Парето.

Решение

Имеем двухкритериальную задачу

$$f_1(x) \to \max,\ f_2(x) \to \max,\ x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Рассмотрим **отношение Парето** для данной задачи. Решение x_1 ***предпочтительнее*** решения x_2 по отношению Парето (далее: $x_1 \succ x_2$), если x_1 хотя бы по одному критерию лучше, чем x_2, а по остальным критериям не хуже, чем x_2. Поскольку в нашем случае оба критерия на максимум, получаем

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow (f_1(x_1) > f_1(x_2)) \wedge (f_2(x_1) \geq f_2(x_2)) \vee (f_1(x_1) \geq f_1(x_2)) \wedge (f_2(x_1) > f_2(x_2)).$$

Для нахождения множества Парето необходимо вычислить значения целевых функций для каждого решения (в данном случае эти значения даны нам по условию) и определить свойства всех решений (эффективное, слабоэффективное, неэффективное).

Эффективное решение – решение, которое нельзя улучшить ни по одному критерию, не ухудшив при этом значения других критериев.

$$x_1 - \textit{эффективное} \Leftrightarrow \{x \in X \mid (x \succ x_1) \wedge (x \neq x_1)\} = \varnothing.$$

Слабоэффективное решение – решение, которое не может быть улучшено одновременно по всем критериям.

$$x_1 - \textit{слабоэффективное} \Leftrightarrow \{x \in X \mid (f_1(x) > f_1(x_1)) \wedge (f_2(x) > f_2(x_1))\} = \varnothing.$$

Остальные решения – **неэффективные**.

Совокупность всех эффективных решений и есть **множество Парето**.

Для нашей задачи получаем (таблица 16.2):

- Решение $x = 1$, значения функций $(f_1(1), f_2(1)) = (1, 6)$. Это решение может быть улучшено по первому критерию (существуют решения $x = 2$: $(f_1(2), f_2(2)) = (2, 6)$, $x = 3$: $(f_1(3), f_2(3)) = (3, 6)$ и $x = 7$: $(f_1(7), f_2(7)) = (3, 3)$), однако при этом не может быть улучшено по второму критерию. Следовательно, оно является слабоэффективным.

- Решение $x = 2$, значения функций $(f_1(2), f_2(2)) = (2, 6)$. Рассуждая аналогично, получаем, что это решение также является слабоэффективным.

- Решение $x = 3$, значения функций $(f_1(3), f_2(3)) = (3, 6)$. При попытке улучшения этого решения по первому критерию (решение $x = 6$: $(f_1(6), f_2(6)) = (4, 5)$) приходим к ухудшению значения по второму критерию. Улучшение значения по второму критерию также невозможно. Следовательно, это решение является эффективным.

- Решение $x = 4$, значения функций $(f_1(4), f_2(4)) = (2, 5)$, допускает улучшение сразу по двум критериям (решение $x = 3$: $(f_1(3), f_2(3)) = (3, 6)$), следовательно, является неэффективным, и т. д.

Таблица 16.2 – Определение эффективности решений

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	**Эффективность**
1	1	6	Слабоэффективное
2	2	6	Слабоэффективное
3	3	6	Эффективное
4	2	5	Неэффективное
5	3	5	Слабоэффективное
6	4	5	Эффективное
7	3	3	Неэффективное

Получили, что эффективными решениями являются решения $x = 3$ $(f_1(3), f_2(3)) = (3, 6)$ и $x = 6$ $(f_1(6), f_2(6)) = (4, 5)$.

Таким образом, множество Парето данной задачи содержит две инвестиционные операции: $x = 3$ и $x = 6$.

Задача 16.2. Многокритериальная оптимизация: методы главного критерия, методы свертки

Задача организации поставок сырья от трех поставщиков характеризуется двумя критериями: надежность поставщика (f_1) и качество сырья (f_2). Требования к поставкам (x_1, x_2, x_3) представлены в виде линейных неравенств:

$$f_1 = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$f_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Считая критерии соизмеримыми, найти решение задачи многокритериальной оптимизации, используя:

1) метод идеальной (целевой) точки с метрикой d_1;

2) метод главного критерия;

3) метод условной оптимизации, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности (f_1, f_2), и значение второго критерия не может быть больше 100;

4) метод последовательных уступок, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности (f_1, f_2), и уступка составляет 10 %;

5) аддитивную свертку критериев при $\alpha_1 = 2/5,\ \ \alpha_2 = 3/5$;

6) максиминную свертку критериев.

Решение

1. Метод идеальной (целевой) точки.

Решим заданную задачу отдельно по каждому критерию.

Применение симплекс-метода (например, с использованием надстройки Excel Поиск решения) дает максимальное значение первой целевой функции на плане $\overline{x}^1 = (52,\ 15,\ 25)$, равное $f_1^1 = 186$ (при этом значение второй целевой функции равно $f_2^1 = 107$), и минимальное значение второй целевой функции на плане $\overline{x}^2 = (0,\ 0,\ 0)$, равное $f_2^2 = 0$ (при этом значение первой целевой функции равно $f_1^2 = 0$).

Таким образом, **целевая точка** в пространстве значений критериев имеет координаты (186; 0).

Расстояние $d_s(a, b)$ между двумя точками a, b в пространстве R^N

$$d_s(a,\ b) = \left[\sum_{i=1}^{N} \left| a_i - b_i \right|^s \right]^{1/s}, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots .$$

При s = 1 получаем

$$d_1(a,\ b) = \sum_{i=1}^{N} |a_i - b_i|.$$

При s = 2 имеем обычное евклидово расстояние

$$d_2(a,\ b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (a_i - b_i)^2}.$$

И наконец, при $s = \infty$ получим равномерную метрику

$$d_\infty(a,\ b) = \max_{1 \le i \le N} |a_i - b_i|.$$

Теперь решение многокритериальной задачи с N критериями можно свести к решению обычной однокритериальной задачи оптимизации:

$$d_s\left((f_1(\overline{x}),\ f_2(\overline{x}),\ ...,\ f_N(\overline{x})),\ (f_1^*,\ f_2^*,\ ...,\ f_N^*)\right) \to \min, \quad \overline{x} \in X.$$

Для линейных многокритериальных задач с непрерывным множеством решений удобнее использовать метрику $d_1(a,\ b)$, т. к. получаемая при этом однокритериальная задача также оказывается линейной задачей. Если все целевые функции нужно максимизировать (т. е. для всех $\overline{x}$ из допустимого множества решений имеем $f_i(\overline{x}) \le f_i^*$, i = 1, …, N), то итоговый критерий имеет вид

$$d_1 = \sum_{i=1}^{N} \left| f_i(\overline{x}) - f_i^* \right| = \sum_{i=1}^{N} (-f_i(\overline{x}) + f_i^*) = -\sum_{i=1}^{N} f_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{N} f_i^* \to \min, \quad \overline{x} \in X,$$

что эквивалентно

$$f(\overline{x}) = -\sum_{i=1}^{N} f_i(\overline{x}) \to \min, \quad \overline{x} \in X.$$

Замечание. Если множество альтернатив дискретно, можно использовать любую из метрик.

В нашем случае с использованием метрики при s = 1 в методе идеальной точки, с учетом направления экстремумов критериев, требуется решить следующую однокритериальную задачу:

$$f = -f_1 + f_2 = -3x_1 - 2x_2 + x_1 + 2x_2 + x_3 = -2x_1 + x_3 \to \min,$$

или, что эквивалентно

$$f^* = 2x_1 - x_3 \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Применение симплекс-метода дает максимальное значение полученной целевой функции на плане $\overline{x}^* = \overline{x}^1 = (52,\ 15,\ 25)$, равное $f^* = 79$.

Этот план и будет искомым решением задачи, значения целевых функций на нем: $f_1^* = 186$, $f_2^* = 107$.

Очевидно, что из двух найденных решений $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ выбрано более близкое к идеальной точке в смысле принятой метрики.

2. Метод главного критерия.

Пусть **главным критерием** является первый критерий. Тогда, отбросив вторую целевую функцию, решим задачу с одним критерием $f_1 \to \max$.

Как и в пункте 1, применение симплекс-метода (например, с использованием надстройки Excel Поиск решения) дает максимальное значение целевой функции на плане $\overline{x}^* = (52,\ 15,\ 25)$, равное $f_1^* = 186$.

3. Условная оптимизация.

Выберем из критериев один наиболее важный критерий – по условию это первый критерий. Зададим ограничения на величины остальных критериев: значение второго критерия не может быть больше 100. Получаем следующую однокритериальную задачу:

$$f_1 = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 100, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решим полученную задачу симплексным методом (например, с использованием надстройки Excel Поиск решения). Максимальное значение целевой функции на плане $\overline{x}^* = (49{,}2,\ 13{,}6,\ 23{,}6)$, равное $f_1^* = 174{,}8$ есть решение исходной многокритериальной задачи.

4. Метод уступок.

1) Произведем ранжирование критериев. Пусть первым по рангу является первый критерий, вторым – второй.

2) Решим исходную задачу по первому критерию, не принимая во внимание второй. Ранее было получено: максимальное значение первой целевой функции, равное $f_1^1 = 186$, достигается на плане $\overline{x}^1 = (52,\ 15,\ 25)$.

3) Сделаем уступку по первому критерию. По условию можно отступить от максимума первой целевой функции не более чем на 10 %. Тогда уступка примет вид

$$3x_1 + 2x_2 \ge 0{,}9 \cdot 186,$$

или

$$3x_1 + 2x_2 \ge 167{,}4.$$

4) Введем полученное дополнительное ограничение в задачу, в качестве целевой функции рассматривая второй критерий, получим следующую однокритериальную задачу:

$$f_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 167,4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

5) Решим полученную задачу по второму критерию симплексным методом (например, с использованием надстройки Excel Поиск решения). Получаем: минимальное значение второй целевой функции, равное 95,375, достигается на плане $\overline{x}^* = (47,5,\ 12,675,\ 22,675)$.

Этот план и есть компромиссное решение задачи, полученное методом уступок. Значения целевых функций на нем: $f_1^* = 167,4$, $f_2^* = 95,375$.

При этом получено экстремальное значение наименее важного (второго) критерия при условии гарантированного значения первого критерия.

5. Аддитивное свертывание.

Сведем заданную многокритериальную задачу к однокритериальной, применив аддитивную свертку критериев при $\alpha_1 = 2/5$, $\alpha_2 = 3/5$.

Результирующий критерий (с учетом направления экстремума исходных целевых функций) будет иметь следующий вид:

$$f = f_{add} = \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 \to \max,$$
$$f_{add} = 0,4(3x_1 + 2x_2) - 0,6(x_1 + 2x_2 + x_3) \to \max,$$
$$f_{add} = 0,6x_1 - 0,4x_2 - 0,6x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Применение симплекс-метода (например, с использованием надстройки Excel Поиск решения) дает максимальное значение полученной целевой функции на плане $\overline{x}^* = \overline{x}^1 = (52,\ 15,\ 25)$, равное $f_{add} = 10,2$.

Этот план и будет компромиссным решением задачи, полученным методом аддитивного свертывания. Значения исходных целевых функций на нем: $f_1^* = 186$, $f_2^* = 107$.

6. Максиминное свертывание.

Для нормализованных целевых функций $\lambda_i(\bar{x}) = \dfrac{f_i(\bar{x})}{f_i^{\max}}$, $\bar{x} \in X$, где $f_i^{\max} = \max\limits_{\bar{x}\in X} f_i(\bar{x})$, i = 1, …, N, максиминная задача, которая дает наилучший результат даже для самого наименьшего из критериев, формулируется в виде

$$z = \min_{1 \le i \le N} \lambda_i(\bar{x}) \to \max \text{ при } \bar{x} \in X .$$

В нашем случае ($f_1^{\max} = 186$, $f_2^{\max} = 107$, $\lambda_1 = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{186}$, $\lambda_2 = \dfrac{x_1 + 2x_2 + x_3}{107}$) с учетом направлений критериев перейдем к следующей λ-задаче:

$$z = \lambda \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} \lambda \le \dfrac{1}{186}(3x_1 + 2x_2), \\ \lambda \ge \dfrac{1}{107}(x_1 + 2x_2 + x_3), \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0,\ \lambda \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи есть $\bar{x}^* = (52,\ 15,\ 25)$, $\lambda^* = 1$. Значения исходных целевых функций на нем: $f_1^* = 186$, $f_2^* = 107$.

Замечание. Если ***множество альтернатив <u>дискретно</u>***, можно использовать как **максиминное**, так и **минимаксное** свертывание. В первом случае по матрице нормализованных значений критериев по каждой альтернативе найдем значения минимальных элементов по каждой альтернативе. Из полученных элементов выберем наибольший. Соответствующая альтернатива будет оптимальной.

Во втором случае составим таблицу, элементы которой равны отклонениям между оптимальным значением критерия и значением по данной альтернативе, и найдем максимальное отклонение для каждой альтернативы. Оптимальной является альтернатива с наименьшим максимальным отклонением.

Если этим методом получено несколько оптимальных альтернатив, лучшую из них выбирают, применяя дополнительно метод линейной свертки.

Задача 16.3. Многокритериальная оптимизации: метод анализа иерархий

В силу благоприятных обстоятельств жители одного из городов некой страны стали чаще выезжать за границу. Существующие аэропорты, расположенные около города (назовем его городом М), не соответствовали по своим возможностям новому потоку пассажиров. Возникла необходимость в построении еще одного аэропорта около города М.

Правительство этой страны назначило комиссию по выбору места для аэропорта, которая приступила к работе. Были обследованы различные площадки около города, где постройка аэропорта нужного размера представлялась возможной. После многочисленных дискуссий комиссия определила три основных критерия для оценки вариантов расположения аэропорта:

- К1 – Стоимость постройки. Желательно построить аэропорт с заданной пропускной способностью за наименьшую возможную цену.
- К2 – Расстояние от города. Желательно, чтобы поездка пассажиров от аэропорта в город и обратно занимала наименьшее время.
- К3 – Минимальное шумовое воздействие. Количество людей, подвергающихся нежелательным шумовым воздействиям, должно быть по возможности минимальным.

По мнению комиссии, критерий К1 Стоимость существенно превосходит критерий К2 Расстояние и умеренно превосходит критерий К3 Шумовое воздействие; критерий К3 Шумовое воздействие умеренно превосходит критерий К2 Расстояние.

Комиссия по выбору места постройки аэропорта предварительно отобрала из нескольких возможных три варианта: А1, А2, А3.

По стоимости строительства альтернатива А1 значительно превосходит альтернативу А2 и умеренно превосходит альтернативу А3. Ближе всех к городу расположена площадка А2, площадка А3 расположена немного дальше, а площадка А1 расположена на значительном удалении. По уровню создаваемого шума обе площадки А2 и А3 существенно хуже альтернативы А1, но если сравнивать их между собой, можно считать, что площадка А3 существенно лучше площадки А2.

Выбрать оптимальный вариант площадки для строительства аэропорта, используя алгоритм Саати. Выполнить проверку на непротиворечивость.

Решение

Имеем задачу многокритериальной оптимизации с дискретным множеством альтернатив и качественными критериями.

1. Структуризация задачи. Составим многоуровневую иерархическую модель, где *уровень 1 – стратегическая цель; уровень 2 – множество критериев; уровень 3 – множество альтернатив.*

Структура решаемой задачи может быть представлена в виде, показанном на рисунке 16.1.

2. Парное сравнение элементов. На каждом уровне иерархии проведем парное сравнение элементов уровня на основе следующей шкалы определений уровня важности (таблица 16.3).

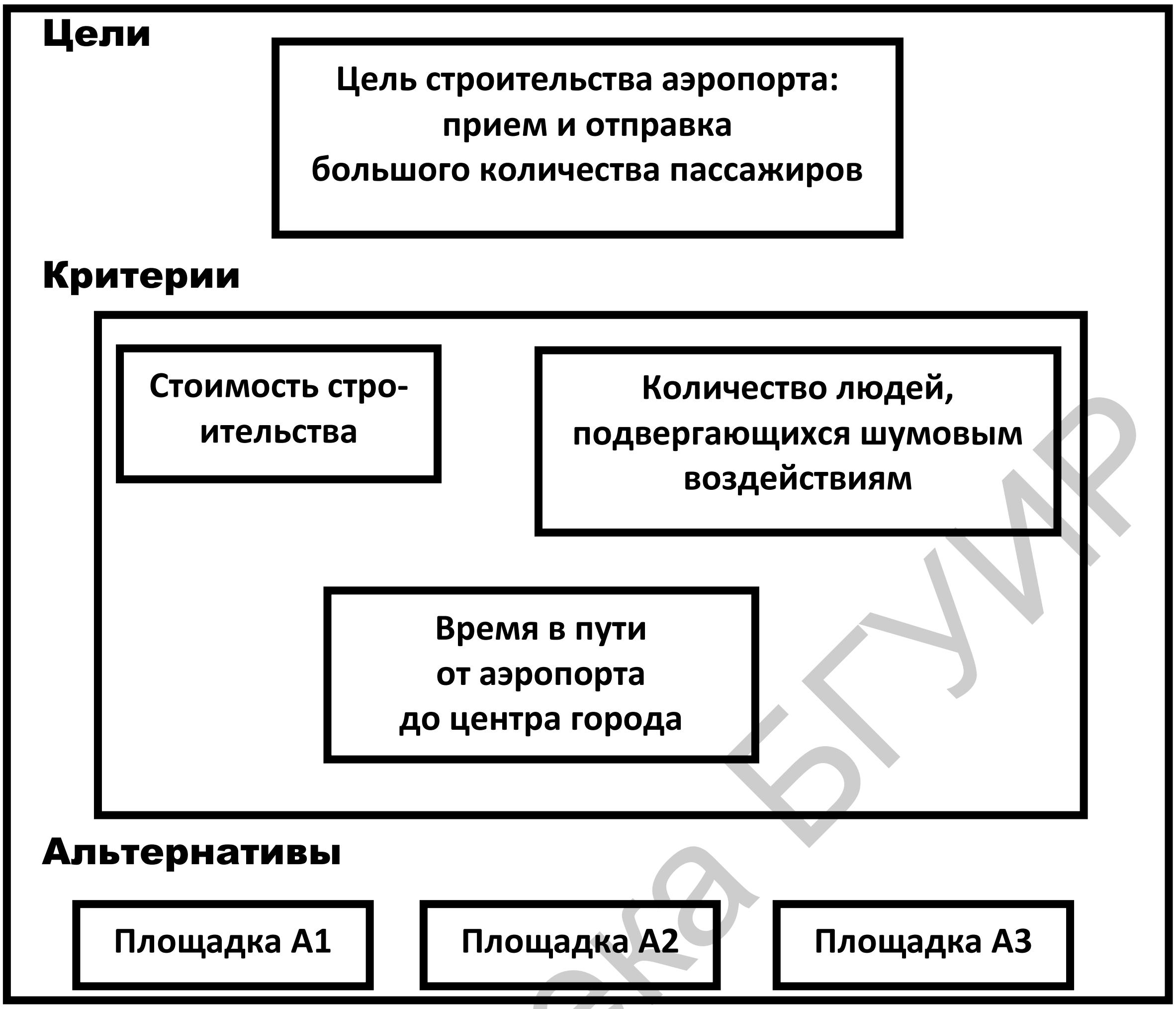


Рисунок 16.1 – Иерархическая схема проблемы выбора места для аэропорта

Таблица 16.3 – Шкала относительной важности

Уровень важности	Количественное значение
Равная важность	1
Умеренное превосходство	3
Существенное или сильное превосходство	5
Значительное (большое) превосходство	7
Очень большое превосходство	9

3. Построение матриц парных сравнений. Нужно построить четыре матрицы парных сравнений: матрицу сравнений критериев и три матрицы парных сравнений альтернатив (по каждому критерию). Получаем следующие матрицы (таблицы 16.4, 16.5).

Таблица 16.4 – Матрица парных сравнений критериев

Критерий	К1 Стоимость	К2 Расстояние	К3 Шумовое воздействие	Собственный вектор	Вес критерия
К1 Стоимость	1	5	3	2,47	0,65
К2 Расстояние	1/5	1	3	0,848	0,22
К3 Шумовое воздействие	1/3	1/3	1	0,48	0,13

Таблица 16.5 – Матрицы парных сравнений альтернатив

Альтернатива	**A1**	**A2**	**A3**	**Собственный вектор**	**Вес альтернативы**
По критерию K1 Стоимость					
A1	1	7	3	2,76	0,69
A2	1/7	1	3	0,755	0,19
A3	1/3	1/3	1	0,48	0,12
По критерию K2 Расстояние					
A1	1	1/7	1/5	0,31	0,07
A2	7	1	3	2,76	0,65
A3	5	1/3	1	1,18	0,28
По критерию K3 Шумовое воздействие					
A1	1	5	5	2,93	0,68
A2	1/5	1	1/5	0,34	0,09
A3	1/5	5	1	1	0,23

4. Вычисление <u>весов критериев</u> и <u>весов альтернатив по каждому критерию</u>. Для этого нужно вычислить собственные векторы каждой матрицы парных сравнений, а затем пронормировать их.

Для вычисления собственных значений матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m\times m$ воспользуемся приближенной формулой – вычислим средние геометрические строк матрицы:

$$\bar{a}_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} a_{ij}},\ i = 1,\ \ldots,\ m.$$

Затем найдем веса соответствующих элементов по формуле

$$V_i = \frac{\bar{a}_i}{a},\ i = 1,\ \ldots,\ m,$$

где

$$a = \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i .$$

Найденные значения весов критериев и весов альтернатив по каждому критерию записаны в дополнительных столбцах матриц парных сравнений.

5. Определение обобщенных оценок альтернатив по формуле

$$S_{\mathrm{A}j} = \sum_{i=1}^{N} w_i V_{ji},\quad j = 1,\ \ldots,\ n,$$

где $S_{\mathrm{A}j}$ – оценка j-й альтернативы;

w_i – вес i-го критерия;

V_{ji} – важность j-й альтернативы по i-му критерию;

N – число критериев;

n – число альтернатив.

Для трех площадок проведенные вычисления позволяют определить:

$$S_{\mathrm{A}1} = 0,65 \cdot 0,69 + 0,22 \cdot 0,07 + 0,13 \cdot 0,68 = 0,552,$$

$$S_{\text{A}2} = 0,65 \cdot 0,19 + 0,22 \cdot 0,65 + 0,13 \cdot 0,09 = 0,278,$$
$$S_{\text{A}3} = 0,65 \cdot 0,12 + 0,22 \cdot 0,28 + 0,13 \cdot 0,23 = 0,17.$$

6. Выбор рационального решения по критерию максимума обобщенной скалярной оценки.

Получаем, что т. к. обобщенная оценка выше у альтернативы А1 (0,552), эта альтернатива является наилучшей.

Таким образом, для строительства аэропорта целесообразно использовать площадку А1.

7. Оценка степени согласованности матрицы парных сравнений проводится по формуле

$$d = \frac{(B - m)/(m - 1)}{C} \cdot 100\ \%,$$

где m – размерность матрицы;

B – расчетная величина (индекс согласованности): сумма каждого столбца умножается на вес соответствующей альтернативы, полученные значения суммируются;

C – величина случайной согласованности, определяемая по таблице 16.6.

Таблица 16.6 – Среднее значение случайного индекса согласованности

Размер матрицы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Случайная согласованность (СС)	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если $d > 20$ %, то необходимо пересмотреть исходные данные и заново заполнить матрицу парных сравнений.

Произведем оценку степени согласованности оценки критериев:

$$B = (1 + 0,2 + 0,333) \cdot 0,65 + (5 + 1 + 0,333) \cdot 0,22 + (3 + 3 + 1) \cdot 0,13 = 3,2997.$$

Получаем

$$d = \frac{(3,2997 - 3)/(3 - 1)}{0,58} \cdot 100\ \% = 25,8\ \%.$$

Поскольку отношение согласованности превышает 20 %, возможно, следует предложить комиссии пересмотреть оценки критериев.

Произведем оценку степени согласованности оценки альтернатив по первому критерию:

$$B = (1 + 0,143 + 0,333) \cdot 0,69 + (7 + 1 + 0,333) \cdot 0,19 + (3 + 3 + 1) \cdot 0,12 = 3,44.$$

Получаем

$$d = \frac{(3,44 - 3)/(3 - 1)}{0,58} \cdot 100\ \% = 37,9\ \%.$$

Поскольку отношение согласованности превышает 20 %, следует предложить комиссии пересмотреть оценку альтернатив по первому критерию.

Произведем оценку степени согласованности оценки альтернатив по второму критерию:

$$B = (1+7+5)\cdot 0,07 + (0,143+1+0,333)\cdot 0,65 + (0,2+3+1)\cdot 0,28 = 3,0454.$$

Получаем

$$d = \frac{(3,0454-3)/(3-1)}{0,58}\cdot 100\ \% = 3,9\ \%.$$

Поскольку отношение согласованности не превышает 20 %, уточнение экспертных оценок альтернатив по второму критерию не требуется.

Произведем оценку степени согласованности оценки альтернатив по третьему критерию:

$$B = (1+0,2+0,2)\cdot 0,68 + (5+1+5)\cdot 0,09 + (5+0,2+1)\cdot 0,23 = 3,368.$$

Получаем

$$d = \frac{(3,368-3)/(3-1)}{0,58}\cdot 100\ \% = 31,7\ \%.$$

Поскольку отношение согласованности превышает 20 %, следует предложить комиссии пересмотреть оценку альтернатив по третьему критерию.

Таким образом, по алгоритму Саати для строительства аэропорта следует выбрать площадку А1. Однако, возможно, следует пересмотреть оценки критериев и оценки альтернатив по первому и третьему критериям.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 16.4. Многокритериальная оптимизация: множество Парето

Найти множество Парето следующей двухкритериальной задачи:

$$f_1(x)\to extr,\ f_2(x)\to extr,$$

где $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ – инвестиционные операции, функция $f_1(x)$ представляет собой величину дохода либо сумму требуемых вложений, а функция $f_2(x)$ – надежность либо риск инвестиционных операций (в зависимости от направления экстремума). Исходные данные по вариантам заданы в таблице 16.7.

Таблица 16.7 – Исходные данные к задаче 16.4

Вариант	***x***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	***extr***
В1	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	max
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	max
В2	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	min
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	min
В3	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	max
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	min
В4	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	min
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	max
В5	$f_1(x)$	–1	–2	–3	–2	–3	–4	–3	max
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	max

Вариант	x	1	2	3	4	5	6	7	$\rightarrow$
В6	$f_1(x)$	–1	–2	–3	–2	–3	–4	–3	min
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	min
В7	$f_1(x)$	–1	–2	–3	–2	–3	–4	–3	max
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	min
В8	$f_1(x)$	–1	–2	–3	–2	–3	–4	–3	min
	$f_2(x)$	6	6	6	5	5	5	3	max
В9	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	max
	$f_2(x)$	–6	–6	–6	–5	–5	–5	–3	max
В10	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	min
	$f_2(x)$	–6	–6	–6	–5	–5	–5	–3	min
В11	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	max
	$f_2(x)$	–6	–6	–6	–5	–5	–5	–3	min
В12	$f_1(x)$	1	2	3	2	3	4	3	min
	$f_2(x)$	–6	–6	–6	–5	–5	–5	–3	max
В13	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	max
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	max
В14	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	min
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	min
В15	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	max
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	min
В16	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	min
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	max
В17	$f_1(x)$	–1/2	–1	–3/2	–1	–3/2	–2	–3/2	max
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	max
В18	$f_1(x)$	–1/2	–1	–3/2	–1	–3/2	–2	–3/2	min
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	min
В19	$f_1(x)$	–1/2	–1	–3/2	–1	–3/2	–2	–3/2	max
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	min
В20	$f_1(x)$	–1/2	–1	–3/2	–1	–3/2	–2	–3/2	min
	$f_2(x)$	3	3	3	5/2	5/2	5/2	3/2	max
В21	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	max
	$f_2(x)$	–3	–3	–3	–5/2	–5/2	–5/2	–3/2	max
В22	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	max
	$f_2(x)$	–3	–3	–3	–5/2	–5/2	–5/2	–3/2	min
В23	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	min
	$f_2(x)$	–3	–3	–3	–5/2	–5/2	–5/2	–3/2	max
В24	$f_1(x)$	1/2	1	3/2	1	3/2	2	3/2	min
	$f_2(x)$	–3	–3	–3	–5/2	–5/2	–5/2	–3/2	min
В25	$f_1(x)$	2	4	6	4	6	8	6	max
	$f_2(x)$	12	12	12	10	10	10	6	max
В26	$f_1(x)$	–2	–4	–6	–4	–6	–8	–6	max
	$f_2(x)$	12	12	12	10	10	10	6	min
В27	$f_1(x)$	2	4	6	4	6	8	6	min
	$f_2(x)$	–12	–12	–12	–10	–10	–10	–6	max
В28	$f_1(x)$	2	4	6	4	6	8	6	max
	$f_2(x)$	12	12	12	10	10	10	6	min

Вариант	x	1	2	3	4	5	6	7	→
В29	$f_1(x)$	2	4	6	4	6	8	6	min
	$f_2(x)$	12	12	12	10	10	10	6	max
В30	$f_1(x)$	–2	–4	–6	–4	–6	–8	–6	max
	$f_2(x)$	12	12	12	10	10	10	6	max

Задача 16.5. Многокритериальная оптимизация: методы главного критерия, методы свертки

Задача организации поставок сырья от двух поставщиков характеризуется двумя критериями: надежность поставщика (f_1) и качество сырья (f_2). Требования к поставкам (x_1, x_2) представлены в виде линейных ограничений:

$$\begin{array}{l} f_1(x) = (\bar{c}^1, \bar{x}) \to \max \\ f_2(x) = (\bar{c}^2, \bar{x}) \to \max \end{array} \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Считая критерии соизмеримыми, найти решение двухкритериальной задачи (данные приведены в таблице 16.8), используя следующие методы:

Таблица 16.8 – Исходные данные к задаче 16.5

Вариант	**Вектор** $\bar{c}^1$	**Вектор** $\bar{c}^2$	**Вариант**	**Вектор** $\bar{c}^1$	**Вектор** $\bar{c}^2$
В1	(1; 2)	(3; 2)	**В16**	(1; 5)	(10; 2)
В2	(1; 2)	(0; 6)	**В17**	(1; 5)	(12; 2)
В3	(2; –1)	(–1; 1)	**В18**	(1; 4)	(6; 0)
В4	(–2; 5)	(3; 1)	**В19**	(1; 4)	(5; 0)
В5	(3; 2)	(–1; 3)	**В20**	(1; 4)	(4; 0)
В6	(–1; 1)	(3; 1)	**В21**	(1; 5)	(6; 0)
В7	(–3; 2)	(4; 1)	**В22**	(1; 5)	(5; 0)
В8	(–3; 2)	(5; 1)	**В23**	(1; 5)	(4; 0)
В9	(1; 3)	(9; 2)	**В24**	(1; 3)	(2; 1)
В10	(1; 3)	(10; 2)	**В25**	(2; 1)	(1; 1)
В11	(1; 3)	(12; 2)	**В26**	(3; 1)	(1; –1)
В12	(1; 4)	(9; 2)	**В27**	(2; 1)	(1; –1)
В13	(1; 4)	(10; 2)	**В28**	(1; 1)	(3; 2)
В14	(1; 4)	(12; 2)	**В29**	(–1; 2)	(3; 1)
В15	(1; 5)	(9; 2)	**В30**	(1; 2)	(2; 1)

1) метод идеальной точки с метрикой d_1;

2) метод главного критерия;

3) метод условной оптимизации, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности (f_1, f_2) и значение второго критерия не может быть меньше k, где k – номер варианта;

4) метод последовательных уступок, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности (f_1, f_2) и уступка составляет 10 %;

5) аддитивную свертку критериев при $\alpha_1 = 2/5$, $\alpha_2 = 3/5$;

6) максиминную свертку критериев;

7*) метод идеальной точки с равномерной метрикой (решить графически).

Указание к выполнению пункта 7: используя равномерную метрику, методом идеальной точки найдем решение следующей двухкритериальной задачи:

$$f_1 = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad f_2 = 4x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$-x_1 + x_2 \le 1, \quad x_1 + x_2 \ge 3, \quad x_1 - 2x_2 \le 0, \quad x_1 \le 4, \; x_2 \le 3.$$

Так как для данной задачи идеальная точка $f_1^* = 7$, $f_2^* = 14$, то однокритериальная задача с использованием равномерной метрики в пространстве критериев имеет вид

$$d_\infty\left((f_1,\; f_2),\; (f_1^*,\; f_2^*)\right) = \max\{|f_1 - 7|; |f_2 - 14|\} \rightarrow \min.$$

Графическое решение этой задачи представлено на рисунке 16.2.

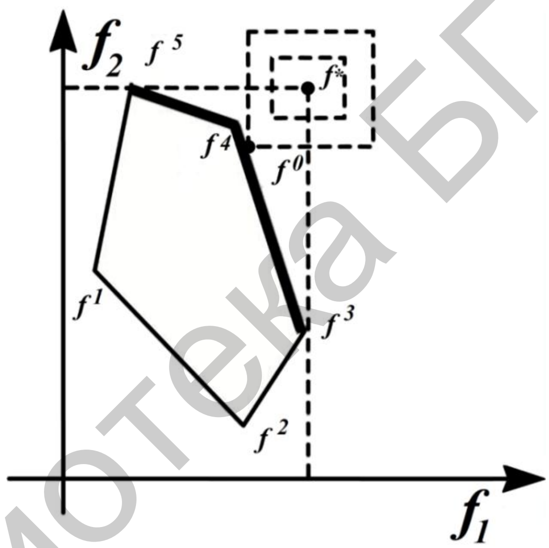


Рисунок 16.2 – Графическое решение двухкритериальной задачи

Задача 16.6. Многокритериальная оптимизация: метод анализа иерархий

Для снижения логистических затрат по доведению сахарного песка (на производстве затаривается в мешки вместимостью 50 кг) до розничной торговой сети за счет оптимизации фасовки предлагаются четыре альтернативы фасовки:

А1 – за прилавком магазина на рабочем месте продавца во время обслуживания очередного покупателя;

А2 – в магазине, в помещении для подготовки товара к продаже на рабочем месте фасовщика, специально занятого расфасовкой сахара;

А3 – на складе предприятия оптовой торговли в цехе фасовки;

А4 – на заводе-изготовителе.

Выбор оптимальной альтернативы производится с участием трех экспертов. Мнения экспертов заданы в таблице 16.9 в соответствии с вариантом.

На основе оценок экспертов найти веса альтернатив и выбрать оптимальный вариант, используя алгоритм Саати, считая экспертов равнозначными. Выполнить проверку на непротиворечивость.

Таблица 16.9 – Исходные данные к задаче 16.6

Вариант	Первый эксперт	Второй эксперт	Третий эксперт
1	2	3	4
В1	Лучший способ – А2, немного хуже – А1, еще хуже – А4, намного хуже – А3	Лучший способ – А1, хуже – А2, примерно такой же (немного хуже) – А4; намного хуже – А3	Лучший способ – А1, немного хуже – А2, значительно хуже – А3, еще хуже – А4
В2	Лучший вариант – А3, немного хуже – А4, значительно хуже – А2, еще хуже – А1	Лучший вариант – А4, хуже – А3, еще хуже – А1, самый худший вариант – А2	Лучший вариант – А1, немного хуже – А4, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А2
В3	Лучший вариант – А2, значительно хуже – А1, еще немного хуже – А3, еще хуже – А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, еще немного хуже – А2, самый худший вариант – А4	Лучший вариант – А2, немного хуже – А3, еще немного хуже – А1, значительно хуже – А4
В4	Лучший вариант – А3, значительно хуже – А2, еще немного хуже – А1, самый худший– А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А4, самый худший – А2	Лучший вариант – А3, хуже – А4, еще хуже – А2, самый худший – А1
В5	Лучший вариант – построить А3, хуже – А1, еще хуже – А2, значительно хуже – А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А2, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А4	Лучший вариант – А3, хуже – А1, значительно хуже – А4, еще хуже – А2
В6	Лучшее решение – А3, хуже – А2, значительно хуже – А1, хуже всего – А4	Лучше всего – А2, хуже – А1, еще хуже – А3, значительно хуже – А4	Лучше всего – А3, немного хуже – А1, значительно хуже – А4, хуже всего – А2
В7	Лучшее решение – А3, хуже – А1, еще хуже – А4, значительно хуже – А2	Лучше всего – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А2, еще хуже – А4	Лучшее решение – А3, хуже – А4, еще хуже – А1, значительно хуже – А2
В8	Лучшее решение – А4, немного хуже – А3, еще немного хуже – А1, значительно хуже – А2	Лучшее решение – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А4, еще хуже – А2	Лучшее решение – А3, немного хуже – А4, еще немного хуже – А2, еще хуже – А1
В9	Лучший способ – А1, хуже – А2, примерно такой же (немного хуже) – А4, намного хуже – А3	Лучший способ – А2, немного хуже – А1, еще хуже – А4, намного хуже – А3	Лучший способ – А1, немного хуже – А2, значительно хуже – А3, еще хуже – А4
В10	Лучший вариант – А4, хуже – А3, еще хуже – А1, самый худший вариант – А2	Лучший вариант – А3, немного хуже – А4, значительно хуже – А2, еще хуже – А1	Лучший вариант – А1, немного хуже – А4, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А2

1	2	3	4
В11	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, еще немного хуже – А2, самый худший вариант – А4	Лучший вариант – А2, значительно хуже – А1, еще немного хуже – А3, еще хуже – А4	Лучший вариант – А2, немного хуже – А3, еще немного хуже – А1, значительно хуже – А4
В12	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А4, самый худший – А2	Лучший вариант – А3, значительно хуже – А2, еще немного хуже – А1, самый худший вариант – А4	Лучший вариант – А3, хуже – А4, еще хуже – А2, самый худший – А1
В13	Лучший вариант – А1, немного хуже – А2, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А4	Лучший вариант – построить А3, хуже – А1, еще хуже – А2, значительно хуже – А4	Лучший вариант – А3, хуже – А1, значительно хуже – А4, еще хуже – А2
В14	Лучше всего – А2, хуже – А1, еще хуже – А3, значительно хуже – А4	Лучшее решение – А3, хуже – А2, значительно хуже – А1, хуже всего – А4	Лучше всего – А3, немного хуже – А1, значительно хуже – А4, хуже всего – А2
В15	Лучше всего – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А2, еще хуже – А4	Лучшее решение – А3, хуже – А1, еще хуже – А4, значительно хуже – А2	Лучшее решение – А3, хуже – А4, еще хуже – А1, значительно хуже – А2
В16	Лучшее решение – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А4, еще хуже – А2	Лучшее решение – А4, немного хуже – А3, еще немного хуже – А1, значительно хуже – А2	Лучшее решение – А3, немного хуже – А4, еще немного хуже – А2, еще хуже – А1
В17	Лучший способ – А1, немного хуже – А2, значительно хуже – А3, еще хуже – А4	Лучший способ – А2, немного хуже – А1, еще хуже – А4, намного хуже – А3	Лучший способ – А1, хуже – А2, примерно такой же (немного хуже) – А4 намного хуже – А3
В18	Лучший вариант – А1, немного хуже – А4, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А2	Лучший вариант – А3, немного хуже – А4, значительно хуже – А2, еще хуже – А1	Лучший вариант – А4, хуже – А3, еще хуже – А1, самый худший вариант – А2
В19	Лучший вариант – А2, немного хуже – А3, еще немного хуже – А1, значительно хуже – А4	Лучший вариант – А2, значительно хуже – А1, еще немного хуже – А3, еще хуже – А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, еще немного хуже – А2, самый худший вариант – А4
В20	Лучший вариант – А3, хуже – А4, еще хуже – А2, самый худший – А1	Лучший вариант – А3, значительно хуже – А2, еще немного хуже – А1, самый худший вариант – А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А4, самый худший – А2
В21	Лучший вариант – А3, хуже – А1, значительно хуже – А4, еще хуже – А2	Лучший вариант – построить А3, хуже – А1, еще хуже – А2, значительно хуже – А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А2, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А4

1	2	3	4
В22	Лучше всего – А3, немного хуже – А1, значительно хуже – А4, хуже всего – А2	Лучшее решение – А3, хуже – А2, значительно хуже – А1, хуже всего – А4	Лучше всего – А2, хуже – А1, еще хуже – А3, значительно хуже – А4
В23	Лучшее решение – А3, хуже – А4, еще хуже – А1, значительно хуже – А2	Лучшее решение – А3, хуже – А1, еще хуже – А4, значительно хуже – А2	Лучше всего – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А2, еще хуже – А4
В24	Лучшее решение – А3, немного хуже – А4, значительно хуже – А2, еще хуже – А1	Лучшее решение – А4, значительно хуже – А3, еще немного хуже – А1, еще немного хуже – А2	Лучшее решение – А1, немного хуже – А3, значительно хуже – А4, еще хуже – А2
В25	Лучший способ – А2, намного хуже – А1, еще хуже – А4, немного хуже – А3	Лучший способ – А1, хуже – А2, примерно такой же (немного хуже) – А4, намного хуже – А3	Лучший способ – А1, немного хуже – А2, еще немного хуже – А3, значительно хуже – А4
В26	Лучший вариант – А3, немного хуже – А4, значительно хуже – А2, еще хуже – А1	Лучший вариант – А4, немного хуже – А3, еще немного хуже – А1, самый худший вариант – А2	Лучший вариант – А1, значительно хуже – А4, еще немного хуже – А3, еше хуже – А2
В27	Лучший вариант – А2, значительно хуже – А3, еще немного хуже – А1, еще хуже – А4	Лучший вариант – А1, немного хуже – А3, еще немного хуже – А2, самый худший вариант – А4	Лучший вариант – А2, немного хуже – А4, еще немного хуже – А1, значительно хуже – А1
В28	Лучший вариант – А3, значительно хуже – А1, еще немного хуже – А2, самый худший вариант – А4	Лучший вариант – А3, немного хуже – А1, значительно хуже – А4, самый худший – А2	Лучший вариант – А3, хуже – А4, еще хуже – А2, самый худший – А1
В29	Лучший вариант –А3, немного хуже – А2, еще хуже – А1, значительно хуже – А4	Лучший вариант – А1, значительно хуже – А2, еще немного хуже – А3, еще немного хуже – А4	Лучший вариант – А3, хуже – А1, значительно хуже – А4, еще хуже – А2
В30	Лучшее решение – А2, хуже – А3, значительно хуже – А1, хуже всего – А4	Лучше всего – А2, немного хуже – А1, еще хуже – А3, значительно хуже – А4	Лучше всего – А3, хуже – А1, значительно хуже – А4, хуже всего – А2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы выражают надежду, что после изучения дисциплины «Исследование операций в логистике» студенты будут владеть основными методами исследования операций для принятия обоснованных управленческих решений в профессиональной деятельности, знать основные типы оптимизационных моделей и уметь их применять для получения наиболее рационального решения с учетом имеющихся ограничений.

Следует иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные при решении задач, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть рассмотрены как «консультирующие» средства. Окончательное принятие управленческих решений остается за человеком.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(*обязательное*)

Таблица значений стандартного нормального распределения Ф(*x*)

Каждый элемент матрицы представляет значение функции Ф в точке *x*, равное сумме заголовков строки и столбца. Для отрицательных *x* значение функции находится по формуле Ф(*x*) = 1 – Ф(–*x*).

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашкеназы, В. О. Оптимальные статистические решения (Статистические игры) : учеб.-метод. пособие / В. О. Ашкеназы. – Тверь : Тверской гос. ун-т, 2004. – 52 с.

2. Баркова, Л. Н. Исследование операций : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 2 : Модели управления запасами / Л. Н. Баркова, И. В. Михайлова. – Воронеж : ВГУ, 2005. – 20 с.

3. Большакова, И. В. Линейное программирование : учеб.-метод. пособие / И. В. Большакова, М. В. Кураленко. – Минск : БНТУ, 2004. – 148 с.

4. Бродецкий, Г. Л. Управление запасами / Г. Л. Бродецкий. – М. : Эксмо, 2007. – 283 с.

5. Вентцель, Е. С. Введение в исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1964. – 390 с.

6. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 2007. – 552 с.

7. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2014. – 383 с.

8. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология : учеб. пособие / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М. : Кнорус, 2013. – 192 с.

9. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2017. – 328 с.

10. Дубров, А. М. Моделирование рисковых ситуации в экономике и бизнесе : учеб. пособие / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев ; под ред. Б. А. Лагоши. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 176 с.

11. Зуев, Ю. А. Дискретная математика. Лекции / Ю. А. Зуев. – М. : МГУТУ, 2004. – 60 с.

12. Исследование операций в экономике : учебник / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2016. – 438 с.

13. Исследование операций : Курс лекций / В. И. Бахтин [и др.]. – Минск : БГУ, 2003. – 199 с.

14. Кабков, П. К. Исследование операций и системный анализ : учеб. пособие / П. К. Кабков. – М. : МГТУ ГА, 2005. – 96 с.

15. Кабков, П. К. Методические указания по проведению практических занятий по дисциплине «Исследование операций и системный анализ» / П. К. Кабков. – М. : МГТУ ГА, 2003. – 27 с.

16. Кокорина Т. Г. Исследование операций в экономике : практикум / Т. Г. Кокорина, С. А. Поттосина. – Минск : БГУИР, 2007. – 80 с.

17. Красс, М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.

18. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – 6-е изд., испр. – М. : Дело, 2008. – 720 с.
19. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес . – М. : Мир, 1978. – 432 с.
20. Лазарев, А. А. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы : учеб. пособие / А. А. Лазарев, Е. Р. Гафаров. – М. : МФТИ, 2011. – 222 с.
21. Ломкова, Е. Н. Экономико-математические модели управления производством (теоретические аспекты) : учеб. пособие / Е. Н. Ломкова, А. А. Эпов. – Волгоград : ВолгГТУ, 2005. – 67 с.
22. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб.-метод. пособие / Р. С. Бирюков [и др.]. – Н. Новгород : НГУ, 2010. – 101 с.
23. Петросян, Л. А. Теория игр : учеб. пособие / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
24. Писарук, Н. Н. Исследование операций / Н. Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2014. – 283 с.
25. Поттосина, С. А. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / С. А. Поттосина, Т. Г. Кокорина. – Минск : БГУИР, 2017. – 115 с.
26. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
27. Смородинский, С. С. Системный анализ и исследование операций: оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования : учеб.-метод. пособие / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2010. – 192 с.
28. Соловьев, В. И. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / В. И. Соловьев. – М. : Финансовый ун-т, 2012. – 364 с.
29. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – М. : Вильямс, 2005. – 912 с.
30. Ховард, Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы / Р. А. Ховард ; пер. с англ. В. В. Рыкова ; под ред. Н. П. Бусленко. – М. : Сов. радио, 1964г. – 195 с.
31. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. – Минск : БГЭУ, 2018. – 511 с.
32. Экономико-математические методы и модели : лабораторный практикум / Т. А. Бородина [и др.]. – Минск : БГЭУ, 2012. – 139 с.

Св. план 2018, поз. 63

Учебное издание

Матвейчук Наталья Михайловна
Валевская Ирина Болеславовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЛОГИСТИКЕ. ПРАКТИКУМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 17.05.2019. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 15,0. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 70 экз. Заказ 392.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск