Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

О. Ф. Борисенко, И. Н. Лущакова

ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКИХ ОЛИМПИАД БГУИР ПО МАТЕМАТИКЕ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей I ступени высшего образования, закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2019

Библиотека БГУИР

УДК 378.146:51(476)
ББК 74.58+22.1(4Беи)
Б82

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теории функций Белорусского государственного университета
(протокол №2 от 28.09.2018);

заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования
«Военная академия Республики Беларусь»
доктор технических наук, профессор В. А. Липницкий

Библиотека БГУИР

Борисенко, О. Ф.

Б82 Задачи студенческих олимпиад БГУИР по математике : пособие / О. Ф. Борисенко, И. Н. Лущакова. – Минск : БГУИР, 2019. – 84 с. : ил.
ISBN 978-985-543-487-1.

Пособие содержит задания с решениями студенческих олимпиад БГУИР по высшей математике за 2003–2018 годы. Задания представляют собой нестандартные задачи по всем разделам курса высшей математики.

УДК 378.146:51(476)
ББК 74.58+22.1(4Беи)

ISBN 978-985-543-487-1

© Борисенко О. Ф., Лущакова И. Н., 2019
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2019

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие содержит задания, предлагавшиеся на студенческих олимпиадах БГУИР по высшей математике в 2003–2018 годах. Начиная с 2006 года, в БГУИР ежегодно проводятся две олимпиады: одна – в апреле для студентов 1-го курса, вторая – в декабре для студентов 2–4-х курсов.

Для успешного участия в олимпиадах любого уровня требуется серьезная подготовка, которая включает в себя изучение специальной литературы. До недавнего времени ощущался острый дефицит такой специальной литературы, особенно литературы, предназначенной для студентов технических вузов. Изданные в последние годы сборники олимпиадных задач в большинстве своем содержат лишь условия задач, изредка сопровождаемые решениями отдельных задач либо лаконичными указаниями к их решениям. Вместе с тем, перефразируя высказывание известного математика Д. Пойя, отметим, что овладение искусством решения олимпиадных задач, как и любым другим видом искусства, предполагает не только систематическую практику, но и знакомство с хорошими образцами этого вида искусства. Поэтому в настоящем сборнике все задачи приводятся с решениями. Разбор решений нестандартных задач поможет студентам овладеть различными математическими методами и приемами логических рассуждений, а также реально оценить свои силы.

В олимпиадных заданиях представлены нестандартные задачи по всем разделам курса высшей математики. Подбор задач в некоторой степени носит субъективный характер, обусловленный математическими вкусами авторов. Некоторые из предлагаемых задач являются авторскими либо авторской адаптацией известных задач под уровень БГУИР. В разные годы отдельные задачи для олимпиадных заданий были предложены доцентами В. В. Величковским, О. А. Вагнер, З. Н. Примичевой, Ж. А. Черняк, старшим преподавателем В. Г. Шилкиным, ассистентом М. Д. Пименовой.

При составлении олимпиадных заданий были использованы многочисленные источники, лишь небольшая часть которых указана в списке в конце сборника [1–7]. Некоторые электронные ресурсы, использованные при подборе задач сборника, оказались в настоящее время закрыты, что делает невозможным ссылку на них. Тем не менее хотелось бы назвать эти электронные ресурсы. В первую очередь, это ресурс «Омские городские олимпиады», который на протяжении многих лет являлся наиболее значимым источником олимпиадных задач, соответствующих уровню технического вуза. Отметим «Открытые международные студенческие интернет-олимпиады. Математика» (г. Йошкар-Ола), Art of Problem Solving, а также электронный ресурс кафедры математического анализа и теории вероятностей Киевского политехнического института.

Пособие будет полезно студентам, которые стремятся углубить свои знания по математике – одному из важнейших предметов фундаментальной подготовки IT-специалистов. Пособие рекомендуется студентам всех специальностей БГУИР, а также преподавателям математики.

Библиотека БГУИР

Олимпиада 2003 года

1–4 курсы

Задача 1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(2003)}$.

$(f(x))^{(2003)}$ – производная порядка 2003 функции $f(x)$.

Решение. Так как

$$2\sin^2 x = 1-\cos 2x = 1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^{1002}\frac{(2x)^{2004}}{2004!}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{1003}\frac{(2x)^{2006}}{2006!}+o(x^{2006})\right),\ \text{то}$$

$$\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\frac{2^2}{2!}-\frac{2^4x^2}{4!}+\ldots-\frac{2^{2004}\cdot x^{2002}}{2004!}+\frac{2^{2006}\cdot x^{2004}}{2006!}+o(x^{2004}).$$

Тогда

$$\left(\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)^{(2003)}=\frac{2^{2006}}{2006!}\cdot 2004\cdot 2003\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot x+o(x)=\frac{2^{2006}}{2006\cdot 2005}\cdot x+o(x).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(2003)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2006}}{2006\cdot 2005}\cdot x+o(x)\right)=0$.

Ответ: 0.

Задача 2. Пусть z_1, z_2, z_3 – комплексные числа, удовлетворяющие условию $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r\neq 0$. Найдите модуль числа $z=\dfrac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1+z_2+z_3}$.

Решение. Пусть $z_k = re^{i\varphi_k}$, $k=1,2,3$. Тогда

$$z=\frac{r^2(e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}+e^{(\varphi_1+\varphi_3)i}+e^{(\varphi_2+\varphi_3)i})}{r(e^{\varphi_1 i}+e^{\varphi_2 i}+e^{\varphi_3 i})}=r\cdot\frac{e^{(\varphi_1+\varphi_1+\varphi_3)i}(e^{-\varphi_1 i}+e^{-\varphi_2 i}+e^{-\varphi_3 i})}{e^{\varphi_1 i}+e^{\varphi_2 i}+e^{\varphi_3 i}}.$$

Числа $e^{-\varphi_1 i}+e^{-\varphi_2 i}+e^{-\varphi_3 i}$ и $e^{\varphi_1 i}+e^{\varphi_2 i}+e^{\varphi_3 i}$ комплексно сопряженные, их модули равны, а $\left|e^{(\varphi_1+\varphi_1+\varphi_3)i}\right|=1$. Поэтому $|z|=r\cdot\dfrac{1\cdot|e^{-\varphi_1 i}+e^{-\varphi_2 i}+e^{-\varphi_3 i}|}{|e^{\varphi_1 i}+e^{\varphi_2 i}+e^{\varphi_3 i}|}=r$.

Ответ: r.

Задача 3. Пусть $a_{n-1}=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Библиотека БГУИР

Решение. $a_n=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}=\left(\dfrac{2-1}{2+1}\cdot\dfrac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\right)\left(\dfrac{3-1}{3+1}\cdot\dfrac{3^2+3+1}{3^2-3+1}\right)\times$

$\times\ldots\cdot\left(\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)\left(\dfrac{n}{n+2}\cdot\dfrac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n}{n+2}\right)\cdot\dfrac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\times$

$\times\dfrac{3^2+3+1}{3^2-3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\cdot\dfrac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)^2-(n+1)+1}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\cdot\dfrac{3^2-3+1}{2^2-2+1}\cdot\dfrac{4^2-4+1}{3^2-3+1}\times$

$\times\ldots\cdot\dfrac{(n+2)^2-(n+2)+1}{(n+1)^2-(n+1)+1}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\cdot\dfrac{(n+2)^2-(n+2)+1}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2},$

так как $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Задача 4. Вычислите $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\sin x+x+1}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Так как $\dfrac{x^2\sin x+x}{\cos^2 x}$ – нечетная функция, то

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\sin x+x+1}{\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 5. Вычислите A^{20}, если $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

Решение. $A=E+B$, где $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица,

$B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$. Заметим, что $B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Тогда

$$A^{20}=(E+B)^{20}=E+20\cdot B+\frac{20\cdot 19}{2}\cdot B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+$$

Библиотека БГУИР

$$+20\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 190\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -20 & 210 \\ -20 & 191 & -190 \\ -20 & 190 & -189 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -20 & 210 \\ -20 & 191 & -190 \\ -20 & 190 & -189 \end{pmatrix}$.

Олимпиада 2004 года

1–4 курсы

Задача 1. Вычислите $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}}$.

Решение.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}} = \left| \begin{matrix} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dt}{1+(\operatorname{ctg} t)^{\sqrt{3}}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} t)^{\sqrt{3}}\,dt}{(\operatorname{tg} t)^{\sqrt{3}}+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}}\,dx.$$

Тогда $I + I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}}}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, т. е. $2I = \frac{\pi}{2}$. Откуда $I = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 2. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \min(i, j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Решение. Так как

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

то $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Ответ: 1.

Библиотека БГУИР

Задача 3. Найдите длину кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \int\limits_1^{t^2} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi, \\ y = \int\limits_1^{t^2} \frac{\cos\varphi}{\varphi}\,d\varphi; \end{cases} \qquad 1 \le t \le e.$$

Решение. Найдем $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin t^2}{t^2}\cdot 2t = \frac{2\sin t^2}{t},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{\cos t^2}{t^2}\cdot 2t = \frac{2\cos t^2}{t}.$$

Тогда $\int\limits_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int\limits_1^e \sqrt{\frac{4\sin^2(t^2)}{t^2} + \frac{4\cos^2(t^2)}{t^2}}\,dt = \int\limits_1^e \frac{2}{t}\,dt =$

$= 2\ln|t|\Big|_1^e = 2\ln e = 2$.

Ответ: 2.

Задача 4. Пусть $a_0 = 1,\ a_1 = a_0 + 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n + 1,\ n = 1, 2, \ldots$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$.

Решение. Обозначим $x_n = \frac{a_n}{n!},\ x_0 = \frac{a_0}{0!} = 1$. Тогда $x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} =$ $= \frac{(n+1)a_n + 1}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$. Таким образом получили рекуррентную формулу $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!}$. По этой формуле $x_1 = x_0 + \frac{1}{1!} = 1 + 1,\ x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} =$ $= 1 + 1 + \frac{1}{2!}, \ldots,\ x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e.$$

Ответ: e.

Задача 5. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$?

Решение. Пусть $z = a + bi;\ a, b \in \boldsymbol{R}$. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ будет наибольшим тогда и только тогда, когда значение $a^2 + b^2$ будет наибольшим. В силу ОДЗ

$$|z|^2 = a^2 + b^2 > 0.$$

Библиотека БГУИР

Следовательно, $|z| > 0$.

По условию $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|a + bi + \frac{a - bi}{a^2 + b^2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left(a + \frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 = 1$.

Раскрыв скобки, имеем $a^2 + \frac{2a^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1$

или $a^2 + b^2 + \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} = 0$.

Тогда $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) + a^2 - 3b^2 + 1 = 0$.

Так как $a^2 - 3b^2 = 4a^2 - 3(a^2 + b^2) = 4a^2 - 3(a^2 + b^2)$, то

$(a^2 + b^2)^2 - 3(a^2 + b^2) + 1 + 4a^2 = 0$.

Откуда $(a^2 + b^2)^2 - 3(a^2 + b^2) + 1 = -4a^2 \le 0$.

Пусть $t = |z|^2 = a^2 + b^2$. Тогда $t^2 - 3t + 1 \le 0$ при любом $a \in \boldsymbol{R}$. Решая квадратное неравенство, получаем

$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \le t \le \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2.$$

Так как $|z|^2 = t > 0$, то $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \le |z| \le \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ (рис. 1).

При $a = 0$ получаем, что $|z| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ и $|z| = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

При $a \ne 0$ получаем, что

$|z| \in \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$.

Поэтому $|z|_{\text{наиб}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

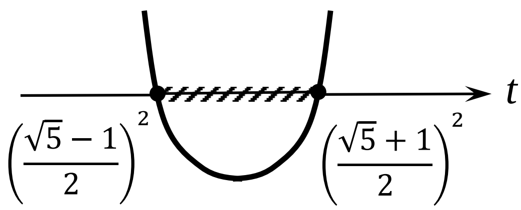

Рис. 1

Олимпиада 2005 года

1–4 курсы

Задача 1. Найдите предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решение. Пусть $A = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}}$.

Библиотека БГУИР

Тогда $\ln A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \ln\frac{3}{n} + \ldots + \ln\frac{n}{n}\right) = \int\limits_0^1 \ln x dx = -1$.

Следовательно, $A = \frac{1}{e}$.

Ответ: $\frac{1}{e}$.

Задача 2. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

Решение. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \left| \begin{array}{l} z = x + \frac{1}{x}, \\ dz = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx, \\ z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-2}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{z}, \\ dt = -\frac{dz}{z^2} \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1} + C$.

Задача 3. Для квадратной матрицы A по определению полагают $e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$. Докажите, что для $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ будет $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} - e^t \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Предположим, что $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3^k - 1 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$. Тогда $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3^k - 1 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{k+1} - 1 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$. Тем самым по методу математической индукции получили, что $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ для $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда $e^{tA} = E + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n A^n}{n!} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 2t \\ 0 & 3t \end{pmatrix} +$

Библиотека БГУИР

$$+\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} & \frac{8t^2}{2!} \\ 0 & \frac{9t^2}{2!} \end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix} \frac{t^n}{n!} & \frac{3^n t^n}{n!}-\frac{t^n}{n!} \\ 0 & \frac{3^n t^n}{n!} \end{pmatrix}+\ldots=\begin{pmatrix} e^t & e^{3t}-e^t \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Задача 4. Семейство изоклин дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y = Cx^2$. Найдите уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $(2; e)$.

Решение. Семейство изоклин задается уравнением $y' = C$. Поэтому из равенства $y = Cx^2$ следует, что $y' = \frac{y}{x^2}$. Решая полученное уравнение $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$, получаем $\ln y = -\frac{1}{x} + C_1$. Так как $y(2) = e$, то $C_1 = \frac{3}{2}$, а $\ln y = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}$, т. е. $y = e^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Ответ: $y = e^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Задача 5. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную на $(-\infty, +\infty)$ производную второго порядка и для любых x и k справедливо тождество

$$f(x+k) - f(x) \equiv k f'\left(x + \frac{k}{2}\right). \qquad (1)$$

Докажите, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – постоянные.

Доказательство. Продифференцировав тождество (1) по k, получаем

$$f'(x+k) \equiv \frac{k}{2} f''\left(x + \frac{k}{2}\right) + f'\left(x + \frac{k}{2}\right).$$

Положив в полученном тождестве $x = -\frac{k}{2}$, получаем

$$f'\left(\frac{k}{2}\right) \equiv \frac{k}{2} f''(0) + f'(0). \qquad (2)$$

Полагая в тождестве (1) $x = 0$, получаем $f(k) \equiv k f'\left(\frac{k}{2}\right) + f(0)$. Подставляя $f'\left(\frac{k}{2}\right)$ из равенства (2), получаем $f(k) \equiv k^2 \frac{f''(0)}{2} + k f'(0) + f(0)$, $k \in (-\infty, +\infty)$. Обозначив $k = x$, $\frac{f''(0)}{2} = a$, $f'(0) = b$, $f(0) = c$, получаем представление функции $f(x)$ в виде $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Библиотека БГУИР

Олимпиада 2006 года

1 курс

Задача 1. Вычислите интеграл $I = \int\limits_0^2 [e^x]\,dx$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Решение. Рассмотрим график функции $y = [e^x]$ (рис. 2). Так как $7 < e^2 < 8$, то найдем точки, для которых

$e^x = 2, \;\; x = \ln 2;$

$e^x = 3, \;\; x = \ln 3;$

$e^x = 4, \;\; x = \ln 4;$

$e^x = 5, \;\; x = \ln 5;$

$e^x = 6, \;\; x = \ln 6;$

$e^x = 7, \;\; x = \ln 7.$

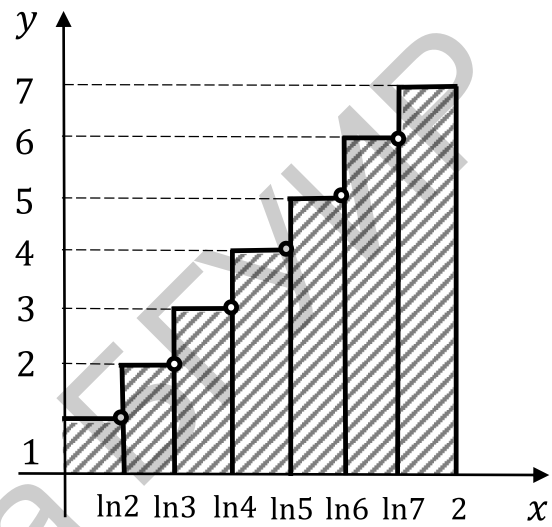

Рис. 2

Тогда искомый интеграл равен площади заштрихованной ступенчатой фигуры (см. рис. 2), т. е.

$$I = 1\cdot\ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + 4(\ln 5 - \ln 4) + 5(\ln 6 - \ln 5) +$$

$$+ 6(\ln 7 - \ln 6) + 7(2 - \ln 7) = 14 - \ln(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7) = 14 - \ln 5040\,.$$

Ответ: $14 - \ln 5040$.

Задача 2. Решите уравнение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2006}}{n^x - (n-1)^x} = \dfrac{1}{2007}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2007\cdot n^{2006}}{n^x - (n-1)^x} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2007\cdot n^{2006}}{n^x - n^x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^x} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2007\cdot n^{2006}}{n^x - n^x\left(1 - \dfrac{x}{n} + 0\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2007\cdot n^{2006}}{x\cdot n^{x-1}} = \left[\begin{array}{l} 1, \text{ если } \; x = 2007, \\ \infty, \text{ если } \; x < 2007, \\ 0, \text{ если } \; x > 2007, \end{array}\right.$$

то $x = 2007$.

Ответ: 2007 .

Библиотека БГУИР

Задача 3. Известно, что $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$. Найдите $f(x)$ при $x \in (0,1)$.

Решение. Так как $f'(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$, то $f'(x) = 1 - 2x + \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 2x$.

Тогда $f(x) = \int \left(\dfrac{1}{1-x} - 2x \right) dx = -x^2 - \ln|1-x| + C = -x^2 - \ln(1-x) + C$, так как $x \in (0,1)$.

Ответ: $-x^2 - \ln(1-x) + C$.

Задача 4. Является ли интеграл $\int \dfrac{2x^5 - 3x^4 + 2}{(x-1)^{99}} dx$ рациональной функцией? Ответ обоснуйте.

Решение. Разложим многочлен $P_5(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2$ по степеням $(x-1)$:

$$P_5(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2 = P_5(1) + \frac{P_5'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P_5''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P_5'''(1)}{3!}(x-1)^3 +$$

$$+ \frac{P_5^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{P_5^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 = 1 - 2(x-1) + 2(x-1)^2 + 8(x-1)^3 + 7(x-1)^4 +$$

$+2(x-1)^5$. Тогда $\dfrac{2x^5 - 3x^4 + 2}{(x-1)^{99}} = \dfrac{1}{(x-1)^{98}} - \dfrac{2}{(x-1)^{97}} + \dfrac{8}{(x-1)^{96}} + \dfrac{7}{(x-1)^{95}} + \dfrac{2}{(x-1)^{94}}$.

Следовательно, $\int \dfrac{2x^5 - 3x^4 + 2}{(x-1)^{99}} dx = -\dfrac{1}{98(x-1)^{98}} + \dfrac{2}{97(x-1)^{97}} - \dfrac{2}{96(x-1)^{96}} -$ $- \dfrac{8}{95(x-1)^{95}} - \dfrac{7}{94(x-1)^{94}} - \dfrac{2}{93(x-1)^{93}} + C$, т. е. является рациональной функцией.

Ответ: является рациональной функцией.

Задача 5. Докажите, что всякая точка экстремума неотрицательной функции $f(x)$ будет точкой экстремума функции $g(x) = k \cdot (f(x))^2$, где $k > 0$.

Доказательство. Пусть x_0 – точка минимума функции $f(x)$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство

$$f(x) > f(x_0). \qquad (3)$$

Библиотека БГУИР

Так как $f(x) \geq 0$ и $k > 0$, то неравенство (3) равносильно неравенству $k(f(x))^2 > k(f(x_0))^2$, т. е. $g(x) > g(x_0)$. Это означает, что x_0 – точка минимума функции $g(x)$.

Для точки максимума доказательство аналогично.

Олимпиада 2006 года

2–4 курсы

Задача 1. Докажите, что $\int\limits_0^1 x^x dx > \frac{2}{3}$.

Доказательство. Пусть $y = x^x = e^{x\ln x}$. Тогда $y' = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = 0$, если $\ln x = -1$, т. е. $x = \frac{1}{e}$. Точка $x = \frac{1}{e}$ является точкой минимума, так как

$$y''\left(\frac{1}{e}\right) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)^2 + e^{x\ln x}\frac{1}{x}\Bigg|_{x=\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}+1} > 0.\ y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}}.$$

Поэтому $\int\limits_0^1 x^x dx > \left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}}(1-0) = e^{\frac{1}{e}} > e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2!} - 0\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) > \frac{2}{3}$.

Задача 2. Комплексные числа z_1, z_2, z_3 обладают свойством $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Вычислите $A = \left|\frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3}\right|$.

Решение. Пусть $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$, $z_3 = e^{i\varphi_3}$.

Тогда $A = \left|\frac{e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_3} + e^{i\varphi_2}e^{i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3}}\right|$.

Умножая числитель на число $e^{-i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$, а знаменатель – на $e^{-i\varphi_3}$, модули которых равны 1, получаем

$$A = \left|\frac{1 + e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)}}{1 + e^{i(\varphi_2 - \varphi_3)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_3)}}\right| = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 3. Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Решение. Пусть $y = f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$.

Библиотека БГУИР

Тогда $y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$,

$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$.

Складывая эти три равенства, получаем

$$y'' + y' + y = e^x - 1, \tag{4}$$

учитывая, что $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. При этом

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0. \tag{5}$$

Получили задачу Коши для уравнения (4) с начальными условиями (5).

Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y' + y = 0$:

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,\;\; \lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\;\; \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$y_{\text{о.о}} = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Тогда $y_{\text{ч.н}}$ ищем в виде $y_{\text{ч.н}} = Ae^x + B$.

Так как $Ae^x + Ae^x + Ae^x + B = e^x - 1$, то $A = \frac{1}{3},\;\; B = -1$, т. е. $y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{3}e^x - 1$.

Тогда $y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}} = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}e^x - 1$.

Учитывая начальные условия (5), получаем $C_1 = \frac{2}{3},\;\; C_2 = 0$.

Следовательно, $y = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x - 1$.

Ответ: $\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x - 1$.

Задача 4. Найдите точки экстремума функции $u = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение. Найдем точки, подозреваемые на экстремум, решив систему

$$\begin{cases} u'_x = -3x^2 + 6xy = 0, \\ u'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Это точки $(0, 0)$ и $(6, 3)$. Точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума, а в точке $(6, 3)$ функция $u(x, y)$ имеет максимум.

Ответ: точка $(6, 3)$ – точка максимума, а точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума.

Библиотека БГУИР

Задача 5. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2(1+x)}{x\sqrt{x}}dx.$$

Решение. $I=\int_0^1\frac{\ln^2(1+x)}{x\sqrt{x}}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2(1+x)}{x\sqrt{x}}dx=I_1+I_2$. Рассмотрим $I_1=\int_0^1\frac{\ln^2(1+x)}{x\sqrt{x}}dx.$

Так как $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$, то по предельному признаку сходимости I_1 и интеграл $\int_0^1\frac{x^2}{x\sqrt{x}}dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$ сходятся одновременно, так как $\int_0^1\sqrt{x}\,dx$ – собственный.

Рассмотрим $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2(1+x)}{x\sqrt{x}}dx=\int_1^{\infty}\frac{x^{2\alpha}}{x\sqrt{x}}dx\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-2\alpha}}$, так как $\ln(1+x)\sim\ln x<x^{\alpha}$, $\alpha>0$ при $x\to+\infty$. Интеграл I_2 является сходящимся, если взять α такое, чтобы $\frac{3}{2}-2\alpha>1$, т. е. $\alpha<\frac{1}{4}$.

Ответ: интеграл I сходится.

Олимпиада 2007 года

1 курс

Задача 1. Вычислите $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(e^x+1)\cos x}$.

Решение. Обозначим $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(e^x+1)\cos x}$. Тогда $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(e^x+1)\cos x}=$

$$=\left|\begin{matrix}x=-t,\\ dx=-dt\end{matrix}\right|=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(e^{-t}+1)\cos(-t)}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^t dt}{(e^t+1)\cos t}\text{, т. е. } I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x dx}{(e^x+1)\cos x}.$$

Тогда $I=\frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(e^x+1)\cos x}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x dx}{(e^x+1)\cos x}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\, dx}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} dx.$$

Сделав в последнем интеграле замену $u = \sin x$, получаем

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1).$$

Ответ: $\ln(\sqrt{2}+1)$.

Задача 2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+1}\cdot \operatorname{tg}(\pi e \cdot n!)$.

Решение. Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}$, то $e = 1 + 1 +$

$+ \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}$, $0 < \theta < 1$.

Тогда $e \cdot n! = N + \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, где $N -$ натуральное число. Откуда

$$\operatorname{tg}(\pi e \cdot n!) = \operatorname{tg}\left(\pi \cdot N + \frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{n+1}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+1}\cdot \operatorname{tg}(\pi e \cdot n!) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+1}\cdot \frac{\pi}{n+1} = \pi\sqrt{2}$.

Ответ: $\pi\sqrt{2}$.

Задача 3. Вычислите A^{2007}, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $A = E + B$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$, то $B^n = B$ для $n \in \boldsymbol{N}$.

Поэтому $A^{2007} = (E+B)^{2007} = E + (C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + \ldots + C_{2007}^{2007})B = E +$

Библиотека БГУИР

$$+(C_{2007}^{0}+C_{2007}^{1}+\ldots+C_{2007}^{2007})B-B=E+2^{2007}\cdot B-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}2^{2007}&2^{2007}&0\\0&0&0\\0&0&2^{2007}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2007}&2^{2007}-1&0\\0&0&0\\0&0&2^{2007}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2^{2007}&2^{2007}-1&0\\0&0&0\\0&0&2^{2007}\end{pmatrix}$.

Задача 4. Пусть функции $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и имеют конечные производные на (a,b). Докажите, что на (a,b) найдется точка c, в которой производная функции $F(x)=\begin{vmatrix}f(x)&\varphi(x)&\psi(x)\\f(a)&\varphi(a)&\psi(a)\\f(b)&\varphi(b)&\psi(b)\end{vmatrix}$ равна нулю.

Доказательство. Так как $F(a)=0$ и $F(b)=0$, то по теореме Ролля такая точка c найдется.

Задача 5. Найдите $\int\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

Решение. $\int\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx=\int\sqrt{\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x}}\,dx=\int\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}-$

$-\int\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,dx=I_1-I_2.$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}+C_1.$$

$$I_2=\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x}{1-x}=t^2,\ \ dx=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt\\ x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u=t & du=dt\\ dv=\dfrac{2tdt}{(1+t^2)^2} & v=-\dfrac{1}{t^2+1}\end{array}\right|=-\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{t}{t^2+1}+\operatorname{arctg}t+C_2=$$

Библиотека БГУИР

$$= -\sqrt{x-x^2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C_2.$$

$$I = I_1 - I_2 = -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C.$$

Ответ: $-2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C.$

Олимпиада 2007 года

2–4 курсы

Задача 1. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D y^2 dxdy$, где область D ограничена кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$ и расположена в первом квадранте.

Решение. $I = \iint\limits_D y^2 dxdy.$ Введем новые переменные $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$. Тогда $u \in [1, 2]$, $v \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Найдем якобиан замены:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Тогда $I = \iint\limits_D y^2 dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy = \iint\limits_{D'} uv \cdot \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 udu \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 dv = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2}\Bigg|_1^2 \cdot v\Bigg|_{\frac{1}{2}}^2 =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{8}.$$

Ответ: $\frac{9}{8}$.

Задача 2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

Решение. $(\ln\ln n)^{\ln n} = e^{\ln\left((\ln\ln n)^{\ln n}\right)} = e^{\ln n \cdot \ln\ln\ln n} = n^{\ln\ln\ln n}$. При достаточно больших n справедливо неравенство $\ln\ln\ln n > 2$. Тогда $n^{\ln\ln\ln n} > n^2$.

Следовательно, $\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$.

Из этого следует сходимость исходного ряда.

Ответ: сходится.

Задача 3. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(1+\sqrt{x})}$.

Решение. Так как $\frac{1}{x\ln^2(1+\sqrt{x})} < \frac{1}{x\ln^2\sqrt{x}} = \frac{4}{x\ln^2 x}$. А несобственный интеграл $\int_{2}^{+\infty} \frac{4}{x\ln^2 x}dx = 4\int_{2}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{4}{\ln x}\Bigg|_{2}^{+\infty} = \frac{4}{\ln 2}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

Ответ: сходится.

Задача 4. Вычислите $\dfrac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\ldots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\ldots}$.

Решение. Обозначим числитель – p, а знаменатель – q. Тогда $\pi p - \pi^3 q =$ $= \sin\pi = 0$. Откуда $\frac{p}{q} = \pi^2$.

Ответ: π^2.

Задача 5. Решите задачу Коши: $(1-x)(y\cdot y'' - (y')^2) - y\cdot y' = 0,\ \ y(0)=1,$ $y'(0) = -2.$

Решение. Разделим дифференциальное уравнение почленно на $y^2 \neq 0.$ Получаем $(1-x)\,\frac{y''\cdot y - (y')^2}{y^2} - \frac{y'}{y} = 0$ или $(1-x)\left(\frac{y'}{y}\right)' - \frac{y'}{y} = 0$. Делая замену $z = \frac{y'}{y}$, получаем $(1-x)\,\frac{dz}{dx} - z = 0.$

$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{1-x}$. Откуда $z = \frac{c_1}{x-1}$ или $\frac{y'}{y} = \frac{c_1}{x-1}$. Учитывая начальные условия, получаем, что $c_1 = 2.$ Тогда $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1}$. Откуда $y = c_2(x-1)^2.$ Так как $y(0)=1,$ то $c_2 = 1.$ Окончательно, $y = (x-1)^2.$

Ответ: $y = (x-1)^2.$

Библиотека БГУИР

Олимпиада 2008 года

1 курс

Задача 1. Вычислите

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{2008}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{2008}}}}.$$

Решение. Пусть $x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{2008}}}$.

Тогда исходное выражение примет вид

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}+\frac{1}{2+x}=\frac{1+x}{2+x}+\frac{1}{2+x}=1.$$

Ответ: 1.

Задача 2. Решите уравнение $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{12}$.

Решение. Очевидно, что $x>0$. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dt}{t^2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}=-\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}=$

$$=-\arcsin\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^{x}=-\arcsin\frac{1}{x}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=-\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}.$$

Итак, имеем $-\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, т. е. $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2.$

Ответ: 2.

Задача 3. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{2}^{\pi}\{x^2-1\}dx$, где $\{a\}-$ дробная часть числа a ($\{a\}=a-[a]$, $[a]-$целая часть числа a).

Решение. Используя свойство аддитивности определенного интеграла, получаем $\int_2^{\pi}\{x^2-1\}\,dx=\int_2^{\sqrt5}\{x^2-1\}\,dx+\int_{\sqrt5}^{\sqrt6}\{x^2-1\}\,dx+\int_{\sqrt6}^{\sqrt7}\{x^2-1\}\,dx+\int_{\sqrt7}^{\sqrt8}\{x^2-1\}\,dx+$

$$+\int_{\sqrt8}^{3}\{x^2-1\}\,dx+\int_3^{\pi}\{x^2-1\}\,dx=\int_2^{\sqrt5}((x^2-1)-3)\,dx+\int_{\sqrt5}^{\sqrt6}((x^2-1)-4)\,dx+$$

$$+\int_{\sqrt6}^{\sqrt7}((x^2-1)-5)\,dx+\int_{\sqrt7}^{\sqrt8}((x^2-1)-6)\,dx+\int_{\sqrt8}^{3}((x^2-1)-7)\,dx+\int_3^{\pi}((x^2-1)-8)\,dx=$$

$$=\int_2^{\sqrt5}(x^2-4)\,dx+\int_{\sqrt5}^{\sqrt6}(x^2-5)\,dx+\int_{\sqrt6}^{\sqrt7}(x^2-6)\,dx+\int_{\sqrt7}^{\sqrt8}(x^2-7)\,dx+\int_{\sqrt8}^{3}(x^2-8)\,dx+$$

$$+\int_3^{\pi}(x^2-9)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_2^{\sqrt5}+\left(\frac{x^3}{3}-5x\right)\Bigg|_{\sqrt5}^{\sqrt6}+\left(\frac{x^3}{3}-6x\right)\Bigg|_{\sqrt6}^{\sqrt7}+\left(\frac{x^3}{3}-7x\right)\Bigg|_{\sqrt7}^{\sqrt8}+$$

$$+\left(\frac{x^3}{3}-8x\right)\Bigg|_{\sqrt8}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-9x\right)\Bigg|_3^{\pi}=\frac{x^3}{3}\Bigg|_2^{\pi}+(-4x)\Bigg|_2^{\pi}+(-x)\Bigg|_{\sqrt5}^{\pi}+(-x)\Bigg|_{\sqrt6}^{\pi}+$$

$$+(-x)\Bigg|_{\sqrt7}^{\pi}+(-x)\Bigg|_{\sqrt8}^{\pi}+(-x)\Bigg|_3^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}-\frac{8}{3}-4(\pi-2)-(\pi-\sqrt5)-(\pi-\sqrt6)-(\pi-\sqrt7)-$$

$$-(\pi-\sqrt8)-(\pi-3)=\frac{\pi^3}{3}-9\pi+\frac{25}{3}+\sqrt5+\sqrt6+\sqrt7+\sqrt8\,.$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{3}-9\pi+\frac{25}{3}+\sqrt5+\sqrt6+\sqrt7+\sqrt8\,.$

Задача 4. Найдите такие функции $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, что для всех действительных x выполнены равенства

$$\begin{cases}(f(x))^3-3f(x)(g(x))^2=\cos 3x,\\ 3(f(x))^2g(x)-(g(x))^3=\sin 3x.\end{cases}$$

Решение. Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение системы, умноженное на i: $(f(x))^3+3i(f(x))^2g(x)-3f(x)(g(x))^2-i(g(x))^3=$ $=\cos 3x+i\sin 3x\Leftrightarrow (f(x)+ig(x))^3=e^{3ix+2i\pi n}$.

Поэтому $f(x)+ig(x)=e^{i\left(\frac{x+2\pi n}{3}\right)}=\cos\left(x+\frac{2\pi n}{3}\right)+i\sin\left(x+\frac{2\pi n}{3}\right)$, и так как обе функции действительнозначные, то $f(x)=\cos\left(x+\frac{2\pi n}{3}\right)$,

$g(x) == \sin\left(x + \frac{2\pi n}{3}\right)$. Чтобы получить все решения системы, достаточно взять $n = 0, 1, 2$.

Ответ: $f(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n = 0, 1, 2$.

Задача 5. Найдите предел последовательности (x_n), если

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2k+1}{k^2+k} \cdot \sin\frac{1}{k^2+k}.$$

Решение. Так как $\frac{2k+1}{k^2+k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$, $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то $\sin\frac{2k+1}{k^2+k} \times$

$$\times \sin\frac{1}{k^2+k} = \sin\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\sin\frac{1}{k} \cdot \cos\frac{1}{k+1} + \cos\frac{1}{k} \cdot \sin\frac{1}{k+1}\right) \times$$

$$\times \left(\sin\frac{1}{k} \cdot \cos\frac{1}{k+1} - \cos\frac{1}{k} \cdot \sin\frac{1}{k+1}\right) = \sin^2\frac{1}{k} \cdot \cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k} \cdot \sin^2\frac{1}{k+1} =$$

$$= \sin^2\frac{1}{k} \cdot \cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k}\left(1 - \sin^2\frac{1}{k+1}\right) = \sin^2\frac{1}{k} \cdot \cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k} +$$

$$+ \cos^2\frac{1}{k}\cos^2\frac{1}{k+1} = \cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k}.$$

Тогда $x_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{1}{k+1} - \cos^2\frac{1}{k}\right) = \cos^2\frac{1}{n+1} - \cos^2 1$.

Откуда $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\frac{1}{n+1} - \cos^2 1\right) = 1 - \cos^2 1 = \sin^2 1$.

Ответ: $\sin^2 1$.

Олимпиада 2008 года

2–4 курсы

Задача 1. Найдите все дифференцируемые функции $f:\ \boldsymbol{R} \to [1; +\infty)$ – такие, что при любом x

$$\int_1^{f(x)} e^{t^2}\,dt = \int_0^x \frac{t\,dt}{f(t)}.$$

Решение. Продифференцируем данное равенство по переменной x:

$$e^{(f(x))^2}\cdot f'(x)=\frac{x}{f(x)}.$$

Обозначив $y=f(x)$, получаем $e^{y^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$, $ye^{y^2}dy=xdx.$ Тогда $\dfrac{1}{2}e^{y^2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{C}{2}$ или $e^{y^2}=x^2+C$. Откуда $y^2=\ln(x^2+C)$, $y=\sqrt{\ln(x^2+C)}$. Поскольку $E(f)=[1;+\infty)$, то $\ln(x^2+C)\ge 1$ при любом x. Следовательно, $C\ge e.$

Ответ: $y=\sqrt{\ln(x^2+C)}$, где $C\ge e.$

Задача 2. Л. Эйлер доказал, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}.$ Также он нашел сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Найдите ее и вы.

Решение. Пусть $S=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\ldots$.

Тогда $\dfrac{\pi^2}{6}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}+\ldots=S+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{36}+\ldots+$

$$+\frac{1}{4n^2}+\ldots=S+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)=S+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$ Отсюда $S=\dfrac{\pi^2}{8}$.

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Задача 3. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, если $u_n=\int\limits_{n}^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx=\begin{vmatrix}x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{vmatrix}=2\int_1^{+\infty}e^{-t}t\,dt=\begin{vmatrix}u=t & du=dt\\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t}\end{vmatrix}=$$

$$=2\left(-te^{-t}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}e^{-t}dt\right)=2\left(\frac{1}{e}-e^{-t}\Big|_1^{+\infty}\right)=2\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)=\frac{4}{e}.$$

Ответ: $\dfrac{4}{e}$.

Задача 4. Найдите длину кривой $x=\int\limits_1^{t^2}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi$, $y=\int\limits_1^{t^2}\dfrac{\cos\varphi}{\varphi}d$, $1\le t\le 2.$

Решение. См. решение задачи 5 олимпиады 2004 года (с. 7–8).

Ответ: $2\ln 2$.

Задача 5. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{e^x + \cos x - \sin x}\, dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{e^x + \cos x - \sin x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\, dx}{e^x(1 + e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x)} =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x}\cos x\, dx}{1 + e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\,(1 + e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x)}{1 + e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1 + e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\ln\left|1 + e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln 2.$

Олимпиада 2009 года

1 курс

Задача 1. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$

Доказательство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \geq \frac{\sqrt{ca}\cdot\sqrt{ab} + \sqrt{bc}\cdot\sqrt{ab} + \sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}}{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}\cdot\sqrt{ab}} =$$

$= \frac{a\sqrt{bc}\cdot b\sqrt{ca}\cdot c\sqrt{ab}}{abc}$. Так как $abc > 0$, то это неравенство равносильно неравенству $bc + ac + ab \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$ или

$$2bc + 2ac + 2ab \geq 2a\sqrt{bc} + 2b\sqrt{ac} + 2c\sqrt{ab} \qquad (6)$$

Докажем справедливость неравенства (6).

Так как $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, то $ac + ab = a(b + c) \geq 2a\sqrt{bc}$.

Аналогично,

$ac + bc = c(a + b) \geq 2c\sqrt{ab},$

$ab + bc = b(a + c) \geq 2b\sqrt{ac}.$

Складывая три полученные неравенства, получаем (6).

Библиотека БГУИР

Задача 2. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{2\varphi} \sqrt[2n+1]{a\cos t - b\sin t}\, dt$, где $a > 0, b > 0, \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b},\; n \in \boldsymbol{N}$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}$, то $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда

$$\int\limits_0^{2\varphi} \sqrt[2n+1]{a\cos t - b\sin t}\, dt = \int\limits_0^{2\varphi} \sqrt[2n+1]{\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)} dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\varphi} \sqrt[4n+2]{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sqrt[2n+1]{\sin\varphi\cos t - \cos\varphi\sin t}\, dt = \sqrt[4n+2]{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\varphi} \sqrt[2n+1]{\sin(\varphi - t)}\, dt =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi - t = y \\ t = \varphi - y \\ dt = -dy \end{vmatrix} = \sqrt[4n+2]{a^2+b^2}\left(-\int\limits_{\varphi}^{-\varphi} \sqrt[2n+1]{\sin y}\, dy\right) = \sqrt[4n+2]{a^2+b^2} \cdot \int\limits_{-\varphi}^{\varphi} \sqrt[2n+1]{\sin y}\, dy = 0,$$

так как $\sqrt[2n+1]{\sin y}$ – нечетная функция.

Ответ: 0.

Задача 3. К поверхности $xyz = 1$ в некоторой ее точке провели касательную плоскость. Вычислите объем тетраэдра, ограниченного этой плоскостью и координатными плоскостями.

Решение. Уравнение поверхности $xyz - 1 = 0$. Обозначим $F(x, y, z) = xyz - 1$. Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – точка касания. Нормальный вектор касательной плоскости есть $(F'_x(M_0),\; F'_y(M_0),\; F'_z(M_0)) = (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$. Тогда уравнение касательной плоскости $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$ или $y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$, $\dfrac{x}{3x_0} + \dfrac{y}{3y_0} + \dfrac{z}{3z_0} = 1$. Тогда объем тетраэдра будет равен $V = \dfrac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0 = \dfrac{9}{2}x_0y_0z_0 = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ $(ед.^3)$.

Ответ: $4{,}5$ $(ед.^3)$.

Задача 4. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{a\cdot n}\right)$, где $a \in \boldsymbol{N}, a > 1$.

Библиотека БГУИР

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{a\cdot n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+$$

$$+\ldots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(a-1)n+1}+\frac{1}{(a-1)n+2}+\ldots+\frac{1}{a\cdot n}\right).$$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{kn+1}+\ldots+\frac{1}{kn+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+\frac{1}{n}}+\ldots+\frac{1}{k+\frac{n}{n}}\right)=\int\limits_0^1\frac{dx}{k+x}=$

$=\ln(k+x)\Big|_0^1=\ln\frac{k+1}{k},\quad k=\overline{(1;\,a-1)}$. Тогда искомый предел равен

$$\sum_{k=1}^{a-1}\ln\frac{k+1}{k}=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{a-1+1}{a-1}=\ln a.$$

Ответ: $\ln a$.

Задача 5. Постройте график функции $f(x)=\int\limits_1^x\frac{e^t}{t}\,dt$.

Решение. Будем считать, что $x>0$ – область определения функции $f(x)$. Тогда $f'(x)=\frac{e^x}{x}>0$, т. е. функция $f(x)$ возрастающая на всей области определения. $f''(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $f''(x)=0$ при $x=1$, $f''(x)<0$ при $x\in(0;1)$, $f''(x)>0$ при $x\in(1;+\infty)$. Следовательно, на $(0;1)$ $f(x)$ выпукла вверх, на $(1;+\infty)$ – выпукла вниз, точка $x=1$ является точкой перегиба. Схематично график функции $f(x)$ выглядит так (рис. 3).

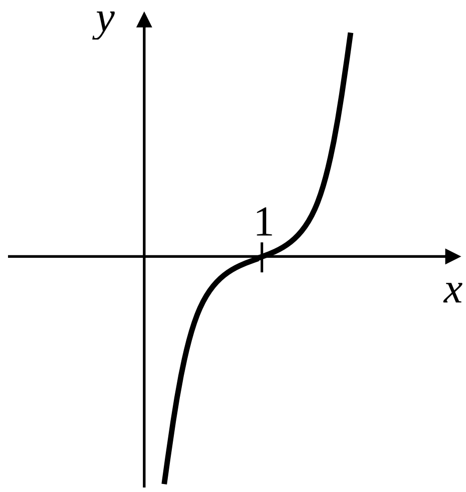

Рис. 3

Олимпиада 2009 года

2–4 курсы

Задача 1. Последовательности действительных чисел (a_n) и (b_n) таковы, что $0<a_n<b_n<a_{n+1}$ для любых натуральных n. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)$ сходится.

Библиотека БГУИР

Доказательство. Поскольку $0 < a_n < b_n < a_{n+1}$, то $\dfrac{1}{a_n} > \dfrac{1}{b_n} > \dfrac{1}{a_{n+1}}$.

Рассмотрим последовательность (S_n), где $S_n = \left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{b_1}\right) + \left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{b_2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{b_n}\right)$.

Поскольку в этой сумме все разности в скобках положительны, то последовательность (S_n) возрастающая. С другой стороны, $S_n = \dfrac{1}{a_1} - \left(\dfrac{1}{b_1} - \dfrac{1}{a_2}\right) - \left(\dfrac{1}{b_2} - \dfrac{1}{a_3}\right) -$

$- \ldots - \left(\dfrac{1}{b_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) - \dfrac{1}{b_4} < \dfrac{1}{a_1}$, т. е. последовательность (S_n) ограничена сверху. Тогда последовательность (S_n) сходится по теореме Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности. Это означает сходимость исходного ряда.

Задача 2. Определите, какой из интегралов больше: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{y} \sin(xy) e^{-y^2} dx$ или $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy) e^{-x^2} dy$? Ответ обоснуйте.

Решение. Изобразим область, по которой расставлены пределы интегрирования в первом и втором повторных интегралах (рис. 4).

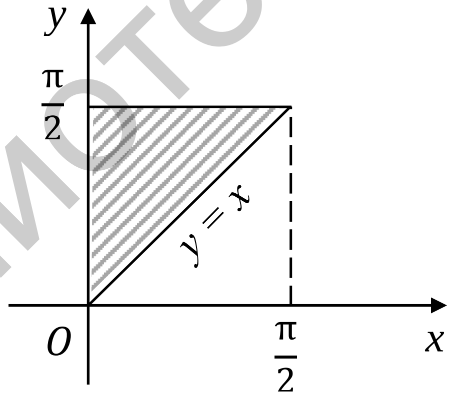

Рис. 4

Нетрудно увидеть, что для обоих интегралов области совпадают. Заштрихованную область можно задать неравенствами $0 \le x \le y \le \dfrac{\pi}{2}$. Отсюда $x^2 \le y^2$, $-x^2 \ge -y^2$, $e^{-x^2} \ge e^{-y^2}$, так как функция e^x возрастающая. Следовательно, $\sin(xy) e^{-x^2} \ge \sin(xy) e^{-y^2}$. Тогда $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy) e^{-x^2} dy \ge \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{y} \sin(xy) e^{-y^2} dx.$

Библиотека БГУИР

Задача 3. Решите уравнение $4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^n x}{n!}$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) – $x>0$.

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3n}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3^2}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^n}+\ldots\right)=$$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}=\frac{4}{3+x^2}$ при условии, что $\frac{x^2}{3}<1$, т. е. с учетом ОДЗ $0<x<\sqrt{3}$.

С другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^n x}{n!}=1-\frac{\ln x}{1!}+\frac{\ln^2 x}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{\ln^n x}{n!}+\ldots=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}.$$

Итак, имеем уравнение $\frac{4}{3+x^2}=\frac{1}{x}$ при условии $0<x<\sqrt{3}$. $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 1.

Задача 4. Найдите функцию $y(x)$, если $\int\limits_a^x t\cdot y(t)\,dt=x^2+y(x)$.

Решение. Заметим, что при $x=a$ имеем $0=a^2+y(a)$, $y(a)=-a^2$.

Продифференцируем данное равенство по x:

$x\cdot y(x)=2x+y'(x)$.

Итак, получили задачу Коши: $y'-xy=-2x$, $y(a)=-a^2$.

Пусть $y=uv$, $u'v+uv'-xuv=-2x$, $u'v+u(v'-xv)=-2x$,

$$\frac{dv}{dx}-xv=0,\ v=e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Тогда $u'e^{\frac{x^2}{2}}=-2x$, $\frac{du}{dx}=-2xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $u=2e^{-\frac{x^2}{2}}+c$, $y=uv=(2e^{-\frac{x^2}{2}}+c)e^{\frac{x^2}{2}}=$ $=2+ce^{\frac{x^2}{2}}$. Из условия $y(a)=-a^2$ получаем $-a^2=2+ce^{\frac{a^2}{2}}$, $c=-(a^2+2)\,e^{-\frac{a^2}{2}}$.

Отсюда $y=2-(a^2+2)e^{-\frac{a^2}{2}}\,e^{\frac{x^2}{2}}$.

Ответ: $y=2-(a^2+2)e^{\frac{x^2-a^2}{2}}$.

Задача 5. Пусть $z=a+bi$; $a,b\in\boldsymbol{R}$ и $z+\frac{1}{z}=1$. Вычислите $z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}}$.

Библиотека БГУИР

Решение. Решим уравнение $z+\dfrac{1}{z}=1,\ z^2-z+1=0,\ z_1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $z_1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{z_1}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, то $z_1^{2009}=\cos\left(2009\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2009\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(669\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(669\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\frac{1}{z_1^{2009}}=\cos\left(2009\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(2009\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(-\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $z_1^{2009}+\dfrac{1}{z_1^{2009}}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$. Так как $z_2=\dfrac{1}{z_1}$, то при $z=z_2$ получаем такой же ответ.

Ответ: 1.

Олимпиада 2010 года

1 курс

Задача 1. Найдите $\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Решение

$$\int e^{x+\frac{1}{x}}dx=\left[\begin{aligned}&u=e^{x+\frac{1}{x}},\ du=e^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx;\\ &dv=dx,\ v=x\end{aligned}\right]=e^{x+\frac{1}{x}}-\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

Тогда $\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}+c$.

Ответ: $I=xe^{x+\frac{1}{x}}+c$.

Задача 2. Найдите уравнение параболы, которая касается эллипса $4x^2+y^2=5$ в двух точках $A(-1;-1)$ и $B(1;-1)$.

Библиотека БГУИР

Решение. Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{\frac{5}{4}}+\dfrac{y^2}{5}=1.$

Полуоси эллипса: $a=\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ b=\sqrt{5}.$

Эллипс вытянут вдоль оси Oy (рис. 5).

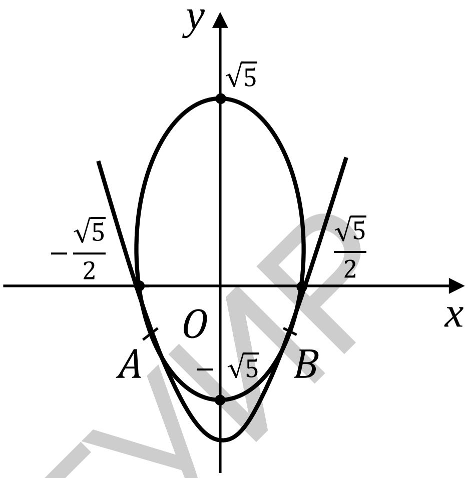

Рис. 5

Парабола будет симметрична относительно оси Oy, ветви ее будут направлены вверх. Уравнение параболы имеет вид $y+c=ax^2$, где $a>0,\ c>0.\ y=-c+ax^2.$

В точках A и B парабола и эллипс имеют общие касательные. Рассмотрим точку B. Из уравнения параболы $y=-c+ax^2$ имеем

$y'=2ax|_{x=1}=2a.$

Продифференцируем уравнение эллипса $4x^2+y^2=5$ по x:

$$8x+2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\frac{4x}{y}\bigg|_{(1;-1)}=4.$$

Итак, $2a=4\ \Rightarrow\ a=2$. Уравнение параболы принимает вид $y=-c+2x^2$. Подставим в это уравнение координаты точки $B(1;-1)$: $\ -1=-c+2\ \Rightarrow\ c=3.$ Итак, искомое уравнение параболы: $y=2x^2-3.$

Ответ: $y=2x^2-3.$

Задача 3. Решите систему $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}1; \\ [x]+\{y\}+z=2{,}2; \\ \{x\}+y+[z]=3{,}3; \end{cases}$ где $[a]-$целая часть a, $\{a\}=a-[a]-$ дробная часть a.

Решение. Сложим все три уравнения, получим $2x+2y+2z=6{,}6\ \Rightarrow$ $x+y+z=3{,}3$. Вычитаем из этого уравнения каждое из первоначальных уравнений и получаем эквивалентную систему $\begin{cases} \{y\}+[z]=2{,}2; \\ \{x\}+[y]=1{,}1; \\ \{z\}+[x]=0. \end{cases}$ $y=2x^2-3.$

Отсюда $\begin{matrix}[z]=2;\ \ \{y\}=0{,}2; \\ [y]=1;\ \ \{x\}=0{,}1; \\ [x]=0;\ \ \{z\}=0.\end{matrix}$ Следовательно, $x=0{,}1;\ \ y=1{,}2;\ \ z=2.$

Библиотека БГУИР

Ответ: $x = 0{,}1;\;\; y = 1{,}2;\;\; z = 2.$

Задача 4. Построить график функции $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Решение. Так как $\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}} + 1 - 1\right)^n = \left(1 + \left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}} - 1\right)\right)^n =$

$$= \left(\left(\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}}}\right)^{-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}}\right)^n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2n}}} = e,$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} -2n\cdot\sin^2\dfrac{x}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n\cdot x^2}{4n} = -\dfrac{x^2}{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача свелась к построению графика функции $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача 5. Найдите $f^{(2010)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^2)$.

Решение. Так как $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{502}\cdot\dfrac{x^{1005}}{1005!} + o(x^{1005})$, то

$$f(x) = \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + \frac{x^{2010}}{1005!} + o(x^{2010}).\; (7)$$

В равенстве (7) коэффициент при x^n имеет вид $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Поэтому $\dfrac{f^{(2010)}(0)}{2010!} = \dfrac{1}{1005!}$ при $n = 2010$. Тогда $f^{(2010)}(0) = \dfrac{2010!}{1005!}$.

Ответ: $\dfrac{2010!}{1005!}$.

Задача 6. Неотрицательная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$.

Доказательство. Так как $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Поскольку $f(x)$ – неотрицательная функция, то в точке $x = a$ она достигнет наименьшего значения, т. е. $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = 0$.

Библиотека БГУИР

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения, $x_0 \in [a;b]$, причем $f(a) \equiv 0 < f(x_0)$ (рис. 6).

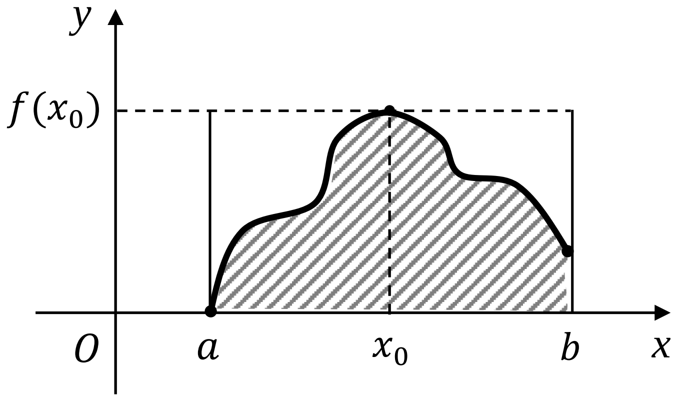

Рис. 6

Из геометрического смысла определенного интеграла имеем

$$f(x_0)\cdot(b-a) \geq f(x_0)\cdot(x_0-a) > \int_a^{x_0} f(t)\,dt.$$

Таким образом, пришли к противоречию с условием $f(x) \leq \dfrac{1}{b-a}\int_a^x f(t)\,dt$ для любого $x_0 \in [a;b]$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ совпадает с ее наименьшим значением, т. е. $f(x) \equiv 0$.

Олимпиада 2010 года

2–4 курсы

Задача 1. Вычислите бесконечное произведение $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Решение. Рассмотрим частичное произведение

$$P_N = \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2N}.$$

$$P = \lim_{N\to\infty} P_n = \lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Задача 2. Пусть $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = Ax + B$. Найдите значения A и B, при которых выражение $\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$ принимает наименьшее значение.

Решение. $\rho^2=\int_0^1(\sqrt{x}-(Ax+B))^2dx=\int_0^1 xdx-2\int_0^1\sqrt{x}(Ax+B)\,dx+\int_0^1(Ax+B)^2\,dx=$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-2\int_0^1\left(Ax^{\frac{3}{2}}+Bx^{\frac{1}{2}}\right)dx+\int_0^1(A^2x^2+2ABx+B^2)\,dx=\frac{1}{2}-2\left(\frac{2A}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2B}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1+$$

$$+\left(A^2\frac{x^3}{3}+ABx^2+B^2x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{4A}{5}-\frac{4B}{3}+\frac{A^2}{3}+AB+B^2.$$

$$\rho^2=\frac{1}{2}-\frac{4A}{5}-\frac{4B}{3}+\frac{A^2}{3}+AB+B^2.$$

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial A}=\frac{2}{3}A+B-\frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial B}=2B+A-\frac{4}{3}.$$

$$\begin{cases}\frac{2}{3}A+B-\frac{4}{5}=0,\\ A+2B-\frac{4}{3}=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{4}{5},\ B=\frac{4}{15}.$$

$$\frac{\partial^2\rho^2}{\partial A^2}=\frac{2}{3};\quad \frac{\partial^2\rho^2}{\partial A\partial B}=1;\quad \frac{\partial^2\rho^2}{\partial B^2}=2.$$

Точка $\left(\frac{4}{5};\frac{4}{15}\right)$ – это точка локального минимума для функции ρ^2. Итак, $g(x)=\frac{4}{5}x+\frac{4}{15}$.

Ответ: $g(x)=\frac{4}{5}x+\frac{4}{15}$.

Задача 3. Исследуйте на сходимость ряд

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots\,.$$

Решение. Рассмотрим n-й член ряда $a_n=\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ корней}}}$.

Методом математической индукции докажем, что

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1\text{ корней}}=2\cos\frac{\pi}{2^n}.$$

При $n=2$ равенство имеет вид $\sqrt{2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cdot\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2^2}$.

Библиотека БГУИР

Пусть $n = k$. Предположим, что $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k-1 \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^k}$.

Пусть $n = k+1$. Докажем, что $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k \text{ корней}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^k}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^k}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}}} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Итак, $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$.

Тогда $a_n = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корней}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^n}} =$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

$$a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n} \text{ при } n\to\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ сходится. Следовательно, исходный ряд также сходится по предельному признаку сравнения.

Ответ: ряд сходится.

Задача 4. Пусть x, y, z – положительные числа, каждое из которых меньше чем 4. Докажите, что среди чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ найдется по крайней мере одно число, не меньшее чем 1.

Доказательство. Предположим, что каждое из чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ меньше 1, и просуммируем эти три числа. Получим

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right) < 3.$$

С другой стороны, $\frac{1}{a}+\frac{1}{4-a} \geq 1$ для всех положительных чисел a, меньших чем 4, потому что это неравенство эквивалентно неравенству $(a-2)^2 \geq 0$.

Библиотека БГУИР

$$\frac{4-a+a}{a(4-a)} \ge 1;\quad \frac{4}{a(4-a)} \ge 1;\quad 4 \ge 4a - a^2.$$

$$a^2 - 4a + 4 \ge 0.$$

Пришли к противоречию, так как $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-z}\right) \ge 3.$

Задача 5. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 1.$

Решение. См. решение задачи 5 олимпиады 2004 года (с. 7–8).

Задача 6. Перейдите к полярным координатам в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ и сведите его к повторному двумя способами, если область D – круг $x^2+y^2 \le 2y$.

Решение. $r^2 \le 2r\sin\varphi$; $r \le 2\sin\varphi$ (рис. 7 и 8).

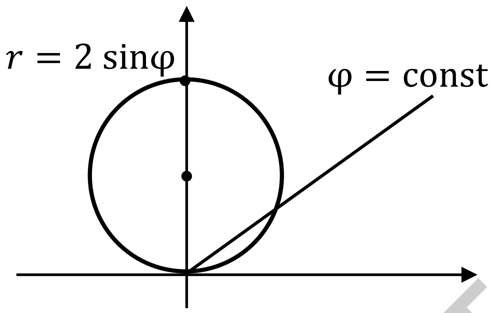

Рис. 7

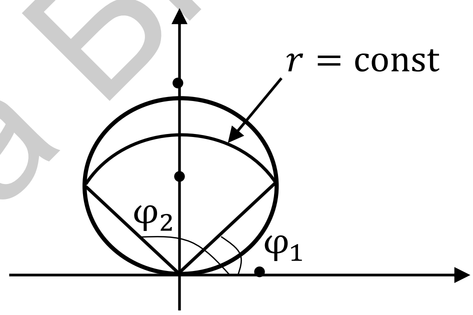

Рис. 8

В первом случае (см. рис. 7) имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} r\,f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

Во втором случае (см. рис. 8) из уравнения $r = 2\sin\varphi$ получаем $\varphi_1 = \arcsin\frac{r}{2}$ и $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \pi - \arcsin\frac{r}{2}$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2} r dr \int\limits_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Ответ: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} r\,f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr =$

$$= \int\limits_0^{2} r dr \int\limits_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Библиотека БГУИР

Олимпиада 2011 года

1 курс

Задача 1. Найдите порядок определителя, при котором уравнение
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix} = 2011$$ имеет корень $x = 6$.

Решение. Обозначим заданный определитель Δ_n и разложим его по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Итак, $\Delta_1 = 6$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 11$; $\Delta_3 = 2 \cdot 11 - 6 = 16$.

Докажем методом математической индукции, что $\Delta_n = 5n + 1$.

Предположим, что $\Delta_k = 5k + 1$, $\Delta_{k-1} = 5k - 4$. Тогда $\Delta_{k+1} = 2\Delta_k - \Delta_{k-1} = 2(5k+1) - (5k-4) = 10k + 2 - 5k + 4 = 5k + 6 = 5(k+1) + 1$. Итак, в соответствии с методом математической индукции $\Delta_n = 5n + 1$. Тогда $5n + 1 = 2011$; $5n = 2010$; $n = 402$.

Ответ: 402.

Задача 2. Найдите предел
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left((1+x)(1+2x)^{\frac{1}{2}} (1+3x)^{\frac{1}{3}} \ldots (1+2011x)^{\frac{1}{2011}} - 1 \right).$$

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left((1+x)(1+2x)^{\frac{1}{2}} \ldots (1+2011x)^{\frac{1}{2011}} - 1 \right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \underbrace{((1+x) \cdot (1+x+o(x)) \cdot \ldots \cdot (1+x+o(x) - 1)}_{2011 \text{ множителей}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} (1 + 2011x + o(x) - 1) = 2011.$$

Ответ: 2011.

Задача 3. Решите уравнение $z^2-(2+i)z-1+7i=0$. Найденные комплексные корни запишите в алгебраической форме.

Решение. $z_{1,2}=\dfrac{z+i+\sqrt{(2+i)^2-4(-1+7i)}}{2}=\dfrac{2+i+\sqrt{7-24i}}{2};$

$$\sqrt{7-24i}=x+iy;\quad 7-24i=x^2+2xyi-y^2;\quad \begin{cases}x^2-y^2=7,\\ xy=-12,\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}x=\pm4,\\ y=\pm3.\end{matrix}$$

Тогда $z_1=\dfrac{2+i+4-3i}{2}=3-i;\quad z_2=\dfrac{2+i+4+3i}{2}=-1+2i$.

Ответ: $3-i,\ -1+2i.$

Задача 4. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого (рис. 9). Какую линию описывает третья вершина?

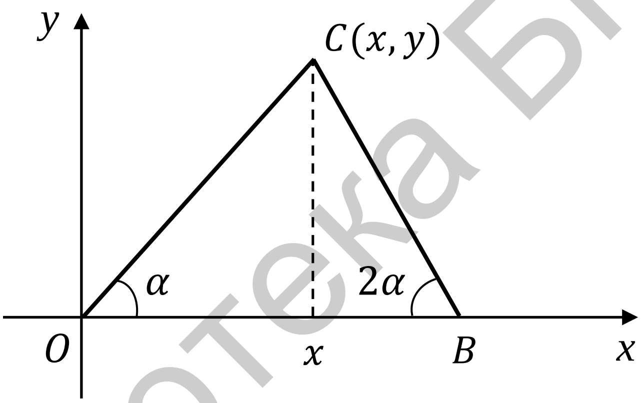

Рис. 9

Решение. Пусть вершины O и B зафиксированы. Выберем систему координат так, как показано на рис. 9.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x};\quad \operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{y}{a-x}.\quad |OB|=a.$

Но $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\ \Rightarrow\ \dfrac{y}{a-x}=\dfrac{2\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}.$

$$\frac{y}{a-x}=\frac{2xy}{x^2-y^2};\quad x^2-y^2=2x(a-x);\quad x^2-y^2=2ax-2x^2;$$

$$3x^2-2ax-y^2=0;\quad 3\left(x^2-\frac{2}{3}ax+\frac{a^2}{9}\right)-y^2=\frac{a^2}{3};\quad 3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2-y^2=\frac{a^2}{3};$$

Библиотека БГУИР

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^2-\frac{y^2}{3}=\frac{a^2}{9}$$ – это уравнение гиперболы.

Замечание. Уравнение гиперболы может быть выражено другой формулой, если система координат выбрана другим образом.

Ответ: третья вершина описывает гиперболу.

Задача 5. Пусть $f:\ [a;b]\to R$ – непрерывная функция, дифференцируемая на $(a;b)$, где a и b – положительные числа. Докажите, что найдется такая точка $c\in(a;b)$, что $\frac{1}{a-b}(a\ f(b)-b\ f(a))=f(c)-c\ f'(c)$.

Доказательство. Функции $\frac{f(x)}{x}$ и $\frac{1}{x}$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$ и $\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$ для $\forall x\in(a;b)$. Тогда по теореме Коши найдется по крайней мере одна точка $c\in(a;b)$, такая, что

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{f'(c)\cdot c-f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}};\qquad \frac{\frac{a\,f(b)-b\,f(a)}{ab}}{\frac{a-b}{ab}}=-(f'(c)\cdot c-f(c));$$

$$\frac{1}{a-b}(a\ f(b)-b\ f(a))=f(c)-c\cdot f'(c).$$

Олимпиада 2011 года

2–4 курсы

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

Решение

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}=\frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{4n^2}=\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ответ: $\alpha=\frac{3}{2}>1\ \Rightarrow$ ряд сходится.

Библиотека БГУИР

Задача 2. Найдите $f^{(42)}(0)$, если $f(x)=\sin(x^2)$.

Решение. Заметим, что в разложении функции $f(x)$ в ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ коэффициент при x^n равен $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. С другой стороны, разложение функции $\sin(x^2)$ в степенной ряд имеет вид

$$\sin(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+\frac{x^{42}}{21!}-\ldots.$$

Таким образом, $\frac{1}{21!}=\left.\frac{(\sin(x^2))^{(42)}}{42!}\right|_{x=0}$.

Отсюда, $\left.(\sin(x^2))^{(42)}\right|_{x=0}=\frac{42!}{21!}$.

Ответ: $\frac{42!}{21!}$.

Задача 3. Задана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1=1,\ F_2=1,$ $F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\ n>2.$ Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}$.

Решение. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_n\cdot F_{n+1}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}\cdot F_n\cdot F_{n+1}}=$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_n}-\frac{1}{F_n\cdot F_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_2F_3}+\frac{1}{F_2F_3}-\frac{1}{F_3F_4}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{F_{n-1}F_n}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)=\frac{1}{F_1F_2}=1.$$

Ответ: 1.

Задача 4. Проходит ли интегральная кривая дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2,\quad y(0)=0$ через точку $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$?

Решение. $y'>0$, кроме $(0;0)$. Чтобы решение проходило через точку *M*, по теореме Лагранжа о среднем на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ должна быть точка *C*, в которой производная должна быть равна $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. единице. Строим изоклину $y'=1.$ Таким образом, $x^2+y^2=1$.

Библиотека БГУИР

Из условия $y' > 0$, поэтому очевидно, что ни одна монотонно возрастающая интегральная кривая, удовлетворяющая $y(0) = 0$, не может проходить через точку M (рис. 10).

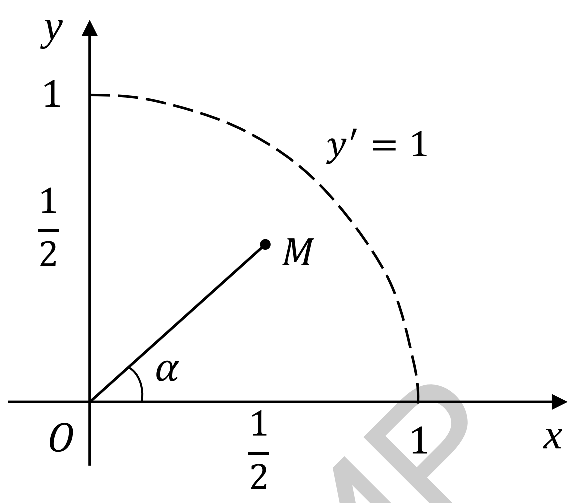

Рис. 10

Ответ: нет.

Задача 5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют хотя бы одному из неравенств $\frac{x^2}{3} + y^2 \le 1$ или $x^2 + \frac{y^2}{3} \le 1$ (рис. 11).

Решение

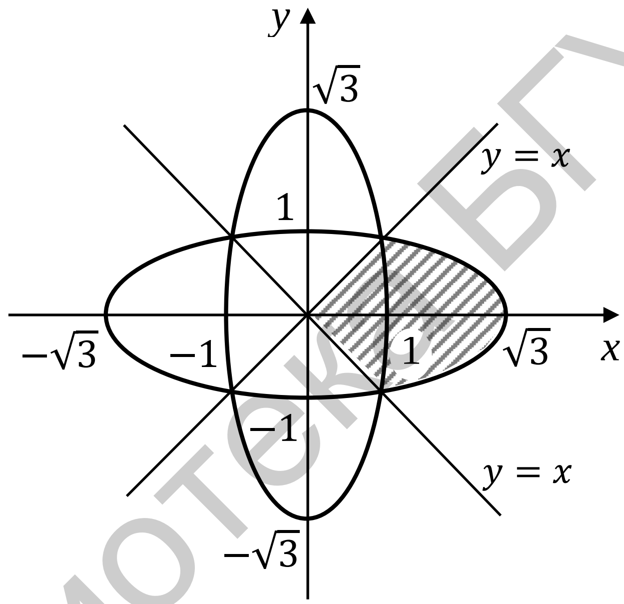

Рис. 11

Прямые $y = x$ и $y = -x$ делят рассматриваемую фигуру на четыре равные по площади части. $S = 4S_1$.

$$S_1 = \iint\limits_D dxdy = \begin{bmatrix} x = \sqrt{3} r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ I = \sqrt{3}\, r \\ r\sin\varphi = \sqrt{3}\, r\cos\varphi \\ \mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{3} \end{bmatrix} = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{3}\, r dr = \sqrt{3}\,\varphi \Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $S = 4\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Библиотека БГУИР

Олимпиада 2012 года

1 курс

Задача 1. Числа $1370, 1644, 2055, 3425$ делятся на 137. Докажите, не вычисляя определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, что он также делится на 137.

Доказательство. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Прибавим к четвертому столбцу первый столбец, умноженный на 1000, второй столбец, умноженный на 100, третий столбец, умноженный на 10. Получим, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 1370 \\ 1 & 6 & 4 & 1644 \\ 2 & 0 & 5 & 2055 \\ 3 & 4 & 2 & 3425 \end{vmatrix}.$$

Все элементы четвертого столбца делятся на 137. Следовательно, определитель Δ также делится на 137.

Задача 2. Функция $li\,(x)$, называемая интегральным логарифмом, определяется следующим образом: $\int \frac{dx}{\ln x} = li\,(x) + C,\ x \in (0;1)$ и $li\,(x) \to 0$ при $x \to +0$. Выразите $\int li\,(x)\,dx$ через $li\,(x)$ и элементарные функции.

Решение. $\int li\,(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = li\,(x) & du = \dfrac{dx}{\ln x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x \cdot li\,(x) - \int \frac{xdx}{\ln x} = x \cdot li\,(x) -$

$$- \int \frac{2xdx}{2\ln x} = x \cdot li\,(x) - \int \frac{d\,(x^2)}{\ln\,(x^2)} = x \cdot li\,(x) - li\,(x^2) + C.$$

Ответ: $x \cdot li\,(x) - li\,(x^2) + C$.

Задача 3. Пусть $P(x)$ – многочлен степени n такой, что $P(k) = \frac{1}{k}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Найдите значение $P(n+2)$.

Библиотека БГУИР

Решение. Рассмотрим многочлен $Q(x) = xP(x) - 1$. $Q(x)$ – многочлен степени $n+1$. $Q(k) = kP(k) - 1 = k \cdot \frac{1}{k} - 1 = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n+1,$ т. е. многочлен $Q(x)$ имеет $n+1$ корней $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots, x_{n+1} = n+1$. Тогда

$Q(x) = a_0(x-1)(x-2)\ldots(x-n-1).$

Полагаем $x = 0$. Тогда $Q(0) = 0 \cdot P(0) - 1 = -1$. С другой стороны,

$Q(0) = a_0(-1)(-2)\ldots(-n-1) = a_0(-1)^{n+1}(n+1)!$

Следовательно, $a_0(-1)^{n+1}(n+1)! = -1$ и $a_0 = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Итак,

$$Q(x) = \frac{(-1)^n(x-1)(x-2)\ldots(x-n-1)}{(n+1)!},$$

$$Q(n+2) = \frac{(-1)^n(x-1)\cdot n \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1)!} = (-1)^n.$$

Так как $P(x) = \frac{Q(x)+1}{x}$, то

$$P(n+2) = \frac{Q(n+2)+1}{n+2} = \frac{(-1)^n+1}{n+2} = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{нечетное;} \\ \frac{2}{n+2}, \text{ если } n - \text{четное.} \end{cases}$$

Ответ: 0, если n – нечетное; $\frac{2}{n+2}$, если n – четное.

Задача 4. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \cdot 3^{n-k+1} \cdot 2^{k-1}}$.

Решение

$$x_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{n-k+1} \cdot 3^{k-1}} = \sqrt[n]{2^n \cdot \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}} = 2 \cdot \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \le \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \le \sum_{k=1}^{n+1} n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = n \cdot \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2}} = 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right),$$

то $2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \le \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \le 2n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right).$

Библиотека БГУИР

Обозначив $a_n = 2\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n+1} 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)}$, имеем $a_n \le x_n \le \sqrt[n]{n} \cdot a_n$.

Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем $3 \le \lim_{n\to\infty} x_n \le 1\cdot 3$, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)} = 2\cdot\frac{3}{2} = 3.$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} x_n = 3.$

Ответ: 3.

Задача 5. Найдите корень z уравнения $5|z|^2 + 4Re\, z = 4z\cdot\bar{z} + 5$, который имеет наибольшее значение модуля.

Решение. Требуется найти корень $z = x + iy$, для которого значение выражения $x^2 + y^2$ будет наибольшим при условии $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + 4x - 5).$$

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda(x+2) = 0, \quad x = -\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}, \quad \lambda \ne -1; \\ L'_y(x, y, \lambda) = 2y + 2\lambda y = 0, \quad 2y(\lambda+1) = 0, \quad y = 0; \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$, $x_2 = 1$; $z_1 = -5$, $z_2 = 1$.

Корнем с наибольшим модулем является $z_1 = -5.$

Ответ: -5.

Олимпиада 2012 года

2–4 курсы

Задача 1. Найдите все комплексные корни уравнения

$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$

Решение. Так как $z_0 = 1$ не является корнем данного уравнения, то при $z \ne 1$ данное уравнение равносильно уравнению $(z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$, т. е. $z^6 - 1 = 0$. Отсюда $z^6 = 1$, $z = \sqrt[6]{1}.$

$z_0 = 1,$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$$z_2=\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_3=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}=-1,$$
$$z_4=\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_5=\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ответ: комплексными корнями являются z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

Задача 2. Даны два вектора: $\bar{a}=(1;-1;1)$ и $\bar{b}=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. Векторная последовательность $\bar{u}_n$ задана рекуррентно $\bar{u}_1=\bar{a}, \bar{u}_n=\bar{u}_{n-1}\times\bar{b},\ n\geq 2-$векторное произведение. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n$.

Решение. $\bar{a}_n=\sqrt{3}\cdot\bar{e}_1=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Заметим, что $\bar{a}\perp\bar{b},\ \bar{u}_2\perp\bar{a},\ \bar{u}_2\perp\bar{b},\ \bar{u}_3\perp\bar{u}_2,\ \bar{u}_3\perp\bar{b}$.

$$\bar{u}_1=\bar{a}=(1;-1;1)=\sqrt{3}\cdot\bar{e}_1,$$

$$\bar{u}_2=\bar{u}_1\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\1&-1&1\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\bar{i}+\bar{k}=(-1;0;1)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cdot\bar{e}_2,$$

$$\bar{u}_3=\bar{u}_2\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-1&0&1\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{2}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}-\frac{2}{3}\bar{k}=-\frac{2}{3}\bar{u}_1,$$

$$\bar{u}_4=\bar{u}_3\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{2}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{k}=-\frac{2}{3}\bar{u}_2,$$

откуда $\bar{u}_{2k+1}=-\frac{2}{3}\bar{u}_{2k-1},\quad \bar{u}_{2k+2}=-\frac{2}{3}\bar{u}_{2k}$.

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{u}_{2k-1}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{u}_{2k}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\bar{u}_1+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\bar{u}_2=$

Библиотека БГУИР

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}\cdot\sqrt{3}\right)\bar{e}_1+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}\cdot\sqrt{2}\right)\bar{e}_2=\frac{\sqrt{3}}{1+\dfrac{2}{3}}\,\bar{e}_1+\frac{\sqrt{2}}{1+\dfrac{2}{3}}\,\bar{e}_2=\frac{3\sqrt{3}}{5}\,\bar{e}_1+\frac{3\sqrt{2}}{5}\,\bar{e}_2=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3\sqrt{2}}{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{3}{5};-\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5};0;\frac{3}{5}\right)=$$

$$=\left(0;-\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right).$$

Ответ: $\left(0;-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.

Задача 3. Найдите $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, где $f(x,y)=\begin{vmatrix} x & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & y \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по элементам первого столбца. Имеем

$$f(x,y)=x\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4 & y \end{vmatrix}-\underbrace{4\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}+\ldots}_{\text{все эти слагаемые не зависят от } x}=$$

$$=x\,y\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}+\underbrace{\qquad\ldots\qquad}_{\substack{\text{эти слагаемые не зависят}\\ \text{ни от } x,\ \text{ни от } y.}}.$$

Поэтому $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 2\\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 7\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$

$$=7\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-7\cdot(-4)=28.$$

Ответ: 28.

Библиотека БГУИР

Задача 4. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L x^2 dl,$ где L – окружность $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

Решение. В силу симметрии $\int\limits_L x^2 dl = \int\limits_L y^2 dl = \int\limits_L z^2 dl.$ Поэтому

$$\int\limits_L x^2 dl = \frac{1}{3}\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl = \frac{1}{3}\int\limits_L a^2 dl = \frac{a^2}{3}\int\limits_L dl = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi a^3.$

Задача 5. Известно, что $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \mathrm{tg}^2 x.$ Найдите $f(x),$ если $0 \le x < 1.$

Решение. Обозначим $\sin^2 x = y,\ 0 \le y < 1.$ Тогда $f'(y) = 1 - 2y + \frac{1}{1-y},$ $0 \le y < 1.$ Таким образом $f'(y) = -2y + \frac{1}{1-y}.$ Отсюда $f(y) = \int\left(-2y + \frac{1}{1-y}\right)dy =$ $= -y^2 - \ln|1-y| + C$, т. е. $f(x) = -x^2 - \ln(1-x) + C$ при $0 \le x < 1.$

Ответ: $-x^2 - \ln(1-x) + C$.

Олимпиада 2013 года

1 курс

Задача 1. Исследуйте зависимость числа точек перегиба функции $y = e^x + ax^3$ от параметра a.

Решение. Необходимым условием точки перегиба является равенство нулю второй производной $y'' = e^x + 6ax$ в этой точке. Рассмотрим возможные случаи.

Пусть $a = 0$. $y'' = e^x > 0,$ точек перегиба нет.

Пусть $a > 0.$ Тогда $\lim\limits_{x\to-\infty} y''(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 6ax) = -\infty$, а $(y'')' = e^x + 6a > 0$ при $x \in \boldsymbol{R},$ т. е. функция $y''(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$. Поэтому существует единственная точка, в которой $y''(x) = 0$. Так как $y'''(x) > 0$ на $\boldsymbol{R}$, то при $a > 0$ точек перегиба нет.

Пусть $a < 0.$ Тогда $\lim\limits_{x\to-\infty} y''(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 6ax) = +\infty$. $y''' = e^x + 6a$. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$ то при любом $a < 0$ найдется точка x_0, в которой $y''' = 0$, т. е. $e^{x_0} = -6a,\ x_0 = \ln(-6a).\ y''(x_0) = e^{-\ln(-6a)} + 6a \cdot \ln(-6a)$.

Библиотека БГУИР

Возможны три ситуации:

1) $y'' = e^x > 0$. Тогда $y'' > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и точек перегиба нет;

2) $y''(x_0) = 0$. В этом случае $y'''(x_0) = 0,\ y^{(IV)}(x_0) = e^{x_0} > 0,$ каким бы ни было x_0. Это означает, что в этой ситуации перегиба нет;

3) $y''(x_0) < 0$. Тогда найдутся ровно две точки, где $y'' = 0$. В обеих точках $y''' \neq 0$. Значит, обе точки являются точками перегиба.

Исследуем поведение $y''(x_0)$ при различных $a < 0$:

$$-6a + 6a\ln(-6a) = 0,\ \ln(-6a) = 1,\ a = -\frac{e}{6}.$$

Таким образом,

$y''(x_0) < 0,\ a < -\dfrac{e}{6}$ – две точки перегиба,

$y''(x_0) = 0,\ a = -\dfrac{e}{6}$ – точек перегиба нет,

$y''(x_0) > 0,\ -\dfrac{e}{6} < a < 0$ – точек перегиба нет.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{e}{6}\right)$ – две точки перегиба; $a \in \left[-\dfrac{e}{6}; 0\right]$ – точек перегиба нет; $a \in (0; +\infty)$ – одна точка перегиба.

Задача 2. Найдите A^{2013}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $A = E + B$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ такая, что $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $A^{2013} = (E+B)^{2013} = E + 2013B + B^2(\ldots) =$

$$= E + 2013B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2013\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4026 & -2013 \\ 0 & 8052 & -4026 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4027 & -2013 \\ 0 & 8052 & -4025 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4027 & -2013 \\ 0 & 8052 & -4025 \end{pmatrix}$.

Библиотека БГУИР

Задача 3. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[2012, 2013]$. Докажите, что график функции

$$y(x)=\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f(2012) & \varphi(2012) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f(2013) & \varphi(2013) \end{vmatrix}$$

имеет горизонтальную касательную.

Доказательство. Заметим, что

$$y(2012)=\begin{vmatrix} f(2012) & \varphi(2012) \\ f(2012) & \varphi(2012) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f(2012) & \varphi(2012) \\ f(2013) & \varphi(2013) \end{vmatrix}=0,$$

$$y(2013)=\begin{vmatrix} f(2013) & \varphi(2013) \\ f(2012) & \varphi(2012) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f(2013) & \varphi(2013) \\ f(2013) & \varphi(2013) \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $y(2012)=y(2013)$. В силу условия задачи функция $y(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[2012, 2013]$. Тогда по теореме Ролля найдется такая точка $c\in(2012; 2013)$, в которой $y'(c)=0$. Тогда из геометрического смысла производной следует, что касательная к графику функции $y(x)$ в точке с абсциссой c является горизонтальной.

Задача 4. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\int\limits_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1}dx.$

Решение. Пусть $y=\dfrac{1}{n}$. Тогда при $n\to\infty$ $y\to+0$. Пусть $Q=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{y}\int\limits_0^y x^{x+1}dx}{y}$. Применим правило Лопиталя.

$$Q=\lim_{y\to+0}\frac{\frac{1}{y}\int\limits_0^y x^{x+1}dx}{y}=\lim_{y\to+0}\frac{\left(\frac{1}{y}\int\limits_0^y x^{x+1}dx\right)'_y}{y'_y}=\lim_{y\to+0}\left(\frac{1}{y}\int\limits_0^y x^{x+1}dx\right)'_y=$$

$$=\lim_{y\to+0}\left(-\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y x^{x+1}dx+\frac{1}{y}\left(\int\limits_0^y x^{x+1}dx\right)'\right)=\lim_{y\to+0}\left(-\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y x^{x+1}dx+\frac{1}{y}\cdot y^{y+1}\right)=$$

$=-Q+\lim\limits_{y\to+0}y^y=-Q+1,$ так как $\lim\limits_{y\to+0}y^y=1$. Откуда $2Q=1$ или $Q=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Библиотека БГУИР

Задача 5. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x^n dx}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

Решение. $\int \frac{x^n dx}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}} = n! \cdot \int \frac{\left(\frac{x^n}{n!}+\ldots+\frac{x^2}{2!}+x+1\right)}{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)} dx - n! \times$

$\times \int \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}} dx.$

Поскольку $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) dx = d\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$, то после интегрирования первого равенства получим

$$\int \frac{x^n dx}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}} = n! \cdot \left(x - \ln\left|1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right|\right) + C.$$

Ответ: $n! \cdot \left(x - \ln\left|1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right|\right) + C.$

Олимпиада 2013 года

2–4 курсы

Задача 1. Решите задачу Коши $(y')^2 - (y+x^2)\,y' + x^2 y = 0,\ \ y(1) = 1.$

Решение. $(y')^2 - yy' - x^2 y' + x^2 y = 0, \quad y'(y'-x^2) - y(y'-x^2) = 0,$ $(y'-y)(y'-x^2) = 0.$

Возможны следующие два случая:

1) $y' - y = 0,$

$\frac{dy}{dx} - y = 0,$

$\frac{dy}{y} - dx = 0,$

2) $y' = x^2,$

$y = \frac{x^3}{3} + C_2.$

Так как $y(1) = 1,$

$$\ln|y| - x = \ln|C_1|, \qquad \text{то } 1 = \frac{1}{3} + C_2,\ C_2 = \frac{2}{3},$$

$$y = C_1 e^x; \qquad y = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

Так как $y(1) = 1$, то $1 = C_1 e$, $C_1 = e^{-1}$, $y = e^{x-1}$.

Ответ: $y = e^{x-1}$, $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}$.

Задача 2. Функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ разложили в ряд по степеням x при условии, что $|x| < 1$. Найдите коэффициент при x^{2013}.

Решение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 + x^n + x^{2n} + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^{mn}.$$

Коэффициент при x^{2013} равен количеству слагаемых x^{mn}, для которых $m \cdot n = 2013$, $m, n \in \boldsymbol{N}$. Поскольку $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, то возможны следующие комбинации:

m	1	$3 \cdot 11$	61	$3 \cdot 61$	$3 \cdot 11 \cdot 61$	11	$11 \cdot 61$	3
n	$3 \cdot 11 \cdot 61$	61	$3 \cdot 11$	11	1	$3 \cdot 61$	3	$11 \cdot 61$

Поэтому коэффициент при x^{2013} равен 8.

Ответ: 8.

Задача 3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x)\, dx.$

Решение. Поскольку подынтегральная функция периодическая с периодом 2π, то $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x)\, dx$. Так как $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x)\, dx = 0$ в силу того, что это интеграл от нечетной функции по промежутку симметричному относительно нуля, то

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x)\, dx + i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x)\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i \sin(\sin x))\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cdot e^{i \sin x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x + i \sin x}\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{ix}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} \right) dx.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{inx}}{n!}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как $\left|\dfrac{e^{inx}}{n!}\right|\le\dfrac{1}{n!}$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ сходится. Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{inx}}{n!}\right)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{e^{inx}}{n!}dx\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot dx+$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{ix}+\ldots+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{inx}}{n!}+\ldots=2\pi+\frac{1}{i}e^{ix}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\ldots+\frac{1}{i\,n}e^{inx}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\ldots=2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задача 4. Вычислите

$$\left(\frac{\sin\ln i}{i}\right)^{\left(\frac{\sin\ln i}{i}\right)^{\left(\frac{\sin\ln i}{i}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(\frac{\sin\ln i}{i}\right)^{\frac{\sin\ln i^{i}}{i}}}}}}}},$$

где i – мнимая единица, а функция синус встречается 2013 раз.

Решение. $\dfrac{\sin\ln i^{i}}{i}=\dfrac{\sin\left(i\ln i\right)}{i}=\dfrac{\sin\left(i(\ln|i|+i\arg i)\right)}{i}=\dfrac{\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{i}=\dfrac{-1}{i}=i.$

Далее процесс повторяется до тех пор, пока не получим

$$\sin\ln i^{i}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Ответ: -1.

Задача 5. Найдите площадь фигуры G, ограниченной кривой $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^{4}=4xy$.

Решение. Так как левая часть уравнения неотрицательна при любых значениях x и y, то и правая часть неотрицательна, поэтому x и y имеют одинаковые знаки. Следовательно, кривая расположена в первом и третьем квадрантах, причем она симметрична относительно начала координат.

Введем замену переменных:

$$\begin{cases}x=ar\cos^{2}\varphi,\\ y=br\sin^{2}\varphi.\end{cases}$$

Вычислим якобиан:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos^{2}\varphi & 2ar\cos\varphi(-\sin\varphi)\\ b\sin^{2}\varphi & 2br\sin\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=2abr\sin\varphi\cos^{3}\varphi+$$

Библиотека БГУИР

$+2abr\cos\varphi\sin^3\varphi = 2abr\cos\varphi\sin\varphi.$

Уравнение кривой в новых координатах принимает следующий вид: $r^4 = 4abr^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$

Обозначим через D_1 часть фигуры $G,$ попавшую в первый квадрант.

Тогда пределы изменения переменных r и φ для нее следующие: $0 \le r \le 2\sqrt{ab}\cos\varphi\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$ Пусть S – площадь фигуры $G,$ S_1 – фигуры D_1. Тогда

$$S = 2S_1 = 2\iint\limits_{D_1} dxdy = 2\iint\limits_{D_1^*} 2abr\cos\varphi\sin\varphi d\varphi dr = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{ab}\cos\varphi} rdr =$$

$$= 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\frac{4ab\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{2}\,d\varphi = 8a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= 8a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi\, d(\sin\varphi) = 8a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\varphi - \sin^5\varphi)\, d(\sin\varphi) =$$

$$= 8a^2b^2\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^2b^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}a^2b^2.$$

Ответ: $\frac{2}{3}a^2b^2.$

Олимпиада 2014 года

1 курс

Задача 1. Найдите $\int(x^6+x^3)\cdot\sqrt[3]{x^3+2}\,dx.$

Решение. $\int(x^6+x^3)\cdot\sqrt[3]{x^3+2}\,dx = \int(x^5+x^2)\cdot\sqrt[3]{x^6+2x^3}\,dx.$

Так как $d(x^6+2x^3) = (6x^5+6x^2)dx,$ то

$$\int(x^6+x^3)\cdot\sqrt[3]{x^3+2}\,dx = \frac{1}{6}\int(x^6+2x^3)\,d(x^6+2x^3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(x^6+2x^3)^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C =$$

$$= \frac{1}{8}(x^6+2x^3)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{8}x^4(x^3+2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{8}x^4(x^3+2)^{\frac{4}{3}} + C.$

Библиотека БГУИР

Задача 2. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$.

Решение. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \left[\begin{matrix} \frac{\pi}{2} - x = t \\ dx = -dt \end{matrix}\right] = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx.$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \left[\begin{matrix} x = 2t \\ dx = 2dt \end{matrix}\right] = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)\,dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t)\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\cdot dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt =$$

$$= 2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,dt = \ln 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2I.$$

Итак, $I = \ln 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2I$. Следовательно, $I = -\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$.

Задача 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство $\frac{1}{2^n}\cdot A^n = E$.

Решение. $\frac{1}{2^n}\cdot A^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n$.

Матрица $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ является матрицей поворота вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{6}$. Поэтому наименьшее натуральное число n, при котором $T^n = E$, равно 12.

Ответ: 12.

Задача 4. Пусть $y = (x^n - 1)^n$. Найдите $y^{(n)}(1)$.

Решение. Так как $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$, то

$y = (x-1)^n (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)^n$.

Библиотека БГУИР

Тогда по формуле Лейбница

$$y^{(n)}=(u\cdot v)'=((x-1)^n)^{(n)}\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)^n+C_n^1\,((x-1)^n)^{(n-1)}\times$$
$$\times n\,(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)^{n-1}\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)'+\ldots+(x-1)^n((x^{n-1}+$$
$$+x^{n-2}+\ldots+x+1)^n)^{(n)}=n!(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)^n+(x-1)\,\varphi(x).$$

Тогда $y^{(n)}(1)=n!\cdot n^n$.

Ответ: $n!\cdot n^n$.

Задача 5. Докажите, что последовательность $a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt[3]{6+a_n}$, $a_n\in\boldsymbol{R},\ n\in\boldsymbol{N}$ сходится, и найдите ее предел.

Решение. Предположим, что предел данной последовательности существует и равен a, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Тогда, переходя в равенстве $a_{n+1}=\sqrt[3]{6+a_n}$ к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$a=\sqrt[3]{6+a},\ a^3=6+a,\ a^3-a-6=0,\ (a-2)(a^2+2a+3)=0,\ a=2.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, если существует.

Докажем, что этот предел существует. Покажем сначала, что $a_n\le 2$ при любом $n\in\boldsymbol{N}$ с помощью метода математической индукции:

1) $a_1=1<2$ верно;

2) пусть при $n=k$ $\quad a_k\le 2$, покажем, что при $n=k+1$ $\ a_{k+1}\le 2$,

$$a_{k+1}=\sqrt[3]{6+a_k}\le\sqrt[3]{6+2}=2.$$

Итак, доказали, что $a_n\le 2$ для любого $n\in N$. Покажем теперь, что последовательность (a_n) возрастающая. Действительно,

$$a_{n+1}=\sqrt[3]{6+a_n}\ge\sqrt[3]{3\cdot a_n+a_n}=\sqrt[3]{4\cdot a_n}\ge\sqrt[3]{a_n^3}=a_n$$

для любого $n\in\boldsymbol{N}$. Итак, последовательность (a_n) возрастающая и ограниченная сверху. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

Ответ: 2.

Олимпиада 2014 года

2–4 курсы

Задача 1. Пусть $a_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)^n\sin 2t\,dt$. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Решение. Заметим, что функция $f(n,t)=(1-\sin t)^n\sin 2t,\ t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\ n\in\boldsymbol{N}$, является непрерывной и ограниченной. В силу этого верно равенство

Библиотека БГУИР

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(n,t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n,t)\right)dt.$$

При $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin t \in (0;1)$, т. е. $1-\sin t \in (0;1)$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin t)^n = \dfrac{1-\sin t}{1-(1-\sin t)} = \dfrac{1-\sin t}{\sin t}$.

Откуда $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n,t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin t)^n\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t \times$

$$\times\frac{1-\sin t}{\sin t}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1-\sin t)\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt = 2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2-1=1.$$

Ответ: 1.

Задача 2. Пусть $P_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!}}$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{P_n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{P_n\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} P_n\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)}$ в силу непрерывности показательной функции. В свою очередь по формуле Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} P_n \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} + \frac{1}{12\cdot 3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} + \frac{1}{12\cdot 2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}}\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{(3n)^{3n}}{e^{3n}}\cdot\frac{e^{2n}}{(2n)^{2n}}}\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{27}{4e}\cdot n\ln\left(\frac{n+2}{n}\right).$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{27}{4e}\cdot n\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)$,

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{27}{4e}n\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{27}{4e}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{2\cdot\frac{27}{4e}} = e^{\frac{27}{2e}}.$$

Ответ: $e^{\frac{27}{2e}}$.

Задача 3. Пусть функция $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$, определенная для $x\ge 1$, такова, что $f(x)=y$, где $y\ge 1$ – это единственное решение уравнения $y^y = x$. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^e f(e^x)\,dx$.

Решение. Пусть $A=\int\limits_0^e f(e^x)\,dx$. Сделаем замену $t=e^x$, $x=\ln t$, $dx=\dfrac{dt}{t}$, $t\in[1;\ e^e]$. Тогда $A=\int\limits_1^{e^e}\dfrac{f(t)}{t}\,dt$ или $A=\int\limits_1^{e^e}\dfrac{f(x)}{x}\,dx$. Теперь воспользуемся тем, что $y^y = x$ и $f(x)=y$. Тогда $dx=d\,(y^y)=y^y(\ln y+1)\,dy$, $y\in[1;\ e]$,

$$A=\int\limits_1^{e^e}\frac{f(x)}{x}\,dx=\int\limits_1^{e}\frac{y}{y^y}\cdot y^y(\ln y+1)dy=\int\limits_1^{e}y(\ln y+1)\,dy=\frac{y^2}{2}(\ln y+1)\Bigg|_1^e-\int\limits_1^{e}\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y}dy=$$

$$=e^2-\frac{1}{2}-\int\limits_1^{e}\frac{y}{2}dy=e^2-\frac{1}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3e^2-1}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3e^2-1}{4}$.

Задача 4. Решите задачу Коши:

$$(1-x)(y\cdot y''-(y')^2)-y\,y'=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=2.$$

Решение. См. решение задачи 5 олимпиады 2007 года (с. 19).

Задача 5. В какой точке поверхности эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{4}=1$ нормаль к ней образует равные углы с осями координат?

Решение. Нормаль к поверхности эллипсоида – это нормаль к касательной плоскости в этой точке. Пусть (x_0, y_0, z_0) – искомая точка на поверхности эллипсоида. Тогда нормальный вектор $\bar{n}=\left(\dfrac{x_0}{4}, y_0, \dfrac{z_0}{4}\right)$. Для того чтобы углы с осями координат были равны, необходимо и достаточно выполнения условий $\left|\dfrac{x_0}{4}\right|=|y_0|=\left|\dfrac{z_0}{4}\right|$. Рассмотрим случай $x_0>0$, $y_0>0$, $z_0>0$. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{x_0}{4}=y_0=\dfrac{z_0}{4},\\[2mm] \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{1}+\dfrac{z_0^2}{4}=1.\end{cases}$$

Решая систему, получаем $x_0=\frac{4}{3}$, $y_0=\frac{1}{3}$, $z_0=\frac{4}{3}$. Если брать последовательно x_0, y_0, z_0 со знаком «+» или «–», получим восемь различных точек на эллипсоиде.

Ответ: $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Олимпиада 2015 года

1 курс

Задача 1. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi n\cdot\sqrt[2n]{e})$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi n\cdot\sqrt[2n]{e})=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\cos(\pi n\cdot e^{\frac{1}{2n}}-\pi n)=0$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\pi n\cdot e^{\frac{1}{2n}}-\pi n)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi n\left(e^{\frac{1}{2n}}-1\right)\right)=\cos\left(\lim_{n\to\infty}\pi n\left(e^{\frac{1}{2n}}-1\right)\right)=$$

$$=\cos\left(\lim_{n\to\infty}\pi n\cdot\frac{1}{2n}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

в силу непрерывности функции $y=\cos x$.

Ответ: 0.

Задача 2. Для $a>0$ найдите наименьшее значение функции

$$S(a)=\int_0^1\left|x^2+2ax+a^2-1\right|dx.$$

Решение. Так как $x\in[0;1]$, то при $0<a<1$ имеем, что $y=x^2+2ax+{}$ $+a^2-1=0$ в точке $x=1-a$. Тогда раскрывая модуль $\left|x^2+2ax+a^2-1\right|$, получаем, что

$$S(a)=\int_0^{1-a}(-(x^2+2ax+a^2-1))\,dx+\int_{1-a}^1(x^2+2ax+a^2-1)\,dx=$$

$=\frac{2}{3}a^3+a^2-a+\frac{2}{3}$. Откуда $S'(a)=2a^2+2a-1=0$ или $a_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $a>0$, то $a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

$$S\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если $a\geq 1$, то для $x\in[0;1]$ имеем, что $x^2+2ax+a^2-1\geq 0$. Поэтому

$$S(a)=\int_0^1 (x^2+2ax+a^2-1)\,dx=a^2+a-\frac{2}{3}.$$

$S'(a)=2a+1=0$, т. е. $a=-\frac{1}{2}$, но $a\geq 1$ и $S'(a)=2a+1>0$ при $a\geq 1$. Тогда при $a\geq 1$ наименьшее значение – это $S(1)=\frac{4}{3}$.

Следовательно, наименьшее значение $S(a)$ при $a \geq 0$ есть $\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 3. Найдите неопределенный интеграл $\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

Решение. $I=\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\int\left(-\frac{x}{\cos x}\right)\cdot\left(-\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\right)dx.$

Обозначим $u=-\frac{x}{\cos x}$, $dv=-\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$.

Тогда $du=-\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$, $v=\frac{1}{x\sin x+\cos x}$.

$$I=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}-\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\cdot\left(-\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\operatorname{tg}x+C.$$

Ответ: $-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+tgx+C$.

Задача 4. Вычислите определитель $\Delta=\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & 1\\ 1 & x_2^2 & 1\\ 1 & 1 & x_3^2\end{vmatrix}$, где x_1,x_2,x_3 – три корня многочлена $P(x)=8x^3-4x+1$.

Библиотека БГУИР

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix} = x_1^2x_2^2x_3^2 + 1 + 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Так как $P(x) = 8(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 8(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + {}$ $+ (x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)x - x_1x_2x_3) = 8x^3 - 4x + 1$, то отсюда получаем систему

$$\begin{cases} -8(x_1 + x_2 + x_3) = 0, \\ 8(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) = -4, \\ -8x_1\, x_2\, x_3 = 1. \end{cases}$$

Или $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = -\dfrac{1}{2}, \\ x_1\, x_2\, x_3 = -\dfrac{1}{8}. \end{cases}$

Тогда $0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Откуда $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

Следовательно, $\Delta = \dfrac{1}{64} + 1 + 1 - 1 = \dfrac{65}{64}$.

Ответ: $\dfrac{65}{64}$.

Задача 5. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ такой, что $\boldsymbol{A}x_1 = y_1$, $\boldsymbol{A}x_2 = y_2$, где $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Найдите $\boldsymbol{A}x_3$, если $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x_2 - x_1$, то

$$\boldsymbol{A}x_3 = 2\boldsymbol{A}x_2 - \boldsymbol{A}x_1 = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Библиотека БГУИР

Олимпиада 2015 года

2–4 курсы

Задача 1. Функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1}{x^3 + y^5}$ с начальным условием $y(0) = 1$. Пусть $y(1) = 2$. Вычислите $\int\limits_0^1 x^2 y(x)\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 x^2 y(x)\,dy = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 y(x)\,d\,(x^3) = \begin{bmatrix} u = y(x) & du = y'(x)dx \\ dv = d(x^3) & v = x^3 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 y(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x^3 y'(x)\,dx \right) = \frac{1}{3}\left(y(1) - \int\limits_0^1 x^3 \cdot \frac{1}{x^3 + y^5}\,dx \right) = \frac{1}{3}\left(2 - \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{y^5}{x^3 + y^5} \right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 - x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 y^5 \cdot y'(x)\,dx \right) = \frac{1}{3}\left(2 - 1 + \int\limits_1^2 y^5\,dy \right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{y^6}{6}\Big|_1^2 \right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{32}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{23}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{23}{6}$.

Задача 2. Решите уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}$ и так далее. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x + x^3 + \ldots \\ x + x^3 + \ldots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 + x^4 + \ldots & 0 \\ 0 & x^2 + x^4 + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x}{1-x^2} \\ \dfrac{x}{1-x^2} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{1-x^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{x^2}{1-x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{1-x^2} & \dfrac{x}{1-x^2} \\ \dfrac{x}{1-x^2} & \dfrac{x^2}{1-x^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при условии, что } |x| < 1.$$

Библиотека БГУИР

Итак, имеем систему $\begin{cases} \dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{2}{3}, \\ |x|<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+x-1=0, \\ 2x^2+3x-2=0, \\ |x|<1. \end{cases}$

Решая систему, получаем, что $x=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Задача 3. Найдите среднее значение функции $f(x)=\int\limits_x^1 e^{-t^2}dt$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ – это

$$f(\xi)=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

В нашем случае

$$f(\xi)=\frac{\int\limits_0^1 f(x)dx}{1}=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 e^{-t^2}dt.$$

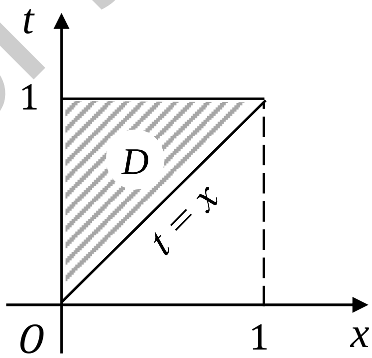

Рис. 12

Этот повторный интеграл равен двойному интегралу $\iint\limits_D e^{-t^2}dt\,dx$ (рис. 12).

Изменив порядок интегрирования в повторном интеграле, получаем

$$f(\xi)=\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^t e^{-t^2}dx=\int\limits_0^1 t\,e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-t^2}d(-t^2)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-1}-1)=\frac{e-1}{2e}.$$

Ответ: $\dfrac{e-1}{2e}$.

Задача 4. Вычислите произведение $\prod\limits_{k=1}^{8}\left(10-6\cos\dfrac{k\pi}{9}\right)$.

Решение. $10-6\cos\dfrac{k\pi}{9}=10-6\cdot\dfrac{e^{\frac{k\pi}{9}i}+e^{-\frac{k\pi}{9}i}}{2}=10-3e^{\frac{k\pi}{9}i}-3e^{-\frac{k\pi}{9}i}=$

$$=\left[z=e^{\frac{k\pi}{9}i}\right]=10-3z-\frac{3}{z}=\frac{-(3z^2-10z+3)}{z}=\frac{-3(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}{z}=\frac{(z-3)(1-3z)}{z}=$$

$$=\left(1-\frac{3}{z}\right)(1-3z)=\left(1-3e^{-\frac{k\pi}{9}i}\right)\left(1-3e^{\frac{k\pi}{9}i}\right).$$

Таким образом, $\prod_{k=1}^{8}\left(10-6\cos\frac{k\pi}{9}\right)=\prod_{k=1}^{8}\left(1-3e^{-\frac{2k\pi}{18}i}\right)\cdot\left(1-3e^{\frac{2k\pi}{18}i}\right).$

Введем в рассмотрение многочлен $P(z)=z^{18}-3^{18}$.

Его корнями являются $z_k=3e^{\frac{2k\pi}{18}i}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 17$ или $z_k=3e^{\frac{2k\pi}{18}i}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 8$ и $z_k=3e^{-\frac{2k\pi}{18}i}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 9$.

Разложим многочлен $P(z)$ на множители:

$$P(z)=(z-3)(z-3e^{-\pi i})\cdot\prod_{k=1}^{8}\left(z-3e^{\frac{2k\pi}{18}i}\right)\left(z-3e^{-\frac{2k\pi}{18}i}\right).$$

Тогда $P(1)=1-3^{18}$.

С другой стороны, $P(1)=-2\cdot4\cdot\prod_{k=1}^{8}\left(1-3e^{\frac{2k\pi}{18}i}\right)\cdot\left(1-3e^{\frac{-2k\pi}{18}i}\right).$

Тогда $\prod_{k=1}^{8}\left(1-3e^{\frac{2k\pi}{18}i}\right)\cdot\left(1-3e^{\frac{-2k\pi}{18}i}\right)=\frac{1-3^{18}}{-8}=\frac{1}{8}(3^{18}-1)=48\,427\,561$.

Ответ: $48\,427\,561$.

Задача 5. Найдите сумму $S=\sum_{m=1}^{100}\left[\frac{mx}{101}\right]$ при $x=10$ ($[y]$ – целая часть числа y).

Решение. Заметим, что $y=[y]+\{y\}$ для любого действительного числа y ($\{y\}$ – дробная часть числа y).

Пусть $S_1=\sum_{m=1}^{100}\left\{\frac{mx}{101}\right\}$, $S_2=\sum_{m=1}^{100}\frac{mx}{101}$.

Тогда $S=S_2-S_1$.

$$S_2=\sum_{m=1}^{100}\frac{mx}{101}=\frac{x}{101}(1+2+3+\ldots+100)=\frac{x}{101}\cdot\frac{100\cdot101}{2}=50x.$$

Библиотека БГУИР

Найдем S_1. Слагаемые в сумме S_1 сгруппируем попарно: $\left\{\frac{mx}{101}\right\}$ и $\left\{\frac{(101-m)x}{101}\right\} = \left\{-\frac{mx}{101}\right\} = 1 - \left\{\frac{mx}{101}\right\}$ при целых x. Сумма каждой такой пары равна 1. Следовательно, $S_1 = 50$. Тогда при $x = 10$

$$S = S_2 - S_1 = 50 \cdot 10 - 50 = 450.$$

Ответ: 450.

Олимпиада 2016 года

1 курс

Задача 1. Найдите эксцентриситет эллипса, полученного при пересечении прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей под углом $72°$ к его оси.

Решение. Из рис. 13 имеем $\alpha = 72°, \beta = 18°$. Пусть радиус цилиндра равен единице. Тогда полуоси эллипса в сечении равны: $b = 1$, $a = \frac{1}{\sin\alpha}$.

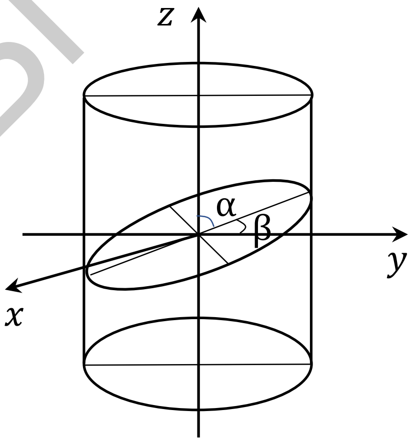

Рис. 13

Фокусное расстояние

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$.

Требуется вычислить $\varepsilon = \cos 72° = \sin 18°$.

Так как $\cos 36° = \sin 54° = 3\sin 18° - 4\sin^3 18°$

и

$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$, то $1 - 2\sin^2 18° = 3\sin 18° = 3\sin 18° - 4\sin^3 18°$.

Обозначим $t = \sin 18°$. Получаем

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0,$$

$$(t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0,$$

$$t_1 = 1,\ t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Откуда $\sin\ 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Библиотека БГУИР

Задача 2. Найдите и изобразите множество точек плоскости xOy, определяемых уравнением $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ y^2 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Раскроем определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ y^2 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & y^2 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 - y^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = x^2(x^2 - y^4).$$

Следовательно, имеем уравнение $x^2(x^2 - y^4) = 0$, которое равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = y^2, \\ x = -y^2. \end{array}\right.$

Тогда на плоскости xOy получаем следующее множество точек (рис. 14).

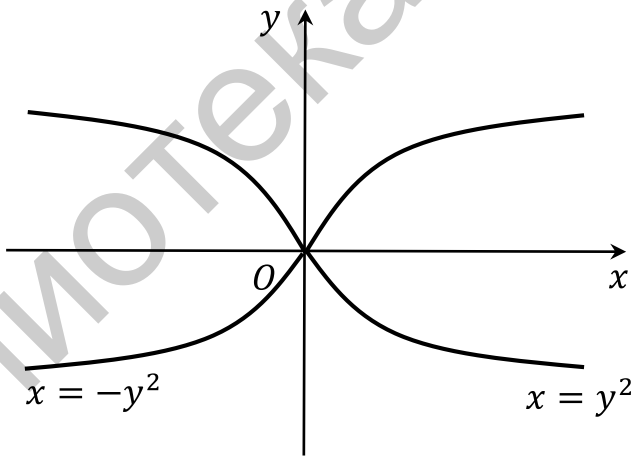

Рис. 14

Ответ: $x = 0,\ \ x = y^2,\ \ x = -y^2$.

Задача 3. Найдите предел числовой последовательности

$$x_n = \sqrt{n} + \sqrt{n-1} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Библиотека БГУИР

Решение

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)=\sqrt{n}\cdot\sum_{k=1}^{w}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Выражение $\sum_{k=1}^{w}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$ является интегральной суммой для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[0;1]$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=0.$$

Ответ: 0.

Задача 4. Вычислите определенный интеграл $\int_{-5}^{5}\frac{dx}{1+2^{\operatorname{arctg}x}}$.

Решение

$$I=\int_{-5}^{5}\frac{dx}{1+2^{\operatorname{arctg}x}}=\begin{bmatrix}x=-t\\dx=-dt\\t=-x\end{bmatrix}=-\int_{5}^{-5}\frac{dt}{1+2^{-\operatorname{arctg}t}}=\int_{-5}^{5}\frac{dx}{1+2^{-\operatorname{arctg}x}}.$$

Тогда

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_{-5}^{5}\frac{dx}{1+2^{\operatorname{arctg}x}}+\int_{-5}^{5}\frac{dx}{1+2^{-\operatorname{arctg}x}}\right)=\frac{1}{2}\int_{-5}^{5}\left(\frac{1}{1+2^{\operatorname{arctg}x}}+\frac{1}{1+2^{-\operatorname{arctg}x}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-5}^{5}\frac{1+2^{\operatorname{arctg}x}}{1+2^{\operatorname{arctg}x}}dx=5.$$

Ответ: 5.

Задача 5. Известно, что четная функция $y=f(x)$ удовлетворяет тождеству $f(2x^3-x)-4x^2\cdot f(x^2-x-1)=8x^5-8x^3-11x^2+2$. Найдите уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=1$:

Решение. Так как $f(x)-$ четная функция, то $f'(x)$ является нечетной функцией. Подставим $x_0=1$ в данное тождество $f(1)-4f(-1)=-9$. Так как $f(x)-$ четная функция, то $f(-1)=f(1)$, т. е. $-3f(1)=-9,\ f(1)=3$.

Библиотека БГУИР

Итак, $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = f(1) = 3$.

Продифференцируем тождество

$$f'(2x^3 - x)\cdot(6x^2 - 1) - 8x\cdot f(x^2 - x - 1) - 4x^2\cdot f'(x^2 - x - 1)\cdot(2x - 1) =$$
$$= 40x^4 - 24x^2 - 22x.$$

Подставим в полученное равенство $x = 1$:

$f'(1)\cdot 5 - 8f(1) - 4f'(-1) = -6$.

Так как $f'(x)$ – нечетная функция, то $f'(-1) = f(1)$.

Следовательно, $9f'(1) - 8f(1) + 6 = 0, \quad 9f'(1) = 18, \quad f'(1) = 2$.

Итак, уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y - 3 = 2(x - 1)$, $y = 2x + 1$.

Ответ: $y = 2x + 1$.

Олимпиада 2016 года

2–4 курсы

Задача 1. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ u(t) & v(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)v(t) - u(t)y(t) & 0 \\ 0 & x(t)v(t) - u(t)y(t) \end{pmatrix}$$ при

условии, что $x(t)v(t) - u(t)y(t) \neq 0$.

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ u(t) & v(t) \end{pmatrix}$. Тогда $\det A = xv - uy$. Так как $xv - uy \neq 0$,

то получаем, что $A^{-1} = \dfrac{1}{x(t)v(t) - u(t)y(t)}\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$. Откуда матрица

$C = \begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$ является присоединенной для матрицы A.

С другой стороны, $C = \begin{pmatrix} v(t) & -y(t) \\ -u(t) & x(t) \end{pmatrix}$. Поэтому получаем систему

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ y'(t) = -y(t), \\ u'(t) = -u(t), \\ v'(t) = x(t). \end{cases}$$

Так как $x''(t) = v'(t) = x(t)$, то $x''(t) - x = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $x = C_1e^t + C_2e^{-t}$.

$v(t) = x'(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}$, $y' + y = 0$, $\lambda + 1 = 0$, $\lambda = -1$, $y = C_3e^{-t}$.

Библиотека БГУИР

Аналогично $u' + u = 0,\ u = C_4 e^{-t}$.

Ответ: $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t},\ y = C_3 e^{-t},\ u = C_4 e^{-t},\ v = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$.

Задача 2. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2016}}{x^{4035} + x^{4034} + x + 1} dx$.

Решение. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2016} dx}{x^{4035} + x^{4034} + x + 1} = \frac{1}{2017} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x^{2017})}{x(x^{4034}+1) + (x^{4034}+1)} =$

$$= \frac{1}{2017} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x^{2017})}{(x^{4034}+1)(x+1)} = \begin{bmatrix} x^{2017} = y \\ x = y^{\frac{1}{2017}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2017} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)(y^{\frac{1}{2017}}+1)} =$$

$$= \frac{1}{2017} \left(\int\limits_0^1 \frac{dy}{(y^2+1)(y^{\frac{1}{2017}}+1)} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)(y^{\frac{1}{2017}}+1)} \right) = \frac{1}{2017} (I_1 + I_2),$$ где

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dy}{(y^2+1)(y^{\frac{1}{2017}}+1)}, \quad I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)(y^{\frac{1}{2017}}+1)}.$$

Рассмотрим $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)(y^{\frac{1}{2017}}+1)} = \begin{bmatrix} y = \frac{1}{t} & t = \frac{1}{y} \\ dy = -\frac{1}{t^2} dt & \end{bmatrix} =$

$$= -\int\limits_1^0 \frac{dt}{t^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)(t^{\frac{1}{2017}}+1)} = \int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2017}}\, dt}{(1+t^2)(1+t^{\frac{1}{2017}})}.$$

Тогда $I_1 + I_2 = \int\limits_0^1 \frac{(1+t^{\frac{1}{2017}})\, dt}{(1+t^2)(1+t^{\frac{1}{2017}})} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$,

$$I = \frac{1}{2017}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2017} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8068}.$$

Ответ: $I = \frac{\pi}{8068}$.

Задача 3. Найдите кратчайшее расстояние между поверхностью $4z = x^2 + y^2$ и плоскостью $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Библиотека БГУИР

Решение. Заметим, что параболоид и данная плоскость не имеют ни одной общей точки, так как множество решений системы уравнений $\begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ 2x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$ пусто.

$$2z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow 2x - y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 3 = 0 \text{ или } (x+2)^2 + (y-1)^2 = -1.$$

Поэтому для поиска кратчайшего расстояния надо провести касательную плоскость к параболоиду, параллельную данной плоскости и найти расстояние между ними:

$$z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2, \quad z'_x = \frac{1}{2}x, \quad z'_y = \frac{1}{2}y.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания. Тогда уравнение касательной плоскости

$$\frac{1}{2}x_0(x - x_0) + \frac{1}{2}y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

ее нормальный вектор $\bar{n}_1 = \left(\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}y_0, -1\right)$.

Вектор нормали заданной плоскости $\bar{n}_2 = (2; -1; 2)$. Так как $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, то $\frac{\frac{1}{2}x_0}{2} = \frac{\frac{1}{2}y_0}{-1} = \frac{-1}{2}$. Откуда $x_0 = -2, \ y_0 = 1, \ z_0 = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}$.

Итак, $M_0 = \left(-2; 1; \frac{5}{4}\right)$. Искомое расстояние есть расстояние от точки M_0 до заданной плоскости, т. е. $d = \dfrac{\left|2 \cdot (-2) - 1 + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3\right|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{\left|-2 + \frac{5}{2}\right|}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 4. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \dfrac{e^{\int_1^{n+1} \ln[x]dx}}{n^n}$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Решение. Так как

$$\int_1^{n+1} \ln[x]dx = \int_1^2 \ln[x]dx + \int_2^3 \ln[x]dx + \ldots + \int_n^{n+1} \ln[x]dx$$

и

$$\int_k^{k+1} \ln[x]dx = \int_k^{k+1} \ln k\, dx = \ln k, \text{ то } e^{\int_1^{n+1} \ln[x]dx} = e^{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n} = e^{\ln(n!)} = n!$$

Поэтому $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Тогда искомый радиус сходимости равен

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ответ: $R = e$.

Задача 5. Вычислите определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & h & -1 & \dots & 0 \\ x^2 & hx & h & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \dots & h \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавим к элементам второго столбца соответствующие элементы первого. Затем, вынося общий множитель элементов второго столбца $(x+h)$ за знак определителя и раскладывая определитель по элементам первой строки, получаем $\Delta_n = (x+h)\Delta_{n-1}$. Тогда

$$\Delta_n = (x+h)^n. \tag{8}$$

Равенство (8) докажем методом математической индукции:

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & h \end{vmatrix} = x + h$.

2. Пусть $\Delta_k = (k+h)^k$. Тогда

$\Delta_{k+1} = (k+h)\Delta_k = (x+h)(x+h)^k = (x+h)^{k+1}$.

Итак, доказано, что $\Delta_n = (x+h)^n$.

Ответ: $\Delta_n = (x+h)^n$.

Олимпиада 2017 года

1 курс

Задача 1. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Обозначим определитель, стоящий в левой части уравнения, через Δ_x. Δ_x представляет собой многочлен степени $n-1$. Известно, что многочлен степени $n-1$ имеет не более $n-1$ различных корней. Полагая, что $x = 1$, получаем $\Delta(1) = 0$, поскольку первая и вторая строки определителя одинаковые.

Библиотека БГУИР

Итак, $x_1 = 1$. Аналогично находим корни $x_2 = 2, x_3 = 3, \ldots, x_{n-1} = n-1$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \ldots, x_{n-1} = n-1$.

Задача 2. Известно, что предел матрицы равен матрице из пределов ее элементов. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(T\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right)^k, \text{ где } T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \ \varphi \in \boldsymbol{R}.$$

Решение. Пусть $\varphi = 0$. Тогда $T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. $T^k(0) = E$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{nE}{n} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi \neq 0$. Докажем методом математической индукции, что

$T^k(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & \sin k\varphi \\ -\sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}$. При $k = 1$ тождество истинно.

Пусть тождество истинно при $k = l$. Докажем, что равенство выполняется при $k = l + 1$:

$$T^{l+1}(x) = T^l(x) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos l\varphi & \sin l\varphi \\ -\sin l\varphi & \cos l\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos l\varphi \cos\varphi - \sin l\varphi \sin\varphi & \cos l\varphi \sin\varphi + \sin l\varphi \cos\varphi \\ -\sin l\varphi \cos\varphi - \cos l\varphi \sin\varphi & -\sin l\varphi \sin\varphi + \cos l\varphi \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(l+1)\varphi & \sin(l+1)\varphi \\ -\sin(l+1)\varphi & \cos(l+1)\varphi \end{pmatrix}.$$

Итак, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k\left(\frac{\varphi}{n}\right) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\varphi\right) & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\varphi}{n}\right) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} -\sin\left(\frac{k}{n}\varphi\right) & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\varphi}{n}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos\varphi x dx & \int_0^1 \sin\varphi x dx \\ -\int_0^1 \sin\varphi x dx & \int_0^1 \cos\varphi x dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} & \dfrac{1-\cos\varphi}{\varphi} \\ \dfrac{\cos\varphi - 1}{\varphi} & \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} \end{pmatrix}, \text{ так как}$$

$$\int_0^1 \cos\varphi x dx = \frac{1}{\varphi} \sin\varphi x \Big|_0^1 = \frac{1}{\varphi} \sin\varphi,$$

$$\int_0^1 \sin\varphi x dx = -\frac{1}{\varphi} \cos\varphi x \Big|_0^1 = -\frac{1}{\varphi}(\cos\varphi - 1) = \frac{1-\cos\varphi}{\varphi}.$$

Библиотека БГУИР

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $\varphi = 0$, $\dfrac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} \sin\varphi & 1-\cos\varphi \\ \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \end{pmatrix}$ при $\varphi \neq 0$.

Задача 3. Отрезок $[AB]$ длиной 3 скользит своими концами по координатным осям: точка A скользит по оси Oy, а точка B скользит по оси Ox. Какую линию описывает точка C, находящаяся на отрезке AB на расстоянии 1 от конца A?

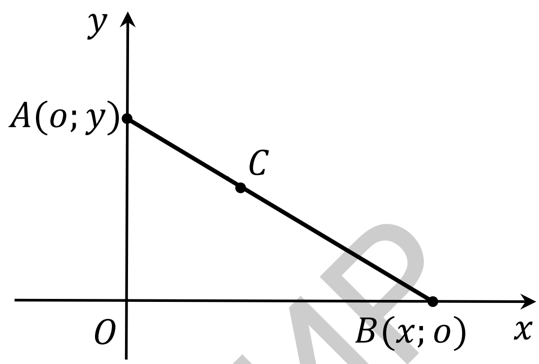

Рис. 15

Решение. Пусть точки A и B имеют координаты $A(o;\, y)$ и $B(x;\, o)$, точка C имеет координаты $C(x_c;\, y_c)$ (рис. 15). Точка C делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda = \dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$x_c = \frac{x_A + \lambda\, x_B}{1+\lambda} = \frac{o + \frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}} = \frac{x}{3};\quad y_c = \frac{y_A + \lambda\, y_B}{1+\lambda} = \frac{y+o}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2y}{3}.$$

По условию $[AB] = 3$, поэтому $|AB|^2 = x^2 + y^2 = 9$. Поскольку $x = 3x_c$, $y = \dfrac{3}{2}y_c$, получим $9x_c^2 + \dfrac{9}{4}y_c^2 = 9$. $x_c^2 + \dfrac{y_c^2}{4} = 1$. Итак, точка C движется по эллипсу.

Ответ: точка C описывает эллипс $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Задача 4. Вычислите сумму интегралов $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx + \int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\, dx$.

Решение

$$\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\, dx = \begin{bmatrix} \ln x = t^2 \\ x = e^{t^2} \\ dx = e^{t^2}\cdot 2t\,dt \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 t\cdot e^{t^2}\cdot 2t\,dt = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{t^2}\cdot 2t\,dt & v = e^{t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= t\,e^{t^2}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{t^2}dt = e - \int\limits_0^1 e^{t^2}dt = e - \int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$$

Тогда $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx + \int\limits_1^y \sqrt{\ln x}\,dx = e$.

Ответ: e.

Библиотека БГУИР

Задача 5. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема на интервале $(0;1)$. Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $8f(x^{2016})-(f(x^{2017}))^2 \ge 16$. Докажите, что на интервале $(0;1)$ существует точка c – такая, что $f'(c)=0$.

Решение. При $x=0$ неравенство $8f(x^{2016})-(f(x^{2017}))^2 \ge 16$ примет вид

$$8f(0)-f^2(0)\ge 16 \Leftrightarrow (f(0)-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow f(0)=4.$$

Аналогично при $x=1$ неравенство $8f(x^{2016})-(f(x^{2017}))^2 \ge 16$ примет вид $8f(1)-f^2(1)\ge 16 \Leftrightarrow (f(1)-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow f(1)=4$.

Итак, на отрезке $[0;1]$ для функции $f(x)$ выполнены условия теоремы Ролля. Следовательно, в интервале $(0;1)$ найдется точка c – такая, что $f'(c)=0$.

Ответ: доказано.

Олимпиада 2017 года

2–4 курсы

Задача 1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\,dx = \begin{bmatrix} \ln x = -t \\ x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t}dt \end{bmatrix} = -\int\limits_{+\infty}^{0} \operatorname{sgn}(\sin(-t))\,e^{-t}dt =$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{sgn}(\sin t)\,e^{-t}dt = -\left(\int\limits_0^{\pi} e^{-t}dt - \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-t}dt + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} e^{-t}dt - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} e^{-t}dt + \ldots\right) =$$

$$= -\left(-e^{t}\Big|_0^{\pi} + e^{-t}\Big|_{\pi}^{2\pi} - e^{-t}\Big|_{2\pi}^{3\pi} + e^{-t}\Big|_{3\pi}^{4\pi} - \ldots\right) = -(e^{-\pi}+1+e^{-2\pi}-e^{-\pi}-e^{-3\pi}+e^{-2\pi}+$$

$$+e^{-4\pi}-e^{-3\pi}+\ldots) = -(1-2e^{-\pi}+2e^{-2\pi}-2e^{-3\pi}+\ldots) = -1+2(e^{-\pi}-e^{-2\pi}+e^{-3\pi}-\ldots) =$$

$$= -1+2\cdot\frac{e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = -1+\frac{2}{e^{\pi}+1} = \frac{1-e^{\pi}}{1+e^{\pi}}.$$

Ответ: $\dfrac{1-e^{\pi}}{1+e^{\pi}}$.

Задача 2. Найдите $f(x)$, если $e^{\int\limits_0^x f(t)\,dt} = f(x)$.

Решение. Заметим, что $f(0)=1$.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \ln(f(x)), \quad \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = (\ln(f(x)))', \quad f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$f^2(x) = f'(x), \quad \frac{df}{dx} = f^2, \quad \frac{df}{f^2} = dx, \quad -\frac{1}{f} = x + c.$$

Тогда $f(x) = \dfrac{1}{-c-x}$. Полагая $x = 0$, получаем, что $c = -1$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Задача 3. Вычислите интеграл

$$\int_{-3}^{1} dx \int_{x+2|x|}^{3} \sin\frac{x}{y}\,dy.$$

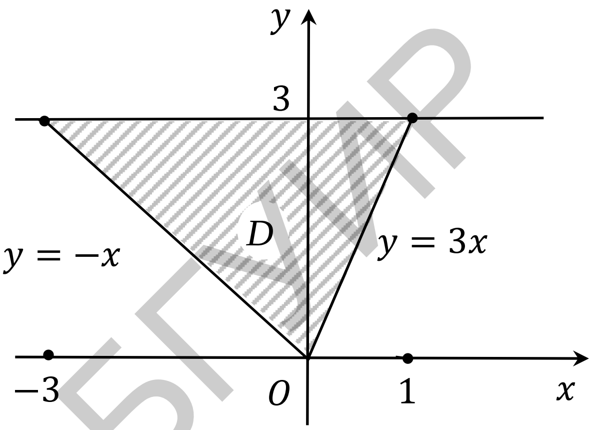

Рис. 16

Решение. Искомый интеграл равен двойному интегралу по области D, которую ограничивают следующие линии: $x = -3,\ x = 1,\ y = x + 2|x|,\ y = 3$ (рис. 16).

$y = 3x,\ x \ge 0.$

$y = -x,\ x < 0.$

$$\int_{-3}^{1} dx \int_{x+2|x|}^{3} \sin\frac{x}{y}\,dy = \int_0^3 dy \int_{-y}^{\frac{y}{3}} \sin\frac{x}{y}\,dx = \int_0^3 y\,dy \int_{-y}^{\frac{y}{3}} \sin\frac{x}{y}\,d\left(\frac{x}{y}\right) = -\int_0^3 y\,dy \left(\cos\frac{x}{y}\Bigg|_{-y}^{\frac{y}{3}} \right) =$$

$$= -\int_0^3 y\left(\cos\frac{1}{3} - \cos 1\right) dy = \left(\cos 1 - \cos\frac{1}{3}\right) \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}\left(\cos 1 - \cos\frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $\dfrac{9}{2}\left(\cos 1 - \cos\dfrac{1}{3}\right)$

Задача 4. Найдите $\sqrt[1+2i]{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$.

Решение

$$\sqrt[1+2i]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = e^{\frac{1}{1+2i}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = e^{\frac{1}{1+2i}\left(\ln 1 + i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right)},\ k \in \mathbf{Z} =$$

$$= e^{\frac{1-2i}{5}\cdot i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)} = e^{\frac{2}{5}\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)} = e^{\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi k}{5}} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)}.$$

Ответ: $e^{\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi k}{5}} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)},\ k \in \mathbf{Z}.$

Задача 5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, где $a_n = \left(\int_0^1 e^{nx^2}\,dx\right)^{-1}$.

Библиотека БГУИР

Решение. Рассмотрим $\int\limits_0^1 e^{nx^2}dx = \int\limits_0^1 \left(1 + nx^2 + \frac{n^2x^4}{2!} + \frac{n^3x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$

$$= \left(x + \frac{nx^3}{3} + \frac{n^2x^5}{5\cdot 2!} + \frac{n^3x^7}{7\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{n}{3} + \frac{n^2}{5\cdot 2!} + \frac{n^3}{7\cdot 3!} + \ldots .$$

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{3} + \frac{n^2}{10} + \ldots} < \frac{1}{\frac{n^2}{10}} = \frac{10}{n^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n^2}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится по признаку сравнения.

Ответ: ряд сходится.

Олимпиада 2018 года

1 курс

Задача 1. Вычислите A^{2018}, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$A^{2018} = A^{2016}\cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Библиотека БГУИР

Задача 2. Найдите расстояние между графиками функций $y = e^{2018x}$ и $y = \frac{1}{2018}\ln x$.

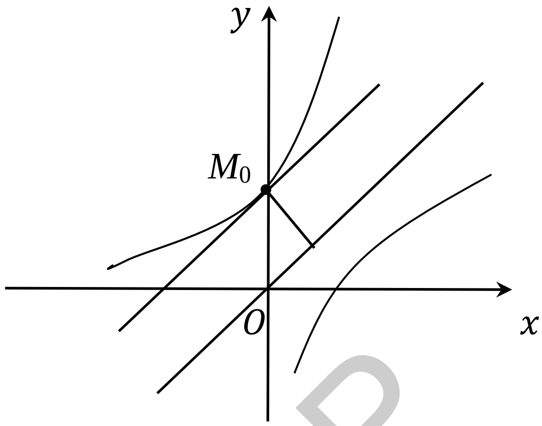

Рис. 17

Решение. Функции взаимно обратные, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$. Значит, расстояние между графиками этих функций равно удвоенному расстоянию между графиком одной из функций и прямой $y = x$ (рис. 17).

Рассмотрим функцию $y = e^{2018x}$. Расстояние от графика этой функции до прямой $y = x$ – это расстояние от касательной, параллельной прямой $y = x$, до самой прямой $y = x$.

$$y' = e^{2018x} \cdot 2018\Big|_{x=x_0} = 2018\, e^{2018x_0}.$$

$$y'(x_0) = 1 \Rightarrow 2018\, e^{2018x_0} = 1.$$

$$e^{2018x_0} = \frac{1}{2018}.$$

$$2018\,x_0 = -\ln 2018.$$

$$y_0 = y(x_0) = e^{2018\left(-\frac{1}{2018}\ln 2018\right)} = e^{-\ln 2018} = \frac{1}{2018}.$$

$$M_0\left(-\frac{1}{2018}\ln 2018;\ \frac{1}{2018}\right).$$

$$d = 2\,\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Прямая $x - y = 0 \Rightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = 0.$

$$d = 2 \cdot \frac{\left|\left(-\frac{1}{2018}\ln 2018 - \frac{1}{2018}\right)\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2018}(\ln 2018 + 1).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2018}(\ln 2018 + 1).$

Задача 3. Найдите наибольшее значение функции $F(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1 - t^2)\,dt$, где $x \ge 0$.

Решение. $F'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 1$ (т. к. $x \ge 0$).

Библиотека БГУИР

$$F''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)(1-x^2)-2x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)\Big|_{x=1}=-2e^{-\frac{1}{2}}<0\Rightarrow x=1-$$

точка локального максимума.

$$F(1)=\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)\,dt=\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\int_0^1 t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

$$\int_0^1 t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\begin{bmatrix} u=t, \\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt, \\ du=dt, \\ v=-e^{-\frac{t^2}{2}} \end{bmatrix}=-t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^1+\int_0^1 t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-e^{-\frac{1}{2}}+\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Тогда $F(1)=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Задача 4. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2018}\{x\}\cdot[x]dx,$ где $[x]$ – целая часть числа $x\in \boldsymbol{R}$, $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Решение. $\int\limits_0^{2018}\{x\}\cdot[x]dx=\int\limits_0^{2018}(x-[x])\cdot[x]\,dx=$[аддитивность]$=$

$$=\int_0^1 x\cdot 0dx+\int_1^2(x-1)\,dx+\int_2^3(x-2)2dx+\int_3^4(x-3)3dx+\ldots+\int_{2017}^{2018}(x-2017)\cdot 2017\,dx=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2+2\frac{(x-2)^2}{2}\Bigg|_2^3+3\frac{(x-3)^2}{2}\Bigg|_3^4+\ldots+2017\,\frac{(x-2017)^2}{2}\Bigg|_{2017}^{2018}=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\ldots+2017\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+2017)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2017\cdot 2018}{2}=\frac{2017\cdot 2018}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{2017\cdot 2018}{4}$.

Задача 5. Решить уравнение $|2z-1|=4i\,z$.

Решение. $z=x+iy,\ \ x,y-$ действительные числа.

$0\le,|2x+2iy-1|=4ix-4y\Rightarrow x=0,$ так как $|2x+2iy-1|$ – действительная величина.

Имеем $|2iy-1|=-4y\ge 0,\ \Rightarrow\ y\le 0$.

Библиотека БГУИР

$\sqrt{1+4y^2}=-4y$. $1+4y^2=16y^2$. $12y^2=1$. $y^2=\frac{1}{12}$. $y=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Так как $y\le 0$, то $y=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Тогда $z=-\frac{i}{2\sqrt{3}}$.

Ответ: $-\frac{i}{2\sqrt{3}}$.

Задача 6. Числовая последовательность (x_n), $n\ge 1$ задана следующим образом: $x_1=0$, $x_{n+1}=\frac{\sqrt{x_n}+1}{2}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)$.

Решение. $x_2=\frac{1}{2}$; $x_3=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}$.

Придадим интерпретацию $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$.

Тогда $x_3=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}}{2}=\cos^2\frac{\pi}{8}$,

$x_4=\frac{\cos\frac{\pi}{8}+1}{2}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{16}}{2}=\cos^2\frac{\pi}{16}$.

Методом математической индукции можно доказать, что $x_n=\cos^2\frac{\pi}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}4^n(1-x_n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-\cos^2\frac{\pi}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}4^n\cdot\sin^2\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}4^n\frac{\pi^2}{4^n}=\pi^2.$$

Ответ: π^2.

Олимпиада 2018 года

2–4 курсы

Задача 1. Дан эллипсоид $x^2+2y^2+3z^2=1$. Найдите уравнение плоскости, которая проходит через точку $O(0,0,0)$ и пересекает этот эллипсоид по окружности.

Библиотека БГУИР

Решение. $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1.$

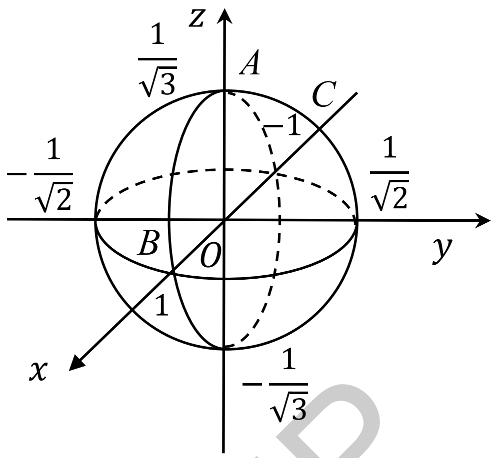

Рис. 18

Пересечем эллипсоид плоскостью $x=0$. В сечении получим эллипс $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$ (рис. 18). Пересечем эллипсоид плоскостью $y=0$, получим эллипс $x^2+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$.

На рисунке видим $A\left(0;\,0;\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $B(1;\,0;\,0)$, $C(-1;\,0;\,0)$.

Если плоскость Oyz поворачивать так, чтобы точка A скользила вдоль дуги AB или дуги AC эллипса $x^2+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$, то эллипс $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$ будет трансформироваться в эллипс $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, где $\dfrac{1}{3}\le b^2\le 1$, и в какой-то момент получим $b^2=\dfrac{1}{2}$, т. е. это будет окружность $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{2}}=1$, $y^2+z^2=\dfrac{1}{2}$. Пусть при таком преобразовании точка A перейдет в точку $D(x,o,z)$. Определим координаты точки D (рис. 19). Запишем уравнение эллипса $x^2+\dfrac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$

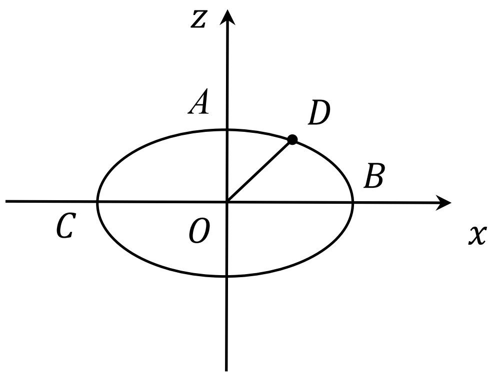

Рис. 19

в параметрическом виде: $\begin{cases} x=\cos t, \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t. \end{cases}$

Расстояние от точки D до начала координат должно быть $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому $\cos^2 t+\dfrac{1}{3}\sin^2 t=\dfrac{1}{2}$,

$1-\dfrac{2}{3}\sin^2 t=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}\sin^2 t=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}\sin^2 t=\dfrac{1}{2}$, $\sin^2 t=\dfrac{3}{4}$, $\sin t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $t=\pm\dfrac{\pi}{3}$.

Библиотека БГУИР

Итак, имеем две точки: $D_1\left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$ и $D_2\left(\frac{1}{2};\ 0;\ -\frac{1}{2}\right)$. При этом плоскость, пересекающая эллипсоид, проходит через ось Oy и имеет уравнение $z = x$ либо $z = -x$. Подставим $z = \pm x$ в уравнение эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ и получим уравнение проекции на плоскость Oxy линии пересечения эллипсоида и плоскости $z = x\ (z = -x)$:

$$4x^2 + 2y^2 = 1.$$

Это же уравнение можно получить, подставляя $z = \pm x$ в уравнение сферы:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1.$$

Поскольку плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает эту сферу по окружности, то делаем вывод, что в сечении эллипсоида плоскостями $z = \pm x$ также получаются окружности.

Ответ: $z = x$ и $z = -x$.

Задача 2. Найдите функцию $u(x, y)$, если известно, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 4\cos x \sin y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\sin x \sin y + 6y,\ u(0, 0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 1.$$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 4\cos x \sin y \Rightarrow u = \int (1 + 4\cos x \sin y)\,dx + \varphi(y) = x + 4\sin x \sin y + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\sin x \cos y + \varphi'(y).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\sin x \sin y + \varphi''(y).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\sin x \sin y + 6y \Rightarrow \varphi''(y) = 6y.$$

$$\varphi'(y) = 3y^2 + C_1;\ \ \varphi(y) = y^3 + C_1 y + C_2.$$

Итак, $u(x, y) = x + 4\sin x \sin y + y^3 + C_1 y + C_2$.

$$u(0,0) = C_2 = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left.(4\sin x \cos y + 3y^2 + C_1)\right|_{(0,0)} = C_1 = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 + y.$$

$$u(x, y) = x + 4\sin x \sin y + y^3 + y.$$

Ответ: $x + 4\sin x \sin y + y^3 + y$.

Задача 3. Пусть $c(\alpha)$ – коэффициент при x^{2018} в разложении функции $(1+x)^{\alpha}$ по формуле Маклорена. Вычислите

$$\int_0^1 c(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\cdots+\frac{1}{y+2018}\right)dy.$$

Решение. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$. $n=2018$,

$c(\alpha)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-2017)}{2018!}$. $\alpha=-y-1$.

$$c(-y-1)=\frac{(-y-1)(-y-2)\ldots(-y-2018)}{2018!}=(-1)^{2018}\frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+2018)}{2018!}=$$

$$=\frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+2018)}{2018!}.$$

Тогда $\int\limits_0^1 c(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\ldots+\frac{1}{y+2018}\right)dy=$

$$=\frac{1}{2018!}\int\limits_0^1 (y+1)(y+2)\ldots(y+2018)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\ldots+\frac{1}{y+2018}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2018!}\int\limits_0^1 ((y+2)\ldots(y+2018))+(y+1)(y+3)\ldots(y+2018)+\ldots+$$

$$+(y+1)(y+2)\ldots(y+2017))dy=\frac{1}{2018!}\int\limits_0^1 ((y+1)(y+2)\ldots(y+2018))'dy=$$

$$=\frac{1}{2018!}(y+1)(y+2)\ldots(y+2018)\Big|_0^1=\frac{1}{2018!}(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2019-1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2018)=$$

$$=\frac{1}{2018!}(2019!-2018!)=\frac{1}{2018!}\cdot 2018!(2019-1)=2018.$$

Ответ: 2018.

Задача 4. Вычислите бесконечное произведение

$$(2)^{\frac{1}{2}}\cdot(4)^{\frac{1}{4}}\cdot(8)^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot(2^n)^{\frac{1}{2^n}}\cdot\ldots .$$

Решение. $(2)^{\frac{1}{2}}\cdot(4)^{\frac{1}{4}}\cdot(8)^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots=\prod\limits_{n=1}^{\infty}2^{\frac{n}{2^n}}$.

Библиотека БГУИР

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2^n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln 2^{\frac{n}{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \ln 2 = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ и найдем его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x\,f(x).$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n\,t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x n\,t^{n-1} dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \text{ для } |x| < 1.$$

$$f(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ для $|x| < 1$.

$$x := \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Тогда $\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2^n}}\right) = 2\ln 2 = \ln 4$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2^n}} = e^{\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{2^n}}\right)} = e^{\ln 4} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 5. Функциональная последовательность $(f_n(x))$ задана рекуррентным соотношением $f_1(x) = x,\ f_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{f_n(x)} + 1}{2},\ n \geq 1.$ Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n \cdot \left(1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx\right)$.

Решение. Сделаем замену $x = \cos^2 t$. Тогда $f_1(x) = \cos^2 t$,

Библиотека БГУИР

$$f_2(x)=\frac{\cos t+1}{2}=\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2}=\cos^2\frac{t}{2},$$

$$f_3(x)=\frac{\cos\frac{t}{2}+1}{2}=\frac{2\cos^2\frac{t}{4}}{2}=\cos^2\frac{t}{4},\ \ldots,\ f_n(x)=\cos^2\frac{t}{2^{n-1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}4^n\cdot\left(1-\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)=\lim_{n\to\infty}4^n\cdot\left(\int_0^1 dx-\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)=\lim_{n\to\infty}4^n\int_0^1(1-f_n(x))dx=$$

$$=\begin{bmatrix}x=\cos^2 t,\\ dx=2\cos t\cdot(-\sin t)dt=-\sin 2t\end{bmatrix}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-\cos^2\frac{t}{2^{n-1}}\right)\right)\sin 2t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}4^n\sin^2\frac{t}{2^{n-1}}\sin 2t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}4^n\cdot\frac{t^2}{4^{n-1}}\sin 2t\,dt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2t\,dt=\begin{bmatrix}u=t^2,\\ dv=\sin 2t\,dt,\\ du=2t\,dt,\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2t\end{bmatrix}=4\left(-\frac{1}{2}t^2\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2t\,dt\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}u=t,\\ dv=\cos 2t\,dt,\\ du=dt,\\ v=\frac{1}{2}\sin 2t\end{bmatrix}=4\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt\right)=4\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=4\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2-2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi^2-2}{4}$.

Библиотека БГУИР

Список использованных источников

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 592 с.

2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды : учеб. пособие / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528 с.

3. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие / Б. П. Демидович. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 528 с.

4. Шахматов, В. М. Сборник олимпиадных задач по высшей математике : учеб. пособие / В. М. Шахматов, А. Л. Лисок, Т. В. Тарбокова. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 144 с.

5. Аракчеев, С. А. Избранные задачи математических олимпиад для втузов : учеб. пособие / С. А. Аракчеев. – Новосибирск : Изд-во СГУПСа, 2011. – 128 с.

6. Бабичева, И. В. Подготовка к олимпиадам. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие / И. В. Бабичева. – СПб. : Лань, 2017. – 152 с.

7. Open Mathematical Olympiad of the Belarusian-Russian University [Электронный ресурс]. – 2018. – Режим доступа : htpp: // www.mathopen.bru.by.

Библиотека БГУИР

Содержание

Библиотека БГУИР