А. Д. Довнар

ДИНАМИКА РОБОТА, БАЛАНСИРУЮЩЕГО НА ШАРЕ

В работе описываются результаты исследования уравнений динамики робота, балансирующего на шаре. Робот на шаре является голономным, то есть имеет возможность двигатьсся в любом направлении. Для исследования динамики использовалось уравнение Эйлера-Лагранжа второго рода. Данное уравнение не может быть использовано для описания динамики голономных объектов, поэтому модель робота разложена на 3 независимые двухмерные модели: XoY, XoZ, YoZ. При этом наибольший интерес представляют модели XoZ и YoZ, которые являются идентичными. Описанию этих моделей и посвящен данный тезис..

Введение

Робот, балансирующий на шаре является примером неустойчивой системы с довольно сложной динамикой. Наличие уравнений динамики объект является обязательным условием качественной системы управления. Для решения задач такого рода используется метод Лагранжа-Эйлера. В нем необходимо сначала определить скорости всех центров масс твердых тел. После этого определить все энергии, действующие на каждое твердое тело в отдельности. Далее необходимо записать лагранжиан и описать само уравнение. Результаты исследования динамики могут быть спроецированы на большое количество других объектов.

I. Определение энергий твердых тел в системе

Минимальный вектор состояний системы состоит из четырех элементов[1]: угла наклона корпуса относительно идеальной вертикальной оси, угла поворота сферы и скоростей изменения данных углов(1). Для получения уравнений динамики изобразим одну из двухмерных моделей (рисунок 1).

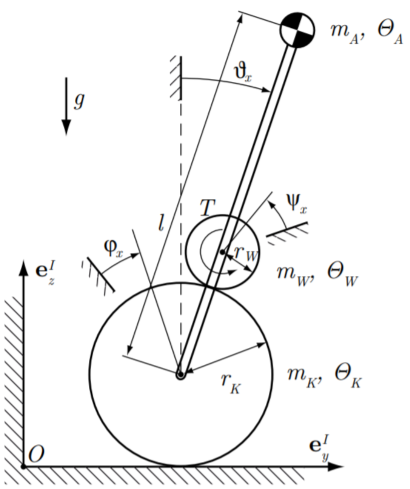

Рис. 1 – Графическое представление модели YoZ

Для использования уравнения Эйлера-Лагранжа необходимо определить скорости каждого тела в системе. Из скоростей в системе можно получить кинетическую энергию каждого тела, после чего используя уравнение Эйлера-Лагранжа определить динамику системы в пространстве состояний, то есть матрицу А. Система состоит из трех тел: корпуса, шара и движущего колеса. Выразим квадраты скоростей всех тел в системе.

$$\upsilon_k^2 = r_k^2 \cdot \dot{\phi}^2; \upsilon_w^2 = r_k^2 \cdot \dot{\phi}^2 + (r_k + r_w)^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 - 2 \cdot r_k \cdot (r_k + r_w) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos\vartheta; \upsilon_A^2 = r_k^2 \cdot \dot{\phi}^2 + l^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 - 2 \cdot r_k \cdot l \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos\vartheta;$$

$$\dot{\psi}^2 = \left(\frac{r_k}{r_w}\right)^2 \cdot \left(\dot{\phi} - \dot{\vartheta}\right)^2.$$

где υ_k^2 - квадрат линейной скорости шара;
υ_w^2 - квадрат линейной сокрости колеса;
υ_A^2 - квадрат линейной скорости тела.

Кинетическая энергия каждого тела складывается из энергии прямолинейного движения и энергии вращения. Потенциальная энергия каждого объекта отсчитывается от высоты центра шара, на котором катится робот. Соответственно энергии для каждого тела примут вид

$$K_b = \frac{m_b}{2}\left(r_k^2 \cdot \dot{\phi}^2 + l^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 - 2 \cdot r_k \cdot l \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos\vartheta\right) + \frac{J_b}{2} \cdot \dot{\vartheta}^2; P_b = m_b \cdot g \cdot l \cdot \cos\vartheta;$$

$$K_w = \frac{m_w}{2}\left(r_k^2 \cdot \dot{\phi}^2 + (r_k + r_w)^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 - 2 \cdot r_k \cdot (r_k + r_w) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos\vartheta + \frac{J_w}{2} \cdot \left(\frac{r_k}{r_w}\right)^2 \cdot \left(\dot{\phi} - \dot{\vartheta}\right)^2;$$

$$P_w = m_w \cdot g \cdot (r_k + r_w) \cdot \cos\vartheta;$$

$$K_k = \frac{m_k}{2} \cdot r_k^2 \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{J_k}{2} \cdot \dot{\phi}^2; P_k = 0.$$

где K_b - кинетическая энергия центра масс;
P_b - потенциальная энергия центра масс;
K_w - кинетическая энергия колеса;
P_w - потенциальная энергия колеса;
K_k - кинетическая энергия шара;
P_k - потенциальная энергия шара.

II. Вывод уравнения динамики

Воспользуемся полученными силами для нахождения динамики объекта. Уравнение Лагранжа-Эйлера имеет следующий вид[2].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q.$$

где L - лагранжиан системы;
q - вектор минимальных координат;
Q - вектор непотенциальных сил.

$$L = K - P$$

где K - суммарная кинетическая энергия;
P - суммарная потенциальная энергия.

В q входят параметры, необходимые для описания состояния системы в любой момент времени. В данном случае это угол наклона корпуса относительно идеальной вертикали и угол поворота шара робота;

в данном случае в Q входит всего одна сила: образованная моментом управляющего электродвигателя.

После полного вывода уравнения Эйлера-Лагранжа будет получена система нелинейных дифференциальный уравнений, описывающих динамику с высокой точностью. Однако для задачи проектирования систем управления и самого управления необходимо получить линейную модель, максимально близкую по параметрам к нелинейной. Линеаризуем объект в точке (0,0). То есть когда робот стоит строго вдоль вектора силы земного тяготения, шар не сдвинут относительно начального положения и сигнал управления отсутствует. Также будем считать квадрат приращения слишком малым, по сравнению с остальными параметрами системы. То есть.

$\cos\vartheta = 1$;
$\sin\vartheta = \vartheta$;
$\dot{\vartheta}^2 = 0$.

III. Результаты моделирования

Для проверки адекватности модели соберем простейшую систему и установим начальное отклонение маятника от состояния равновесия в 0.1. При этом сделаем ускорение свободного падения отрицательным, то есть перевернем маятник на 180 градусов. Результаты моделирования показаны на рисунке 2.

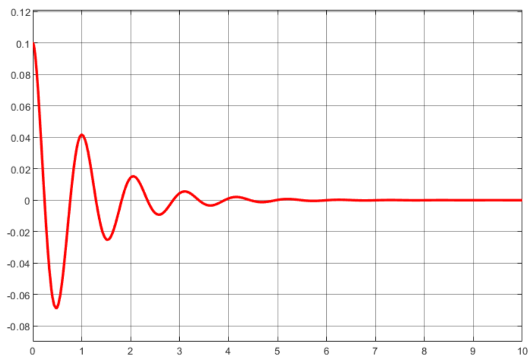

Рис. 2 – Процесс по углу отклонения корпуса

Как видно из графиков, колебания затухают, значит маятник приходит в состояние устойчивого равновесия. То есть мы можем считать полученную динамику адекватной и использовать ее для моделирования различных систем управления. Пример модели системы управления с применением <<классических методов>> показан на рисунке 3.

1. P. Fankhauser and C. Gwerder. Modeling and control of a ballbot. Bachelor thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2010.
2. K. van der Blonk. Modeling and Control of a Ball-Balancing Robot. Internship Master thesis at ALTEN Mechatronics 2014.

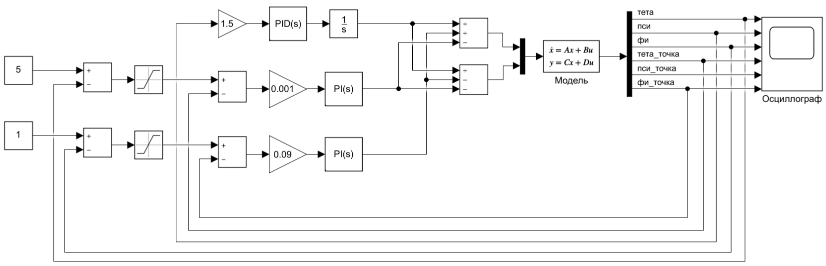

Рис. 3 – Пример системы управления

Довнар Андрей Дмитриевич, Сутедент кафедры систем управления БГУИР, andrevdovnar@gmail.com.

Научный руководитель: Городко Сергей Иванович, ассистент кафедры систем управления БГУИР, gorodko@bsuir.by.