Метод решения задачи динамической булевой оптимизации

Герман О.В.; Садовская О.И.; Герман Ю.О.
Кафедра информационных технологий автоматизированных систем
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
e-mail: ovgerman@tut.by, ign_olga@mail.ru, yuliagerman@tut.by

***Аннотация*—Представлен математический подход к задаче синтеза поведения системы, описываемой множеством булевых уравнений с временным параметром. Описание построено на примере, который может быть относительно легко формализован и обобщен. Метод может быть использован в системе синтеза поведения интеллектуальных роботов, управлении динамическими процессами, например, в системах коммутации энергии и т.п.**

Ключевые слова: система; алгоритм поведения; синтез; решение уравнений

I. Введение

Рассмотрим систему булевых уравнений с временным параметром *t*, играющим роль дискретного шага в рассматриваемом алгоритме. Пусть система описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & x(t) \vee x(t+1) \vee x(t+2) \\ & \bar{x}(t) \vee \bar{x}(t+1) \vee \bar{x}(t+2) \\ & x(t) \vee x(t+1) \\ & x(t) \vee \bar{x}(t+2) \end{aligned} \qquad (1)$$

Переменная *x* играет роль переменной состояния системы, определяемой в различные моменты времени *t*. Разумеется, описание системы может использовать не одну, а десятки переменных состояния, но в иллюстративных целях это излишне. Очевидно, что булевы уравнения (1) определяют в общем случае множество допустимых траекторий развития системы, начиная с *t*=0. Задача оптимизации поведения требует выбрать некую одну траекторию на интервале [0,T], где T задает конечный или максимально допустимый номер шага процесса. При этом оптимальная траектория может быть определена некоторыми условиями, которые она должна обеспечивать. Пусть такими условиями будут

$$\begin{aligned} & x(0)=0, \\ & T=4, t_{fin} \le T, \\ & x(t_{fin})=1, x(t_{fin}-1)=0, x(t_{fin}-2)=0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ясно, что условия (2) должны определять допустимое состояние в смысле (1). Кроме того, начальное состояние здесь известно, так что остается найти последовательные промежуточные состояния, удовлетворяющие (1) и обеспечивающие переход в конечное состояние.

Приведенная постановка задачи расширяет рамки работ [1,2,3], в которых использовались только уравнения с переменными $x(t), x(t+1)$, связывающими соседние состояния. Рассмтриваемая постановка расширяет пределы общности задачи.

II. Иллюстрация алгоритма

Идея алгоритмов, представленных в источниках [1,2], сводилась к двухатапной схеме: сначала найти подстановки вида

$$x(t) = f(x(t+1) \,\&\, \varepsilon(t) \qquad (3)$$

с неизвестной новой переменной $\varepsilon(t)$. Затем последовательно составлять системы булевых уравнений относительно неизвестных переменных $\varepsilon(t)$ и искать решение, удовлетворяющее конечному состоянию системы. С учетом того, что мы мспользуем переменные $x(t), x(t+1), x(t+2)$ этот подход следует расширить. Для получения подстановок вида (3) исключим из системы $x(t+2)$, используя метод исключения литер, описанный в [2]. Получим систему следующего вида:

$$x(t) \vee x(t+1) \qquad (4)$$

Из (4) на основании техники эквивалентных подстановок [1,2] получаем подстановку:

$$\bar{x}(t+1) = x(t) \,\&\, \varepsilon_1(t) \qquad (5)$$

Аналогичным образом из ситемы (1) удалим методом исключения литер переменную $x(t)$ и получим логически эквивалентную ей систему вида

$$\bar{x}(t+1) \vee \bar{x}(t+2) \qquad (6)$$

Из (6) получаем подстановку

$$x(t+2) = \bar{x}(t+1) \,\&\, \varepsilon_2(t) \qquad (7)$$

С учетом того, что переменная *t* принимает любые значения, начиная с 0, перепишем (7) так:

$$x(t+1) = \bar{x}(t) \,\&\, \varepsilon_2(t) \qquad (8)$$

Примем во внимание, что условие (8) становится действительным, начиная со второго такта (шага), когда определены значения $x(0), x(1), x(2)$, и остается действительным для последующих моментов времени. Теперь мы можем объединить (5) и (8):

$$\begin{aligned} & x(t+1) = \bar{x}(t) \,\&\, \varepsilon_3(t), \\ & \varepsilon_3(t) = \varepsilon_1(t) \vee \varepsilon_2(t) \end{aligned} \qquad (9)$$

Полученная нами итоговая подстановка является ключевой. Она позволяет определить оптимальную траекторию развития процесса в соответствии с условиями (2).

III. Построение оптимальной траектории

В силу условий (2) стартуем из состояния $x(0)=0$. На этом такте используем подстановку (5) и получаем:

$$\bar{x}(1)=0 \rightarrow x(1)=1$$

На втором такте уже следует использовать подстановку (9), которая дает:

$$x(2)=0, x(1)=1, x(0)=0$$

Теперь каждый последующий шаг определяется согласно подстановки (9). Далее имеем:

$$\begin{aligned} x(3) &= \varepsilon_3(3), \\ x(4) &= \bar{\varepsilon}_3(3) \,\&\, \varepsilon_3(4) \end{aligned} \qquad (10)$$

Мы достигли финального шага $T=4$. Остается выяснить, можно ли к этому шагу выйти на оптимальную в смысле условий (2) траекторию. Очевидно, должны выполняться условия:

$$x(4)=1, x(3)=0, x(2)=0$$

Это соответственно дает

$$\begin{aligned} &\varepsilon_3(3)=0, \\ &\bar{\varepsilon}_3(3) \,\&\, \varepsilon_3(4)=1 \end{aligned} \qquad (11)$$

Таким образом, все свелось к задаче решения системы логических уравнений. В случае системы (11) решение очевидно:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_3(3)=0, \\ &\varepsilon_3(4)=1 \end{aligned}$$

Данное решение окончательно определяет искомую траекторию:

$$x(4)=1,\ x(3)=0,\ x(2)=0,\ x(1)=1,\ x(0)=0$$

грает роль переменной состояния системы. Разумеется, описание системы может использовать

IV. Общий случай

Переход к общему случаю на вызывает принципиальных сложностей. В самом деле, сначала следует исключить из системы все переменные с временным параметром (t+2) и выше. Для этого мы применяем технику исключения дитер. Далее получим систему подстановок, скажем для первой переменной

$$x_1(t+1)=f(x_1(t),x_2(t+1),x_2(t),\dots,x_k(t+1),x_k(t)) \qquad (12)$$

Подставим (12) в исходную систему и выполним аналогичные шаги для получения новой подстановки, скажем,

$$x_2(t+1)=f(x_2(t),x_3(t+1),x_3(t),\dots,x_k(t+1),x_k(t))$$

и т.д.

Следовательно, итогом будет система подстановок для переменных состояния, которую следует использовать по аналогии с рассмотренным нами примером для системы, описываемой единственной переменной. Ясно, что при рассмотрении общего случая придется многократно решать системы логических уравнений, возникающих на итерациях алгоритма. Учитывая NP-полноту задачи Выполнимость, эта особенность, к сожалению, потенциально ограничивает эффективность алгоритма для систем, описываемых десятками и сотнями переменных состояния.

V. Заключение

Представленный подход можно использовать для синтеза управления в системах дискретного действия, поведение которых определяется заданной системой логических уравнений с временным параметром. К такого рода системам можно отнести, например, системы планирования поведения интеллектуальных роботов [4], системы синтеза программ и др.

[1] О.В.Герман, Д.В. Семерюк. Одна полиномиально разрешимая задача синтеза поведения интеллектуального робота. – Автоматика и телемеханика (Москва), 2001, №2, с.с. 15- 24.

[2] О.В. Герман, Д.В.Занько. Синтез управляющего алгоритма в системе продукционных правил с временным параметром . – Автоматика и телемеханика (Москва), 2003, № 5. – с.с. 41-52.

[3] Д. Бохманн, Х.Постхоф. Двоичные динамические системы. М., Энергоатомиздат, 1986, – 400с.

[4] Э.В.Попов, Г.Р. Фирдман. Алгоритмические основы интеллектуальных роботов и искусственного интеллекта. М.,Наука, 1976, – с.456.